arXiv:2602.08637v1 [math.AG] 9 Feb 2026

与伪极化相关的斯帕尔滕斯坦簇

XUEQING WEN 和 YAOXIONG WEN

Abstract. 我们引入经典李代数 B、C、D 型中幂零轨道的极小 Richardson 轨道与伪极化。对于任意幂零轨道，我们对包含它的所有极小 Richardson 轨道进行分类，从而确定相关的伪极化。我们证明，相应的斯帕尔滕斯坦簇光滑且具有纯维数，并带有迭代正交／各向同性 Grassmann 丛。作为应用，我们将 Fu–Ruan–Wen 的跷跷板性质与对偶性从 Richardson 轨道推广到 B 型和 C 型中的所有特殊轨道。

1. Introduction

设 G 是一个李代数为 $\mathfrak{g}$ 的约化群，并令 $\mathcal{N} \subset \mathfrak{g}$ 表示幂零锥。对于一个幂零元 $e \in \mathfrak{g}$，其伴随轨道 $G \cdot e =: \mathbf{O}_e$ 称为一个幂零轨道。

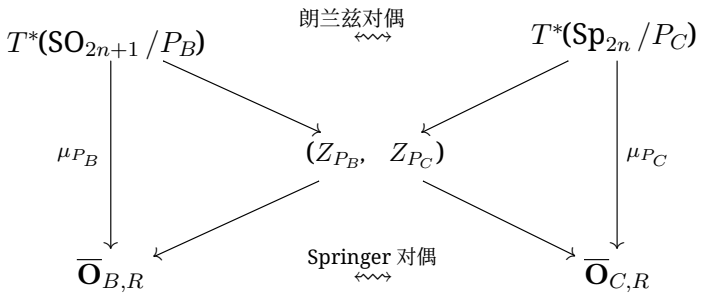
幂零轨道 $\mathbf{O}_R$ 称为 *Richardson*，若存在抛物子群 $P \subset G$，使得矩映射（或广义 *Springer* 映射）的像

$$\mu_P : T^*(G/P) \longrightarrow \mathfrak{g}$$

与闭包 $\mathbf{O}_R$重合。此时，P称为一个 极化，对应于$\mathbf{O}_R$。一个 Richardson 轨道可以容许若干不同的极化。一般而言，μ_P 是一般有限的；若它是双有理的，则它是保正则体积形式的。此外，幂零轨道闭包的正规化的任一保正则体积形式的消解均以这种方式产生 [Fu03]。在 A 型中，每个幂零轨道都是 Richardson 的，且相应的广义Springer映射 μ_P 总是保正则体积形式的。

在 [FRW24]，中，Fu、Ruan 与第二作者研究了 B 型和 C 型中的 Richardson 轨道，并发现了施普林格对偶与 Langlands 对偶之间的一个显著联系。更确切地说，若$\mathbf{O}_{B,\,R}$与 $\mathbf{O}_{C,\,R}$是带有对偶极化 $(P_B,\ P_C)$ 的 Springer 对偶 Richardson 轨道（即 P_B 与 P_C 的列维因子是朗兰兹对偶的），则有如下图

(1.1)



以及跷跷板恒等式

$$\deg \mu_{P_B} \cdot \deg \mu_{P_C} = \#\overline{A}(\mathbf{O}_{B,R}) = \#\overline{A}(\mathbf{O}_{C,R}),$$

其中 $\overline{A}(-)$ 表示 Lusztig 的典范商。此外，Stein 分解对 (Z_{P_B}, Z_{P_C}) 构成一个镜像对，因为它们具有相同的弦式霍奇数 [FRW24]。

尽管这些结果揭示了 Langlands 对偶与施普林格对偶之间的深刻联系，但它们仅适用于 Richardson 轨道。然而，施普林格对偶的定义范围更广，涵盖了特殊 幂零轨道这一大类，其中许多轨道并非 Richardson 轨道，因此在通常意义下不具有极化，因而无法在

通常意义上定义极化。这使得上述跷跷板图景无法直接推广到 Richardson 情形之外。

本文的主要动机是通过引入一种适用于任意幂零轨道的广义极化概念，克服这一障碍。

定义 1.1。 设$\mathbf{O}_e$ 是 B、C 或 D 型的一个幂零轨道。与$\mathbf{O}_e$ 相关的一个极小理查森轨道 $\mathbf{O}_R$是同一类型的 Richardson 轨道，并满足：(i) $\mathbf{O}_R \supset \mathbf{O}_e$；(ii) 在所有这类 Richardson 轨道中，$\mathbf{O}_R$ 关于闭包序是极小的。

伪极化 是与$\mathbf{O}_e$相关的一个极小 Richardson 轨道$\mathbf{O}_R$ 的任意极化 P。

在命题3.3、3.4和3.5中，我们对给定幂零轨道的所有极小 Richardson 轨道进行了分类$\mathbf{O}_e$，由此可以确定$\mathbf{O}_e$ 的所有伪极化，见注 3.6。

固定这样的伪极化 P 后，我们接着研究相应广义 Springer 映射的纤维的几何性质。具体而言，我们考虑限制后的图表

$$\begin{array}{ccc} & & T^*(G/P) \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle \mu_P} \\ \mathbf{O}_e & \hookrightarrow & \overline{\mathbf{O}}_R \end{array} \tag{1.2}$$

对于 $e \in \mathbf{O}_e$，纤维 $\mu_P^{-1}(e)$ 称为与 相关联的斯帕尔滕斯坦簇 $(G,\ P,\ e)$。一般而言，斯帕尔滕斯坦簇既不光滑也不可约。即使在存在仿射铺砌的情形下 [Spa76、Spa83、CLP88、DCM22],，仍可能出现奇点。

此外，与斯普林格纤维不同，斯帕尔滕斯坦簇不一定具有纯维数 [Spa82，§ 11。6]尽管如此，目前对于一般情形下何时成立纯维性，我们所知仍相对有限。当 P 是一个 Borel 子群时，斯普林格纤维具有纯维性；根据 Spaltenstein 和 Steinberg 的工作 [Ste74、Spa76、Spa77]，所有 A 型斯帕尔滕斯坦簇也都具有纯维性。此外，Li [Li20] 证明，对于 B、C、D 型，只要幂零轨道的分拆 $[1^{w_1}, 2^{w_2}, 3^{w_3}, \ldots]$ 满足 $w_i w_{i+1} = 0$ 对所有 i均成立，纯维性就成立。

我们的主要几何结果如下。

定理 1.2（定理 4.3、4.4、4.5）。 对于任意 B、C 或 D 型的幂零轨道 $\mathbf{O}_e$ 及任意伪极化 P，约化 Spaltenstein 簇 $\mu_P^{-1}(e)^{\mathrm{red}}$ 是点上的迭代纤维化，其中每个纤维都同构于正交 Grassmann 流形或各向同性 Grassmann 流形。在此特别地，$\mu_P^{-1}(e)^{\mathrm{red}}$ 是光滑的且具有纯维数。

这一结果与经典情形形成鲜明对比：尽管次正则轨道本身就是 Richardson 轨道，次正则 Springer 纤维通常是奇异的。这里得到的光滑性证实，极小 Richardson 轨道和伪极化在特殊轨道情形下刻画了极化的正确几何替代。

回到 B 型和 C 型，设 $\mathbf{O}_B$ 和 $\mathbf{O}_C$ 为 Springer 对偶的特殊轨道。设 $\mathbf{O}_{B,R}$ 为 $\mathbf{O}_B$的一个极小 Richardson 轨道。根据命题 5.1，其 Springer 对偶 $\mathbf{O}_{C,R}$ 是 $\mathbf{O}_C$的一个极小 Richardson 轨道。选择朗兰兹对偶的伪极化 P_B和 P_C，我们得到



令 $\#\mu_{P_B}^{-1}(e_B)$ 和 $\#\mu_{P_C}^{-1}(e_C)$ 分别表示对应斯帕尔滕斯坦簇的连通分支数。

定理 1.3 (定理 5.2)。 采用上述记号:

(1) 有如下广义跷跷板恒等式

$$\#\mu_{P_B}^{-1}(e_B)\cdot\#\mu_{P_C}^{-1}(e_C)=\#\overline{A}(\mathbf{O}_B)=\#\overline{A}(\mathbf{O}_C),$$

其中 $\overline{A}(\mathbf{O})$ 是 Lusztig 的典范商。

$\mu_{P_B}^{-1}(e_B)$ 和 $\mu_{P_C}^{-1}(e_C)$ 的连通分支具有相同的 E-多项式。

第 (1) 部分将（1.1）中的结果从 Richardson 轨道推广至所有特殊轨道。尽管我们目前还无法构造特殊轨道闭包的镜像有限覆盖，但斯帕尔滕斯坦簇的性质为更广泛的 Springer–Langlands–镜像对应提供了有力的几何证据。

最后，我们指出，特殊轨道在现代几何表示论中发挥着核心作用。在 [WWW24], 中，研究表明，在 B 型和 C 型中，两个特殊轨道互为 Springer 对偶，当且仅当它们对应的剩余幂零 Hitchin 系统具有同构的 Hitchin 底空间；在 [WWW25],中，我们证明了，D 型轨道是特殊轨道，当且仅当其剩余幂零 Hitchin 系统的一般纤维是一个托森，且其作用群是一个自对偶阿贝尔簇。本研究自然融入了这一新兴图景。

论文结构。第2 节回顾 B/C/D 型中的分拆、特殊轨道和 Richardson 轨道。第3 节对极小 Richardson 轨道和伪极化进行分类。第4 节证明 Spaltenstein 簇具有迭代正交／各向同性 Grassmann 丛的描述。最后，第5 节为 B 型和 C 型中互为 Springer 对偶的特殊轨道建立 E-多项式对偶性和广义跷跷板恒等式。

致谢。 我们谨向傅宝华教授、阮勇斌教授和 Bin Wang 致以谢意，感谢他们给予的诸多宝贵讨论。Y. Wen 感谢 Woonam Lim 在作者于延世大学访学期间给予的支持，本工作正是在此期间完成的。

2. Preliminaries on nilpotent orbits

设 G 为一个复约化群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。取一个幂零元 $e\in\mathfrak{g}$，其伴随轨道 $\mathbf{O}_e:=G\cdot e$ 称为幂零轨道。下文将重点讨论 B、C、D 型，即 $G=\mathrm{SO}_{2n+1}$，Sp_{2n} 或 SO_{2n}。我们用“$\equiv$”表示模 2 同余。

已知经典型的幂零轨道可由某些类型的分拆刻画。详情请参见 [CM93]。在本文讨论中，我们不区分分拆与其所标记的幂零轨道。固定一个整数 N。我们用 $\mathcal{P}(N)$ 表示分拆集$\mathbf{d}=[d_1\geq d_2\cdots\geq d_r]$，其元素为 N。

对于 $\varepsilon=\pm1$，我们定义:

$$\mathcal{P}_\varepsilon(N)=\big\{[d_1,\dots,d_r]\in\mathcal{P}(N)\;\big|\;\sharp\{j\mid d_j=i\}\equiv 0\text{ for }\forall i\ (-1)^i=\varepsilon\big\}.$$

众所周知， $\mathcal{P}(N)$、 $\mathcal{P}_1(2n+1)$ 和 $\mathcal{P}_{-1}(2n)$ 分别与 $\mathfrak{sl}_N$、 $\mathfrak{so}_{2n+1}$ 和 $\mathfrak{sp}_{2n}$ 中的幂零轨道一一对应。对于 $\mathcal{P}_1(2n)$，除了一些特殊情形外，这种对应关系均成立；在这些特殊情形中，$\mathbf{d}_D\in\mathcal{P}_1(2n)$ 的所有部分均为偶数。相应的轨道 $\mathbf{O}_{\mathbf{d}_D}$ 称为非常偶。作为 SO_{2n}-轨道，它有两个连通分支：$\mathbf{O}_{\mathbf{d}_D}=\mathbf{O}^I_{\mathbf{d}_D}\bigsqcup\mathbf{O}^{II}_{\mathbf{d}_D}$。

集合 $\mathcal{P}(N)$ 按如下方式偏序:

$$\mathbf{d}=[d_1,\dots,d_N]\geq\mathbf{f}=[f_1,\dots,f_N]\iff\sum_{j=1}^{k}d_j\geq\sum_{j=1}^{k}f_j,\quad\text{for all}\quad 1\leq k\leq N.\tag{2.1}$$

由此在 $\mathcal{P}_{\pm 1}(N)$ 上诱导一个偏序，该偏序与由闭包的包含关系给出的幂零轨道上的偏序相一致（参见 [CM93，定理 6.2。5]）。利用这一偏序，幂零轨道 $\mathbf{O_d}$ （分拆为 $\mathbf{d}$ ）的闭包定义为所有较小轨道的并

$$\overline{\mathbf{O}}_{\mathbf{d}} = \bigsqcup_{\mathbf{f} \leq \mathbf{d}} \mathbf{O}_{\mathbf{f}}.$$

对于 $\mathcal{P}(2n+1)$ 中的一个分拆$\mathbf{d} = [d_1, \ldots, d_r]$，在 $\mathcal{P}_1(2n+1)$ 中存在一个唯一的最大分拆，它被$\mathbf{d}$支配。这个分拆称为$\mathbf{d}$的 B–坍缩，记作$\mathbf{d}_B$。 B–坍缩可按如下方式计算：如果$\mathbf{d}$ 尚未属于 $\mathcal{P}_1(2n+1)$，则其至少一个偶数部分的重数必为奇数。令 q 为满足条件的最大部分。将$\mathbf{d}$中 q 的最后一次出现替换为 $q-1$，并将其后第一个严格小于 $q-1$ 的部分 r 替换为 $r+1$。这个过程称为坍缩。重复此过程，直到得到一个属于 $\mathcal{P}_1(2n+1)$ 的分拆，记作$\mathbf{d}_B$。从几何上看，设$\mathbf{O_d}$ 是 $\mathfrak{sl}_{2n+1}$ 中的一个幂零轨道，则 $\mathbf{O}_{\mathbf{d}_B} = \mathbf{O_d} \cap \mathfrak{so}_{2n+1}$。 — —

类似地，对于 $2n$ 的任意一个分拆，都存在唯一最大的分拆 $\mathbf{d}^{D/C}$，它被该分拆支配且属于 $\mathcal{P}_{\pm 1}(2n)$，称为 $\mathbf{d}$ 的 D/C–坍缩。计算 $\mathbf{d}^{D/C}$ 的过程与计算 $\mathbf{d}_B$ 的过程类似。

为简化后续结果，我们引入若干特定类型的分拆作为构件：

对于 B 型：

- B1型：$[\alpha, \alpha]$，其中 $\alpha \equiv 1$。
- B1* 型：$[\beta, \beta]$，其中 $\beta \equiv 0$。
- B2 型：$[\alpha_1, \beta_1, \beta_1, \beta_2, \beta_2, \ldots, \beta_k, \beta_k, \alpha_2]$，其中 $\alpha_1 > \beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_k > \alpha_2$、$\alpha_i \equiv 1$、$\beta_j \equiv 0$ 和 $k \geq 0$。
- B3 型：$[\alpha_1, \beta_1, \beta_1, \beta_2, \beta_2, \ldots, \beta_k, \beta_k]$，其中条件与 B2 型相同。

对于 C 型，我们定义：

- C1 型：$[\alpha, \alpha]$，其中 $\alpha \equiv 1$。
- C1*型：$[\beta, \beta]$，其中 $\beta \equiv 0$。
- C2 型：$[\beta_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_k, \beta_2]$，满足 $\beta_1 > \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_k > \beta_2 \geq 0$、[1]$\alpha_i \equiv 1$、$\beta_j \equiv 0$，以及 $k \geq 0$。

对于 D 型：

- D1型：$[\alpha, \alpha]$，其中 $\alpha \equiv 1$。
- D1* 型：$[\beta, \beta]$，其中 $\beta \equiv 0$。
- D2 型：$[\alpha_1, \beta_1, \beta_1, \beta_2, \beta_2, \ldots, \beta_k, \beta_k, \alpha_2]$，与 B2 型相同。

于是，我们可以利用上述构件唯一地重写幂零轨道的分拆：

引理 2.1. 对于标记 B、C 或 D 型幂零轨道的任意分拆$\mathbf{d}$，都可以将其唯一地重写为：

$$\mathbf{d} = [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_m]$$

其中，块$\mathbf{T}_i$ 对应于上述列出的类型；对于 B 型，我们进一步只要求$\mathbf{T}_m$ 属于 B3 型。

注 2.2. 这些分解在抛物 Hitchin 系统中发挥着至关重要的作用，为理解局部抛物 Higgs 丛的结构及其分解提供了框架。更多详情请参见 [WWW24，WWW25]。

[1] β_2 可以为 0。如果 $\beta_2 = 0$，我们省略 β_2。

根据 Springer [Spr76，定理 6。10], 存在一个单射，将魏尔群的不可约表示映射到由幂零元与分支群的不可约表示组成的对的等价类中。具体而言：

$$\mathrm{Irr}(W) \hookrightarrow \{(e,\rho)\}/G,$$

其中 $e \in \mathfrak{g}$ 是一个幂零元，而 $\rho \in \mathrm{Irr}(A(\mathbf{O}_e))$。这里， $A(\mathbf{O}_e) = G^e_{ad}/(G^e_{ad})^\circ$ 是与伴随群 G_{ad} 相关的分支群。对于来自特殊表示的对 (X,ρ)， ρ 自动平凡。在这种情况下，我们称幂零轨道 $\mathbf{O}_e$ 为特殊。

给定一个分拆 $\mathbf{d} = [d_1,\ldots,d_r]$，其转置分拆 $\mathbf{d}^t$ 定义为

$$d_i^t = \sharp\left\{j \;\middle|\; d_j \geq i\right\}, \quad \text{for all } i.$$

定义 2.3。若分拆 $\mathbf{d} \in \mathcal{P}_\varepsilon(N)$ 满足以下条件，则称其为特殊

- 对于 $\varepsilon = -1$ 和 $N = 2n$，转置分拆 $\mathbf{d}^t$ 属于 $\mathcal{P}_{-1}(2n)$,
- 对于 $\varepsilon = 1$ 和 $N = 2n+1$，转置分拆 $\mathbf{d}^t$ 属于 $\mathcal{P}_1(2n+1)$,
- 对于 $\varepsilon = 1$ 和 $N = 2n$，转置分拆 $\mathbf{d}^t$ 属于 $\mathcal{P}_{-1}(2n)$。

设 $\mathbf{d} = [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_m]$ 如引理 2.1所述。则特殊分拆有如下刻画：

引理 2.4。

- B 型：$\mathbf{d}$ 是特殊的，当且仅当它不含 B1* 型块。
- D 型：$\mathbf{d}$ 是特殊的，当且仅当它不含形如 $[\alpha_1,\beta_1,\beta_1,\ldots,\beta_k,\beta_k,\alpha_2]$ 且满足 $k \geq 1$ 的 D2 型块。
- C 型：$\mathbf{d}$ 是特殊的，当且仅当它不含 C2 型块或形如 $[\beta_1,\alpha_1,\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\alpha_k,\beta_2]$ 且满足 $k \geq 1$ 的块。

证明。这直接源自 [CM93第100]页给出的特殊分拆的另一种刻画。特别是，关于不存在块（B1* 型、D2 型且 $k \geq 1$，以及 C2 型且 $k \geq 1$）的所述条件，与用转置分拆给出的刻画一致。□

在特殊轨道中，有些轨道更加特殊，即*Richardson* 轨道。设 G为 SO_{2n+1}、Sp_{2n} 或 SO_{2n}。如果存在一个抛物子群 $P < G$，使得矩映射的像（也称为广义 *Springer* 映射）

$$T^*(G/P) \longrightarrow \overline{\mathbf{O}}_R, \tag{2.2}$$

是$\mathbf{O}_R$的闭包。抛物子群 P 称为 Richardson 轨道$\mathbf{O}_R$的极化 。

设 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon$, $\varepsilon = 1$ （分别为 -1）是 $\mathbb{C}^N$ 上的双线性形式，对应于 $N = 2n+1$ 或 $2n$ （分别为 $N = 2n$），具体取决于李代数 $\mathfrak{g}$的类型。 G 的每个抛物子群都是某个可容许各向同性旗的稳定子：[2]

$$\mathbb{C}^N = F_0 \supset F_1 \cdots \supset F_{k-1} \supset F_k \supset F_k^\perp \supset F_{k-1}^\perp \supset \cdots \supset F_1^\perp \supset F_0^\perp = \{0\}, \tag{2.3}$$

其中 $F_i^\perp$表示 相对于双线性形式 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_\varepsilon$， F_i 的正交补。Le t

$$p_i = \dim(F_i/F_{i-1}) \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \quad \text{and} \quad q = \dim(F_k^\perp/F_k).$$

注意， $2\sum_{i=1}^k p_i + q = N$，并且

$$\mathfrak{l} \cong \mathfrak{gl}_{p_1} \times \ldots \times \mathfrak{gl}_{p_k} \times \mathfrak{g}', \tag{2.4}$$

其中 $\mathfrak{g}'$与 $\mathfrak{g}$具有相同的类型。我们进一步要求 $p_1 \leq \ldots \leq p_k$，并称该旗标的类型为 $(p_1, \ldots, p_k; q)$。

[2]当 $\varepsilon = 1$ 时， *admissible condition* 要求 $q \neq 2$。

若 $P < G$ 的李代数为 $\mathfrak{p}$，且是$\mathbf{O}_R$的极化，则$\mathbf{O}_R$ 的分拆由分拆 $\vec{\mathbf{1}} = \{\mathbf{1}_1, \dots \mathbf{1}_k$ 诱导； $\mathbf{1}_0\}$，其中每个 $\mathbf{1}_i = [1_{i1}, \dots, 1_{ip_i}]$ 对应于 $\mathfrak{gl}_{p_i}$ 中 p_i 的一个分拆（由若干个 1 组成），当 $i = 1, \dots, k$ 时，而 $\mathbf{1}_0 = \left[1_{i1}, \dots, 1_{ir_i'}\right]$ 是 $\mathfrak{g}'$ 中的一个分拆。考虑新的分拆

$$\mathbf{d} = [d_1, \dots, d_r], \quad \text{with} \quad d_j = 2\sum_{i=1}^{k} 1_{ij} + 1_{0j}. \tag{2.5}$$

这里采用如下约定：若下标 j 超出 $\mathbf{1}_i$的下标范围，则取 $1_{ij} = 0$。 $\mathbf{O}_R$ 的分拆是 $\mathbf{d}$的 B/C/D-塌缩，记作 $\mathbf{d}^{B/C/D}$。更多详情请参见 [CM93，§ 7]。

众所周知，在共轭作用下，极化的数量有限。若两个抛物子群具有共轭的 Levi 子群，则称它们相伴。用 Pol($\mathbf{O}_R$) 表示其相伴极化的代表元集合。该集合在抛物覆盖的镜像对称中发挥重要作用；更多详情请参见 [FRW24] 。

分拆$\mathbf{d}$具有如下性质：它可以根据奇偶性分成两部分。具体而言：

$$\mathbf{d} = [\mathbf{Odd} \mid \mathbf{Even}] \tag{2.6}$$

其中

$$\mathbf{Odd} = [d_1 \equiv \dots \equiv d_l \equiv 1] \quad \text{and} \quad \mathbf{Even} = [d_{l+1} \equiv \dots \equiv d_r \equiv 0].$$

这一观察可用于确定哪些幂零轨道是 Richardson 轨道。Spaltenstein 最先计算了 Richardson 轨道的极化（未发表）。Hesselink 在 [Hes78], 中给出了证明和描述，而 Kempken 在 [Kem83]中提供了另一种解释。B、C、D 型 Richardson 轨道的描述如下：

B 型:
分拆 $\mathbf{d}_B = [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_m]$ 是 Richardson 分拆，当且仅当

1. 不存在 B1* 型块。2. 存在一个整数 l ，使得:
   - 对于 $i < l$， $\mathbf{T}_i$ 要么是 B1 型，要么是形如 $[\alpha_1, \alpha_2]$ 的 B2 型。
   - 对于 $i = l$， $\mathbf{T}_l$ 是形如 $[\alpha_1, \beta_1, \beta_1, \dots, \beta_k, \beta_k, \alpha_2]$ 且满足 $k \geq 1$ 的 B2 型。
   - 对于 $l + 1 \leq i \leq m - 1$， $\mathbf{T}_i$ 是 B2 型。
   - 对于 $i = m$， $\mathbf{T}_m$ 是 B3 型。

C 型:
分拆 $\mathbf{d}_C = [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_m]$ 是 Richardson 分拆，当且仅当

1. 不存在形如 $[\beta_1, \alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_k, \beta_2]$ 且满足 $k \geq 1$ 的 C2 型块。2. 存在一个整数 l 使得:
   - 对于 $i < l$， $\mathbf{T}_i$ 是 C1 型、C1*型或形如 $[\beta_1, \beta_2]$ 且满足附加条件的 C2 型，其中$\mathbf{T}_i$ 的最后一部分与$\mathbf{T}_{i+1}$ 的第一部分不同。
   - 对于 $i = l$， $\mathbf{T}_l$ 是 C1 型。
   - 对于 $i \geq l + 1$， $\mathbf{T}_i$ 为 C1*型。

D 型:
一个分拆 $\mathbf{d}_D = [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_m]$ 是 Richardson 的，如果

1. 不存在形如 $[\alpha_1, \beta_1, \beta_1, \dots, \beta_k, \beta_k, \alpha_2]$ with $k \geq 1$ 的 D2 型块。2. 存在一个整数 l ，使得:

- 对于 $i < l$，$\mathbf{T}_i$ 要么是 D1型，要么是形如 $[\alpha_1, \alpha_2]$ 的 D2 型。
- 对于 $i = l$，$\mathbf{T}_l$ 是 D1* 型。
- 对于 $i \geq l+1$，$\mathbf{T}_i$ 或者是 D1 型、D1* 型，或者是形如 $[\alpha_1, \alpha_2]$ 的 D2 型，并且满足附加条件：$\mathbf{T}_i$ 的最后一部分与$\mathbf{T}_{i+1}$ 的第一部分不同。

3. Minimal Richardson and pseudo-polarizations

在本小节中，我们将 Richardson 轨道的极化这一概念推广到所有幂零轨道。

定义3.1 (极小理查森轨道)。 设$\mathbf{O}_e$ 是 B、C 或 D 型的一个幂零轨道。若一个极小理查森轨道 $\mathbf{O}_R$ 对应于 $\mathbf{O}_e$ 是同一类型的 Richardson 轨道，且 $\mathbf{O}_R \supset \mathbf{O}_e$并且 $\mathbf{O}_R$ 相对于偏序（2.1）是极小的。

定义3.2 （伪极化）。 伪极化 是指对$\mathbf{O}_e$ 的任意极化 P，其中该极化对应于$\mathbf{O}_e$的任意一个极小 Richardson 轨道$\mathbf{O}_R$。

下文中，给定一个幂零轨道$\mathbf{O}_e$，我们将刻画其所有极小 Richardson 轨道。伪极化的刻画将在后文讨论。

B 型：设$\mathbf{d}_B = [d_1, d_2, \ldots, d_r] = [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_m]$ 是与$\mathbf{O}_e^B$相关联的分拆，其中$\mathbf{O}_e^B$是一个 B 型幂零轨道。下面我们将介绍对块$\mathbf{T}_i$ 的一些修改，这些修改有助于构造极小 Richardson 轨道。

B 型块的修改：

1. 对于 B1 型块：
   如果$\mathbf{T}_i$ 是 B1 型，即$\mathbf{T}_i = [\alpha, \alpha]$，我们定义
   $$\mathbf{T}_i' = [\alpha+1, \alpha-1], \quad \mathbf{T}_i'' = [\alpha, \alpha],$$
2. 对于 B1* 型块：
   若$\mathbf{T}_i$ 属于 B1* 型，即$\mathbf{T}_i = [\beta, \beta]$，我们定义
   $$\mathbf{T}_i^\circ = [\beta+1, \beta],$$
   and
   $$\mathbf{T}_i' = [\beta, \beta], \quad \mathbf{T}_i'' = [\beta+1, \beta-1],$$
3. 对于 B2 型块：
   若$\mathbf{T}_i$属于 B2 型，即$\mathbf{T}_i = [\alpha_1, \beta_1, \beta_1, \ldots, \beta_k, \beta_k, \alpha_2]$，我们定义
   $$\mathbf{T}_i^\circ = [\alpha_1, \beta_1, \beta_1, \ldots, \beta_k, \beta_k, \alpha_2+1],$$
   $$\mathbf{T}_i' = [\alpha_1-1, \beta_1, \beta_1, \ldots, \beta_k, \beta_k, \alpha_2+1],$$
   and
   $$\mathbf{T}_i'' = [\alpha_1, \beta_1', \beta_1', \ldots, \beta_k', \beta_k', \alpha_2]$$
   其中$\mathbf{T}_i''$是$\mathbf{T}_i''$的重排
   $$[\alpha_1, \beta_1+1, \beta_1-1, \ldots, \beta_k+1, \beta_k-1, \alpha_2]$$
   使得 $\beta_1' \geq \beta_2' \geq \ldots \geq \beta_k'$。
4. 对于 B3 型块：
   唯一的 B3 型块是 $\mathbf{T}_m = [\alpha, \beta_1, \beta_1, \ldots, \beta_k, \beta_k]$。我们定义
   $$\mathbf{T}_i^\circ = [\alpha, \beta_1, \beta_1, \ldots, \beta_k, \beta_k],$$
   and
   $$\mathbf{T}_i' = [\alpha-1, \beta_1, \beta_1, \ldots, \beta_k, \beta_k].$$

Let

$$I_e^B = \{\mathbf{T}_{i_1}, \mathbf{T}_{i_2}, \ldots\}$$

是 $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_m\}$ 的子集，按如下方式归纳定义。在此过程中，即使 $\beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$，我们仍将 $\mathbf{T}_m$ 保持为$[\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_k]$。

- 初始块 $\mathbf{T}^{i_1}$:
  令$\mathbf{T}^{i_1}$ 为第一个包含 d_{2l_1} 且满足以下条件的块

$$d_{2l_1} = d_{2l_1+1} \equiv 0 \quad \text{for some } l_1.$$

- 后续块 $\mathbf{T}^{i_j}$:
  对于 $j > 1$，令 $\mathbf{T}^{i_j}$ 为第 j 个包含 d_{2l_j} 且满足以下条件的块

$$d_{2l_j} = d_{2l_j+1} \equiv 0 \quad \text{for some } l_j,$$

  并且存在满足以下条件的 l'_j

$$l_{j-1} < l'_j < l_j, \quad \text{with } d_{2l'_j+1} = d_{2l'_j+2} \equiv 1.$$

对于$\mathbf{T}_{i_a} \in I_e^B$，定义分拆

$$\mathbf{d}_{i_a} = [d'_1, d'_2, \ldots, d'_r]$$

为.....的重排

$$[\mathbf{T}''_1, \ldots, \mathbf{T}''_{i_a-1}, \mathbf{T}^{\circ}_{i_a}, \mathbf{T}'_{i_a+1}, \ldots, \mathbf{T}'_m]$$

使得 $d'_1 \geq d'_2 \geq \ldots \geq d'_r$。
与$\mathbf{T}^{i_a}$ 相关联的最小 Richardson 轨道是$\mathbf{d}^{i_a}$的 B-塌缩，记作

$$\mathbf{d}_{i_a}^B := (\mathbf{d}_{i_a})_B.$$

命题3.3。 $\mathbf{O}_e^B$的所有极小 Richardson 轨道均由 I_e^B刻画，即它们构成集合

$$\{\mathbf{O}_{\mathbf{d}_{i_a}^B}\}_{\mathbf{T}_{i_a} \in I_e^B}.$$

证明。 首先，我们证明分拆 $\mathbf{d}_{i_a}^B$ 在偏序（2.1）下两两不可比。设 $i_\alpha < i_\beta$ 是 I_e^B中的两个指标。根据 I_e^B的定义以及块类型 B1、B1*、B2 和 B3，我们观察到 $i_\beta \geq i_\alpha + 2$。这意味着块 $\mathbf{T}^{i_\alpha}$ 和 $\mathbf{T}^{i_\beta}$ 之间至少隔着一个块。$\mathbf{O}_e^B$**的分拆 d** 可以表示为

$$\mathbf{d}_e = [\ldots, d_{2l_\alpha} = d_{2l_\alpha+1} \equiv 0, \ldots, d_{2l+1} = d_{2l+2} \equiv 1, \ldots, d_{2l_\beta} = d_{2l_\beta+1} \equiv 0, \ldots],$$

其中 $d_{2l_\alpha} \in \mathbf{T}^{i_\alpha}$ 和 $d_{2l_\beta} \in \mathbf{T}^{i_\beta}$。那么

$$\mathbf{d}_{i_\alpha} = [\ldots, d_{2l_\alpha}, d_{2l_\alpha+1}, \ldots, d_{2l+1} + 1, d_{2l+2} - 1, \ldots, d_{2l_\beta}, d_{2l_\beta+1}, \ldots],$$
$$\mathbf{d}_{i_\beta} = [\ldots, d_{2l_\alpha} + 1, d_{2l_\alpha+1} - 1, \ldots, d_{2l+1}, d_{2l+2}, \ldots, d_{2l_\beta}, d_{2l_\beta+1}, \ldots].$$

由于$[d_{2l_\alpha} + 1, d_{2l_\alpha+1} - 1] \geq [d_{2l_\alpha}, d_{2l_\alpha+1}]$和 $[d_{2l+1}, d_{2l+2}] \leq [d_{2l+1} + 1, d_{2l+2} - 1]$，$\mathbf{d}^{i_\alpha}$和 $\mathbf{d}^{i_\beta}$在偏序（2.1）下没有关系。但需要注意，B-塌缩可能会改变 $d_{2l+1} + 1$ 或 $d_{2l+2} - 1$。根据观察： $i_\beta \geq i_\alpha + 2$，存在两种情况:

(1) $\mathbf{d}_e = [\ldots, d_{2l} \equiv 1, d_{2l+1} = d_{2l+2} \equiv 1, \ldots]$，即 d_{2l+1}之前有一个 B1 型块。(2) $\mathbf{d}_e = [\ldots, d_{2l-1} = d_{2l} \equiv 0, d_{2l+1} = d_{2l+2} \equiv 1, \ldots]$，即 d_{2l+1}之前有一个 B1* 型块。

在第一种情况下，$\mathbf{d}^{i_\alpha}$ 和 $\mathbf{d}^{i_\beta}$ 变为

$$\mathbf{d}_{i_\alpha} = [\ldots, d_{2l}+1, d_{2l+1}+1, d_{2l+2}-1, \ldots],$$
$$\mathbf{d}_{i_\beta} = [\ldots, d_{2l}, d_{2l+1}, d_{2l+2}, \ldots].$$

$\mathbf{d}^{i_\alpha}$ 发生 B-坍缩 $d_{2l}+1$，因此 $\mathbf{d}^B_{i_\alpha} = [\ldots, d'_{2l}, d'_{2l+1}, \ldots] = [\ldots, d_{2l}, d_{2l+1}+1, \ldots]$。于是，$\mathbf{d}^B_{i_\alpha}$ 和 $\mathbf{d}^B_{i_\beta}$ 在偏序（2.1）下不可比较。类似地，在第二种情况下也有相同结论。因此，$\mathbf{d}^B_{i_\alpha}$ 和$\mathbf{d}^B_{i_\beta}$ 在偏序（2.1）下不可比较。

接下来，我们证明，对于 Richardson 轨道 $\mathbf{d}_R$ 的任意分拆 $\mathbf{O}_R$，若满足 $\mathbf{d}_R \geq \mathbf{d}_e$，则存在$\mathbf{T}_{i_a} \in I_e^B$使得 $\mathbf{d}_R \geq \mathbf{d}^B_{i_a}$。由于 $\mathbf{d}_R$ 是 Richardson 轨道，因此它不含 B1* 型块，并且存在一个整数 s

$$\mathbf{d}_R = [\overline{d}_1, \ldots, \overline{d}_{2s-1} \ldots, \overline{d}_{r'}] = [\overline{\mathbf{T}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{T}}_{h-1}, \overline{\mathbf{T}}_h, \overline{\mathbf{T}}_{h+1}, \ldots, \overline{\mathbf{T}}_{m'}]$$

满足 B 型 Richardson 轨道的条件，见 § 2。这里我们假设 $d_{2s-1} \equiv 1$ 是$\mathbf{T}_h$中的第一部分。那么，

$$\mathbf{d}_P = [\overline{\mathbf{T}}''_1, \ldots, \overline{\mathbf{T}}''_{h-1}, \overline{\mathbf{T}}^\circ_h, \overline{\mathbf{T}}'_{h+1}, \ldots, \overline{\mathbf{T}}'_{m'}]$$

是由极化 $P\,\mathrm{O}_R$诱导的分拆。令 l_α 为大于 s 的最小整数，使得对于某个属于 I_e^B 的$\mathbf{T}^{i_\alpha}$，有 $0 \equiv d_{2l_\alpha} \in \mathbf{T}^{i_\alpha}$，即:

$$\mathbf{d}_e = [d_1, \ldots, d_{2l_\alpha} = d_{2l_\alpha+1}, \ldots, d_r] = [\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_{i_\alpha}, \ldots, \mathbf{T}_m].$$

那么，只需证明

$$\mathbf{d}_P := [\overline{d}'_1, \ldots, \overline{d}'_{r'}] \geq \mathbf{d}_{i_\alpha} := [d'_1, \ldots, d'_r] = [\mathbf{T}''_1, \ldots, \mathbf{T}''_{i_\alpha-1}, \mathbf{T}^\circ_{i_\alpha}, \mathbf{T}'_{i_\alpha+1}, \ldots, \mathbf{T}'_m].$$

由于$\mathbf{d}_R \geq \mathbf{d}_e$，容易证明对于所有 $j \leq 2s = 2$，都有 $\sum_{i=1}^j d'_i \geq \sum_{i=1}^j d'_i$。若

(1) $d_{2s-1} \equiv 1$ 且 $d_{2s} = d_{2s+1} \equiv 0$; (2) $d_{2s-1} \equiv d_{2s} \equiv 1$; (3) $d_{2s-1} = d_{2s} \equiv 0$, 且 $d_{2s} = d_{2s+1}$; (4) $d_{2s-1} = d_{2s} \equiv 0$, 且 $d_{2s} \neq d_{2s+1}$。

在两种情形 (1)（$l_\alpha = s$）和 (2) 中，$d'_{2s-1} = d_{2s-1}$, $d'_{2s} = d_{2s}$，于是由 $\mathbf{d}_R \geq \mathbf{d}_e$ 可得，对所有 $j \leq 2s$，$\sum_{i=1}^j d'_i \geq \sum_{i=1}^j d'_i$。在情形 (3) 中，$l_\alpha = s+1$, $d'_{2s-1} = d_{2s-1}+1$, $d'_{2s} = d'_{2s+1} = d'_{2s+2} = d_{2s}$，于是对所有 $j \leq 2\overline{s}+2$，$\sum_{i=1}^j d'_i \geq \sum_{i=1}^j d'_i$。在情形 (4) 中，$d'_{2s-1} = d_{2s-1}+1$, $d'_{2s} = d_{2s}-1$，于是 $d'_{2s-1} \geq d'_{2s-1}$ 且 $d'_{2s^-} \geq d'_{2s}+1$。如果 d_{2s+1} 属于情形 (1)、(2) 或 (4)，则很容易证明，对所有 $j \leq 2\overline{s}+2$，$\sum_{i=1}^j d'_i \geq \sum_{i=1}^j d'_i$。如果 d_{2s+1} 属于情形 (3)，则 $l_\alpha = s+1$, $d'_{2s+1} = d_{2s+1}+1$, $d'_{2s+2} = d'_{2s+3} = d'_{2s+4} = d_{2s+1}$，并且由于 $d'_{2s^-} \geq d'_{2s}+1$，对所有 $j \leq 2s+4$，$\sum_{i=1^-}^j d'_i \geq \sum_{i=1}^j d'_i$。继续这一过程，最终得到 l_α，并证明对所有 $j \leq 2l_\alpha$，$\sum_{i=1}^j d'_i \geq \sum_{i=1}^j d'_i$。之后，根据 $\mathbf{T}'_j$ 的构造，可以证明对所有 j，$\sum_{i=1}^j d'_i \geq \sum_{i=1}^j d'_i$。因此，$\mathbf{d}_P \geq \mathbf{d}^{i_\alpha}$。□

C 型：设$\mathbf{d}_C = [d_1, d_2, \ldots, d_r] = [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_m]$为与$\mathbf{O}_e^C$相关联的分拆，后者是 C 型幂零轨道。类似地，我们对块$\mathbf{T}_i$作如下修改：

1. 对于 C1 型的块：若$\mathbf{T}_i = [\alpha, \alpha]$ 是 C1 型，我们定义

$$\mathbf{T}'_i = [\alpha+1, \alpha-1], \quad \mathbf{T}''_i = [\alpha, \alpha].$$

2. 对于 C1*型的块：
如果$\mathbf{T}_i = [\beta, \beta]$ 是 C1*型，我们定义

$$\mathbf{T}^\circ_i = \mathbf{T}'_i = [\beta, \beta], \quad \mathbf{T}''_i = [\beta+1, \beta-1].$$

3. 对于 C2 型的块:
若$\mathbf{T}_i = [\beta_1, \alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_k, \beta_2]$属于 C2 型，我们定义

$$\mathbf{T}'_i = [\beta_1, \alpha'_1, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_k, \alpha'_k, \beta_2]$$

其中$\mathbf{T}'_i$是以下对象的重排

$$[\beta_1, \alpha_1 + 1, \alpha_1 - 1, \ldots, \alpha_k + 1, \alpha_k - 1, \beta_2]$$

使得 $\alpha'_1 > \alpha'_2 > \ldots > \alpha'_k$。此外，我们定义

$$\mathbf{T}^\circ_i = \mathbf{T}''_i = [\beta_1 + 1, \alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_k, \beta_2 - 1].$$

Let

$$I_e^C = \{\mathbf{T}_{i_1}, \mathbf{T}_{i_2}, \ldots\}$$

是 $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_m\}$的子集，归纳定义如下:

- 初始块$\mathbf{T}^{i_1}$:
令 $\mathbf{T}^{i_1}$ 为第一个包含 d_{2l_1} 且满足

$$d_{2l_1} = d_{2l_1+1} \equiv 0 \quad \text{for some } l_1.$$

- 后续块 $\mathbf{T}^{i_j}$:
对于 $j > 1$，令 $\mathbf{T}^{i_j}$ 为包含 d_{2l_j} 且满足的第 j 个块

$$d_{2l_j} = d_{2l_j+1} \equiv 0 \quad \text{for some } l_j.$$

并且存在满足 l'_j 的

$$l_{j-1} < l'_j < l_j, \quad \text{with } d_{2l'_j+1} = d_{2l'_j+2} \equiv 1.$$

对于 $\mathbf{T}_{i_a} \in I_e^C$，定义分拆

$$\mathbf{d}_{i_a} = [d'_1, d'_2, \ldots, d'_r]$$

为{v1}的重新排列

$$[\mathbf{T}''_1, \ldots, \mathbf{T}''_{i_a-1}, \mathbf{T}^\circ_{i_a}, \mathbf{T}'_{i_a+1}, \ldots, \mathbf{T}'_m]$$

使得 $d'_1 \geq d'_2 \geq \ldots \geq d'_r$。
最　　小理查森轨道与$\mathbf{T}^{i_a}$相关联的是$\mathbf{d}_{i_a}$的 C-坍缩，记为

$$\mathbf{d}_{i_a}^C := (\mathbf{d}_{i_a})_C.$$

命题3.4. $\mathbf{O}_e^C$的所有极小 Richardson 轨道均由 I_e^C 刻画，即它们由如下集合给出

$$\{\mathbf{O}_{\mathbf{d}_{i_a}^C}\}_{\mathbf{T}_{i_a} \in I_e^C}.$$

证明。证明与命题3.3的证明类似。 □

D 型：设$\mathbf{d}_D = [d_1, d_2, \ldots, d_r] = [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots\ldots, \mathbf{T}_m]$为与$\mathbf{O}_e^D$相关联的分拆，而后者是一个 D 型幂零轨道。类似地，我们有诸块$\mathbf{T}_i$的如下修改:

1. 对于 D1 型的块:
如果$\mathbf{T}_i = [\alpha, \alpha]$是 D1 型的，我们定义

$$\mathbf{T}'_i = [\alpha + 1, \alpha - 1], \quad \mathbf{T}''_i = [\alpha, \alpha].$$

2. 对于 D1* 型的块:
若$\mathbf{T}_i = [\beta, \beta]$ 为 D1* 型，我们定义

$$\mathbf{T}^\circ_i = \mathbf{T}'_i = [\beta, \beta], \quad \mathbf{T}''_i = [\beta + 1, \beta - 1].$$

3. 对于 D2 型块:
若$\mathbf{T}_i = [\alpha_1, \beta_1, \beta_1, \ldots, \beta_k, \beta_k, \alpha_2]$为 D2 型，我们定义

$$\mathbf{T}_i^{\circ} = [\alpha_1, \beta_1 + 1, \beta_1, \beta_2, \beta_2 \ldots, \beta_k, \beta_k, \alpha_2 - 1],$$

and

$$\mathbf{T}_i' = [\alpha_1 + 1, \beta_1, \beta_1, \ldots, \beta_k, \beta_k, \alpha_2 - 1],$$
$$\mathbf{T}_i'' = [\alpha_1, \beta_1', \beta_1', \ldots, \beta_k', \beta_k', \alpha_2]$$

其中$\mathbf{T}_i''$是以下内容的重排

$$[\alpha_1, \beta_1 + 1, \beta_1 - 1, \ldots, \beta_k + 1, \beta_k - 1, \alpha_2]$$

使得 $\beta_1' \geq \beta_2' \geq \ldots \geq \beta_k'$。

Let

$$I_e^D = \{\mathbf{T}_{i_1}, \mathbf{T}_{i_2}, \ldots\}$$

为 $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_m\}$ 的子集，归纳定义如下:

- 初始块$\mathbf{T}^{i_1}$: 令$\mathbf{T}^{i_1}$ 为包含 $d_{2l_1-1} = d_{2l_1} \equiv 0$ 的第一个块，其中 l_1。
- 后续块 $\mathbf{T}^{i_j}$: 对于 $j > 1$，令 $\mathbf{T}^{i_j}$ 为包含 $d_{2l_j-1} = d_{2l_j} \equiv 0$ 的第 j 个块，其中 l_j，使得存在 l_j' 满足

$$l_{j-1} < l_j' < l_j, \quad \text{with } d_{2l_j'} = d_{2l_j'+1} \equiv 1.$$

对于 $\mathbf{T}_{i_a} \in I_e^D$，定义分拆

$$\mathbf{d}_{i_a} = [d_1', d_2', \ldots, d_r']$$

为.....的重排

$$[\mathbf{T}_1'', \ldots, \mathbf{T}_{i_a-1}'', \mathbf{T}_{i_a}^{\circ}, \mathbf{T}_{i_a+1}', \ldots, \mathbf{T}_m']$$

使得 $d_1' \geq d_2' \geq \ldots \geq d_r'$。
与$\mathbf{T}^{i_a}$ 相关联的最小 Richardson 轨道是$\mathbf{d}_{i_a}$的 D-坍缩，记作

$$\mathbf{d}_{i_a}^D := (\mathbf{d}_{i_a})_D.$$

命题3.5。 $\mathbf{O}_e^D$的所有最小 Richardson 轨道均由 I_e^D刻画，即它们构成集合

$$\{\mathbf{O}_{\mathbf{d}_{i_a}^D}\}_{\mathbf{T}_{i_a} \in I_e^D}.$$

证明。 证明与命题3.3的证明类似。 □

注 3.6. 相伴极化集合可以通过广义 Springer 映射的次数（2.2）来刻画，这一概念称为足迹。关于足迹这一概念的更多详情，请参见 [FRW24，§ 5.1]。结合 [FRW24引理 5.3]的结果与上述结果，可以明确确定足迹。

4. The geometry of Spaltenstein varieties

设$\mathbf{O}_e$是 B、C 或 D 型的一个幂零轨道，且$\mathbf{O}_R$是与 $I_e^\bullet$ 中某个元素相关联的最小理查森轨道。取一个相伴极化 P:

$$\mu_P : T^*(G/P) \to \overline{\mathbf{O}}_R \supset \mathbf{O}_e.$$

在本小节中，我们研究斯帕尔滕斯坦簇$\mu_P^{-1}(e)$。

在描述斯帕尔滕斯坦簇的几何性质之前，我们需要以下有用的引理:

引理 4.1。设 $V_i = \mathbb{C}^{n_i}$ 对于 $i = 1, \ldots, k$ 均带有非退化对称配对。考虑一组子空间 $\mathbf{W}$ $W \subset \bigoplus_{i=1}^k V_i$，使得

- W is isotropic,
- $\dim\left(W \bigcap \bigoplus_{i=1}^j V_i\right) = \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^j n_i}{2} \right\rfloor$,[3] for $j = 1, \ldots, k$.

那么，$\mathbf{W} \subset \mathrm{OG}\left(\left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^j n_i}{2} \right\rfloor, \bigoplus_{i=1}^k V_i\right)$。设 $\mathbf{W}^j = \mathbf{W} \cap \left(\oplus_{i=1}^j V_i\right)$，则

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_k \to \mathbf{W}_{k-1} \to \cdots \to \mathbf{W}_1,$$

其中，$\mathbf{W}_j \to \mathbf{W}^{j-1}$是一个 $\mathrm{OG}(m_j, N_j)$ 纤维化，此处 $m_j = \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^j n_i}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^{j-1} n_i}{2} \right\rfloor$ 和 $N_j = \sum_{i=1}^j n_i - 2\left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^{j-1} n_i}{2} \right\rfloor$。

证明。固定一个整数 $1 \le l < k$，并令 $\widetilde{V}_1 = \bigoplus_{i=1}^l V_i$ 和 $\widetilde{V}_2 = \bigoplus_{i=l+1}^k V_i$。首先注意，若 $\dim V_1 \equiv \dim V_2 \equiv 0$，则 $W = (W \cap V_1) \oplus (W \cap V_2)$。事实上，由于 W 是各向同性的，我们有 $W \subset (W \cap \widetilde{V}_1)^\perp \oplus \widetilde{V}_2$，其中 $(W \cap \widetilde{V}_1)^\perp$ 是 $W \cap \widetilde{V}_1$ 的正交补。注意 $\dim(W \cap \widetilde{V}_1) = \frac{1}{2}\dim \widetilde{V}_1$，因此 $W \cap \widetilde{V}_1$ 是极大各向同性的。于是，$(W \cap \widetilde{V}_1)^\perp = W \cap \widetilde{V}_1$。

那么，一般情形可通过对以下简单情形进行归纳来证明: $W \subset V_1 \oplus V_2$ 其中 $\dim V_1 \equiv 1$ 或 $\dim V_2 \equiv 1$。不失一般性，设 $\dim V_1 \equiv 1$，$\mathbf{W}_1 = \mathrm{OG}(\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor, V_1)$。我们有一个映射 $\varphi: \mathbf{W} \to \mathbf{W}_1$，将 $W \in \mathbf{W}$ 映到 $W_1 := (W \cap V_1) \in \mathbf{W}_1$。如上所述，$W \subset (W \cap V_1)^\perp \oplus V_2$，于是可以证明 $\varphi^{-1}(W_1) \cong \mathrm{OG}(\lfloor \frac{n_1+n_2}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor, W_1^\perp / W_1 \oplus V_2)$。□

引理 4.2。令 $V_i' = \mathbb{C}^{n_i'}$，对于 $i = 1, \ldots, k'$，赋予非退化斜对称配对。于是 $n_i' \equiv 0$，令 $m_i' = \frac{n_i'}{2}$。考虑一组 $\mathbf{W}'$ 子空间 $W' \subset \bigoplus_{i=1}^{k'} V_i'$，满足

- W' 是各向同性的,
- 维数为 $\left(W' \bigcap \bigoplus_{i=1}^j V_i'\right) = \sum_{i=1}^j m_i'$，其中 $j = 1, \ldots, k'$。

于是，$\mathbf{W}' \cong \prod_{i=1}^{k'}$ 各向同性格拉斯曼簇(m_i', n_i')。

证明。这是显然的。□

B 型: 设 $\mathbf{d}_B = [d_1, d_2, \ldots, d_r] = [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_m]$。取 $\mathbf{T}_{i_a} \in I_e^B$，令 $\mathbf{O}^{\mathbf{d}_{i_a}^B}$为与 $\mathbf{O}_e^B$对应的最小 Richardson 轨道。取任意一个极化 $P_B \in \mathrm{Pol}(\mathbf{O}^{\mathbf{d}_{i_a}^B})$，假设诱导出的分划（2.5）为

$$\mathbf{d} = [\widetilde{d}_1 \equiv \widetilde{d}_2 \equiv \ldots \equiv \widetilde{d}_{2l+1} \equiv 1, \widetilde{d}_{2l+2} \equiv \ldots \equiv \widetilde{d}_r \equiv 0].$$

我们定义以下两个整数集合:

- 令 $\{d_1' > d_2' > \ldots > d_k'\} \subset \{d_{2l+2}, \ldots, d_r\}$ 为特征奇数部分。对于 $i = 1, \ldots, k$，记 $n_i = \#\{d_j \in \mathbf{d}_B \mid d_j = d_i'\}$。
- 令 $\{d_1'' > d_2'' > \ldots > d_{k'}''\} \subset \{d_1, \ldots, d_{2l+1}\}$ 为特征偶数部分。记$n_i' = \#\{d_j \in \mathbf{d}_B \mid d_j = d_i''\}$，其中 $i = 1, \ldots, k'$。注意，$n_i' \equiv 0$。

[3]这里的$-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 表示小于 $\frac{n}{2}$ 的最大整数。

按照引理 **4.1**$_B$（分别按照引理 **4.2**$'_B$）构造，通过 $\{n_1,\dots,n_k\}$（分别通过 $\{n'_1,\dots,n'_{k'}\}$）。

定理 4.3。使用上述记号，斯帕尔滕斯坦簇 $\mu_{P_B}^{-1}(e)^{\mathrm{red}}$（取约化结构）

$$\mu_{P_B}:T^*(\mathrm{SO}_{2n+1}/P_B)\to\overline{\mathbf{O}}_{\mathbf{d}^B_{i_a}}\supset\mathbf{O}_e^B$$

与$\mathbf{W}_B\times_{\mathrm{pt}}\mathbf{W}'_B$同构。

在给出证明之前，我们需要引入若尔当基。

分拆 $\mathbf{d}_B$ 确定一个杨表 $\mathbf{Y}(\mathbf{d}_B)\subset\mathbb{Z}^2_{>0}$，使得 $(i,j)\in\mathbf{Y}(\mathbf{d}_B)$ 当且仅当 $1\le j\le r$ 且 $1\le i\le d_j$。我们按如下方式选取 $\mathbb{C}^{2n+1}$, $\{x(i,j)\}_{(i,j)\in Y(\mathbf{d}_B)}$ 的若尔当基，其中 $e\in\mathbf{O}_e^B$

- $e\cdot x(i,j)=x(i-1,j)$ 对于 $i>1$ 成立，且 $e\cdot x(1,j)=0$。
- $\langle x(i,j)\ x(p,q)\rangle\neq 0$ 当且仅当 $i+p=d_j+1$ 且 $q=\beta(j)$。此处 $\langle-,-\rangle$ 是 $\mathbb{C}^{2n+1}$ 上的配对，且 β 是 $\{1,\dots,r\}$ 的一个置换，使得 $\beta^2=\mathrm{id}$，$d_{\beta(j)}=d_j$，并且若 $d_j\equiv 0$则 $\beta(j)\neq j$。

下文中，我们选取一个 β，使得若 $d_j\equiv 1$则 $\beta(j)=j$。

定理 4.3 的证明。设 $\mathbf{d}=[d_1,\dots,d_r]=[\mathbf{T}1,\dots,\mathbf{T}i_a-1,\mathbf{T}i_a,\mathbf{T}i_a+1,\dots,\mathbf{T}_m]$ 为 $\mathbf{O}_e^B$ 的分拆。回忆 $\mathbf{d}_{i_a}=[\mathbf{T}''_1,\dots,\mathbf{T}''_{i_a-1},\mathbf{T}^\circ_{i_a},\mathbf{T}'_{i_a+1},\dots,\mathbf{T}'_m]$，且 $\mathbf{d}^B_{i_a}$ 是 $\mathbf{d}_{i_a}$ 的 B-塌缩。

令 $\tilde{\mathbf{d}}_{i_a}=[d_1\equiv d_2\equiv\ldots\equiv d_{2l'+1}\equiv 1,d_{2l'+2}\equiv\ldots\equiv d_r\equiv 0]$（这里 d_r 可以为零），并假设由伪极化 P_B 诱导的分拆为 $\mathbf{d}=[d_1\equiv d_2\equiv\ldots\equiv d_{2l+1}\equiv 1,d_{2l+2}\equiv\ldots\equiv d_r\equiv 0]$。根据 [FRW24, 第 5.1], 节，我们有 $l\ge l'$；若 $l'>l$，则 $\tilde{\mathbf{d}}_{i_a}$中额外的奇数部分（即指标为 $2l+2$、……、$2l'+1$的部分）来自折叠过程。更确切地说，对于 $s=l+1$、……、$l'-1$，我们有$\tilde{d}_{2s+1}\ge\tilde{d}_{2s+2}+2$；而对于 $s=l+1$、……、l'，则有 $d_{2s}=\tilde{d}_{2s}+1$ $d_{2s+1}=\tilde{d}_{2s+1}-1$。

假设 P_B 的 Levi 型为 $(p_1,p_2,\dots,p_k;q)$（我们有如下要求：$p_1\le p_2\le\ldots\le p_k$），根据归纳过程 (2.5)，我们知道 $q=2l+1$，$k=\lfloor\frac{d_1}{2}\rfloor$ 并且

$$[p_k,\dots,p_2,p_1]^t=[\tfrac{\tilde{d}_1-1}{2},\dots,\tfrac{\tilde{d}_{2l+1}}{2},\tfrac{\tilde{d}_{2l+2}}{2},\dots,\tfrac{\tilde{d}_r}{2}].$$

现在，我们先在可容许旗 (2.3) 中构造维数为 $F_k^\perp\subset\mathbb{C}^{2n+1}$ $\sum_i p_i$ 的各向同性子空间 $\{d'_1,d'_2,\dots,d'_m\}\subset\{d_{2l+2},\dots,d_r\}$（分别是 $\{d''_1,d''_2,\dots,d''_{m'}\}\subset\{d_1,\dots,d_{2l+1}\}$）表示被区分的奇数（分别是偶数）部分，其重数为 $\{n_1,n_2,\dots,n_m\}$（分别为 $\{n'_1,n'_2,\dots,n'_{m'}\}$）。定义修正后的序列 $\{p'_1,\dots,p'_k\}$ 如下：

(1) 对于某个满足 $n_\alpha>1$ 的 d'_α，若 $i=k-\lfloor\frac{d'_\alpha}{2}\rfloor$，则 $p'_i=p_i-\lfloor\frac{n_\alpha}{2}\rfloor$；(2) 对于某个满足 $n_\alpha=1$ 的 d'_α，若 $i=k-\lfloor\frac{d'_\alpha}{2}\rfloor$ 且 $d'_\alpha=d_\alpha+1$，则 $p'_i=p_i-1$；(3) 对于某个 d''_β，若 $i=k-\frac{d''_\beta}{2}$，则 $p'_i=p_i-\frac{n'_\beta}{2}$；(4) 否则，$p'_i=p_i$。

Let

$$E=\bigoplus_{1\le i\le k}\ \bigoplus_{1\le j\le p'_{k+1-i}}\mathbb{C}x(i,j),$$

and

$$V=V'\oplus V''=\bigoplus_{1\le\alpha\le m}V'_\alpha\oplus\bigoplus_{1\le\beta\le m'}V''_\beta,$$

其中（令 $i_\alpha=k-\lfloor\frac{d'_\alpha}{2}\rfloor$ 和 $i_\beta=k-\frac{d''_\beta}{2}$）

$$V'_\alpha=\bigoplus_{p'_{i_\alpha}+1\le j\le p'_{i_\alpha}+n_\alpha}\mathbb{C}x(i_\alpha,j),\quad V''_\beta=\bigoplus_{p'_{i_\beta}+1\le j\le p'_{i_\beta}+n'_\beta}\mathbb{C}x(i_\beta,j).$$

首先注意到 $\dim V' \equiv \dim V'' \equiv 0$，且在 V' 和 V'' 上存在非退化配对。V' 上的配对由 $\mathbb{C}^{2n+1}$ 上的配对诱导，而 V'' 上的配对则由如下定义的反对称配对诱导：令 $\{e,h,f\}$ 为标准三元组，使得对于 $f\cdot x(i,\ j)\in\mathbb{C}x(i+1,\ j)$，且 $i<d_j$ 和 $f\cdot x(d_j,\ j)=0$，则 V'' 上的配对定义为 $\langle v,\ w\rangle=\langle v,\ f(w)\rangle$，其中 $v,\ w\in V''$。

由于 $F_k^{\perp}$是各向同性的，可以证明 $E\subset F_k^{\perp}\subset E\oplus V$。注意 $\dim E=\dim F_k^{\perp}-1\,2\dim V$。于是，只需构造极大各向同性子空间 $W\subset V$，使得

$$\begin{aligned}&\dim\big(W\cap\bigoplus_{m-j\le\alpha\le m}V'_\alpha\big)\ge\big\lfloor\tfrac{\sum_{m-j\le\alpha\le m}n_\alpha}{2}\big\rfloor,\\&\dim\big(W\cap(V'\oplus\bigoplus_{m'-j'\le\beta\le m'}V''_\beta)\big)\ge\tfrac{1}{2}\dim V'+\big\lfloor\tfrac{\sum_{m'-j'\le\beta\le m'}n'_\beta}{2}\big\rfloor.\end{aligned}\tag{4.1}$$

由于 $e^i(F_k^{\perp})\subset F_{k-i}^{\perp}$。然而，$W$是各向同性的，则（4.1）中的不等式均为等式。因此，我们可以应用引理4.1与4.2。

最后，由维数计算，我们有 $\dim(e^i(F_k^{\perp}))=\sum_{j=1}^{k-i}p_j=\dim F_{k-i}^{\perp}$，对 $i=1,\ \ldots\ldots,\ k-1$。因此，为构造可容许旗，只需构造 $F_k^{\perp}$。这就完成了证明。□

C 型：设$\mathbf{d}_C=[d_1,d_2,\ldots,d_r]=[\mathbf{T}_1,\mathbf{T}2,..,\mathbf{T}_m]$。取$\mathbf{T}_{i_a}\in I_e^C$，令$\mathbf{O}^{\mathbf{d}_{i_a}^C}$为与$\mathbf{O}_e^C$相关联的最小理查森轨道。取任意极化 $P_C\in\mathrm{Pol}(\mathbf{O}^{\mathbf{d}_{i_a}^C})$，假设诱导分拆（2.6）为

$$\mathbf{d}=[\widetilde{d}_1\equiv\widetilde{d}_2\equiv\ldots\equiv\widetilde{d}_{2l}\equiv1,\widetilde{d}_{2l+1}\equiv\ldots\equiv\widetilde{d}_r\equiv0].$$

我们定义以下两个整数集合：

- 令 $\{d'_1>d'_2>\ldots>d'_k\}\subset\{d_1,\ldots,d_{2l}\}$为特征偶数部分。记 $n_i=\#\{d_j\in\mathbf{d}_C\mid d_j=d'_i\}$表示 $i=1,..,k$。
- 令 $\{d''_1>d''_2>\ldots>d''_{k'}\}\subset\{d_{2l+1},\ldots,d_r\}$为特征奇数部分。记$n'_i=\#\{d_j\in\mathbf{d}_C\mid d_j=d''_i\}$表示 $i=1,\ldots,k'$。注意 $n'_i\equiv0$。

构造 $\mathbf{W}_C$（分别为 $\mathbf{W}'_C$），如引理 4.1（分别为引理 4.2）中所述，通过 $\{n_1,\ldots,n_k\}$（分别通过 $\{n'_1,\ldots,n'_{k'}\}$）。类似地，我们有

定理 4.4。采用上述记号，$\mu_{P_C}^{-1}(e)^{\mathrm{red}}$ 的斯帕尔滕斯坦簇（取约化结构）

$$\mu_{P_C}:T^*(\mathrm{Sp}_{2n}/P_C)\to\overline{\mathbf{O}}_{\mathbf{d}_{i_a}^C}\supset\mathbf{O}_e^C$$

同构于 $\mathbf{W}_C\times_{\mathrm{pt}}\mathbf{W}'_C$。

D 型：设 $\mathbf{d}_D=[d_1,d_2,\ldots,d_r]=[\mathbf{T}_1,\mathbf{T}2,\ \ldots\ldots,\ \mathbf{T}_m]$。取 $\mathbf{T}_{i_a}\in I_e^D$，令 $\mathbf{O}^{\mathbf{d}_{i_a}^D}$为 $\mathbf{O}_e^D$所对应的最小理查森轨道。取任意极化 $P_D\in\mathrm{Pol}(\mathbf{O}^{\mathbf{d}_{i_a}^D})$，假设其诱导分拆（2.6）为

$$\mathbf{d}=[\widetilde{d}_1\equiv\widetilde{d}_2\equiv\ldots\equiv\widetilde{\equiv}d_{2l}\equiv1,\widetilde{d}_{2l+1}\equiv\ldots\equiv\widetilde{d}_r\equiv0].$$

我们定义以下两个整数集合：

- 令 $\{d'_1>d'_2>\ldots>d'_k\}\subset\{d_{2l+1},\ldots,d_r\}$为特征奇数部分。记 $n_i=\#\{d_j\in\mathbf{d}_D\mid d_j=d'_i\}$表示 $i=1,\ \ldots\ldots,\ k$。
- 令 $\{d''_1>d''_2>\ldots>d''_{k'}\}\subset\{d_1,\ldots,d_{2l}\}$为特征偶数部分。记 $n'_i=\#\{d_j\in\mathbf{d}_D\mid d_j=d''_i\}$，其中 $i=1,\ \ldots\ldots,\ k'$。注意 $n'_i\equiv0$。

构造 $\mathbf{W}_D$(分别 $\mathbf{W}'_D$)，如引理 4.1 (分别为引理 4.2) 中所述，通过 $\{n_1,\ldots,n_k\}$ (分别通过 $\{n'_1,\ldots,n'_{k'}\}$)。与 B 型情形类似，我们有

定理 4.5。 采用上述记号，斯帕尔滕斯坦簇 $\mu_{P_D}^{-1}(e)^{\mathrm{red}}$ （取其约化结构）

$$\mu_{P_D}: T^*(\mathrm{SO}_{2n}/P_D) \to \overline{\mathbf{O}}_{\mathbf{d}_{ia}^D} \supset \mathbf{O}_e^D$$

同构于$\mathbf{W}_D \times_{\mathrm{pt}} \mathbf{W}'_D$。

例 4.6。 在本例中，我们参考 [Yun17]的 1.3.8 节。考虑一个伴随型代数群及其次正则幂零轨道 $\mathbf{O}_{subreg} \subset \mathbf{O}^{reg}$。它是幂零锥中余维为二的唯一幂零轨道，并且是一个 Richardson 轨道。

因此，$\mathbf{O}^{subreg}$ 的最小理查森轨道就是它本身。然而，如果我们考虑

$$\mu_B: T^*(G/B) \to \overline{\mathbf{O}}_{reg} \supset \mathbf{O}_{subreg}$$

那么对于任意 $e \in \mathbf{O}^{subreg}$，斯普林格纤维 $\mu_B^{-1}(e)$ 是由 $\mathbb{P}^1$ 个对象构成的构形，这些对象构成一条 Dynkin 曲线；特别是在几乎所有情况下，它都不是光滑的。

因此， 这个例子证实了最小理查森轨道的独特性质 .

5. E-polynomials of Spaltenstein varieties and duality

在本节中，我们只考虑 B 型和 C 型的特殊幂零轨道，因为 $G := \mathrm{SO}_{2n+1}$ 与 ${}^L G = \mathrm{Sp}_{2n}$ 互为朗兰兹对偶。

用 $\mathcal{N}_{B/C}^{sp}$ 表示 B/C 型中特殊幂零轨道的集合。根据斯普林格定理，存在一个双射映射

$$S: \mathcal{N}_B^{sp} \longrightarrow \mathcal{N}_C^{sp}, \tag{5.1}$$

称为*Springer* 对偶。对于一个特殊幂零轨道$\mathbf{O}_B$ （B 型），我们将其 Springer 对偶记为 ${}^S\mathbf{O}_B$。此外，Springer 对偶保持维数，因此结合 [FRW24，命题 3.1],我们有

命题 5.1. 若 $\mathbf{O}_{B,\ R}$ 是 $\mathbf{O}_B$ 的一个最小理查森轨道。则 ${}^S\mathbf{O}_{B,\ R}$ 是 ${}^S\mathbf{O}_B$ 的一个最小理查森轨道。

就分拆而言，设 $\mathbf{d}_B = [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_m]$ 为特殊轨道 $\mathbf{O}_B$ 的分拆。则其 Springer 对偶 $\mathbf{O}_C = {}^S\mathbf{O}_B$ 的分拆由下式给出

$$\mathbf{d}_C = [\widetilde{\mathbf{T}}_1, \widetilde{\mathbf{T}}_2, \ldots, \widetilde{\mathbf{T}}_m], \tag{5.2}$$

~ ~其中，若 $\mathbf{T}_i$ 为 B1型，则 $\mathbf{T}_i = \mathbf{T}_i$；若 $\mathbf{T}_i$ 为 B2 型或 B3 型，则 $\mathbf{T}_i = \mathbf{T}'_i$。

设$\mathbf{O}_B$ 与 $\mathbf{O}_C$ 为 B 型和 C 型的 Springer 对偶特殊轨道。设 $\mathbf{O}_{B,R}$ 与 $\mathbf{O}_{C,R}$ 为 Springer 对偶极小 Richardson 轨道。取 Langlands 对偶极化 P_B 与 P_C，即 Levi 型（2.4）具有如下形式:

$$\mathfrak{l}_B \cong \mathfrak{gl}_{p_1} \oplus \mathfrak{gl}_{p_2} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}_{p_k} \oplus \mathfrak{so}_{2l+1}, \quad \mathfrak{l}_C \cong \mathfrak{gl}_{p_1} \oplus \mathfrak{gl}_{p_2} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}_{p_k} \oplus \mathfrak{sp}_{2l}.$$

根据 [FRW24，命题 3。1], 我们有

$$\begin{array}{ccc} T^*(\mathrm{SO}_{2n+1}/P_B) & \overset{\text{Langlands dual}}{\leftrightsquigarrow} & T^*(\mathrm{Sp}_{2n}/P_C) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_{P_B}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{P_C}} \\ \mathbf{O}_B \hookrightarrow \overline{\mathbf{O}}_{B,R} & \overset{\text{Springer dual}}{\leftrightsquigarrow} & \overline{\mathbf{O}}_{C,R} \hookleftarrow \mathbf{O}_C \end{array}$$

注意，根据定理4.3和4.4，斯帕尔滕斯坦簇$\mu_{P_B}^{-1}(e)^{\mathrm{red}}$和$\mu_{P_C}^{-1}(e')^{\mathrm{red}}$是光滑射影簇。光滑簇 Z 的霍奇-德利涅多项式定义为

$$\mathrm{E}(Z;u,v)=\sum_{p,q}\sum_{k\geq 0}(-1)^k h^{p,q}\left(H_c^k(Z,\mathbb{C})\right)u^p v^q,$$

其中 $h^{p,q}\left(H_c^k(Z,\mathbb{C})\right)$ 是紧支撑上同调第 k 次上同调群中第 (p,q) 个霍奇-德利涅分量的维数。此外，若 $f:\ Z\to Y$ 是一个以闭点为底、纤维为 F 的扎里斯基局部平凡纤维化，那么由混合霍奇结构的正合列可得 $\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}(Y)\times\mathrm{E}(F)$。

定理 5.2。在上述条件下，设 $e\in\mathbf{O}_B$ 和 $e'\in\mathbf{O}_C$。那么，$\mu_{P_B}^{-1}(e)^{\mathrm{red}}$ 和 $\mu_{P_C}^{-1}(e')^{\mathrm{red}}$ 的连通分支具有相同的 E-多项式。此外，设 $\#\mu_{P_B}$ 为 $\mu_{P_B}^{-1}(e)^{\mathrm{red}}$ 的连通分支数，$\#\mu_{P_C}$ 也类似定义。那么我们有如下跷跷板性质

$$\#\mu_{P_B}\cdot\#\mu_{P_C}=\#\overline{A}(\mathbf{O}_B)=\#\overline{A}(\mathbf{O}_C).$$

这里，$\overline{A}(\mathbf{O})$ 是分支群 $A(\mathbf{O})$的 Lusztig 商群。

证明。设 $\mathbf{d}_B=[d_1,d_2,\ldots,d_r]=[\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2,\ldots,\mathbf{T}_m]$，并假设由$\sim$ $\sim$ $\sim$ $\sim$ $\sim$伪极化 P_B导出的分拆为 $\mathbf{d}=[d_1\equiv d_2\equiv\ldots\equiv d_{2l+1}\equiv 1,d_{2l+2}\equiv\ldots\equiv d_r\equiv 0]$。设 $n_1,\ldots,n_k$为 $\{d_{2l+2},\ldots,d_r\}$中$d_{i_1},\ldots,d_{i_k}$这些特征奇数部分的重数，即

$$[\ldots,d_{i_1}=d_{i_1+1}=\ldots=d_{i_1+n_1-1},\ldots,d_{i_k}=d_{i_k+1}=\ldots=d_{i_k+n_k-1},\ldots].$$

设 $\mathbf{d}_C=[d_1',d_2',\ldots,d_r']$ (此处允许 d_r' 取零)为 $\mathbf{O}_C={}^S\mathbf{O}_B$的分拆。设 $n_1',\ldots,n_k'$为 $\{d_{2l+1}',\ldots,d_r'\}$中的特征奇数部分的重数。由关系式(5.2)，可得

(1) $n_j'=n_j$ 如果n_j 为偶数，且 d_{i_j}、$d_{i_j+n_j-1}$ 位于 B1型块中。(2) $n_j'=n_j-2$ 如果n_j 为偶数，但 d_{i_j}、$d_{i_j+n_j-1}$ 位于不同的 B2 型或 B3 型块中。(3) $n_j'=n_j-1$ 如果n_j 为奇数，请注意，在这种情况下，d_{i_j} 或 $d_{i_j+n_j-1}$ 位于 B2 型或 B3 型块中。

根据定理 4.3和 4.4，我们有

$$\mu_{P_B}^{-1}(e)^{\mathrm{red}}\cong\mathbf{W}_B\times_{\mathrm{pt}}\mathbf{W}_B',\quad \mu_{P_C}^{-1}(e')^{\mathrm{red}}\cong\mathbf{W}_C\times_{\mathrm{pt}}\mathbf{W}_C'.$$

令$\mathbf{W}^\circ$ 表示$\mathbf{W}$的一个连通分支。只需证明

$$\mathrm{E}(\mathbf{W}_B^\circ)=\mathrm{E}(\mathbf{W}_C'),\quad \mathrm{E}(\mathbf{W}_B')=\mathrm{E}(\mathbf{W}_C^\circ).$$

由 [FRW24，命题 3。10],我们知道

$$\mathrm{E}(\mathrm{OG}(n,2n+1))=\mathrm{E}(\mathrm{IG}(n,2n))=\prod_{j=1}^{n}(q^j+1),$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{OG}(n,2n))=2\mathrm{E}(\mathrm{IG}(n-1,2n-2))=2\prod_{j=1}^{n-1}(q^j+1),$$

其中 $q=uv$。

回顾引理 4.1，$\mathbf{W}_B\to\ldots\to\mathbf{W}_2\to\mathbf{W}_1$,其中 $\mathbf{W}_1\cong\mathrm{OG}(\lfloor\frac{n_1}{2}\rfloor,n_1)$ 和$\mathbf{W}_2\to\mathbf{W}_1$是一个

$$\mathrm{OG}(\lfloor\tfrac{n_1+n_2}{2}\rfloor-\lfloor\tfrac{n_1}{2}\rfloor,n_1+n_2-2\lfloor\tfrac{n_1+n_2}{2}\rfloor)$$

纤维化。

注意，d_{i_1} 属于 B2 型块。若 n_1 为奇数，则由上述方程可知 $n_1'=n_1-1$，$\mathrm{E}(\mathrm{OG}(\frac{n_1-1}{2},n_1))=\mathrm{E}(\mathrm{IG}(\frac{n_1'}{2},n_1'))$。若 n_1为偶数，则得到上文提到的情形（2），

即 $n_1' = n_1 - 2$。于是，我们有 $\mathrm{E}(\mathrm{OG}(\frac{n_1}{2}, n_1)) = 2\mathrm{E}(\mathrm{IG}(\frac{n_1'}{2}, n_1'))$，此处重数 2 源于 $\mathrm{OG}(\frac{n_1}{2}, n_1)$ 有两个连通分支。

如果 n_1 和 n_2 都是奇数，那么 $d_{i_2+n_2-1}$ 属于 B2 或 B3 型块，且 $n_2' = n_2 - 1$。我们有 $\mathrm{E}(\mathrm{OG}(\lfloor \frac{n_1+n_2}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor, n_1 + n_2 - 2\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor)) = 2\mathrm{E}(\mathrm{IG}(\frac{n_2'}{2}, n_2'))$。

如果 n_1 和 n_2 都是偶数，我们便得到情形（2），即 $n_2' = n_2 - 2$。于是，我们有 $\mathrm{E}(\mathrm{OG}(\lfloor \frac{n_1+n_2}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor, n_1 + n_2 - 2\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor)) = 2\mathrm{E}(\mathrm{IG}(\frac{n_2'}{2}, n_2'))$。

如果 n_1 是奇数而 n_2 是偶数，那么 $d_{i_2}, \ldots, d_{i_2+n_2-1}$ 都属于 B1 型块。在这种情况下，$n_2' = n_2$，并且我们有 $\mathrm{E}(\mathrm{OG}(\lfloor \frac{n_1+n_2}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor, n_1 + n_2 - 2\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor)) = \mathrm{E}(\mathrm{IG}(\frac{n_2'}{2}, n_2'))$。

若 n_1 为偶数且 n_2 为奇数，则得到情形 (3)，且 d_{i_2} 属于 B2 型块 $n_2' = n_2 - 1$。我们有 $\mathrm{E}(\mathrm{OG}(\lfloor \frac{n_1+n_2}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor, n_1 + n_2 - 2\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor)) = \mathrm{E}(\mathrm{IG}(\frac{n_2'}{2}, n_2'))$。

继续这一过程，利用引理 $\mathbf{W}_B$ 中的描述以及 4.1 E-多项式的性质，我们得到 $\mathrm{E}(\mathbf{W}_B^\circ) = \mathrm{E}(\mathbf{W}_C')$。类似地，我们可以证明 $\mathrm{E}(\mathbf{W}_B') = \mathrm{E}(\mathbf{W}_C^\circ)$。

最后，根据 [FRW24，命题 2.7]或 [WWW24，引理 2.24], ，我们有 $A(\mathrm{O}_B) \cong A(^S\mathrm{O}_B) = \mathbb{Z}_2^q$。这里 q 等于 $\mathbf{d}_B$ 中 B2 型块的数量。另一方面，$\mu_{P_B}^{-1}(e)^{\mathrm{red}}$ 和 $\mu_{P_C}^{-1}(e')^{\mathrm{red}}$ 的不同连通分支来自 OG 纤维化。

由于 $\mathbf{O}_B$ 是特殊的，因此 $\mathbf{d}_B$中没有 B1* 型块。根据引理 4.1的证明，我们可以分析每个 B2 型块，并且容易证明，在 d_{2l+1}之前，每个 B2 型块都对 $\mathbf{W}_C$贡献两个连通分支。要找出 $\mathbf{W}_B$的连通分支数，首先注意到$\sum_{i=1}^k n_i$是偶数，然后我们可以将它们分成若干片段 $\{n_1, \ldots, n_{i_1}\}$、$\{n_{i_1+1}, \ldots, n_{i_2}\}$、……、$\{n_{i_{p-1}+1}, \ldots, n_k\}$，使得

$$\sum_{j=i_{s-1}+1}^{i_s} n_j \equiv 0, \qquad \sum_{j=i_{s-1}+1}^{a} n_j \equiv 1 \quad \text{for any } i_s < a < i_{s+1}.$$

这里设 $i_0 = 0$。根据引理 4.1的证明，我们知道每个片段对 $\mathbf{W}_B$ 贡献若干连通分支；根据上述分析，每个片段贡献两个连通分支。注意，片段的数量等于 d_{2l+1} 之后的 B2 型块数加上 $\mathbf{d}_B$中的 1。因此，我们有 $\#\mu_{P_B} \cdot \#\mu_{P_C} = \#A(\mathbf{O}_B) = \#A(\mathbf{O}_C)$。□

References

[CLP88] C. De Concini、G. Lusztig 和 C. Procesi。旗流形上幂零向量场零点集的同调。 *Journal of the American Mathematical Society*，1(1):15–34，1988年。[CM93] David H. Collingwood 和 William M. McGovern。 *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*。Van Nostrand 数学丛书。Van Nostrand Reinhold Co.，纽约，1993年。[DCM22] Corrado De Concini 和 Andrea Maffei。E7 的铺砌 Springer 纤维。 *Proceedings - Mathematical Sciences*，132(2):69，2022年。[FRW24] 傅宝华、阮勇斌和 Yaoxiong Wen。特殊幂零轨道闭包的镜像对称。 *SciChina Math*，67，2024年。[Fu03] 傅宝华。幂零轨道的辛解消。 *Inventiones mathematicae*，151(1):167–186，2003年。[Hes78] Wim H Hesselink。经典群中的极化。 *Mathematische Zeitschrift*，160(3):217–234，1978年。[Kem83] Gisela Kempken。经典李代数中的诱导共轭类。载于 *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*，第53卷，第53–83页。Springer，1983年。[Li20] 李一强。纯维数的斯帕尔滕斯坦簇。 *Proceedings of the American Mathematical Society*，148(1):133–144，2020年。[Spa76] N. Spaltenstein。幺幂变换在旗流形上的不动点集。 *IndagationesMathematicae (Proceedings)*，79(5):452–456，1976年。[Spa77] Nicolas Spaltenstein。关于幺幂元在博雷尔子群簇上的不动点集。*Topology*，16(2):203–204，1977年。[Spa82] Nicolas Spaltenstein。 *Classes unipotentes et sous-groupes de Borel*，第946卷。Springer-Verlag，柏林-纽约，1982年。

[Spa83] N. Spaltenstein。关于 E6 型群的幺幂元和幂零元。 *Journal of the London Math-ematical Society*, s2-27(3):413–420，1983年06月。[Spr76] Tonny Albert Springer。三角和、有限群的 Green 函数及魏尔群表示。 *Inventiones mathematicae*，36(1):173–207，1976年。[Ste74] Robert Steinberg。 *Conjugacy Classes in Algebraic Groups*， *Lecture Notes in Mathematics*中的第366卷。Springer，柏林、海德堡，1974年。[WWW24] Bin Wang、XUEQING WEN 和 YAOXIONG WEN。抛物 Hitchin 系统的 Springer 对应与镜像对称性，2024年。[WWW25] Bin Wang、XUEQING WEN 和 YAOXIONG WEN。关于抛物 SO_{2n}-Hitchin 系统的一般纤维与真正基底，2025年。[Yun17] Zhiwei Yun。Springer 理论与轨道积分讲义。载于 *Geometry of moduli spaces and repre-sentation theory*，第24卷（ *IAS/Park City Math. Ser.*），第155–215页。Amer. Math. Soc.，普罗维登斯，罗得岛州，2017年。

Mathematical Science Research Center, Chongqing University of Technology, No.69, HongguangAvenue, Banan District, Chongqing, 400054, China*Email address*: wenxq@cqut.edu.cn

School of Mathematical Science, Zhejiang University, 866 Yuhangtang Rd, Hangzhou, 310058, Zhe-jiang, China*Email address*: y.x.wen.math@gmail.com