arXiv:2602.08514v1 [math.DS] 9 Feb 2026

关于 $\mathbb{T} \times SO(3)$ 中余循环的一则札记

Nikolaos Karaliolios

2026年2月10日

摘要

本文简要研究了 C^∞-光滑的 $\mathbb{T} \times SO(3)$ 中度为 0 且不同伦于常值映射的余循环。本文延续作者博士论文中这一课题的研究，并证明在相关的满测度算术条件下，这类余循环可以共轭到一个简单模型。此外，在相同的算术条件下，通过 2-周期共轭，可以将该余循环共轭到任意接近常值上循环的形式。

1 引言

为使本文保持简短并避免重复，我们将大量引用自己的博士论文，[Kar16]，但为方便读者，我们引用可在此处获取的 arXiv 版本。对于早于我们博士论文的相关研究，我们主要通过引用 [Kar16]，来提及，因为本文是该论文的附录，且无意投稿至期刊。若有引用缺漏，是因为作者无法全面访问期刊。

$SO(3)$ 的同伦群自然同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。非平凡同伦类中一条路径的模型是绕 z 轴旋转角度 $[0, 2\pi]$，

$$R_{2\pi x} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi x) & -\sin(2\pi x) & 0 \\ \sin(2\pi x) & \cos(2\pi x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in [0,1] \tag{1}$$

此模型对应于 $E_{1/2}(\cdot) \colon [0,1] \to SU(2)$，采用 [Kar16]的记号（见第 92–93 页，“余循环于 $SU(2)$ 和 $SO(3)$”）。这条 $SU(2)$ 中的路径从恒等映射出发，并在时间 1 到达 $-$恒等映射，因此它不是 $SU(2)$ 中的闭环。然而，由于 $SO(3) \equiv SU(2)/\{\pm\text{恒等映射}\}$，$E_{1/2}(\cdot) \colon [0,1] \to SU(2)$ 映射为 $SO(3)$ 中一个与恒等映射不同伦的闭环。

余循环的度与其导数的线性增长有关，参见定义 6.2 以及定理 6.18，关于它与 [Kar16] 中余循环理论之间的联系及相关参考文献 $SL(2, \mathbb{C})$。[1] 在任意无理数

[1]很容易看出，我们的计算可以推广到高维，而且加速度的量子化（如 [AJS14] 中所证明的）与度的量子化（如 [Kar16]中所证明的）相同。

旋转上，由式（1）定义的纤维方向动力学具有线性增长，因此度不为零。要发现不同伦于恒等映射的零度余循环并不容易，但可以给出一个明确的例子：

$$(\alpha, AR_{2\pi.}) \tag{2}$$

where α 是极小的，且 A 与.....反交换 $R_{2\pi.}$。

下面的算术条件是 RDC 条件的一个变体，参见中的定义 2.13 [Kar16]。令 $DC(\gamma,\tau)$ 为满足以下条件的 $\alpha \in \mathbb{T}$

$$|k\alpha - 1/2|_{\mathbb{Z}} \geq \frac{\gamma^{-1}}{|k|^{\tau}}. \tag{3}$$

简单计算可知，若 $\alpha \in DC(\gamma,\tau)$，则 $2\alpha \in DC(\gamma/2,\tau)$，其中$DC(\gamma,\tau)$ 定义为满足以下条件的 $\alpha \in \mathbb{T}$

$$|k\alpha|_{\mathbb{Z}} \geq \frac{\gamma^{-1}}{|k|^{\tau}}. \tag{4}$$

另外，令 G 为高斯映射 $\alpha \mapsto \{\alpha^{-1}\}$，其中 $\{\cdot\}$ 表示小数部分。于是，我们称 $RDC(\gamma,\tau)$ 为满足以下条件的 $\alpha \in \mathbb{T}\setminus\mathbb{Q}$集合：对无穷多个 n，$G^n(\alpha) \in DC(\gamma,\tau)$。基于与 RDC 相同的理由，这一条件在哈尔测度意义下几乎处处成立。我们还注意到，$\alpha \in RDC(\gamma,\tau)$ 蕴含 $2\alpha_n \in DC(\gamma/2,\tau)$ 对无穷多个情形成立，其中连分数是与 α (模 1) 相关的，而不是与 2α (模 1)相关的。

在§2中，我们将概述以下定理的证明。我们将使用§2.1.2 以及§6（尤其是 §6.3）中的记号，见 [Kar16]。

定理 1.1。设$(\alpha, A(\cdot))$ 是 $\mathbb{T}\times SO(3)$ 上的一个 C^∞-光滑余循环，其度为0，且不同伦于恒等映射Id。此外，假设 $\alpha \in RDC$。那么，$(\alpha, A(\cdot))$ 可通过2-周期共轭实现 C^∞ 近可约性。

我们注意到，证明中自然会出现 2-周期共轭。直接将重整化工具应用于该余循环的二次迭代，可以避免引入周期更长的共轭，因为所有显而易见的近可约性障碍（包括同伦和度）都消失了。已知的过程表明，对于这样的 C^∞ 光滑余循环，若 $2\alpha \in RDC$，则该余循环是近可约的。

在 [HPZ24], 中，作者证明了实解析范畴中紧群上的所有无理旋转的余循环具有半局部近可约性（记作 C^ω）；参见该文献的定理 3.1。假设零度余循环的重整化无论同伦类型如何，均收敛于常值作用，并且按照本文第 C^ω 2 节所述对常值作用进行 归一化，则定理 RDC1.1 的 算术条件 C^ω 可通过将半局部近可约性定理与标准论证结合，推广到光滑余循环。

在 [Kar20] 中提出的技术似乎适用于 C^∞ 不受任何算术条件限制的范畴，并适用于满足以下条件的任意余循环：

一种普遍的接近常值条件，例如适用坎贝尔–贝克曼–豪斯多夫公式。我们将在即将发表的文章 [Kar20] 中更系统地研究 [Kar26]中提出的技术。我们预计将[Kar20] 中得到的旋转向量定义扩展到开集中的所有紧群上的拟周期余循环；该开集包含常值上循环，并探讨在共轭意义下同伦于恒等映射的零度余循环的分类。

定理 1.1 的证明将用到下面的命题。该命题并非必要，但它能为重整化代表元给出一种标准形，同时避免对算术性质施加过多限制。

命题 1.2。 设$(\alpha, A(\cdot))$ 是 $\mathbb{T} \times SO(3)$中的一个 C^∞-光滑余循环，度为0⁀，且不与恒等映射同伦。此外，假设 $\alpha \in RDC$。那么，$(\alpha, A(\cdot))$ 具有如下形式的重整化代表元 C^∞

$$(\alpha_n, AE_{1/2}(\cdot)\exp(\{0, z_n\}_{su(2)})) \tag{5}$$

其中 $z_n \in \mathbb{C}$ 可以任意小，且 A:

1. *anti-commutes with* $E_{1/2}(\cdot)$*:* $Ad(A).E_{1/2}(\cdot) = E_{1/2}(-\cdot)$*, and*
2. 通过复共轭作用于 z_n : $Ad(A).\{0, z_n\}_{su(2)} = \{0, \bar{z}_n\}_{su(2)}$

这表明，在频率满足全测度条件时，度为 0 且不与恒等映射同伦的余循环构成一个一参数族，这与紧群中正则余循环的刚性类似，参见§8 [Kar16]。我们将式（5）中的表达式称为标准形。

满足该定理假设的余循环的重整化代表的二次迭代，是一个具有闭式且形式极为简单的余循环。证明通过直接计算完成。

推论 1.3. 方程的标准形的二次迭代(5)具有如下形式

$$(2\alpha_n, E_{1/2}(\alpha)\exp(\{0, \bar{z}_n\}_{su(2)}).\exp(\{0, e^{2i\pi\cdot}z_n\}_{su(2)})) \tag{6}$$

其中 z_n 可以任意小。

我们提醒，为证明定理 1.1，接近常值即已足够，并不需要这一闭式表达式。接近常值直接源于重整化的收敛至常值作用、归一化算子的均匀性，以及所研究的是二次迭代这一事实，而无需更长的迭代。

这种形式接近于 §4 中使用的 KAM 标准形 [Kar20]。区别在于项 $\exp(\{0, \bar{z}_n\}_{su(2)})$ 不是对角的，因此，参考文献中的约化方案只能通过一次显式计算，将余循环约化为傅里叶谱位于 $[-2, 2]$ 且规模为 $O(|z_n|^2)$ 的扰动。若没有项 $\exp(\{0, \bar{z}_n\}_{su(2)})$，二次迭代实际上可以通过显式共轭 C^∞ 约化。无论如何，下面的推论显然成立。

推论 1.4. 这样的余循环存在无穷多个重整化代表元，其二次迭代可通过一列 1-周期共轭几乎约化。

假设命题 1.2成立，现在我们可以证明定理 1.1。

定理 *1.1* 的证明。 根据命题 1.2，满足该命题假设的余循环具有标准形下的重整化代表元。假设经过一步重整化即可实现这一点，一般情形可直接推出。于是，与余循环本身相关的作用，即

$$\Phi = \begin{pmatrix} (1, \mathrm{Id}) \\ (\alpha, A(\cdot)) \end{pmatrix} \tag{7}$$

在 $SL(2,\ \mathbb{Z})$ 矩阵作用下变换为

$$\mathrm{CF}(\alpha) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lfloor \alpha^{-1} \rfloor & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

作用

$$\mathcal{R}_1 \Phi = \mathrm{CF}(\alpha)_* \Phi = \begin{pmatrix} (\alpha, A(\cdot)) \\ (1 - a\alpha, A_{-a}(\cdot)) \end{pmatrix} \tag{9}$$

为简便起见，我们省略了尺度变换。设 $B : \mathbb{R} \to SO(3)$ 为将作用 $\mathcal{R}_1\Phi$ 归一化为标准形的共轭，记作 $\mathrm{NF}(\cdot)$:

$$\mathrm{Conj}_B \mathcal{R}_1 \Phi = \begin{pmatrix} (\alpha, \mathrm{Id}) \\ (1 - a\alpha, \mathrm{NF}(\cdot)) \end{pmatrix} \tag{10}$$

其中 $B(\cdot + \alpha).A(\cdot).B^*(\cdot) =$ 恒等映射，$\mathrm{NF}(\cdot)$ 是 α-周期的，并且通过简单计算可得

$$NF(\cdot) = B(\cdot + 1 - n\alpha)B^*(\cdot - n\alpha) = B(\cdot + 1)B^*(\cdot) \tag{11}$$

作为合理性检查，可以验证，由于 $A(\cdot)$ 的 1-周期性以及 $B(\cdot)$ 的归一化性质，这个最后的表达式是 α-周期的。

根据推论 1.4，该余循环

$$(2 - 2a\alpha, \mathrm{NF}_2(\cdot)) = (2 - 2a\alpha, \mathrm{NF}(\cdot + 1 - a\alpha)\mathrm{NF}(\cdot)) = (2 - 2a\alpha, \mathrm{NF}(\cdot + 1)\mathrm{NF}(\cdot)) \tag{12}$$

在 α-周期共轭下几乎可约。假设 $D_m(\cdot)$ 是满足以下条件的一个此类共轭

$$D_m(\cdot + 2 - 2a\alpha)\mathrm{NF}_2(\cdot)D_m^*(\cdot) = A_m \exp(U_m(\cdot)) \tag{13}$$

其中 $U_m(\cdot)$可以任意小。根据 $D_m(\cdot)$的 α-周期性，也有

$$D_m(\cdot + 2)\mathrm{NF}_2(\cdot)D_m^*(\cdot) = A_m \exp(U_m(\cdot)) \tag{14}$$

现在考虑作用

$$\mathrm{Conj}_{D_m.B}\mathcal{R}_1\Phi = \begin{pmatrix} (\alpha, \mathrm{Id}) \\ (1-a\alpha, D_m(\cdot+1)\mathrm{NF}(\cdot)D_m^*(\cdot)) \end{pmatrix} \tag{15}$$

对重整化第一步求逆，得到作用

$$\mathrm{CF}(\alpha)^*\mathrm{Conj}_{D_m.B}\mathcal{R}_1\Phi = \begin{pmatrix} (1, D_m(\cdot+1)\mathrm{NF}(\cdot)D_m^*(\cdot)) \\ (\alpha, \mathrm{Id}) \end{pmatrix} \tag{16}$$

转而考虑 2-周期作用，得到由以下元素生成的作用

$$\begin{pmatrix} (2, D_m(\cdot+2)\mathrm{NF}_2(\cdot)D_m^*(\cdot)) \\ (\alpha, \mathrm{Id}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2, A_m\exp(U_m(\cdot))) \\ (\alpha, \mathrm{Id}) \end{pmatrix} \tag{17}$$

这个作用可以经过归一化，变为任意接近常值的作用，从而证明该定理。

□

值得注意的是，如果将矩阵 $\mathrm{CF}(\alpha)$ 应用于由以下元素生成的作用

$$\begin{pmatrix} (1, \mathrm{Id}) \\ (2\alpha, A_2(\cdot)) \end{pmatrix} \tag{18}$$

这似乎是研究余循环二次迭代的一种自然思路，然后再通过正规化共轭 $B(\cdot)$进行共轭，便可得到作用

$$\begin{pmatrix} (2\alpha, \mathrm{Id}) \\ (1-2n\alpha, \mathrm{NF}(\cdot)) \end{pmatrix} \tag{19}$$

这相当令人惊讶。按照证明中的计算并对重整化求逆，只能得到二次迭代的 2-周期几乎可约性，这正是 [Kar16]中所得结果的特点。定理 1.1 的证明可应用于 [Kar16]中得到的所有结果，并带来同类改进：如果需要 m 次迭代才能消除由同伦导致的障碍，那么余循环几乎可约为常值上循环，或模m意义下的相关标准形。

致谢 作者谨向 Xuanji Hou、Yi Pan 和 Qi Zhou 致以诚挚谢意，感谢他们提醒作者关注这一主题。

命题证明 1.2

2.1 动力学模型

获得动力学模型所需的大量工作已在 §6 节中完成，见 [Kar16]。对于 0 度余循环，重整化一致收敛到常值作用，并且这些作用的常数由 [Kar16]中的引理 6.26 证明彼此可交换。为固定记号，令步骤 n处的常数为

$$\begin{pmatrix} (1, C_n) \\ (\alpha_n, A_n) \end{pmatrix} \tag{20}$$

这些常数不能位于同一个极大环面上。假设其中一个常数在 $SO(3)$ 中是对角的（这可以通过施加常值共轭得到），则另一个常数也为对角形式；再经过常值共轭，模型为 $C_n = \mathrm{diag}(-1, -1, 1)$，以及 $A_n = \mathrm{diag}(1, -1, -1)$。通过$R_{-2\pi\cdot/2}$ 共轭并利用反交换关系，可得到一个作为扰动的作用

$$\begin{pmatrix} (1, \mathrm{Id}) \\ (\alpha_n, R_{-2\pi\alpha_n/2} A_n R_{2\pi\cdot}) \end{pmatrix} \tag{21}$$

归一化得到余循环

$$(\alpha_n, R_{-2\pi\alpha_n/2} A_n R_{2\pi\cdot} \exp(U_n(\cdot))) \tag{22}$$

我们将固定这样一个余循环，并假设 $\alpha \in RDC$，在证明余下部分中省略下标 n 。为便于计算中的记号，我们将使用余循环的 $SU(2)$ 版本，省略下标后写作：

$$(\alpha, AE_{1/2}(\cdot + \alpha/2) \exp(U(\cdot))) \tag{23}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$E_r(\cdot) = \begin{pmatrix} e^{2i\pi\cdot} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi\cdot} \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$U(\cdot) = \{U_t(\cdot), U_z(\cdot)\}_{su(2)} \in C^\infty(\mathbb{T}, su(2)) \tag{26}$$

2.2 模型的局部理论

本节的主要工作已在 [Kri01], 中完成，但我们将引用§8 的 [Kar16]。假设 $U(\cdot)$ 足够小，其小量程度取决于算术 RDC 条件中的常数，并假设共轭$B(\cdot) = \{B_t(\cdot)\ B_z(\cdot)\}_{su(2)}$ 足够小，则局部约化方程为

$$B_t(x + \alpha) + B_t(x) = -U_t(x) \tag{27}$$

$$e^{-2i\pi x} B_z(x + \alpha) - \bar{B}_z(x) = -U_z(x) \tag{28}$$

参考文献中分析的方程，即 [Kar16] 的方程 (8.1、8.2)，与这里的方程不同之处在于，第一个方程中有一个加号，因此算术条件不同且不存在障碍；第二个方程中则有一个复共轭，但这并未造成显著影响。仿照 [Kar16] 中定理 8.1 的证明，可得到一个余循环，如命题1.2的结论所述，因为不存在对角方向上的障碍，所以对角常数可以吸收。

这就完成了命题1.2的证明。

2.3 关于 §8of [Kar16]

看来， [Kar16] 的推论8.2和定理8.3中对余维数的计算没有考虑对角常数的共轭作用对障碍 P的影响；正如定理所述，这应使余维数降低1。例如，$SU(2)$中一次上闭链的障碍，其标准形为（$\alpha, E_1(\cdot)$），在非对角方向上的形式为 $z_0 + z_1 e^{2i\pi\cdot}$，因此其实维数为4；定理8.4中给出的这一结论是错误的。通过 diag$(e^{-2i\pi\theta/2}, e^{2i\pi\theta/2})$的共轭，其中 $\theta = \arg_{2\pi} z_0$，可将障碍化为形式 $|z_0| + z_1' e^{2i\pi\cdot}$，其实维数为3。

参考文献

[AJS14] A. Avila， S. Jitomirskaya，以及 C. Sadel，《复一频率上闭链》，《欧洲数学会杂志》16（2014），1915–1935。[HPZ24] X. Hou， Y. Pan，以及 Q. Zhou，《解析一频率拟周期 so(3,r)-余循环的动力学分类》，Advances in Mathematics 457（2024），109943。http://dx.doi.org/https:// doi.org/10.1016/j.aim.2024.109943。可见于 https://www. sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870824004584。[Kar16] N. Karaliolios，《半单紧李群中拟周期余循环可约性的整体方面》，M ´em. Soc. Math. Fr. (N.S.)（2016）， 4+ii+200。MR 3524104。[Kar20] N. Karaliolios，《紧李群中拟周期余循环的纤维旋转向量与亚椭圆性》，《伦敦数学会通报》52（2020），224–236。arXiv 1903.01914。[Kar26] N. Karaliolios，《紧李群中拟周期余循环的纤维旋转向量》，进行中的工作，2026。[Kri01] R. Krikorian，《(2)上的可约拟周期余循环的整体稠密性》，《数学年刊》154（2001），269–326。