arXiv:2602.08595v1 [math.GT] 9 Feb 2026

任意域系数的负曲率轨形的贝蒂数

GUY KAPON，RAZ SLUTSKY

Abstract. 我们证明，有限体积负曲率轨形的贝蒂数至多随体积线性增长，且系数取自任意域。特别地，这给出了有限体积双曲轨形的贝蒂数关于 $\mathbb{F}_p$ 的线性上界。这将 Gromov 关于流形的定理推广到了负曲率轨形，并通过将 Samet 的定理从特征零加强到任意特征，回答了 Samet 提出的问题。关键的新成果是对球面商的同调给出了一个定量上界。

1. Introduction

设 X 是一个 Hadamard流形，即一个连通、单连通、完备且非正曲率的黎曼流形，并将曲率归一化为 $-1 \leq K \leq 0$；再设 Γ 是 Isom(X) 的一个离散子群。若 Γ 是无挠的，则 $M = X/\Gamma$ 是一个黎曼流形；否则，M 具有轨形结构。

一个重要的特殊情形是对称空间，即 X 由半单李群 G 和其极大紧子群 K 给出，而 Γ 是 G中的一个格，也就是说，它是一个离散子群，且 G/Γ 承载有限的 G-不变测度。这包括例如双曲流形和轨形这一重要类别。

在许多情况下，非正曲率流形的体积能够控制其拓扑的复杂性。最早证明这一现象的结果之一，是 Gromov 于 1985, [BGS85]中提出的以下著名定理：

定理 1.1 (Gromov,1985年)**.** 存在一个常数 C_n，它仅依赖于维数，使得对每个 *Hadamard*流形 X 和无挠格 Γ

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(X/\Gamma) \leq C_n \operatorname{Vol}(X/\Gamma)$$

其中 $b_i(X/\Gamma)$ 是取任意域系数时的贝蒂数。

近年来，已有一系列研究成果建立了格的复杂性与其余体积之间的联系。例如，Gelander 的工作探讨了余体积与商的同伦型之间的关系； [Gel04]，的工作则研究了余体积与最小生成元数之间的联系，例如 [GS20, LS22],

以及其他同调不变量的增长，例如 [ABFG22, FHR22, BGLM02, BGLS10, ABB+17, AGN17, BL12, BL19, BGS20, ABBG23]，还有针对一般双曲群的相应版本，见 [Laz21, Laz25]。请注意，这些结果大多是在无挠格的情形下证明的。然而，在许多场景中，尤其是从算术和数论的角度来看，轨形自然出现，而且许多熟悉的格都含有挠元。例如，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$，其商为模轨形。更一般地，对于一个具有整数环 $\mathcal{O}_k$ 的数域 k，格 $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_k)$（及其更高秩的类似对象）通常含有挠元，因此相应的局部对称商自然是轨形。

本文将 Gromov 的体积线性界推广到具有负曲率、系数取自任意域的有限体积轨形。具体而言，我们证明：

定理 1.2。 存在一个常数 C_n，仅取决于维数，使得对于每个 *Hadamard*流形 X，满足 $-1 \leq K < 0$，以及任意格 Γ

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(X/\Gamma, \mathbb{F}) \leq C_n \operatorname{Vol}(X/\Gamma)$$

对于任意域 $\mathbb{F}$。

关键在于，从流形转向轨形会引入有限稳定子。在特征零的情形下，这些稳定子在贝蒂数层面通常是不可见的；但在正特征下，它们可能产生新的同调类，因此需要对奇点所带来的拓扑进行统一控制。

近年来，由于与数论的联系，模-p 贝蒂数以及系数为 $\mathbb{F}_p$ 的同调中的挠引起了广泛关注。在特征零的情形下，诸如 L¨uck 的逼近定理 [L¨uc 94] 以及 [ABB+17] 的工作，在许多情形下为覆盖塔中归一化贝蒂数提供了有力控制。在正特征下，我们对同调增长的理解仍然有限，其行为可能与特征零的情形大不相同；例如，Avramidi–Okun–Schreve[AOS21] 的构造揭示了非正曲率中模-p 同调及挠同调增长的某些现象，而这些现象在特征零中没有直接对应物。关于这一系列问题的综述，以及高秩无挠格链的 $\mathbb{F}_p$ 同调增长的最新研究进展，参见 [ABFG22] 的详细引言。

对于一般的不可公度格序列，关于正特征下第一同调的结果包括 [Fra22]，以及最近由 [FMW23] 取得的突破；该突破表明，除其他结论外，在高秩情形下，生成元的最小数量相对于体积呈次线性增长。再次，

这些结果针对的都是无挠格。例如，对于含挠格的生成元数量，目前只有非一致格的相关界已知，这要归功于 [LS22]。我们还指出，第二作者与 Gelander 的近期工作 [GS25] 通过证明 Selberg 引理的一个定量版本，表明每个算术局部对称轨形都存在一个流形覆盖，其覆盖指数关于该轨形的体积呈多对数增长。然而，这并不足以为此目的对贝蒂数进行充分精确的控制。此外，秩 1 中还存在许多非算术局部对称轨形，例如参见 [GL14]。

在 [Sam13], 中，Samet 证明了与定理 1.1 相同的结论对轨形成立，假设曲率为负，且贝蒂数是相对于特征零的环来取的。此类关于轨形的结果通常难以用几何方法证明，因为需要对奇点有充分的理解。定理 1.2 将 Samet 的结果推广到任意域上的系数，并回答了同一篇论文中提出的一个问题。

另请注意 [Sen23], 的结果，其中对双曲轨形得到了任意域上贝蒂数的相关体积线性界（此外还有同调中对数挠的界），其常数还额外依赖于Γ的有限子群的阶的一个界。然而，对于余紧格，有限子群的最大阶可以随余体积增长；例子见 [GS25]。

Γ的无挠情形与一般情形之间的主要区别在于，有限子群可能会在正特征下引入额外的同调。因此，控制这些有限子群，尤其是它们在切空间上的线性作用，是我们证明中的核心要素。

我们的主要拓扑输入是关于球面商的同调的一致上界。

定理 1.3. 设 $k \in \mathbb{N}$，且 G 是在线性作用于$\mathbb{S}^k$的任意有限群，则存在一个常数 C，它仅依赖于 k，使得

$$b_i(\mathbb{S}^k/G, \mathbb{F}) \leq C$$

对每个域 $\mathbb{F}$均成立。事实上，可以取 $C = 3^k(k+1)!^{\log(3k)}$。

证明此定理后，我们使用 Gromov、Gelander 和 Samet 提出的方法来分析商的厚部分和薄部分，并以体积为依据界定它们的拓扑复杂度。

我们将指出负曲率这一假设在何处用到。很可能可以将这一结果推广到非正曲率的轨形，从而补齐 1.1 中所有剩余情形。

1.1. 球面上的有限群作用。 自然会有人问，能否通过某种针对球面上有限群作用的一般“线性化”或近似原理，去掉定理 1.3 中的线性 假设。

在纯粹的拓扑范畴中，答案通常是否定的：球面上存在众所周知的“野”有限群作用，甚至不是局部线性的。在三维中，Bing [Bin52]和 Montgomery–Zippin [MZ54]的经典构造展示了作用于 S^3 上的对合，其不动点集具有病态性质（例如亚历山大角球或康托尔集）。在高维中，也存在无法嵌入 O($n+1$) 的有限群拓扑作用；例如参见 Zimmermann [Zim17]。

在光滑范畴中，低维情形则更为刚性。在三维中，光滑有限群作用受几何化支配（并且光滑共轭于等距作用）；例如参见 [DL09]，以及 [MB84] 中关于史密斯猜想的讨论。在四维中，许多情形下都有很强的线性化结果；参见 [CKS16]。然而在高维中，光滑有限群作用未必共轭于线性作用，线性作用与非线性作用之间的区别也变得更加微妙。

即使是自由作用，非线性现象也早已出现在循环群的情形中：存在 $\mathbb{Z}/m$在 S^{2k-1} 上的光滑自由作用，它们不同胚共轭于任何由酉表示产生的作用。由此得到的商空间就是经典的假透镜空间；参见 Browder–Petrie–Wall [BPW71]，以及后续的分类成果，例如 Macko–Wegner [MW11]所综述和发展的内容。

此外，同伦球面上还存在光滑自由作用，其轨道空间甚至不同伦等价于任何线性球面商空间。事实上，存在奇数阶非阿贝尔亚循环群在同伦球面上的光滑自由作用，

$$\pi \;=\; \mathbb{Z}/p \rtimes \mathbb{Z}/q$$

参见 Petrie [Pet71] 以及 Hambleton 的综述 [Ham14]中的讨论。另一方面，Zassenhaus 证明，任何能在球面上自由正交作用的有限群都必须满足 pq- 条件 （对于素数 p, q，任何阶为 pq 的子群都是循环群）；反过来，满足 pq-条件的可解群具有自由正交表示 [Ham14]。上述亚循环群不满足 pq-条件，因此在任何球面上都不可能有自由线性作用。因此，若 $M = S^n/\pi$是这样的一个商，且对于某个线性 $H < \mathrm{O}(n+1)$ 有 $M \simeq S^n/H$，那么$\pi_1(M) \cong \pi_1(S^n/H) \cong H$ 将推出 $H \cong \pi$，这与不存在由 π给出的自由线性作用相矛盾。

Acknowledgments

作者谨向 Shaul Ragimov 致谢，感谢他进行了有益的交流。第二作者希望感谢 Tsachik Gelander 一直以来的支持，并鼓励他研究这一问题。

2. Linear actions of finite groups on spheres

设 $G \le SO(n)$ 是一个在线性作用于单位球面 $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 上的有限群。由于该作用是光滑的，Illman 等变三角剖分定理保证存在一个有限的 G–不变三角剖分 S^{n-1} [Ill78]。经过重心细分后，我们可以假设所诱导的单纯形 G–作用是可容许的，即若 $g \in G$ 保持一个单形作为集合不变，则它逐点固定该单形[Put18, §1]。特别地， S^{n-1} 是一个有限的可容许 G–CW 复形；对每个子群 $H \le G$ ，不动点集 $(S^{n-1})^H$ 都是一个子复形，且商 S^{n-1}/H 继承有限 CW 结构 [AD97, §1]。

2.1. 约当约化为阿贝尔群的有界扩张。根据约当定理 [Jor78], ，结合 Collins [CG07], 给出的显式界，存在常数 $J(n)$，仅依赖于 n ，使得 $GL_n(\mathbb{C})$ 的每个有限子群都包含一个正规阿贝尔子群，其指数至多为$J(n)$。将此应用于 $G \le SO(n) \subset GL_n(\mathbb{C})$，选取

$$A \lhd G \ \text{ abelian}, \qquad [G : A] \le J(n),$$

并令 $Q := G/A$，于是 $|Q| \le J(n)$。令

$$X := S^{n-1}/A.$$

A 的正规性意味着 Q作用于 X，并且

$$S^{n-1}/G \ \cong \ X/Q.$$

因此，我们将先给出阿贝尔群作用的一个上界（群的大小可以任意大），然后再处理对 Q 的商。

2.2. 阿贝尔情形的一致上界。 我们给出一个明确的一致上界（仅取决于 n），适用于对 $SO(n)$ 的有限阿贝尔子群取商。

定理 2.1。 设 A 是 $SO(n)$ 的一个有限阿贝尔子群，它在线性作用于 S^{n-1} 上，并设 $\mathbb{F}$ 是任意一个域。那么

$$\sum_{i=0}^{n-1} \dim_{\mathbb{F}} H^i(S^{n-1}/A; \mathbb{F}) \ \le \ 3^n.$$

证明。 令 $X := S^{n-1}/A$。由于 $A \subset O(n)$ 是有限阿贝尔群，其元素是作用于 $\mathbb{R}^n$ 上的可交换正交算子，因此 $\mathbb{R}^n$ 可分解为若干个 A–不变实不可约子表示的正交直和。在 $\mathbb{R}$ 上，这些子表示要么是一维符号表示，要么是二维旋转块。因此，存在一个正交分解

$$\mathbb{R}^n \cong \Big(\bigoplus_{j=1}^{r} V_j\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{k=1}^{s} W_k\Big), \qquad \dim V_j = 2, \ \dim W_k = 1,$$

使得 A 通过旋转作用于每个 V_j （通过特征标 $\chi_j \colon A \to S^1$ ，在识别 $V_j \cong \mathbb{C}$后），并通过乘以 ± 1 作用于每个 W_k （通过特征标$\varepsilon_k \colon A \to \{\pm 1\}$）。特别地 $2r + s = n$。令 $N := r + s$ ，并将其分块编为指数

$B_\alpha (\alpha = 1, \dots, N)$，其中 $\alpha \le r$ 对应 $B_\alpha = V_\alpha$，而 $1 \le k \le s$ 对应 $B_{r+k} = W_k$。那么 $N \le n$，且每个 $v \in \mathbb{R}^n$ 都可唯一分解为 $v = (v^{(1)}, \dots, v^{(N)})$，其中 $v^{(\alpha)} \in B_\alpha$。

定义连续映射 $\mu\colon\ S^{n-1} \to \Delta^{N-1}$ by

$$\mu(v) = \big(\|v^{(1)}\|^2, \dots, \|v^{(N)}\|^2\big),$$

其中 $\Delta^{N-1} = \{(u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N\colon\ \ u_i \ge 0,\ \sum_i u_i = 1\}$ 是标准单形。由于 A 在每个块上正交作用，它保持 $\|v^{(\alpha)}\|$ 不变，因此 μ 是 A–不变的，并下降为连续映射 $\bar\mu\colon X \to \Delta^{N-1}$。

对每个 $\alpha \in \{1, \dots, N\}$，令 $\mathcal{V}_\alpha := \{u \in \Delta^{N-1}\colon\ u_\alpha > 0\}$，使得 $\{\mathcal{V}_\alpha\}$ 是 Δ^{N-1} 的开覆盖，并设 $U_\alpha := \bar\mu^{-1}(\mathcal{V}_\alpha)$，这是 X 的开覆盖。对于非空的 $J \subseteq \{1, \dots, N\}$，记

$$\mathcal{V}_J := \bigcap_{\alpha \in J} \mathcal{V}_\alpha, \qquad U_J := \bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha = \bar\mu^{-1}(\mathcal{V}_J).$$

在上方，令 $W_J := \mu^{-1}(\mathcal{V}_J) \subset S^{n-1}$，使得 $U_J = W_J/A$。令

$$E_J := \bigoplus_{\alpha \in J} B_\alpha \subset \mathbb{R}^n, \qquad S_J := S^{n-1} \cap E_J.$$

引理 2.2。包含映射 $W_J \cap S_J \hookrightarrow W_J$ 是一个 A–等变形变收缩。

证明。将 $v = (v_J,\ v_{J^c})$ 写成其中 $v_J \in E_J$ 且 $v_{J^c} \in E_{J^c}$。若 $v \in W_J$，则 J 中的每个块都非零，因此 $v_J \ne 0$。定义

$$H_t(v) := \frac{(v_J, (1-t)v_{J^c})}{\|(v_J, (1-t)v_{J^c})\|} \qquad (t \in [0,1]).$$

分母永不为零，因为 $v_J \ne 0$，而对 v_{J^c} 进行缩放不会影响 J 中各块的非零性，因此对于所有 t，$H_t(v) \in W_J$。此外，$H_1(v) \in W_J \cap S_J$。该构造仅使用正交投影和范数，因此是 A–等变的。□

根据引理 2.2，取商得到 $U_J = W_J/A \simeq (W_J \cap S_J)/A$。

引理 2.3。设 $a = a(J)$ 表示 $\{B_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 中 2 维块的数量，$b = b(J)$ 表示其中 1 维块的数量。则存在一个 A–等变同胚

$$W_J \cap S_J \cong (S^1)^a \times (S^0)^b \times \Delta_{>0}^{a+b-1},$$

其中 $\Delta_{>0}^{a+b-1} = \{(t_1, \dots, t_{a+b}) \in \mathbb{R}^{a+b}\colon\ \ t_i > 0,\ \ \sum_i t_i = 1\}$ 是开单形。A–作用通过平移作用于 $(S^1)^a$ 和 $(S^0)^b$ 上，并且在 $\Delta_{>0}^{a+b-1}$ 上是平凡的。

证明。在每个复块上写作 $z = re^{i\theta}$，其中 $r > 0$ 且 $\theta \in S^1$；在每个实块上写作 $x = \sigma s$，其中 $\sigma \in S^0 = \{\pm 1\}$ 且 $s > 0$。$W_J \cap S_J$ 的定义条件恰好是所有 r，s 均为正数，且 $\sum r^2 + \sum s^2 = 1$。因此，$(r_1^2, \dots, r_a^2, s_1^2, \dots, s_b^2)$ 确定了一个点

属于 $\Delta_{>0}^{a+b-1}$；而角度和符号确定了$(S^1)^a \times (S^0)^b$中的一个点，从而得到所述同胚。 A作用通过相应的特征标旋转每个 S^1 因子，并翻转每个 S^0 因子，同时保持半径不变，因此单纯形因子是不动的。□

由于 $\Delta_{>0}^{a+b-1}$是可缩的，且 A 在其上作用平凡，由引理 2.3 得

$$U_J \simeq \big((S^1)^a \times (S^0)^b\big)/A.$$

引理2.4。 $\big((S^1)^a \times (S^0)^b\big)/A$ 是至多由 2^b个连通分支组成的不交并，每个分支都与一个维数为 a的环面同伦等价。

证明。令 $D := (S^0)^b$，这是一个大小为 2^b的离散集。 A在$(S^1)^a \times D$上的作用具有如下形式： $g\cdot(t,d) = (t+\phi(g),\ d+\psi(g))$，其中 $\phi\colon A \to (S^1)^a$和 $\psi : A \to D$是同态。因此，商分解为由 D/A索引的连通分支，故分支数至多为 $|D| = 2^b$。取一个轨道 $\mathcal{O} \subset D$ 和 $d \in \mathcal{O}$。稳定子 A_d 通过有限子群 $\phi(A_d) \subset (S^1)^a$的平移作用于$(S^1)^a$ ，而$(S^1)^a/\phi(A_d)$仍是一个维数为 a的环面。□

引理2.4表明，对于任意域 $\mathbb{F}$，每个连通分支的贝蒂数总和为 2^a，因此

$$\sum_q \dim_{\mathbb{F}} H^q(U_J;\mathbb{F}) \le 2^b \cdot 2^a = 2^{a+b} = 2^{|J|}.$$

现在对带有 $\mathbb{F}$系数的有限开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ 应用Čech（等价地，Mayer–Vietoris）谱序列：

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{\substack{J\subseteq\{1,\dots,N\}\\ |J|=p+1}} H^q(U_J;\mathbb{F}) \implies H^{p+q}(X;\mathbb{F}).$$

取域上的维数，并利用微分只会降低总维数这一事实，可得

$$\begin{aligned}\sum_i \dim_{\mathbb{F}} H^i(X;\mathbb{F}) &\le \sum_{p,q} \dim_{\mathbb{F}} E_1^{p,q} \\ &= \sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\dots,N\}} \ \sum_q \dim_{\mathbb{F}} H^q(U_J;\mathbb{F}) \\ &\le \sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\dots,N\}} 2^{|J|}.\end{aligned}$$

最后，

$$\sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\dots,N\}} 2^{|J|} = \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} 2^k = (1+2)^N - 1 = 3^N - 1 \le 3^N \le 3^n,$$

因为 $N \le n$。 □

2.3. **特征-p 有限 CW 复形的界**。 在本小节中， $\mathbb{F}$ 表示特征为 p 的域，并记作

$$b_i(Y) := \dim_{\mathbb{F}} H_i(Y;\mathbb{F}).$$

我们用 C_p 表示阶为 p的循环群。由于在域上由泛系数可得 $\dim_{\mathbb{F}} H_i(Y;\mathbb{F}) = \dim_{\mathbb{F}} H^i(Y;\mathbb{F})$，我们也将互换同调与上同调。

2.3.1. 循环情形。

定理 2.5. 设 C_p 容许地作用在一个有限的 d维 *CW* 复形Y上。假设对所有 i有 $b_i(Y) \le k$。则对所有 $n \ge 0$ 有

$$b_n(Y/C_p) \;\le\; 3(d+1)k$$

证明. 由于 Y/C_p是 d维的，对 $n > d$我们有 $H_n(Y/C_p;\,\mathbb{F}) = 0$。

由 p–群（在 $\mathbb{F}_p$上）的 Smith–Floyd 不等式 [Put18，定理 B(i)],

$$\sum_{i\ge 0} \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(Y^{C_p};\mathbb{F}_p) \;\le\; \sum_{i\ge 0} \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(Y;\mathbb{F}_p). \tag{1}$$

由于 $\mathbb{F}$在 $\mathbb{F}_p$上是平坦的，标量扩张给出：对于任意 CW 复形 Z， $H_i(Z;\,\mathbb{F}) \cong H_i(Z;\,\mathbb{F}_p)\otimes_{\mathbb{F}_p}\mathbb{F}$（参见 [Wei94，定理 3.6.1]），因此 $\dim_{\mathbb{F}} H_i(Z;\mathbb{F}) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(Z;\mathbb{F}_p)$。因此，

$$\sum_i b_i(Y^{C_p}) \;\le\; \sum_i b_i(Y) \;\le\; (d+1)k.$$

特别地，对每个 $i \ge 0$,

$$b_i(Y^{C_p}) \;\le\; (d+1)k.$$

由对 (Y, Y^{C_p}) 的长正合列 [Hat02，定理 2.16],，对于 $t \ge 0$,

$$b_t(Y, Y^{C_p}) \;\le\; b_t(Y) + b_{t-1}(Y^{C_p}) \;\le\; k + (d+1)k \;=\; (d+2)k,$$

其中 $b_{-1}(Y^{C_p}) = 0$。对 $t = 0,\dots,d$ 求和，得到

$$\sum_{t=0}^{d} b_t(Y, Y^{C_p}) \le \sum_{t=0}^{d} b_t(Y) + \sum_{t=0}^{d-1} b_t(Y^{C_p}) \le (d+1)k + (d+1)k = 2(d+1)k.$$

由于 $Y \setminus Y^{C_p}$ 的每个胞腔都有平凡稳定子，每个 $C_q(Y, Y^{C_p};\mathbb{F})$ 都是自由的 $\mathbb{F}[C_p]$–模（参见 [Bro08，(1.3)]），取余不变元后得到一个链同构

$$\mathbb{F}\otimes_{\mathbb{F}[C_p]} C_*(Y, Y^{C_p};\mathbb{F}) \;\cong\; C_*(Y/C_p, Y^{C_p};\mathbb{F})$$

（参见 [Bro08，例 5.2(c)]）。应用 Hypertor 谱序列[Wei94，第 5.7 节、命题 5.7.6 及附录 5.7.8]，可得（相对）Cartan–Leray 谱序列 [Bro08，（5.5）]:

$$E^2_{a,b} = H_a\big(C_p;\, H_b(Y, Y^{C_p};\mathbb{F})\big) \implies H_{a+b}(Y/C_p, Y^{C_p};\mathbb{F}). \tag{2}$$

对于任意有限维 $\mathbb{F}[C_p]$–模 M，标准的 2–周期分解表明 $H_a(C_p; M)$ 是 M 的子商（参见 [Bro08，例 1.3、（1.9）及例 3.2]），因此对所有 $a \geq 0$，$\dim_{\mathbb{F}} H_a(C_p; M) \leq \dim_{\mathbb{F}} M$。因此，对于 $0 \leq n \leq d$，

$$\begin{aligned} b_n(Y/C_p, Y^{C_p}) &\leq \sum_{a=0}^{n} \dim_{\mathbb{F}} E^2_{a,n-a} \leq \sum_{a=0}^{n} b_{n-a}(Y, Y^{C_p}) = \sum_{t=0}^{n} b_t(Y, Y^{C_p}) \\ &\leq \sum_{t=0}^{d} b_t(Y, Y^{C_p}) \leq 2(d+1)k. \end{aligned}$$

最后，对（$Y/C_p, Y^{C_p}$）的长正合列 [Hat02，定理 2.16]包含如下片段

$$H_n(Y^{C_p}; \mathbb{F}) \longrightarrow H_n(Y/C_p; \mathbb{F}) \longrightarrow H_n(Y/C_p, Y^{C_p}; \mathbb{F}),$$

so

$$\begin{aligned} b_n(Y/C_p) &\leq b_n(Y^{C_p}) + b_n(Y/C_p, Y^{C_p}) \\ &\leq (d+1)k + 2(d+1)k = 3(d+1)k, \end{aligned}$$

如所需。 □

2.3.2. 从 C_p 到 p–群。

引理 2.6. 设 P 是一个阶为 $|P| = p^r$的有限 p–群。则存在一个正规列

$$1 = P_0 \triangleleft P_1 \triangleleft \cdots \triangleleft P_r = P$$

使得$P_i/P_{i-1} \cong C_p$ 对每个 i成立。

证明。 由于 $Z(P)$非平凡，它包含一个阶为 p的元素，从而包含一个阶为 p的子群 $P_1 \leq Z(P)$。于是 $P_1 \triangleleft P$且 $|P/P_1| = p^{r-1}$。对 P/P_1 应用归纳法，并在 P中取原像。□

定理 2.7。 设 P 是一个阶为 $|P| = p^r$ 的有限 p–群，容许地作用在一个有限 d维 *CW* 复形 Y上。假设对所有 i， $b_i(Y) \leq k$ 。则对所有 n，

$$b_n(Y/P) \ \leq \ \big(3(d+1)\big)^r k.$$

证明。 设$1 = P_0 \triangleleft \cdots \triangleleft P_r = P$如引理 2.6 中所述，并令 $Y_i := Y/P_i$。由于$P_{i-1} \triangleleft P_i$，商 $Q_i := P_i/P_{i-1} \cong C_p$ 作用在 Y_{i-1} 和 $Y_i \cong Y_{i-1}/Q_i$上。令 $K_i := \max_{0 \leq n \leq d} b_n(Y_i)$。将定理 2.5 应用于 Q_i在 Y_{i-1} 上的 C_p–作用（其中 k 替换为 K_{i-1}），我们有 $K_i \leq 3(d+1)\, K_{i-1}$。迭代得到 $K_r \leq (3(d+1))^r K_0 \leq (3(d+1))^r k$。□

2.3.3. 通过转移处理一般有限群。

引理 2.8. 设 H 是一个有限群，它容许地作用在有限 *CW* 复形 Y上，且令 $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$。存在一个转移映射 $H_*(Y/H; \mathbb{F}) \to H_*(Y/P; \mathbb{F})$，它与由 $Y/P \to Y/H$诱导的映射复合后等于乘以 $[H\colon P]$。特别地， $H_*(Y/H; \mathbb{F}) \hookrightarrow H_*(Y/P; \mathbb{F})$ 是单射。

证明。 Adem–Davis 通过对陪集代表元取平均，构造了一个链级传递 $C_*(Y/H) \to C_*(Y/P)$，并证明与投影 $C_*(Y/P) \to C_*(Y/H)$ 复合后，在同调 [AD97, §2.7]上诱导乘以 $[H\colon P]$ 的映射。由于 $p \nmid [H\colon P]$，标量 $[H\colon P]$ 在 $\mathbb{F}$中可逆，因此该传递是单射。□

定理 2.9. 设 $\mathbb{F}$ 是一个特征为 p 的域。设 Y 是一个有限 d 维 *CW* 复形，并赋予有限群 H 的可容许胞腔作用。假设对所有 i，$b_i(Y) \le k$。那么对于 $n > d$，$b_n(Y/H) = 0$，并且对所有 n，

$$b_n(Y/H) \;\le\; \big(3(d+1)\big)^{\lfloor \log_p(|H|)\rfloor}\, k \;\le\; |H|^{\log_p(3(d+1))}\, k.$$

证明。 设 $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$，于是 $|P| = p^r$，其中 $r \le \lfloor \log_p(|H|)\rfloor$。由引理 2.8，对所有 n，$b_n(Y/H) \le b_n(Y/P)$。将定理 2.7 应用于 P，得到

$$b_n(Y/H) \;\le\; b_n(Y/P) \;\le\; \big(3(d+1)\big)^{r}\, k \;\le\; \big(3(d+1)\big)^{\lfloor \log_p(|H|)\rfloor}\, k.$$

最后一个不等式由 $\lfloor \log_p(|H|)\rfloor \le \log_p(|H|)$ 得出。 □

2.4. 结合 Jordan 约化。

定理 2.10. 设 $G \le SO(n)$ 是有限的，并在线性作用于 S^{n-1} 上。设 $\mathbb{F}$ 为任意域，并令 $b_i(Y;\mathbb{F}) := \text{维数}_{\mathbb{F}}\, H_i(Y;\mathbb{F}) = \text{维数}_{\mathbb{F}}\, H^i(Y;\mathbb{F})$。选取 $A \lhd G$ 阿贝尔群，使得 $[G : A] \le J(n)$，并令 $Q := G/A$。那么

$$\sum_{i=0}^{n-1} b_i(S^{n-1}/G;\mathbb{F}) \;\le\; n \cdot 3^n \cdot |Q|^{\log_2(3n)} \;\le\; n \cdot 3^n \cdot J(n)^{\log_2(3n)}.$$

证明。 设 $X := S^{n-1}/A$，故 $S^{n-1}/G \cong X/Q$ 且 X 是一个有限的 $(n-1)$–维 CW 复形。由定理 2.1，

$$\sum_{i=0}^{n-1} b_i(X;\mathbb{F}) \le 3^n, \qquad \text{hence} \qquad b_i(X;\mathbb{F}) \le 3^n \;\text{ for all } i.$$

若 $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$，则 $|Q|$ 在 $\mathbb{F}$中可逆，且 Q–作用的传递（如 [AD97, §2.7] 中所述）给出一个单射 $H_*(X/Q;\mathbb{F}) \hookrightarrow H_*(X;\mathbb{F})$，因此$\sum_i b_i(X/Q;\mathbb{F}) \le 3^n$。

假设 $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = p > 0$。将定理 2.9 应用于 X 上满足 $d = n-1$ 且 $k \le 3^n$ 的可容许 Q–作用，对每个 $0 \le i \le n-1$ 得到，

$$b_i(X/Q;\mathbb{F}) \;\le\; |Q|^{\log_p(3n)}\, 3^n \;\le\; |Q|^{\log_2(3n)}\, 3^n,$$

对 $p \ge 2$ 使用 $\log_p(\cdot) \le \log_2(\cdot)$。对 $i = 0,\dots,n-1$ 求和即可得到所述界。□

3. The quasi-thick part of non-positively curved orbifolds

本节说明如何利用定理 1.3 推出定理 1.2。论证遵循 Gromov 和 Gelander 的一般厚薄分解策略，并结合了 Samet 针对轨形所作的修正。主要思路是将空间分成厚部分和薄部分：厚部分可以由可缩球构成的良覆盖覆盖，而薄部分的拓扑则单独控制，这主要得益于 Margulis 的工作。在轨形情形下，不是将轨形分为厚部分和薄部分，而是通过附加奇异轨迹来扩充厚部分，从而得到一个准厚 区域，其拓扑仍可通过良覆盖加以控制。然后，由位移函数构造的一个 Γ不变莫尔斯函数将 O 的拓扑分解为临界点附近有限多个局部部分。每个部分的拓扑随后可用一个法丛建模，其同调可由球的并集上的球面丛加以控制。与 [Sam13] 相比，我们的新贡献在于利用定理 1.3，可以对奇点的局部贡献在任意域上给出一致的界。更多细节请参阅 [Sam13]。

3.1. 设置、位移与拟厚部分。 设 X 是一个 n 维 Hadamard流形，其截面曲率经过归一化，使得 $-1 \le K \le 0$，并设 $\Gamma \le$Isom(X) 是一个格。令 $O := X/\Gamma$，并令 $\pi : X \to O$ 为商映射。

对于 $\gamma \in \Gamma$，我们记

$$d_\gamma(x) := d(x, \gamma x) \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Min}(\gamma) := \{x \in X : d_\gamma(x) = \inf d_\gamma\}.$$

给定 $\varepsilon > 0$ 和 $x \in X$，令

$$\Gamma_\varepsilon(x) := \big\langle \{\gamma \in \Gamma : \ d_\gamma(x) \le \varepsilon\} \big\rangle.$$

对于 $m \in \mathbb{N}$，定义 Γ–不变子集

$$X_{\ge\varepsilon,m} := \{x \in X : \ |\Gamma_\varepsilon(x)| \le m\}, \qquad O_{\ge\varepsilon,m} := X_{\ge\varepsilon,m}/\Gamma.$$

（因此，含有“许多”小位移元素的点会被移除，但具有有界稳定子的挠点则予以保留。）

我们将使用固定尺度下的本质体积这一概念来衡量 O 的大小：对于 $\rho > 0$，定义 ess-vol$_\rho$(O) 为 2ρ–分离子集基数的上确界，其中这些子集取自 O 的 ρ–厚部分（等价地，即该厚部分中两两不相交的嵌入式 ρ–球的最大数量）。根据标准的打包/比较估计（使用曲率归一化），对于每个固定的 ρ，有

$$\text{ess-vol}_\rho(O) \ \le \ C(n, \rho)\ \mathrm{Vol}(O). \tag{3}$$

因此，我们将寻求以 ess-vol$_\rho$(O) 表示的界。

3.2. **拟厚部分的良覆盖**。 关键的几何输入是，拟厚部分存在一个重叠度一致有界的良覆盖。

定理 3.1 (Samet [Sam13，定理 4。2])。 不动点集 $\varepsilon > 0$ 和 $m \in \mathbb{N}$。存在常数 $\rho > 0$ 和 $r \in \mathbb{N}$，仅依赖于 n、ε、m，使得 $O_{\geq \varepsilon,\ m}$包含于 O 中的一个由有限个开度量球组成的集合 $\mathcal{B}$，并且满足：

(1) 每个 $B \in \mathcal{B}$ 的半径至多为 $\varepsilon/4$；*(2)* $\mathcal{B}$ 中的任意非空有限个球的交集均为可缩空间；*(3)* $|\mathcal{B}| \leq$本质-体积$\rho(O)$；*(4)* 覆盖中的每个 $B \in \mathcal{B}$ 至多与 r 个其他球相交。

此外，如果 本质-体积$\rho(O) < \infty$，那么 $O_{\geq \varepsilon,\ m}$ 是紧致的。

3.3. **覆盖上的丛**。 Samet 证明了关于纤维化的一个同调界，其系数取自特征零域 [，参见 Sam13，命题 4.11]。使用特征零的关键之处在于控制某些纤维商空间的同调。我们的定理 1.3 替代了这一条件，并在任意域上得出相同的结论。

命题 3.2。 设 $\mathcal{B}$ 是定理 *3.1* 中的覆盖，令 $U := \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$，并设 $E \to U$ 是一个（拓扑）纤维丛，其纤维 F 或为球面，或为实向量空间。则存在一个函数 $h = h(r)$，使得对每个域 $\mathbb{F}$ 以及每个 j，

$$\dim_{\mathbb{F}} H_j(E; \mathbb{F}) \ \leq \ h(r) \cdot |\mathcal{B}| \ \leq \ h(r) \cdot \text{ess-vol}_\rho(O),$$

其中 ρ 是定理 *3.1* 中的尺度。

证明。 设 V 是 $\mathcal{B}$ 中球的一个非空交。根据构造，$\widetilde{\ }$ 在 [Sam13] 中提升为一个可缩集 $V \subset X$，有限子群 $\curvearrowright \Gamma_{\widetilde{V}} \leq \Gamma$（其阶为 $\leq m$）在该集上作用，且满足 $V \cong V/\Gamma_{\widetilde{V}}$。于是，限制 $E|_V$ 是平凡纤维丛 $V \times F$ 关于 $\Gamma_{\widetilde{V}}$ 的商。由于 V 存在到一个不动点的 $\Gamma_{\widetilde{V}}$ 等变收缩， $E|_V$ 形变收缩到 $F/\Gamma_{\widetilde{V}}$。

若 F 是一个向量空间，则 $F/\Gamma_{\widetilde{V}}$ 可缩，因此 $E|_V$ 可缩。若 F 是一个球面，则纤维上的作用是线性的（源自不动点处法球面上的作用），所以定理 1.3 给出了 $F/\Gamma_{\widetilde{V}}$ 上贝蒂数的一致上界，该上界仅取决于 dim F，且适用于任意域。

因此， E 被集合 $E|_B$ $(B \in \mathcal{B})$ 覆盖，每个集合至多与 r 个其他集合相交，并且每个非空有限交的同调在 $\mathbb{F}$ 上都有一致上界。对有界度覆盖应用标准的迈耶–维托里斯归纳（参见 [BGS85，引理 12.12]），可得 dim $_{\mathbb{F}} H_j(E; \mathbb{F}) \leq h(r)|\mathcal{B}|$，其中函数 h 仅取决于 r。□

3.4. **莫尔斯函数与临界对**。 我们现在回顾 Sam13 第 5] 节中的莫尔斯理论约化，并以一种方式阐明稍后将用到的输入。

马尔古利斯常数。 令 $\varepsilon_n > 0$ 和 $m_n \in \mathbb{N}$ 为马尔古利斯引理针对 n–流形给出的常数：对于每个离散的 $\Gamma <$ Isom(X) 和

每个 $x \in X$、$\Gamma_{\varepsilon_n}(x)$ 都包含一个指数为 $\le m_n$ 的正规幂零子群；若 $\Gamma_{\varepsilon_n}(x)$ 是有限群，则它几乎阿贝尔。不动点集 $\varepsilon := \varepsilon_n$ 和 $m := m_n$。

我们还使用如下定量引理（ [Sam13，引理 5.2]）：

引理 3.3. 存在常数 $\delta > 0$ 与 $M_1 \in \mathbb{N}$ （仅依赖于 n），使得：若 $d(x, y) < 2\varepsilon$ 且 $d_\gamma(x) \le \delta$，则对某个$1 \le i \le M_1$有 $d_{\gamma^i}(y) \le \varepsilon$ 。

稳定性。令 $M_2 := mM_1$。对 $s \in \mathbb{N}$，若$C_{SO(n)}(g) = C_{SO(n)}(g^i)$ 且对 $1 \le i \le s$ 有不动点集(g) = 不动点集(g^i)，则称 $g \in SO(n)$ s–稳定 。椭圆等距变换 $\gamma \in \mathrm{Isom}(X)$ 是 s–稳定 的，如果 γ 在不动点 x 处对 T_xX 的线性作用是 s–稳定的。由 [Sam13，命题 2.5]，，存在常数$J = J（n, M_2）$，使得对每个等距变换 γ，存在某个 $1 \le j \le J$，使得γ^j M_2–稳定。

函数 F。选取光滑函数

$$g_k : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0} \quad (k \ge 2), \qquad g_\infty : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{\ge 0},$$

使得：(i) 每个函数在 $(0, \varepsilon)$ 上严格递减，并在 $[\varepsilon, \infty)$ 上恒为零；(ii)$g_k(0) = k$ 且 $g_k(\delta) = 1$ 对 $k \ge 2$成立；(iii) $\lim_{t\to 0^+} g_\infty(t) = \infty$ 且 $g_\infty(\delta) = 1$。对于 $1 \ne \gamma \in \Gamma$，令 $o(\gamma) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 为其阶，并设 $g_\gamma := g_{o(\gamma)}$。

定义“相关”元素集合

$$\Delta := \{1 \ne \gamma \in \Gamma : \ \inf d_\gamma < \delta, \text{ and if } \gamma \text{ is elliptic then it is } M_2\text{–stable}\}$$

以及函数

$$F(x) := \sum_{\gamma \in \Delta} \sum_{i=0}^{M_1} g_\gamma\big(d_{\gamma^i}(x)\big).$$

由于 Γ 是离散的，在每个 x 附近只有有限个非零项，因此 F 是光滑的。它是 Γ–不变的，因此下降为 $O = X/\Gamma$ 上的光滑函数 f。

对于每个 $x \in X$，令

$$\Delta_x := \left\{\gamma^i : \ \gamma \in \Delta,\ 0 \le i \le M_1,\ d_{\gamma^i}(x) < \varepsilon\right\},$$

即在 x 附近实际起作用的元素。

临界对。 [Sam13, §5]（其中的断言 1–7）证明了以下一组事实。我们将它们按本文所用的形式记录如下。

断言 3.4。函数 f 是适当的。特别地，每个子水平集 $f_{\le t}$ 都是紧致的。

断言 3.5。点 $x \in X$ 是 F 的临界点，当且仅当它属于

$$Y_x := \bigcap_{\eta \in \Delta_x} \mathrm{Min}(\eta).$$

此外，如果 x 是临界的，并且我们设

$$C_x := \{y \in Y_x : \ \Delta_y = \Delta_x\},$$

那么 C_x 恰好是位于 Y_x 中的 F 的临界集，并且对于任意 $y \in C_x$，都有 $Y_y = Y_x$ 和 $C_y = C_x$。我们称$(Y_x$、$C_x)$ 为与x相关联的临界对 。

固定一个临界对 (Y, C)。设

$$C' := \{y \in Y : \ d(y, C) < \varepsilon/2\}.$$

断言 3.6. 在 X 中存在 C 的一个邻域，其上的小位移元素保持 Y；特别地，自然映射

$$C'/\Gamma_Y \ \longrightarrow \ X/\Gamma$$

是单射，其中 $\Gamma_Y := \{\gamma \in \Gamma : \ \gamma Y = Y\}$。

断言 3.7. 设 $x \in C'$，并设 $c : [0, 1) \to X$ 为一条测地射线，且 $c(0) = x$ 与 Y 正交。则当 $t > 0$ 充分小时，$t \mapsto F(c(t))$ 严格递减。

现在我们引入用于描述 Y 内 C 的邻域的常数。设

$$\delta_2 := \frac{\delta}{2mJ + 2}, \qquad M_3 := m\,(J!)^n.$$

断言 3.8。 设(Y, C) 为一个临界对。若 Δ_C 包含双曲元素，则 $Y = C$ 和 Y 是一条测地线。否则， Y 是一个 m稳定的奇异子流形，并且存在一个 Γ_Y不变邻域

$$C'' \subset C'$$

使得 C 在 Y 中的 C''/Γ_Y 包含于Y/Γ_Y的(δ_2, M_3)拟厚部分。

临界值的有限性。 断言 3.8 将临界对归结为两种类型。当 $K < 0$时，双曲（测地）类型由 [Sam13，定理 3.5]定量控制。其余的（纯椭圆）类型则由 [Sam13，定理 3.2] 以及拟厚部分的良覆盖（定理 3.1）控制；特别地，在 Γ 共轭意义下，临界对只有有限多个，因此 f 只有有限多个临界值。我们还将利用紧致性方面的考虑：临界集投影到 O的紧致子集上。

Let

$$0 = c_1 < c_2 < \cdots < c_k$$

是 f 的互异临界值。选择足够小的 $\mu > 0$，使得每个区间 $[c_i - \mu, c_i + \mu]$ 都不包含除 c_i 以外的临界值，且这些区间两两不相交。由于 f 是适当映射（断言 3.4），标准的 Morse理论变形论证（参见 [Mil63]）表明，梯度流给出了变形收缩

$$O \ \simeq \ f_{\le c_k + \mu}, \qquad f_{\le c_{i+1} - \mu} \ \simeq \ f_{\le c_i + \mu}.$$

利用三元组秩的次可加性可得，对于每个 j 以及每个域 $\mathbb{F}$，

$$\dim_{\mathbb{F}} H_j(O;\mathbb{F}) \;\le\; \sum_{i=1}^{k} \dim_{\mathbb{F}} H_j\big(f_{\le c_i+\mu},\, f_{\le c_i-\mu};\mathbb{F}\big). \tag{4}$$

因此，接下来只需对右侧的相对群进行界定。

固定一个临界值 c，并固定一个对应的临界对（Y，C）（在 Γ 共轭意义下）。令

$$V := f_{\le c+\mu} \cap \pi(Y) \subset O.$$

当 μ 充分小时，我们可以假设 $V \subset \pi(C'')$（其中 C'' 来自断言 3.8）。考虑三元组

$$f_{\le c-\mu} \;\subset\; (f_{\le c+\mu} \setminus V) \;\subset\; f_{\le c+\mu}.$$

断言 3.7 意味着，在 $\pi(C'')$ 附近，负梯度流不会将点推向 $\pi(Y)$。由于 f 在 $f_{\le c+\mu}\setminus V$ 中没有临界点，因此可得到一个形变收缩

$$f_{\le c+\mu} \setminus V \;\simeq\; f_{\le c-\mu},$$

因此 $H_*\big(f_{\le c+\mu}\setminus V,\; f_{\le c-\mu};\; \mathbb{F}\big) = 0$。该三元组的长正合列给出

$$H_*\big(f_{\le c+\mu},\, f_{\le c-\mu};\mathbb{F}\big) \;\cong\; H_*\big(f_{\le c+\mu},\, f_{\le c+\mu}\setminus V;\mathbb{F}\big).$$

由切除性质，后者仅取决于 V 在 $f_{\le c+\mu}$ 中的一个小邻域。取一个轨形管状邻域，可将该邻域识别为（轨形）法丛 $N(V)$，于是得到

$$H_j\big(f_{\le c+\mu},\, f_{\le c-\mu};\mathbb{F}\big) \;\cong\; H_j\big(N(V),\, N(V)\setminus N_0(V);\mathbb{F}\big), \tag{5}$$

其中 $N_0(V)$ 是零截面。

3.5. 管状部分的界。 现在我们对断言 3.8 中两种情形下的 (5) 右端进行估计。

情形 1：存在双曲元素。 于是 $Y = C$ 是一条测地线，因此 V 是 1 维的（要么可缩，要么在商中是一个圆）。特别地，$N(V)$ 与 V 同伦等价，而 $N(V) \setminus N_0(V)$ 与一个以 V 为底空间的球面丛同伦等价。因此，对所有 j，

$$\dim_{\mathbb{F}} H_j\big(N(V),\, N(V)\setminus N_0(V);\mathbb{F}\big) \;\le\; 3.$$

情况2：临界对是纯椭圆的。于是，$V \subset \pi(C'')$ 位于 Y/Γ_Y 的（δ_2，M_3）–拟厚部分中。在 Y/Γ_Y 内部应用定理 3.1，参数为（δ_2，M_3）。这给出了常数 ρ_3 和 r_3 （仅取决于 n），以及一个用半径为 $\le \delta_2/4$ 的球覆盖 Y/Γ_Y 中 V 的某个邻域的覆盖；这些球具有可缩交集、有界重叠 r_3，且基数由 ess-vol$_{\rho_3}$(Y/Γ_Y) 所界定。

令 U_Y 为这些球的并集，并考虑 $N(U_Y) \setminus N_0(U_Y) \to U_Y$ 的球面丛模型。对该球面丛应用命题 3.2

（以及其在 U_Y 本身上的对应丛）可得一个对所有域 $\mathbb{F}$ 都一致的界，

$$\dim_{\mathbb{F}} H_j\big(N(U_Y);\mathbb{F}\big) \le h(r_3)\ \text{ess-vol}_{\rho_3}(Y/\Gamma_Y),$$
$$\dim_{\mathbb{F}} H_j\big(N(U_Y)\setminus N_0(U_Y);\mathbb{F}\big) \le h(r_3)\ \text{ess-vol}_{\rho_3}(Y/\Gamma_Y).$$

为了比较 V 与 U_Y，可选取函数 g_k：通过使$g_k(\varepsilon/2)$ 足够小，可确保在 Y 内 C 的一个固定邻域中，F 的取值始终处于高于 C 上最小值的受控范围内（参见 [Sam13, §5,(7)]）。特别地，可以使 V成为包含 U_Y 的一个稍大次水平区域的形变收缩。因此，V的对的同调由 U_Y的对的同调所界定，故

$$\dim_{\mathbb{F}} H_j\big(N(V),\, N(V)\setminus N_0(V);\mathbb{F}\big) \ \le\ 2h(r_3)\ \text{ess-vol}_{\rho_3}(Y/\Gamma_Y). \tag{6}$$

3.6. 对临界对求和。将情形 1 和 (6) 中的界代入 (4)。双曲型临界对的数量（当$K<0$时）由 [Sam13, Thm. 3.5]，控制，其贡献有界于常数乘以本质体积$_\varepsilon(O)$。

对于椭圆型对，将 [Sam13, Thm. 3.2] 应用于一组极大的、彼此不共轭的 m–稳定奇异子流形 Y，其中 $\varepsilon_1 := \rho_3$。由此得到一个常数 $\rho_4 = \rho_4(n,\rho_3)$，使得

$$\sum_Y \text{ess-vol}_{\rho_3}(Y/\Gamma_Y)\ \le\ \text{ess-vol}_{\rho_4}(O).$$

因此，对椭圆型临界对求和，可由一个常数乘以 ess-vol$_{\rho_4}(O)$ 来界定它们的总贡献。

合并这两种类型后，我们对每个 j 得到：

$$\dim_{\mathbb{F}} H_j(O;\mathbb{F})\ \le\ C(n)\ \text{ess-vol}_{\rho'}(O)$$

对于某个 $\rho' = \rho'(n) > 0$ 和仅取决于维数的常数 $C(n)$。最后，(3) 将其转化为所需的关于体积的线性界，从而完成定理 1.2 的证明。

References

[ABB+17] Miklos Abert、Nicolas Bergeron、Ian Biringer、Tsachik Gelander、Nikolay Nikolav、Jean Raimbault 和 Iddo Samet。李群中格序列的 l^2 不变量增长。 *Annals of Mathematics* 185 3 711 790, , ( ): – .[2017

ABBG23] Miklos Abert、Nicolas Bergeron、Ian Biringer 和 Tsachik Gelander。非正曲率下归一化贝蒂数的收敛。 *Duke Math. J.*, 172 4 633 700, 2023 ( ): – . [ABFG22] Miklos Abert、Nicolas Bergeron、Mikolaj Fraczyk 和 Damien Gaboriau。同调挠增长。 *Journal of the European Mathematical Society*, 2022. [AD97] Alejandro Adem 和 James F. Davis。拓扑变换群。arXiv 预印本，1997 年 6 月。arXiv:math/9706228。可在 https://arxiv. org/abs/math/9706228 获取。

[AGN17] Miklos Abert、Tsachik Gelander 和 Nikolay Nikolov。高秩格中的秩、组合代价与同调挠增长。*Journal* 166 15 2925 2964, 2017 *Duke Mathematical* , ( ): – . [AOS21] Grigori Avramidi 、 Boris Okun 和 Kevin Schreve。非正曲率下的模 p 与挠同调增长。 *Inventiones mathematicae* 226 711 723, , : – . [BGLM02] Marc Burger、Tsachik Gelander、Alex Lubotzky 和 Shahar Mozes。双曲流形计数。 *Geometric and Functional Analysis* 12 6 1161 1173, , ( ): – . [BGLS10] Mikhail Belolipetsky、Tsachik Gelander、Alexander Lubotzky 和 Aner Shalev。算术格与曲面计数。 *Annals of mathematics*, 第 2197–2221 页，2010 年。[BGS85] Werner Ballmann、Mikhail Gromov 和 Viktor Schroeder。 *Manifolds of non-positive curvature* 61 ¨ 1985 。Progr. Math., 。Birkhauser Boston，。[BGS20] Uri Bader、Tsachik Gelander 和 Roman Sauer。负曲率下的同调与同伦复杂度。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 22(8):2537– 2571, 2020。[Bin52] RH Bing。一个三维球面的同胚，其不变集不是驯嵌弧。 *Annals of Mathematics*, 56(2):354–362, 1952。[BL12] Mikhail Belolipetsky 和 Alexander Lubotzky。流形计数与类域塔。 *Advances in Mathematics*, 229(6):3123–3146, 2012。[BL19] Mikhail Belolipetsky 和 Alexander Lubotzky。非一致格计数。*Israel Journal of Mathematics*, 232(1):201–229, 2019。[BPW71] William Browder、Ted Petrie 和 C. T. C. Wall。奇数阶循环群在同伦球面上的自由作用分类。*American Mathematical Society* 77 3 455 459, 1971 *Bulletin of the* , ( ): – . [Bro08] Kenneth S. Brown。群上同调讲义。讲义，2008 年。可在 https://pi.math.cornell.edu/~kbrown/papers/cohomology_ hangzhou.pdf 获取。[CG07] Michael J Collins 和 RM Guralnick。复线性群的约当定理。 *Journal of Group Theory*, 10(4), 2007。[CKS16] Weimin Chen、S˛lawomir Kwasik 和 Reinhard Schultz。四维球面的有限对称性。 *Forum Mathematicum*, 28(2):295–310, 2016。[DL09] Jonathan Dinkelbach 和 Bernhard Leeb。带手术的等变里奇流及其在几何 3 *Geometry* –流形上有限群 *& Topology* 13 2 1129 1173, 2009 作用中的应用。, ( ): – . [FHR22] Miko˛laj Fraczyk、Sebastian Hurtado 和 Jean Raimbault。算术局部对称空间的同伦型、同调与体积。 *arXiv preprint arXiv:2202.13619* 2022 *arXiv* , . [FMW23] Mikolaj Fraczyk、Sam Mellick 和 Amanda Wilkens。高秩中的泊松-沃罗诺伊镶嵌与固定价格。 *arXiv preprint arXiv:2307.01194*, 2023。[Fra22] Mikolaj Fraczyk。高秩局部对称空间中模 2 同调的增长。 *Duke Mathematical Journal*, 171(2):247–271, 2022。[Gel04] Tsachik Gelander。局部对称流形的同伦型与体积。*Duke Mathematical Journal*, 124(3):459–515, 2004。[GL14] Tsachik Gelander 和 Arie Levit。双曲流形可公度类的计数。 *Geometric and Functional Analysis*, 24(5):1431–1447, 2014。[GS20] Tsachik Gelander 和 Raz Slutsky。李群中格的生成集最小大小。 *Journal of Lie Theory*, 30(1):33–40, 2020。[GS25] Tsachik Gelander 和 Raz Slutsky。定量塞尔伯格引理。 *Groups, Geometry and Dynamics* 2025 , , . [Ham14] Ian Hambleton。拓扑球面空间形式，2014 年。

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. 剑桥大学出版社，2002年。可在 https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf 获取。[Ill78] S¨oren Illman. 有限群作用下 G流形的光滑等变三角剖分。 *Mathematische Annalen*，233:199–220，1978年。[Jor 78] M Camille Jordan. 关于具有代数积分的线性微分 ′方程的回忆录。[Laz21] Nir Lazarovich. 双曲群的体积与复杂度。[Laz25] Nir Lazarovich. 双曲群的有限指数刚性。[LS22] Alexander Lubotzky and Raz Slutsky. 高秩算术格生成元渐近数量的研究。[L¨uc 94] Wolfgang L¨uck. 用有限维类似物逼近 L^2不变量。 *Geometric and Functional Analysis*, 4(4):455–481，1994年。[MB84] John Morgan and Hyman Bass，编者。 *The Smith Conjecture*。学术出版社，纽约，1984年。[Mil63] John Willard Milnor. *Morse theory*。第51号。普林斯顿大学出版社，1963年。[MW11] Tibor Macko and Christian Wegner. 假透镜空间的分类。*Forum Mathematicum*，23(5):1053–1091，2011 年。[MZ54] Deane Montgomery and Leo Zippin. 变换群的例子。[Pet71] Ted Petrie. 亚循环群在同伦球面上的自由作用。[Put18] Andrew Putman. 史密斯理论与Bredon同调。讲义，2018年。可在 https://www3.nd.edu/~andyp/notes/SmithTheory.pdf 获取。[Sam13] Iddo Samet. 有限体积轨形的贝蒂数。 *Geometry & Topology*，17 2 1113 1147，2013年。 [Sen23] Hartwig Senska. 双曲轨形的同调界。 *Geometriae Dedicata* 217 3, 2023 。[Wei94]

Charles A. Weibel.

An Introduction to Homological Algebra 38 *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* , 1994

An Introduction to Homological Algebra 38 *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* 1994 卷。剑桥大学出版社，

An Introduction to Homological Algebra 38 *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* 1994 。

[Zim17] Bruno P Zimmermann. 有限非标准群在球面上的拓扑作用。 *Monatshefte für Mathematik*，183(1):219–223，2017年。

G.Kapon,

Department of Mathematics Weizmann Institute of Science 234 , , , , R. Herzl Street Rehovot 76100 Israel.

Slutsky, Mathematical Institute University of Oxford Andrew Wiles , , Building Oxford OX2 6GG United Kingdom.

, , ,*E-mail address:* slutsky@maths.ox.ac.uk