完全耦合 用于黏弹性界面流动

S

Ayman Mazloum[a]、Gabriele Gennari[a]、Fabian Denner[b]、Berend van Wachem[a],*

[a]德国马格德堡奥托·冯·格里克大学机械过程工程系，*Universitätsplatz2*，*39106* 马格德堡，德国[b]蒙特利尔理工学院机械工程系，蒙特利尔，*H3T 1J4*，魁北克，加拿大

arXiv:2602.08645v1 [physics.flu-dyn] 9 Feb 2026

摘要

本文提出一种用于不可压缩黏弹性界面流动的全耦合隐式有限体积算法，其中流动的黏弹性由上对流麦克斯韦本构模型描述，并考虑有限伸展性和剪切变稀行为。采用标准有限体积法对描述连续性与动量守恒以及本构模型的控制方程进行离散，并通过单个线性方程组求解压力、速度和聚合物应力张量。将线性化和离散后的控制方程中所有关于速度、压力和/或聚合物应力张量分量的项均作隐式处理，从而得到紧密耦合的方程组。相互作用的主体相之间的界面以及作用于流体界面的表面张力，采用先进的前沿追踪法进行建模。我们通过四个具有代表性的测试算例展示所提出数值框架的能力，其中包括大魏森伯格数（最高达 $\mathrm{Wi} = 10^4$）下剪切流中黏弹性液滴的变形，以及黏弹性液体中气泡上升时因“负尾流”导致的上升速度跳跃不连续。与以往采用分步算法的研究不同，所提出的全耦合隐式算法无需采用对数构象方法即可预测这些流动。总体而言，全隐式耦合前沿追踪公式为大魏森伯格数下强弹性界面流动的可靠数值预测提供了稳健框架。

关键词：黏弹性流动、界面流、全耦合算法、剪切变稀、高魏森贝格数

1. 引言

黏弹性流体在经典工程应用中的用途，例如轴承中的润滑动力学 [1, 2] 以及复合材料的黏结剂 [3], ，还有通过3D打印实现的新兴制造技术 [4, 5] 和软物质的组装 [6, 7] ，推动了人们对黏弹性界面流的兴趣日益增长。在这类流动中，两种或多种不混溶流体相互作用，并伴随相关的物理现象。呼吸道疾病（如冠状病毒）的空气传播，在近期疫情期间进一步推动了人们对黏弹性界面流的关注，因为作为病毒载量主要载体的黏液具有显著的黏弹性性质 [8]。鉴于黏弹性界面流在这些重要且紧迫的应用中的作用，其数值建模已成为科学界日益活跃的研究领域。尽管计算流变学在近几十年已发展为一门成熟的学科，但基于往往相互竞争的假设而建立的各种黏弹性应力本构模型（通常称为聚合物应力）[9], 会导致数值预测存在巨大差异，并对其背后的物理现象产生不同解释[10, 11], ；此外，即使在弹性程度适中的流动中也会出现收敛困难，这一问题称为高魏森贝格数问题 [12——14], 这些问题仍在阻碍黏弹性流动数值建模工具的广泛采用和应用。

不可压缩黏弹性流动的最先进算法大多依赖于分步算法 [11], ，在这类算法中，动量方程、满足连续性约束的压力投影方程，以及描述黏弹性应力的本构模型依次求解。然而，由迭代预测—校正求解过程导致离散控制方程中速度、压力和聚合物应力之间显式耦合较弱，严重限制了这些算法的稳定性和收敛性，因此必须对离散方程进行强烈的欠松弛才能获得收敛解 [15–17]。为缓解流体高弹性所引发问题而开发的数值方法，尤其是对数构象方法 [18–21], ，为新的发展奠定了基础，显著拓宽了参数范围；特别是在魏森伯格数方面，如今借助广泛可用的计算工具，已能常规地模拟更大范围的参数 [16, 22–26]，其中也包括黏弹性多相流 [27–30]。

耦合隐式算法将所有控制方程组成一个隐式耦合方程的线性系统并同时求解，是广泛使用的分步算法的一种强有力替代方案。这类

*通讯作者：电子邮箱：berend.van.wachem@multiflow.org (Berend van Wachem)

算法已成功应用于不可压缩和可压缩牛顿单相 [31–35]流动以及界面 [36–40] 流动，能够对控制方程进行紧密的隐式耦合，从而提高求解算法的稳定性和性能。Fernandes 等人 [17] 提出了一种用于二维黏弹性流动的耦合隐式有限体积算法，其中，聚合物应力张量的本构模型被纳入隐式耦合方程的线性系统，并在动量方程中对聚合物应力张量进行隐式处理。不久之后，Pimenta和Alves [41] 提出了一种用于三维电驱动黏弹性流动的全耦合算法，该算法采用泊松–能斯特–普朗克模型，并进一步将描述电势的泊松方程以及电荷密度的输运方程加入隐式耦合方程的线性系统。近期，Fernandes [26] 提出了一种用于二维黏弹性流动的全耦合算法，并将对数构象方法应用于本构模型。上述三项研究 [17, 26, 41] 均报告了稳健且快速的收敛；与先进的黏弹性流动分步算法相比，部分算例的速度提升超过一个数量级，表现令人瞩目。牛顿流体界面流动的模拟已十分普遍，在这类流动中，两种（或多种）不混溶流体相互作用；基于流体体积法、水平集法和前沿追踪法的各类数值框架也已广泛应用。然而，能够准确预测三维界面流动的模拟工具仍然稀缺，尤其是当相互作用的流体中至少有一种为黏弹性流体时。此前已有研究提出采用流体体积法、水平集法和前沿追踪法的黏弹性界面流有限体积算法，以及基于格子玻尔兹曼方法 [53] 和弥散界面法 [54–57]的算法。对于不可压缩黏弹性界面流动，先进算法依靠求解聚合物应力的构象张量，而非直接求解聚合物应力张量；当前的有限体积算法则建立在分步算法之上。然而，文献中尚未提出用于黏弹性界面流的全耦合隐式算法。在牛顿流动研究中，已有证据表明，全耦合隐式算法尤其适用于界面流动，因为它们可直接用于密度比很大的界面流动。此外，对于存在表面张力 [58, 59], 的流动模拟而言，毛细时间步约束是一项严重阻碍；若对表面张力进行隐式处理 [60]，则可突破这一限制。

基于近期发表的黏弹性单相流算法 [17, 26, 41]以及我们此前关于牛顿流动全耦合隐式算法的研究 [32, 36, 60, 61], ，我们提出了一种用于不可压缩黏弹性界面流动的全耦合隐式有限体积算法。为考虑流动的黏弹性，我们采用聚合物应力张量的上随体麦克斯韦本构方程，并纳入有限伸展性和剪切变稀行为，分别通过线性和指数型 Phan-Thien-Tanner 模型[62]，以及 Giesekus 模型 [63]加以展示。描述连续性与动量守恒的控制方程以及本构模型采用标准有限体积法进行离散，并通过单个线性方程组求解压力、速度和聚合物应力张量。分隔相互作用主体相的界面以及作用于流体界面的表面张力，采用先进的前沿追踪方法 [39, 64]进行建模。我们通过具有代表性的测试算例展示所提出数值框架的能力，包括大魏森伯格数下剪切流中黏弹性液滴的变形，以及黏弹性液体中上升气泡上升速度的跳跃不连续。值得注意的是，与迄今文献中报道的研究不同，所提出的算法既不采用也不需要对数构象方法来预测这些流动。

第 2节介绍了所考虑的守恒定律和本构模型。第 3节描述了这些控制方程的离散化及数值框架，其中考察了控制方程各项的离散化；第 4节简要回顾了用于表示和输运流体界面的前沿追踪法。第 5节将介绍完整离散化控制方程，并说明求解过程。第6节介绍并讨论了四个具有代表性的测试算例，最后在第 7节作总结。

2. 控制方程

所考虑的不可压缩等温黏弹性流动由连续性方程和动量方程控制，表示为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1}$$

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})\right] = \nabla \cdot \boldsymbol{\varsigma} + \mathbf{S}_\sigma + \mathbf{S}_g, \tag{2}$$

分别表示，其中 t 表示时间，$\mathbf{u} \equiv (u\ v\ w)^{\mathrm{T}}$ 表示速度矢量，ρ 表示流体密度，$\mathbf{S}_\sigma$ 表示代表表面张力的源项（存在界面时），而$\mathbf{S}_g = \rho\mathbf{g}$ 表示代表重力的源项，其中$\mathbf{g}$为重力加速度。应力张量 $\boldsymbol{\varsigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{s}} + \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}$由压力产生的法向应力张量 $-p\mathbf{I}$（其中$\mathbf{I}$表示单位张量）、溶剂应力张量 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{s}}$和聚合物应力张量$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}$组成，

使得动量方程可写为

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\nabla\cdot(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})\right]=-\nabla p+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{s}}+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}+\mathbf{S}_{\sigma}+\mathbf{S}_{g}. \tag{3}$$

溶剂应力张量基于牛顿黏性定律，表示为 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{s}}=2\mu\mathbf{D}$，其中 μ 为溶剂动力黏度，而$\mathbf{D}=\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}})$ 为变形速率张量。

流动的非牛顿黏弹性行为通过聚合物应力张量$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}$的演化来表示，而其演化则由以下形式的一般微分本构方程支配： [11]

$$\psi\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}+\lambda\left(\frac{\partial\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}-\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}\cdot\nabla\mathbf{u}-\nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}+\xi\left(\boldsymbol{\tau}_{p}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\tau}_{p}\right)\right)+\frac{\alpha\lambda}{\eta}\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}\cdot\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}=2\eta\mathbf{D}, \tag{4}$$

其中， ψ 为应力函数， λ 为松弛时间， ξ 为非仿射或“滑移”参数， α 为迁移率参数， η 为聚合物黏度。式（4）中大括号内汇集的前四项共同构成聚合物应力张量的上随体时间导数，其中第三项和第四项确保 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}$ 在流动 [65], 引起的变形下能够正确变换，而第五项则描述分子网络与连续介质之间的滑移 [66]。注意，聚合物应力张量是对称的，因此只有 6 个独立分量。我们考虑以下本构模型：Giesekus 模型 [63], ，其中 $0<\alpha\leq 0.5$、$\psi=1$和 $\xi=0$；线性 Phan-Thien-Tanner 模型（LPTT） [62], ，其中 $\alpha=0$和 $\psi=1+\lambda\epsilon\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}})/\eta$；以及指数型 Phan-Thien-Tanner 模型（EPTT） [62], ，其中 $\alpha=0$和 $\psi=\exp\left[\lambda\epsilon\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}})/\eta\right]$。其中， ϵ为流体的伸展性系数。这三种模型在文献中均得到广泛应用，并体现了黏弹性流动建模的主要特征。

为了区分相互作用的流体相，我们考虑一个通用指示函数 I，该函数根据界面位置重构。指示函数定义为

$$\mathcal{I}(\mathbf{x})=\begin{cases}0, & \text{if } \mathbf{x}\in\Omega_{\mathrm{a}}\\ 1, & \text{if } \mathbf{x}\in\Omega_{\mathrm{b}}\end{cases} \tag{5}$$

其中，$\Omega=\Omega_{\mathrm{a}}\cup\Omega_{\mathrm{b}}$ 为计算域，Ω_{a} 和 Ω_{b} 分别为流体“a”和“b”所占据的子域。遵循先前关于黏弹性界面流的研究 [52, 56], ，流体性质 $\phi\in\{\alpha,\ \eta,\ \lambda,\ \mu,\ \rho,\ \psi,\ \xi\}$根据指示函数定义为 $\phi(\mathbf{x})=\phi_{\mathrm{a}}+\mathbf{I}(\mathbf{x})(\phi_{\mathrm{b}}-\phi_{\mathrm{a}})$。表面张力作为体积源项$\mathbf{S}_{\sigma}$ 加入动量方程，

$$\mathbf{S}_{\sigma}=\sigma\kappa\mathbf{n}_{\Sigma}\delta_{\Sigma}, \tag{6}$$

其中 σ 为表面张力系数， κ 为界面曲率，$\mathbf{n}_{\Sigma}$ 为界面的法向量，δ_{Σ} 为界面δ函数。

3. 数值框架

所提出的数值框架在我们自主开发的有限体积求解器`MultiFlow` 中实现，并基于同位网格二阶有限体积离散和全耦合隐式求解算法构建， [32, 67],该算法将离散后的控制方程组成单个线性化方程组求解，$\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{b}$，其中三个速度分量、压力以及聚合物应力张量的六个独立分量作为隐式求解变量。下文将介绍守恒定律控制方程（1）和（2）中各项的离散化，以及本构模型方程（4）的离散化和应力-速度耦合。界面采用前沿追踪法建模， [39], 详见第4节。不过，也可以将其他适用于捕捉或追踪界面的方法（例如，流体体积法或水平集法）与所提出的数值框架结合使用。

3.1. 离散化方法

离散化基于标准二阶有限体积法。对一般流体变量 ϕ 的通用对流-扩散方程进行离散化，

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\nabla\cdot(\mathbf{u}\phi)=\nabla\cdot(D_{\phi}\nabla\phi)+S, \tag{7}$$

其中， D_{ϕ} 是 ϕ 的扩散系数， S 是一个通用源项。采用二阶有限体积法后，任意计算网格中网格单元 P 的半离散形式为

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{P}V_{P}+\sum_{f}\tilde{\phi}_{f}F_{f}=\sum_{f}D_{\phi,f}\left(\nabla\phi_{f}\cdot\mathbf{n}_{f}\right)A_{f}+S_{P}V_{P}, \tag{8}$$

其中，f 表示包围网格单元 P的所有面，$\tilde{\square}$ 表示通量限制插值，$\mathbf{n}_f$ 是面f的法向量，方向指向网格单元 P外部；面 f的面积和网格单元 P的体积分别记为 A_f和 V_P。穿过面 f 的通量 F_f 定义为

$$F_f = \vartheta_f A_f, \tag{9}$$

其中，对流速度 $\vartheta_f = \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n}_f$ 通过动量加权插值（MWI）获得，详见第 3.6 节。变时间步长下的瞬态导数采用二阶后向欧拉（BDF2）格式离散为 [68]

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_P \approx \left(\frac{1}{\Delta t_1} + \frac{1}{\Delta t_1 + \Delta t_2}\right)\phi_P^{(t)} - \left(\frac{1}{\Delta t_1} + \frac{1}{\Delta t_2}\right)\phi_P^{(t-\Delta t_1)} + \frac{\Delta t_1}{\Delta t_1 \Delta t_2 + \Delta t_2^2}\phi_P^{(t-\Delta t_1-\Delta t_2)}, \tag{10}$$

其中，Δt_1 为当前时间步长，Δt_2 为前一时间步长。上标（t）、（$t-\Delta t_1$）和（$t-\Delta t_1-\Delta t_2$）分别表示当前时间层、前一时间层和前前一时间层的解。在对流项的离散化中，ϕ_f 采用通量限制插值格式，根据相邻单元中心的值进行插值，表示为

$$\tilde{\phi}_f = \phi_U + \chi_f(\phi_D - \phi_U), \tag{11}$$

其中，χ_f 表示通量限制器，下标 D 和 U 分别表示面f的下风单元和上风单元。本研究采用中心差分格式以及广泛用于计算黏弹性流动的 CUBISTA 格式 [69],来确定通量限制器 χ_f，但也可采用其他合适的格式。离散扩散项中的面中心速度梯度沿单元面的法向量投影所得的分量 $\nabla\phi_f \cdot \mathbf{n}_f$，按照 Demirdžić 和 Muzaferija [70],的研究，分解为正交部分和非正交部分，以修正计算网格的非正交性，表示为

$$\nabla\phi_f \cdot \mathbf{n}_f \approx c_f \frac{\phi_Q - \phi_P}{\Delta s_f} + \overline{\nabla\phi}_f \cdot (\mathbf{n}_f - c_f \mathbf{s}_f), \tag{12}$$

其中，$c_f = (\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{s}_f)^{-1}$ 是分解的缩放因子 [71]，其中 $\square_f = (1-\ell_f)\,\square_P + \ell_f \square_Q$ 表示线性插值，ℓ_f 是相对于单元 P 和面 f的反距离加权系数。向量$\mathbf{s}_f$ 是连接面 f相邻单元中心的单位向量，方向由单元 P 指向相邻单元 Q，而$\Delta s_f = |\mathbf{s}_f|$ 是单元 P与 Q中心之间的距离。

3.2. 连续性方程

应用散度定理，连续性方程 Eq. (1) 可利用通量进行离散 F_f 通过面 f，如 Eq. (9) 中所定义：

$$\iiint_{V_P} \nabla \cdot \mathbf{u}\, \mathrm{d}V \approx \sum_f F_f^{(n+1)} = 0. \tag{13}$$

为此，MWI 给出的隐式处理的对流速度（见第 3.6 节）形式如下

$$\vartheta_f^{(n+1)} = \overline{\mathbf{u}}_f^{(n+1)} \cdot \mathbf{n}_f + f\left(\nabla p^{(n+1)}, \mathbf{u}^{(t-\Delta t_1)}\right) \tag{14}$$

这使连续性方程隐式地依赖于压力，因此可以采用全耦合方式 [32]隐式求解速度和压力。

迭代计数器 n 与每个时间步求解离散控制方程组所进行的非线性迭代相关，详见第 5 节。上标 (n) 表示延迟量，上标 $(n+1)$ 表示通过隐式求解得到的量。

3.3. 动量方程

动量方程对速度、压力和聚合物应力张量的各分量进行隐式求解。瞬态项在网格单元 P 处离散为

$$\iiint_{V_P} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\, \mathrm{d}V \approx \rho_P \left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|_P^{(n+1)} V_P \tag{15}$$

速度的瞬态导数由式（10）得出，如下

$$\left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|_P^{(n+1)} = \left(\frac{1}{\Delta t_1} + \frac{1}{\Delta t_1 + \Delta t_2}\right)\mathbf{u}_P^{(n+1)} - \left(\frac{1}{\Delta t_1} + \frac{1}{\Delta t_2}\right)\mathbf{u}_P^{(t-\Delta t_1)} + \frac{\Delta t_1}{\Delta t_1 \Delta t_2 + \Delta t_2^2}\mathbf{u}_P^{(t-\Delta t_1-\Delta t_2)}. \tag{16}$$

对流项通过应用牛顿线性化进行离散化，同时将流速$\mathbf{u}$ 和通量F 均作为隐式项处理，

$$\iiint_{V_P} \rho \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \, \mathrm{d}V \approx \rho_P \sum_f \left(\tilde{\mathbf{u}}_f^{(n+1)} F_f^{(n)} + \tilde{\mathbf{u}}_f^{(n)} F_f^{(n+1)} - \tilde{\mathbf{u}}_f^{(n)} F_f^{(n)} \right), \tag{17}$$

其中 $\tilde{\square}$ 表示式（11）中所述的通量限制插值。

动量方程右端出现的应力张量散度（式（2））被拆分为三部分，$\nabla \cdot \boldsymbol{\varsigma} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_\mathrm{s} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_\mathrm{p}$，并分别进行离散。压力梯度 $\nabla p = \nabla \cdot (p\mathbf{I})$ 和聚合物应力张量的散度 $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_\mathrm{p}$ 均采用线性插值，将相应的单元值插值到网格面上，离散为

$$\iiint_{V_P} \nabla p \, \mathrm{d}V \approx \sum_f \overline{p}_f^{(n+1)} \mathbf{n}_f A_f \tag{18}$$

$$\iiint_{V_P} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_\mathrm{p} \, \mathrm{d}V \approx \sum_f \left(\overline{\boldsymbol{\tau}}_{\mathrm{p},f}^{(n+1)} \cdot \mathbf{n}_f \right) A_f. \tag{19}$$

p 和 $\boldsymbol{\tau}_\mathrm{p}$ 均采用隐式处理，如上标（$n+1$）所示。溶剂应力张量 $\boldsymbol{\tau}_\mathrm{s}$ 的散度离散为 [32]

$$\iiint_{V_P} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_\mathrm{s} \, \mathrm{d}V \approx \sum_f \breve{\mu}_f \left(\nabla \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n}_f + \overline{\nabla \mathbf{u}}_f^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{n}_f \right) A_f. \tag{20}$$

其中，计入式（12）中所述的非正交网格修正后，

$$\nabla \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n}_f \approx c_f \frac{\mathbf{u}_Q - \mathbf{u}_P}{\Delta s_f} + \overline{\nabla \mathbf{u}}_f \cdot (\mathbf{n}_f - c_f \mathbf{s}_f). \tag{21}$$

采用调和插值，将黏度值从单元中心 P 和 Q 插值到共享面 f [72]，

$$\frac{1}{\breve{\mu}_f} = \frac{1 - \ell_f}{\mu_P} + \frac{\ell_f}{\mu_Q}, \tag{22}$$

其中，$\breve{\mu}_f$ 是经过调和插值得到的面中心黏度，ℓ_f 是相对于单元 P 和面 f的反距离加权系数。溶剂应力项的实现方式是将所有速度项均按隐式方式处理，即

$$\iiint_{V_P} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_\mathrm{s} \, \mathrm{d}V \approx \sum_f \mu \left[c_f \frac{\mathbf{u}_Q^{(n+1)} - \mathbf{u}_P^{(n+1)}}{\Delta s_f} + \overline{\nabla \mathbf{u}}_f^{(n+1)} \cdot (\mathbf{n}_f - c_f \mathbf{s}_f) + \overline{\nabla \mathbf{u}}_f^{\mathrm{T},(n+1)} \cdot \mathbf{n}_f \right] A_f. \tag{23}$$

与之前的秒相反。　　究（例如 [32, 33], ）以及黏弹性流动的研究 [17相反,　　], 所有速度梯度 o　　在方程（23）中均按隐式方式求解。

如先前研究 [36, 67, 73], 所示，动量源项$\mathbf{S}$ 必须采用与压力梯度相同的离散化方式进行离散，这样离散化的压力梯度 ∇p_P 才能与离散化的源项$\mathbf{S}_P^\star$相匹配。遵循 Bartholomew 等人 [67], 的方法，离散化的动量源项$\mathbf{S}^\star$ 基于未经处理的源项$\mathbf{S}$构造如下

$$\mathbf{S}_P^\star = \frac{1}{V_P} \sum_f \left(\overline{\mathbf{S}}_f \cdot \mathbf{s}_f \right) \Delta s_f \mathbf{n}_f A_f. \tag{24}$$

3.4. 本构模型

本构模型，即式 (4)，为聚合物应力张量的六个独立分量给出了六个控制方程。这些方程采用隐式方法求解聚合物应力张量的各分量，以及速度和压力。

In t本构模型中，式 (4) 左侧的第一项按隐式方式处理，表示为

$$\iiint_{V_P} \psi \boldsymbol{\tau}_\mathrm{p} \, \mathrm{d}V \approx \psi_P \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n+1)} V_P \tag{25}$$

本构模型的瞬态项，即聚合物应力张量上对流导数的一部分，其离散方式与动量方程的瞬态项相同，

$$\iiint_{V_P} \lambda \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_\mathrm{p}}{\partial t} \, \mathrm{d}V \approx \lambda_P \left. \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_\mathrm{p}}{\partial t} \right|_P^{(n+1)} V_P, \tag{26}$$

采用式（10）中给出的二阶后向欧拉格式。

本构模型的对流项，式（4），源自 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}$ 的物质导数，因此并非守恒形式，这与动量方程的对流项不同。为了使离散化与动量对流保持一致，我们利用乘积法则将 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}$ 的对流项重新表述为

$$\mathbf{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}} = \nabla\cdot(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}) - \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}\,(\nabla\cdot\mathbf{u}), \tag{27}$$

这样，现在便可以利用对流速度来定义穿过网格面的通量。与对流项类似，这里采用牛顿线性化，其中

$$\iiint_{V_P} \lambda\,(\mathbf{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}})\;\mathrm{d}V \approx \lambda_P\left[\sum_f\left(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\mathrm{p},f}^{(n+1)} - \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n+1)}\right)F_f^{(n)} + \sum_f\left(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\mathrm{p},f}^{(n)} - \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n)}\right)F_f^{(n+1)} - \sum_f\left(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\mathrm{p},f}^{(n)} - \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n)}\right)F_f^{(n)}\right]. \tag{28}$$

对于所考虑的不可压缩流动，从数学角度看，式（$\nabla\cdot\mathbf{u}$）中的项是多余的。然而，在数值计算中，只有当结果收敛时这一点才成立；而在每个时间步初始阶段的非线性迭代过程中，情况可能并非如此。因此，加入（$\nabla\cdot\mathbf{u}$）项通常能改善求解算法的收敛性。

为了充分利用全耦合求解过程所提供的隐式耦合，聚合物应力张量上随体时间导数中剩余的两个项以及非仿射响应项分别采用牛顿线性化进行线性化并作隐式处理，

$$\begin{aligned}\iiint_{V_P} \lambda\left(\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}\right)\;\mathrm{d}V \approx \lambda_P\Big(&\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n+1)}\cdot\nabla\mathbf{u}_P^{(n)} + \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n)}\cdot\nabla\mathbf{u}_P^{(n+1)} - \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n)}\cdot\nabla\mathbf{u}_P^{(n)}\\ &+ \nabla\mathbf{u}_P^{\mathrm{T},(n)}\cdot\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n+1)} + \nabla\mathbf{u}_P^{\mathrm{T},(n+1)}\cdot\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n)} - \nabla\mathbf{u}_P^{\mathrm{T},(n)}\cdot\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n)}\Big)V_P,\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\iiint_{V_P} \lambda\xi\,(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\tau})\,\mathrm{d}V \;\approx\; \frac{\lambda_P\xi_P V_P}{2}\Big(&\boldsymbol{\tau}_P^{(n+1)}\cdot\nabla\mathbf{u}_P^{(n)} + \boldsymbol{\tau}_P^{(n)}\cdot\nabla\mathbf{u}_P^{(n+1)} - \boldsymbol{\tau}_P^{(n)}\cdot\nabla\mathbf{u}_P^{(n)}\\ &+ \nabla\mathbf{u}_P^{(n)}\cdot\boldsymbol{\tau}_P^{(n+1)} + \nabla\mathbf{u}_P^{(n+1)}\cdot\boldsymbol{\tau}_P^{(n)} - \nabla\mathbf{u}_P^{(n)}\cdot\boldsymbol{\tau}_P^{(n)}\\ &+ \boldsymbol{\tau}_P^{(n+1)}\cdot\nabla\mathbf{u}_P^{\mathsf{T},(n)} + \boldsymbol{\tau}_P^{(n)}\cdot\nabla\mathbf{u}_P^{\mathsf{T},(n+1)} - \boldsymbol{\tau}_P^{(n)}\cdot\nabla\mathbf{u}_P^{\mathsf{T},(n)}\\ &+ \nabla\mathbf{u}_P^{\mathsf{T},(n)}\cdot\boldsymbol{\tau}_P^{(n+1)} + \nabla\mathbf{u}_P^{\mathsf{T},(n+1)}\cdot\boldsymbol{\tau}_P^{(n)} - \nabla\mathbf{u}_P^{\mathsf{T},(n)}\cdot\boldsymbol{\tau}_P^{(n)}\Big),\end{aligned} \tag{30}$$

二次应力 Giesekus 模型中的项相对于聚合物应力张量采用隐式处理，

$$\iiint_{V_P} \frac{\alpha\,\lambda}{\eta}\,\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}\cdot\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}\;\mathrm{d}V \approx \frac{\alpha_P\,\lambda_P}{\eta_P}\,\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n)}\cdot\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n+1)}\,V_P, \tag{31}$$

而应变率张量则相对于速度采用隐式处理，

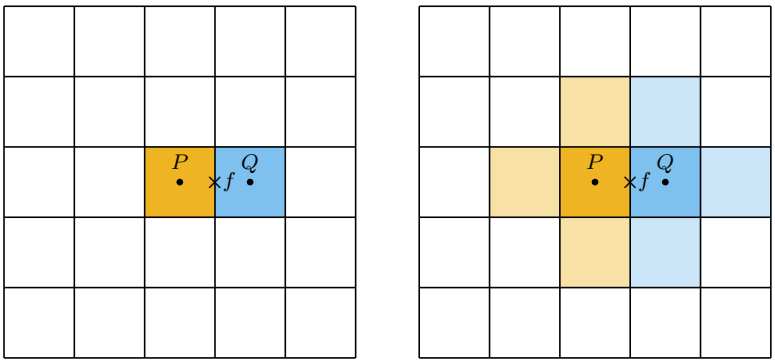
$$\iiint_{V_P} \eta\left(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right)\;\mathrm{d}V \approx \eta_P\left(\nabla\mathbf{u}_P^{(n+1)} + \nabla\mathbf{u}_P^{\mathrm{T},(n+1)}\right)V_P. \tag{32}$$

Fernandes 等人 [17] 对上随体时间导数中的附加项（式（29））和应变率张量（式（32））均采用显式处理。最近，Fernandes [26] 还在其全耦合对数构象算法中，对上随体时间导数中的附加项进行了牛顿线性化，并对构象张量和速度中的这些项采用隐式处理。Pimenta和Alves [41] 对式（32）的第一项相对于速度采用隐式处理，而对第二项采用显式处理。

与Fernandes 等人的全耦合算法不同， [17], 我们在离散化之前并未将离散后的本构模型除以松弛时间 λ。因此，本构模型在 $\lambda \geq 0$ 时有效。以例如上随体Maxwell模型（$\psi = 1$， $\mu = 0$）为例，式（4）简化为 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}} = \eta(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}})$ 当 $\lambda = 0$，从而得到剪切黏度为 η 的牛顿流体流动。

3.5. 应力-速度耦合

聚合物应力所涉及的应力-速度耦合，是所提出方法的核心组成部分。在采用同位变量排列时，为确保聚合物应力与速度之间稳健耦合，通常采用的方法是在动量方程右侧引入两个数学上等价的扩散项，其



(a) 面 f 的小模板处理　　(b) 面 f 的大模板处理

图1：用于应力-速度耦合的面 f 处速度的插值模板，以及相邻单元 P 和 Q。

符号相反，以得到动量方程右侧的形式，式（2），从而得到

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\nabla\cdot(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})\right]=-\nabla p+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{s}}+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}+\mathbf{S}_{\sigma}+\mathbf{S}_{g}+\underbrace{\nabla\cdot(\hat{\eta}\,\nabla\mathbf{u})}_{\text{small stencil}}-\underbrace{\nabla\cdot(\hat{\eta}\,\nabla\mathbf{u})}_{\text{large stencil}}, \tag{33}$$

其中 $\hat{}\eta$ 是一个量纲等同于动力黏度的加权因子。正如符号所示，附加项是在不同的计算模板上离散化的。为清晰起见，我们首先考虑一个等距笛卡尔网格，其中 $c_f=1$ 且 $\Delta s_f=\Delta x$，一般非正交网格的离散化随后将在式（37）和（38）中给出。在等距笛卡尔网格上，小模板扩散项离散化为

$$\iiint_{V_P}\nabla\cdot(\hat{\eta}\,\nabla\mathbf{u})\,\mathrm{d}V\approx\sum_f\hat{\eta}\frac{\mathbf{u}_Q-\mathbf{u}_P}{\Delta x}A_f, \tag{34}$$

而大模板 扩散项则为

$$\iiint_{V_P}\nabla\cdot(\hat{\eta}\,\nabla\mathbf{u})\,\mathrm{d}V\approx\sum_f\hat{\eta}\left(\overline{\nabla\mathbf{u}}_f\cdot\mathbf{n}_f\right)A_f, \tag{35}$$

如图 1所示。在文献中，这种以相反符号添加两个扩散项的做法通常称为双侧扩散 (BSD) [74], 通常与 $\hat{}\eta=\eta$ [16, 17, 26, 75]一起使用。采用上述常用的中心有限差分近似，利用张量记法和爱因斯坦求和约定，附加的小模板和大模板扩散项可表示为

$$\hat{\eta}\left.\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|_f-\frac{1}{2}\left(\hat{\eta}\left.\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|_P+\hat{\eta}\left.\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|_Q\right)\approx\hat{\eta}\,\frac{u_{i,W}-3u_{i,P}+3u_{i,E}-u_{i,EE}}{4\Delta x_j}=-\hat{\eta}\left.\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j^3}\right|_f\frac{\Delta x_j^2}{4}, \tag{36}$$

这意味着，对动量方程中的这一项取散度时，额外的两个扩散项会引入数值扩散（$\partial u_i^4/\partial x_j^4$），其大小与 $\hat{}\eta$和 Δx^2 [75] 成正比。

按照式（23）中所述的溶剂应力散度的离散化方式，并结合 $\hat{}\eta=\breve{\eta}_f$，小模板项和大模板项分别离散化为

$$\iiint_{V_P}\nabla\cdot(\hat{\eta}\,\nabla\mathbf{u})\,\mathrm{d}V\approx\sum_f\breve{\eta}_f\left[c_f\frac{\mathbf{u}_Q^{(n+1)}-\mathbf{u}_P^{(n+1)}}{\Delta s_f}+\overline{\nabla\mathbf{u}}_f^{(n+1)}\cdot(\mathbf{n}_f-c_f\mathbf{s}_f)\right]A_f \tag{37}$$

$$\iiint_{V_P}\nabla\cdot(\hat{\eta}\,\nabla\mathbf{u})\,\mathrm{d}V\approx\sum_f\breve{\eta}_f\left(\overline{\nabla\mathbf{u}}_f^{(n+1)}\cdot\mathbf{n}_f\right)A_f, \tag{38}$$

因此，应力-速度耦合对离散动量方程右端的贡献可概括为

$$\iiint_{V_P}[\underbrace{\nabla\cdot(\hat{\eta}\,\nabla\mathbf{u})}_{\text{small stencil}}-\underbrace{\nabla\cdot(\hat{\eta}\,\nabla\mathbf{u})}_{\text{large stencil}}]\,\mathrm{d}V\approx\sum_f\breve{\eta}_f c_f\left[\frac{\mathbf{u}_Q^{(n+1)}-\mathbf{u}_P^{(n+1)}}{\Delta s_f}-\overline{\nabla\mathbf{u}}_f^{(n+1)}\cdot\mathbf{s}_f\right]A_f. \tag{39}$$

为充分利用全耦合算法所提供的隐式耦合，并与本构模型中应变率项的处理方式保持一致，方程（39）中的所有速度贡献均采用隐式处理。

3.6. 压力-速度耦合

为确保在所采用的同位变量排列下实现稳健的压力-速度耦合，穿过面 $F_f = \vartheta_f A_f$ f的通量定义为采用对流速度 $\vartheta_f = \mathbf{u}^f \cdot \mathbf{n}^f$，该速度通过动量加权插值（MWI）求得；这种插值最初由 Rhie 和 Chow 提出 [67]，[76]。该对流速度使得可以通过压力求解连续性方程 [32]，并防止所采用的同位变量排列出现压力-速度解耦 [67]。

基于 Bartholomew 等人 [67],提出的动量加权插值统一公式，对流速度定义为

$$\vartheta_f = \overline{\mathbf{u}}_f \cdot \mathbf{n}_f - \hat{d}_f \left[\left(\nabla p_f - \overline{\nabla p}_f \right) \cdot \mathbf{s}_f - \left(\mathbf{S}_f - \overline{\mathbf{S}}_f^{\star} \right) \cdot \mathbf{s}_f - \frac{\breve{\rho}_f}{\Delta t_1} \left(\vartheta_f^{(t-\Delta t_1)} - \overline{\mathbf{u}}_f^{(t-\Delta t_1)} \cdot \mathbf{n}_f \right) \right], \tag{40}$$

ˆ 其中 $\breve{\rho}_f$ 为谐和平均的面密度。加权因子 d_f 用于定义压力-速度耦合的强度，其表达式为

$$\hat{d}_f = \frac{\dfrac{V_P}{a_P} + \dfrac{V_Q}{a_Q}}{2 + \dfrac{\breve{\rho}_f}{\Delta t_1} \left(\dfrac{V_P}{a_P} + \dfrac{V_Q}{a_Q} \right)}. \tag{41}$$

系数 a_P 和 a_Q 根据离散动量方程中速度的对角矩阵系数定义，这些系数分别来自对流项（见式 (17）、溶剂应力项（见式 (23）以及小模板应力耦合项（见式 (39），并对应于与面 f相邻的单元。对于上述离散化，系数 a_P (类似地， a_Q) 的表达式为

$$a_P = \rho_P \sum_f F_f \chi'_f + \sum_f \left(\breve{\mu}_f + \breve{\eta}_f \right) \frac{c_f A_f}{\Delta s_f}, \tag{42}$$

其中，当 $F_f \geq 0$ 时，$\chi'_f = (1 - \chi_f)$；当 $F_f < 0$时， $\chi'_f = \chi_f$。为使 MWI 与时间步无关， a_P和 a_Q 不得包含瞬态项对对角系数 [67] 的贡献。

对于任意非结构网格，并考虑大模板压力项和源项贡献的密度加权，离散化并采用隐式处理的对流速度定义为 [67]

$$\begin{aligned} \vartheta_f^{(n+1)} = \overline{\mathbf{u}}_f^{(n+1)} \cdot \mathbf{n}_f - \hat{d}_f \Bigg[& \frac{p_Q^{(n+1)} - p_P^{(n+1)}}{\Delta s_f} - \frac{\breve{\rho}_f}{2} \left(\frac{\nabla p_P^{(n+1)}}{\rho_P} + \frac{\nabla p_Q^{(n+1)}}{\rho_Q} \right) \cdot \mathbf{s}_f \\ & - \mathbf{S}_f^{(n)} \cdot \mathbf{s}_f + \frac{\breve{\rho}_f}{2} \left(\frac{\mathbf{S}_P^{\star,(n)}}{\rho_P} + \frac{\mathbf{S}_Q^{\star,(n)}}{\rho_Q} \right) \cdot \mathbf{s}_f - \frac{\breve{\rho}_f}{\Delta t_1} \left(\vartheta_f^{(t-\Delta t_1)} - \overline{\mathbf{u}}_f^{(t-\Delta t_1)} \cdot \mathbf{n}_f \right) \Bigg]. \end{aligned} \tag{43}$$

离散化的压力项共同构成压力场上的低通滤波器，可防止压力-速度解耦 [67]。与大多数先前的全耦合算法研究不同 [17, 32, 33], ，我们对方程（43）中的所有压力项均采用隐式处理 [61]。

4. 前沿追踪法

上一节提出的数值框架结合了一种前沿追踪法 [39]，用于追踪分隔不互溶主体相的流体界面。由于所采用的界面追踪（或界面捕捉）方法的具体形式和实现方式并非该数值框架的关键，本文仅简要概述所采用的前沿追踪法，并请读者参阅我们近期发表的文献[39, 64]以了解更多详情。

在前沿追踪中 [45, 46], ，流体界面由三角剖分表面网格表示。该表面网格的每个顶点 i 均以拉格朗日方式进行对流输运，

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_i(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t), \tag{44}$$

其中 $\mathbf{x}_i$ 和 $\mathbf{u}$分别表示顶点 i的位置和（插值）速度。因此，表面网格的顶点也可以沿界面切向移动，这可能导致顶点聚类和表面网格质量下降，进而需要对表面网格进行大量重新网格化，以保持可接受的网格质量。为了解决这一问题，我们对顶点 [64], 采用仅法向对流 (NOA)，其速度为

定义为表面网格顶点所在位置处的速度

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_i,t)=\mathbf{u}_{\mathrm{ref}}(t)+\{[\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i,t)-\mathbf{u}_{\mathrm{ref}}(t)]\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}_i,t)\}\,\mathbf{n}(\mathbf{x}_i,t) \tag{45}$$

其中，$\mathbf{u}_{\mathrm{ref}}(t)$ 是空间不变的参考速度，$\mathbf{u}(\mathbf{x}_i,t)$ 是顶点 i 位置处的插值流体速度。由于流体速度仅在流体网格的单元中心处已知，因此利用 Peskin 余弦插值核 [77]，从流体网格插值得到表面网格顶点位置处的速度 $\mathbf{u}(\overline{\mathbf{x}}_i,t)$

$$\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i,t)=\sum_L\left[\mathbf{u}_L\prod_{j=1}^{3}d\left(\frac{x_{j,i}-x_{j,L}}{\Delta x}\right)\right], \tag{46}$$

其中，L 表示相对于顶点 i 的 $2\Delta x\times2\Delta x\times2\Delta x$ 模板中的所有网格单元，加权核为

$$d(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\left[1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}r\right)\right], & \text{if } |r|<2\\ 0, & \text{if } |r|\geq 2.\end{cases} \tag{47}$$

我们定 义参考速度为前沿所包围物体的体积平均速度，

$$\mathbf{u}_{\mathrm{ref}}\approx\frac{\sum_P\mathbf{u}_P\,\mathrm{I_P}\,V_P}{\sum_P\mathrm{I_P}\,V_P}, \tag{48}$$

其中 P 表示流体网格中的所有单元，并使用传统的四阶 Runge-Kutta 格式 [64] 对式（44）进行积分。

指示函数 I 根据表面网格的位置，通过求解泊松方程[78]重建。使用 Frenet-Element 算法 [78]，在表面网格的每个三角形 T 上计算表面张力产生的力

$$\mathbf{F}_{\sigma,T}=\sigma\iint_{A_T}\kappa\mathbf{n}\,\mathrm{d}A=\sigma\oint_{l_e}\mathbf{p}\,\mathrm{d}l=\sigma\sum_e\mathbf{p}_e l_e, \tag{49}$$

其中，e 表示长度为 l_e的三角形 T的边，外指平面向量$\mathbf{p}_e=\mathbf{n}_e\times\mathbf{t}_e$、法向量$\mathbf{n}_e$和切向量$\mathbf{t}_e$。随后，使用 Peskin 余弦插值核将表面网格上计算得到的表面张力插值到流体网格上，以此定义表面张力源项：

$$\mathbf{S}_{\sigma,P}=\sum_T\left[\mathbf{F}_{\sigma,T}\prod_{j=1}^{3}d\left(\frac{x_{j,P}-x_{j,T}}{\Delta x}\right)\right]. \tag{50}$$

其中，T是相对于单元 P的 $2\Delta x\times2\Delta x\times2\Delta x$ 模板中的所有表面三角形。

动态调整表面网格，以确保足够的网格质量以及界面的适当分辨率；其中包括一种抛物线拟合顶点重定位方法，可减小界面的形状误差，详情参见我们此前的研究 [39]。此外，我们采用体积修正步骤 [79] 来改善体积守恒，并利用 TSUR3D 算法 [80]处理界面强烈收缩区域中表面网格的微小起伏。

5. 求解过程

结合第 3 节所述各项的离散化，可得到一组描述所研究的不可压缩等温黏弹性流动的离散方程。离散连续性方程由式（13）给出，离散动量方程为

$$\begin{aligned}&\rho_P\left[\left.\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right|_P^{(n+1)}V_P+\sum_f\left(\tilde{\mathbf{u}}_f^{(n+1)}F_f^{(n)}+\tilde{\mathbf{u}}_f^{(n)}F_f^{(n+1)}-\tilde{\mathbf{u}}_f^{(n)}F_f^{(n)}\right)\right]=-\sum_f\overline{p}_f^{(n+1)}\mathbf{n}_f A_f\\&+\sum_f\breve{\mu}_f\left[c_f\frac{\mathbf{u}_Q^{(n+1)}-\mathbf{u}_P^{(n+1)}}{\Delta s_f}+\overline{\nabla\mathbf{u}}_f^{(n+1)}\cdot(\mathbf{n}_f-c_f\,\mathbf{s}_f)+\overline{\nabla\mathbf{u}}_f^{\mathrm{T},(n+1)}\cdot\mathbf{n}_f\right]A_f+\sum_f\left(\overline{\boldsymbol{\tau}}_{\mathrm{p},f}^{(n+1)}\cdot\mathbf{n}_f\right)A_f\\&+\mathbf{S}_{\sigma,P}^{\star,(n)}V_P+\mathbf{S}_{g,P}^{\star,(n)}V_P+\sum_f\breve{\eta}_f c_f\left[\frac{\mathbf{u}_Q^{(n+1)}-\mathbf{u}_P^{(n+1)}}{\Delta s_f}-\overline{\nabla\mathbf{u}}_f^{(n+1)}\cdot\mathbf{s}_f\right]A_f,\end{aligned} \tag{51}$$

离散化本构模型给出如下

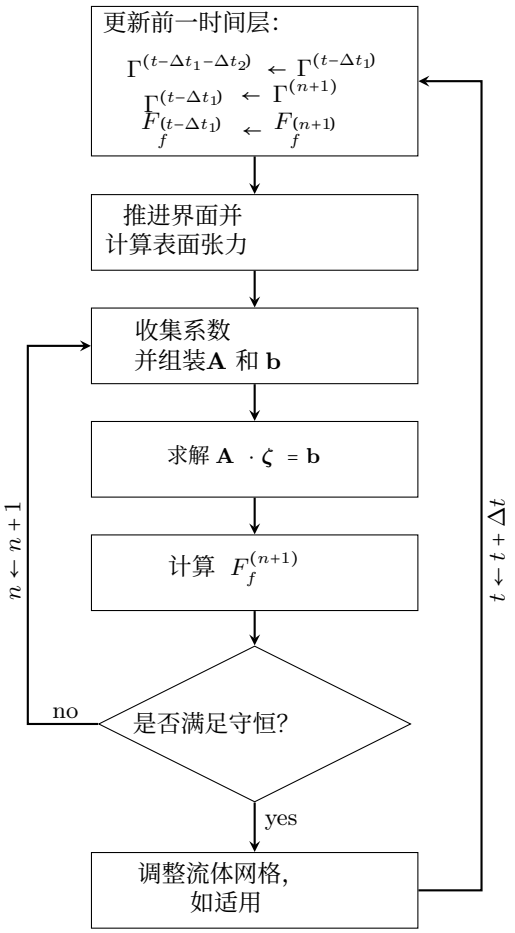


图 2：离散化和线性化控制方程系统的求解过程流程图，其中 n 是非线性迭代计数器，$\Gamma = \{u, v, w, p, \tau_{\mathrm{p},xx}, \tau_{\mathrm{p},yy}, \tau_{\mathrm{p},zz}, \tau_{\mathrm{p},xy}, \tau_{\mathrm{p},xz}, \tau_{\mathrm{p},yz}\}$ 是求解变量，F_f 是通过网格面 f 的通量（见第3.6节）。系数矩阵 A 包含离散化控制方程中隐式求解变量 $\Gamma^{(n+1)}$ 的所有系数，$\boldsymbol{\zeta}$ 是解向量。右端向量 b 包含前一次迭代的延迟贡献（$\Gamma^{(n)}$, $\vartheta_f^{(n)}$）以及前一时间层的贡献（$\Gamma^{(t-\Delta t_1)}$，$\Gamma^{(t-\Delta t_1-\Delta t_2)}$，$\vartheta^{(t-\Delta t_1)}{}_f$）。

$$
\begin{aligned}
&\psi_P \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n+1)} V_P + \lambda_P \Bigg[\left.\frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p}}}{\partial t}\right|_P^{(n+1)} V_P + \sum_f \left(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\mathrm{p},f}^{(n+1)} - \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n+1)} \right) F_f^{(n)} + \sum_f \left(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\mathrm{p},f}^{(n)} - \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n)} \right) F_f^{(n+1)} - \sum_f \left(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\mathrm{p},f}^{(n)} - \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n)} \right) F_f^{(n)} \\
&- \left(\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n+1)} \cdot \nabla \mathbf{u}_P^{(n)} + \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n)} \cdot \nabla \mathbf{u}_P^{(n+1)} - \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n)} \cdot \nabla \mathbf{u}_P^{(n)} + \nabla \mathbf{u}_P^{\mathrm{T},(n)} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n+1)} + \nabla \mathbf{u}_P^{\mathrm{T},(n+1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n)} - \nabla \mathbf{u}_P^{\mathrm{T},(n)} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n)} \right) V_P \\
&+ \frac{\xi_P}{2} \left(\boldsymbol{\tau}_P^{(n+1)} \cdot \nabla \mathbf{u}_P^{(n)} + \boldsymbol{\tau}_P^{(n)} \cdot \nabla \mathbf{u}_P^{(n+1)} - \boldsymbol{\tau}_P^{(n)} \cdot \nabla \mathbf{u}_P^{(n)} + \nabla \mathbf{u}_P^{(n)} \cdot \boldsymbol{\tau}_P^{(n+1)} + \nabla \mathbf{u}_P^{(n+1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_P^{(n)} - \nabla \mathbf{u}_P^{(n)} \cdot \boldsymbol{\tau}_P^{(n)} + \boldsymbol{\tau}_P^{(n+1)} \cdot \nabla \mathbf{u}_P^{\mathrm{T},(n)} \right. \\
&\left. + \boldsymbol{\tau}_P^{(n)} \cdot \nabla \mathbf{u}_P^{\mathrm{T},(n+1)} - \boldsymbol{\tau}_P^{(n)} \cdot \nabla \mathbf{u}_P^{\mathrm{T},(n)} + \nabla \mathbf{u}_P^{\mathrm{T},(n)} \cdot \boldsymbol{\tau}_P^{(n+1)} + \nabla \mathbf{u}_P^{\mathrm{T},(n+1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_P^{(n)} - \nabla \mathbf{u}_P^{\mathrm{T},(n)} \cdot \boldsymbol{\tau}_P^{(n)} \right) V_P + \frac{\alpha_P}{\eta_P} \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n)} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{p},P}^{(n+1)} V_P \Bigg] \\
&= \eta_P \left(\nabla \mathbf{u}_P^{(n+1)} + \nabla \mathbf{u}_P^{\mathrm{T},(n+1)} \right) V_P. \qquad (52)
\end{aligned}
$$

正如记号所示，控制方程的每一项都至少对其中一个求解变量作出隐式贡献 $\Gamma = \{p, u, v, w, \tau_{\mathrm{p},xx}, \tau_{\mathrm{p},yy}, \tau_{\mathrm{p},zz}, \tau_{\mathrm{p},xy}, \tau_{\mathrm{p},xz}, \tau_{\mathrm{p},yz}\}$。

用于求解离散化控制方程的求解过程如图 2所示。在每个时间步中，首先对界面进行对流输运，随后在线性系统中同时求解线性化并离散化的控制方程（13）、（51）和（52）。对于三维计算

含有 N 个单元的网格，其线性方程组表示为

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_p & \mathcal{A}_u & \mathcal{A}_v & \mathcal{A}_w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{B}_p & \mathcal{B}_u & \mathcal{B}_v & \mathcal{B}_w & \mathcal{B}_{\tau_{\mathrm{p},xx}} & 0 & 0 & \mathcal{B}_{\tau_{\mathrm{p},xy}} & \mathcal{B}_{\tau_{\mathrm{p},xz}} & 0 \\ \mathcal{C}_p & \mathcal{C}_u & \mathcal{C}_v & \mathcal{C}_w & 0 & \mathcal{C}_{\tau_{\mathrm{p},yy}} & 0 & \mathcal{C}_{\tau_{\mathrm{p},xy}} & 0 & \mathcal{C}_{\tau_{\mathrm{p},yz}} \\ \mathcal{D}_p & \mathcal{D}_u & \mathcal{D}_v & \mathcal{D}_w & 0 & 0 & \mathcal{D}_{\tau_{\mathrm{p},zz}} & 0 & \mathcal{D}_{\tau_{\mathrm{p},xz}} & \mathcal{D}_{\tau_{\mathrm{p},yz}} \\ \mathcal{E}_p & \mathcal{E}_u & \mathcal{E}_v & \mathcal{E}_w & \mathcal{E}_{\tau_{\mathrm{p},xx}} & 0 & 0 & \mathcal{E}_{\tau_{\mathrm{p},xy}} & \mathcal{E}_{\tau_{\mathrm{p},xz}} & 0 \\ \mathcal{F}_p & \mathcal{F}_u & \mathcal{F}_v & \mathcal{F}_w & 0 & \mathcal{F}_{\tau_{\mathrm{p},yy}} & 0 & \mathcal{F}_{\tau_{\mathrm{p},xy}} & 0 & \mathcal{F}_{\tau_{\mathrm{p},yz}} \\ \mathcal{G}_p & \mathcal{G}_u & \mathcal{G}_v & \mathcal{G}_w & 0 & 0 & \mathcal{G}_{\tau_{\mathrm{p},zz}} & 0 & \mathcal{G}_{\tau_{\mathrm{p},xz}} & \mathcal{G}_{\tau_{\mathrm{p},yz}} \\ \mathcal{H}_p & \mathcal{H}_u & \mathcal{H}_v & \mathcal{H}_w & \mathcal{H}_{\tau_{\mathrm{p},xx}} & \mathcal{H}_{\tau_{\mathrm{p},yy}} & 0 & \mathcal{H}_{\tau_{\mathrm{p},xy}} & \mathcal{H}_{\tau_{\mathrm{p},xz}} & \mathcal{H}_{\tau_{\mathrm{p},yz}} \\ \mathcal{I}_p & \mathcal{I}_u & \mathcal{I}_v & \mathcal{I}_w & \mathcal{I}_{\tau_{\mathrm{p},xx}} & 0 & \mathcal{I}_{\tau_{\mathrm{p},zz}} & \mathcal{I}_{\tau_{\mathrm{p},xy}} & \mathcal{I}_{\tau_{\mathrm{p},xz}} & \mathcal{I}_{\tau_{\mathrm{p},yz}} \\ \mathcal{J}_p & \mathcal{J}_u & \mathcal{J}_v & \mathcal{J}_w & 0 & \mathcal{J}_{\tau_{\mathrm{p},yy}} & \mathcal{J}_{\tau_{\mathrm{p},zz}} & \mathcal{J}_{\tau_{\mathrm{p},xy}} & \mathcal{J}_{\tau_{\mathrm{p},xz}} & \mathcal{J}_{\tau_{\mathrm{p},yz}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \zeta_p \\ \zeta_u \\ \zeta_v \\ \zeta_w \\ \zeta_{\tau_{\mathrm{p},xx}} \\ \zeta_{\tau_{\mathrm{p},yy}} \\ \zeta_{\tau_{\mathrm{p},zz}} \\ \zeta_{\tau_{\mathrm{p},xy}} \\ \zeta_{\tau_{\mathrm{p},xz}} \\ \zeta_{\tau_{\mathrm{p},yz}} \end{pmatrix} = \mathbf{b}, \tag{53}$$

其中 $\mathcal{A}_\Gamma$ 至 $\mathcal{J}_\chi$ 是与以下求解变量相关的 $N \times N$ 系数子矩阵： Γ 连续性方程（$\mathcal{A}$）、三个动量方程（$\mathcal{B}$ –$\mathcal{D}$）以及聚合物应力张量的六个本构方程（$\mathcal{E}$ – $\mathcal{J}$）。长度为 ζ_Γ 的子向量 N 存储隐式求解变量 Γ 的解，而长度为$\mathbf{b}$ 的右端向量 $10N$ 则包含此前非线性迭代和时间步中的所有已知贡献。求解过程通过非线性迭代求解该线性化并离散化的控制方程组，即式（53），采用软件库 PETSc 中的块雅可比预条件器和 BiCGSTAB 求解器[81, 82]，直到满足预先设定的求解器容差。随后更新延迟量，并再次求解式（53）。该过程持续进行，直至非线性控制方程组的守恒定律的守恒误差满足预设的最大误差 [32], ，此时求解过程进入下一个时间步。

对动量方程和本构模型中的对流项进行牛顿线性化，会产生通量 $F_f^{(n+1)}$ 的隐式贡献。因此，该通量会在所有控制方程中引入隐式压力和速度依赖。此外，在动量方程中对聚合物应力项和应力-速度耦合项进行隐式处理，同时在本构模型中对聚合物应力张量和应变率张量的上随体时间导数进行隐式处理，从而实现速度场与聚合物应力张量之间的强隐式耦合。

6. 结果

为展示所提出数值框架在单相流和界面流中的能力，本文考察了四个具有代表性的测试算例。首先，在第 6.1 节中，研究由线性 Phan-Thien-Tanner 模型描述的黏弹性流体顶盖驱动方腔流动，以评估所提算法的基本预测精度。在第 6.2 节中，模拟二维泰勒涡，以量化应力-速度耦合对动能守恒的影响。在第 6.3 节中，将牛顿型液滴置于剪切变稀 Giesekus 流体中，并使其在不同魏森伯格数下受到剪切流作用，从而可以直接与 Wang 等人近期报告的结果进行比较。 [53]这些结果采用先进的格子玻尔兹曼方法获得。在第 6.4 节中，研究重力作用下黏弹性 EPTT流体中的气泡上升问题，重点关注气泡终端上升速度的跳跃不连续及相关的负尾流现象；Niethammer 等人对此进行了详细研究。 [28]。

6.1. 顶盖驱动方腔

考虑边长为 L 的方腔，其顶壁以恒定速度 U 移动，剪切率定义为 $\dot{\gamma} = U/L$。遵循 Yapici [83], ，我们考虑具有 $\beta = \mu/(\mu+\eta) = 0.3$、 $\epsilon = 0.25$ 和 $\xi = 0$ 的 LPTT流体。研究了从 20×20 到 160×160 个单元的不同网格分辨率，并对所采用的时间步长 Δt 进行自适应定义，使其对应于库朗数 Co $= \mathrm{u}\,\Delta t/\Delta x \simeq 0.9$。该流动的魏森伯格数为 Wi $= \dot{\gamma}\lambda \in \{1, 5\}$，雷诺数为 Re $= \rho\dot{\gamma}L^2/(\mu+\eta) = 10^{-4}$。两种情况下稳态时的速度大小等值线（ $U = 1$ m/s）如图 3 所示。

图4 和5 展示了沿两条中心线的速度剖面，以及在$\mathbf{x} = (0.9L\ 0.9L)$处，聚合物法向应力分量的误差$\varepsilon_{\tau_{\mathrm{p},\,xx}}$ 分别对应魏森贝格数 Wi $= 1$ 和 Wi $= 5$。对于所考察的两个魏森贝格数，速度剖面与 Yapici [83]针对相同算例、采用相同网格分辨率所报告的结果高度吻合。若网格分辨率足够高，聚合物法向应力分量的误差 $\varepsilon_{\tau_{\mathrm{p},\,xx}}$ $\tau_{\mathrm{p},\,xx}$ 相对于最细网格上的解，正如预期以二阶精度收敛。

6.2. 泰勒涡

我们模拟了二维泰勒涡的演化，以分析应力-速度耦合所导致的动能人工耗散。通过这一测试算例，我们证明：对于牛顿流动，作为所提出的黏弹性流动算法基础的全耦合算法，在采用中心差分时不会引入数值扩散 [32], ； 但用于定义通量的 MWI 所带来的数值扩散除外，不过这种扩散会随 Δx^3衰减。

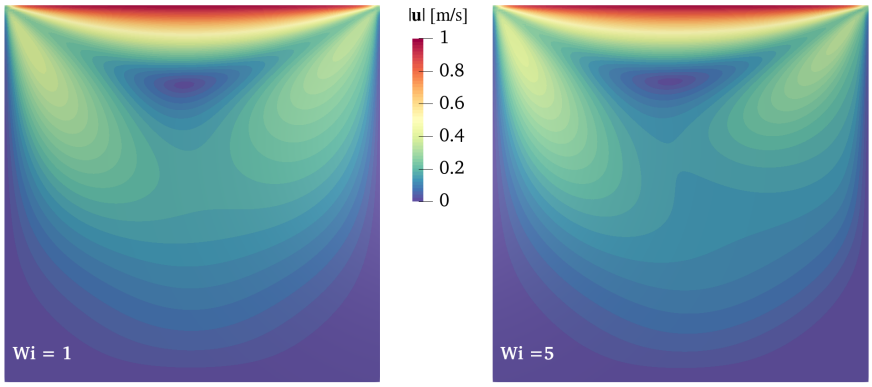
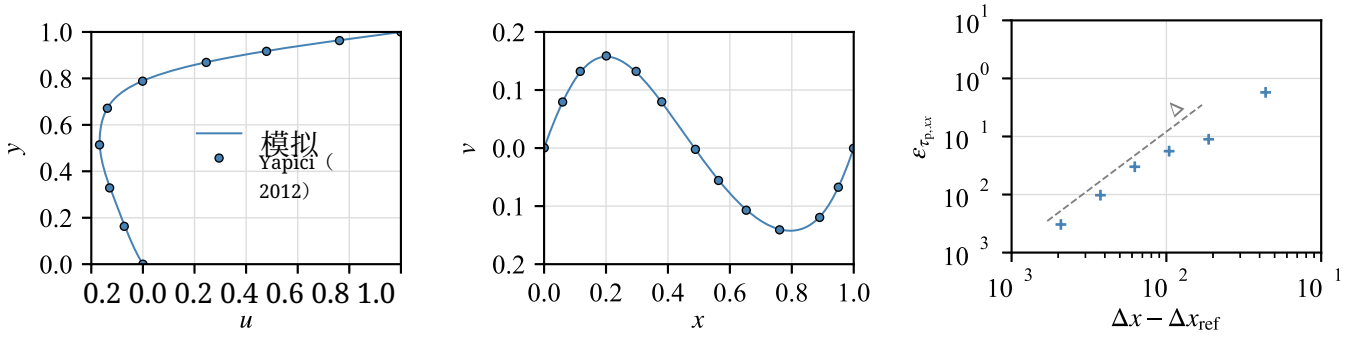
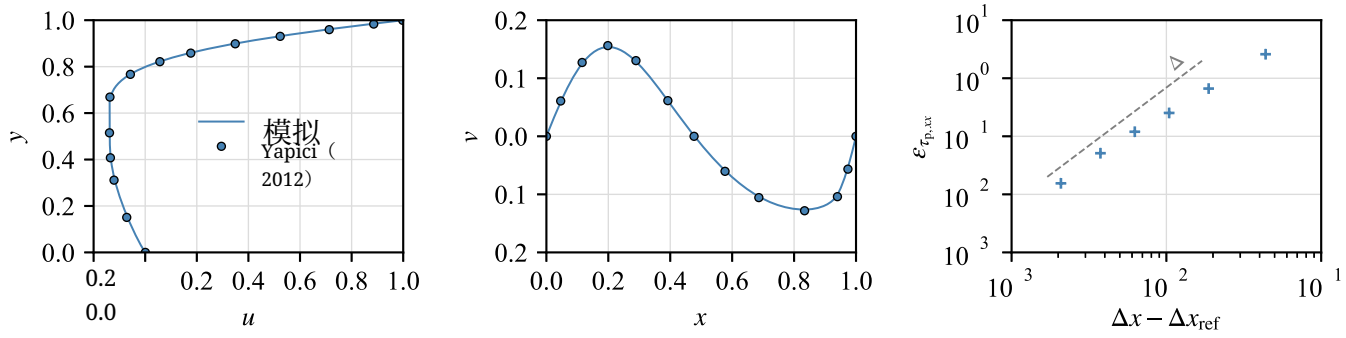


图 3：所考虑的 LPTT 流体在顶盖驱动方腔中的稳态速度等值线，魏森贝格数 Wi $\in \{1,5\}$，采用包含 160×160 个单元的等距笛卡尔网格。



(a) u-速度　(b) v-速度　(c) 网格收敛

图 4：在参考网格上得到的顶盖驱动方腔相应中心线上的速度剖面，参考网格包含 160×160 个单元；以及相对于参考网格的误差收敛情况 $\varepsilon_{\tau_{p,xx}}$ 聚合物法向应力分量 $\tau_{p,xx}$ 对于 魏森贝格数 Wi $= 1$。图中还给出了 Yapici [83] 的结果作为参考。



(a) u-速度　(b) v-速度　(c) 网格收敛

图 5：在含有 160×160 个单元的参考网格上获得的顶盖驱动方腔相应中心线上的速度剖面，以及相对于参考网格，魏森贝格数为 $= 5$ 时聚合物法向应力分量 $\tau_{p,xx}$ 的误差 $\varepsilon_{\tau_{p,xx}}$ 的收敛情况。Yapici [83] 的结果作为参考一并给出。

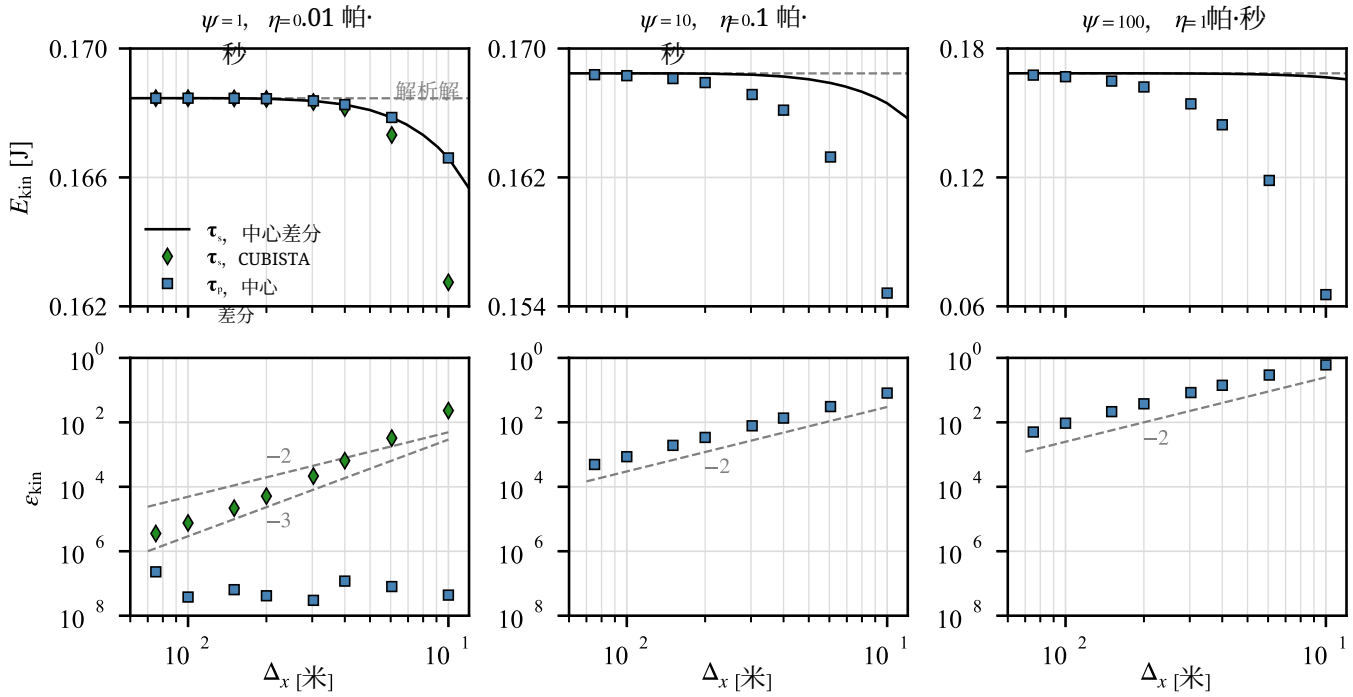


图6：牛顿型泰勒涡在 $t = 1$秒 时，对于 雷诺数 $= 100$，采用 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\text{秒}}$， $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\text{p}}$动量方程中的应力-速度耦合由式（58）定义，针对不同参数组以及 $\lambda = 0$对于$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\text{秒}}$ 同时给出了采用中心差分格式和CUBISTA格式得到的结果，对于$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\text{p}}$仅给出采用中心差分格式的结果。上行：动能 E_{kin}在整个域上积分后随网格间距 Δx的变化，其中解析解动能以虚线表示。下行：误差 ε_{kin}，见式（60），随网格间距 Δx的变化，该误差是使用 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\text{p}}$与$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\text{秒}}$相比时所产生的，针对不同参数组。

遵循Ham和Iaccarino [84] 以及我们先前的工作 [32, 67], ，计算域的尺寸为2 m $\times$ 2m，且在所有方向上均为周期性，因此无需考虑边界条件。对于牛顿流体，速度和压力由下式给出

$$u = -\cos(\pi x)\,\sin(\pi y)\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi^2 t}{\mathrm{Re}}} \tag{54}$$

$$v = \sin(\pi x)\,\cos(\pi y)\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi^2 t}{\mathrm{Re}}} \tag{55}$$

$$p = -\frac{\cos(2\pi x) + \cos(2\pi y)}{4}\,\mathrm{e}^{-\frac{4\pi^2 t}{\mathrm{Re}}}, \tag{56}$$

由此可直接得到 $t = 0$ 的模拟初始条件。对域 Ω 内的动能进行解析和数值积分，对于密度恒定的牛顿流体，可得

$$E_{\text{kin}}(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \rho \mathbf{u}(t)^2\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-\frac{4\pi^2 t}{\mathrm{Re}}} \approx \frac{\rho}{2}\sum_f \mathbf{u}_P(t)^2 V_P. \tag{57}$$

占据计算域的流体密度为 $\rho = 1\text{kg/m}^3$ ，所有模拟所采用的时间步为 $\Delta t = 2 \times 10^3\text{s}$。除非另有说明，对流项的离散化采用中心差分格式。

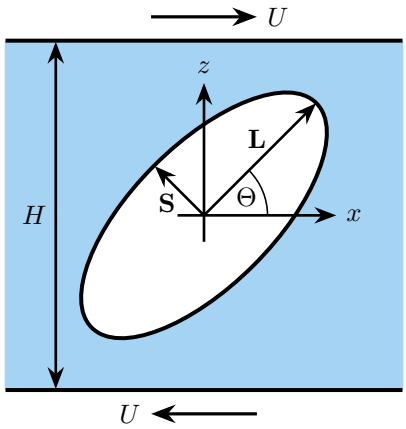
我们考虑牛顿流体，因此动量方程为

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\cdot(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})\right] = -\nabla p + \nabla\cdot\boldsymbol{\tau}. \tag{58}$$

然而，应力张量 $\boldsymbol{\tau}$ 现在是溶剂应力张量 $\boldsymbol{\tau}_{\text{s}}$ 或聚合物应力张量 $\boldsymbol{\tau}_{\text{p}}$，在假设 $\lambda = 0$、 $\alpha = 0$ 和 $\xi = 0$ 的条件下，本构模型可简化为

$$\tau_{\text{p}} = \frac{\eta}{\psi}\left(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^{\text{T}}\right). \tag{59}$$

在这两种情形下，无论在动量方程中采用$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\text{s}}$还是 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\text{p}}$，只要 $\mu = \eta/\psi$，结果就应相同。因此，这两种情形之间唯一的区别，是第3.5节所述的聚合物应力与速度场之间的耦合；溶剂应力则不需要这种耦合。请注意，为了展示应力-速度耦合的影响，我们通过求解本构模型来获得聚合物应力。作为权重



Figu图 7：剪切流中液滴的示意图，蓝色表示黏弹性流体 .

对于应力-速度耦合，我们采用的系数为$\hat{}\eta = \eta$，遵循 Fernandes 等人 [17], ，这也是文献中通常采用的约定。

图6 展示了在 $t = 1$秒 时，雷诺数 $= 100$下，整个计算域内积分得到的动能。对聚合物应力张量应用 $\psi = 1$ 时，所有情况的结果彼此高度吻合，并趋近于公式（57）给出的解析值。使用聚合物应力并结合应力-速度耦合和 $\hat{}\eta = \eta$ 时，预期会出现这种情况，因为在此情况下，应力-速度耦合会在动量方程中以相应的小模板扩散项，替代本构模型应变率张量的大模板扩散项。使用聚合物应力而非溶剂应力所产生的误差定义为

$$\varepsilon_{\mathrm{kin}}(t) = \frac{|E_{\mathrm{kin,s}}(t) - E_{\mathrm{kin,p}}(t)|}{E_{\mathrm{kin,s}}(t)}, \tag{60}$$

其中，$E_{\mathrm{kin,\ s}}$ 是使用溶剂应力得到的动能，$E_{\mathrm{kin,\ p}}$ 是使用聚合物应力得到的动能，数值上可以忽略不计。将 CUBISTA 格式 [69] 用于动量方程对流项的离散，而非采用中心差分，也会引入少量数值扩散；在网格加密时，该误差以接近三阶的速度收敛。

同时改变应力函数 ψ 和聚合物黏度 η 的值，使比值 η/ψ保持不变，应当会得到相同的结果。然而，应力-速度耦合会对速度场施加一个与 $\hat{}\eta$ 和 Δx^2成正比的滤波，见方程（36）。图6展示了在 $t = 1$时、雷诺数 $= 100$下，对整个计算域积分得到的动能；对于黏弹性情况，参数分别为 $\{\psi = 10, \eta = 0.1$ 帕·秒$\}$和 $\{\psi = 100, \eta = 1$ 帕·秒$\}$。聚合物应力张量会引入误差，正如预期，这一误差取决于 η 的取值和网格间距 Δx。使用聚合物应力与使用溶剂应力所得结果之间的差异按 Δx^2成正比衰减。

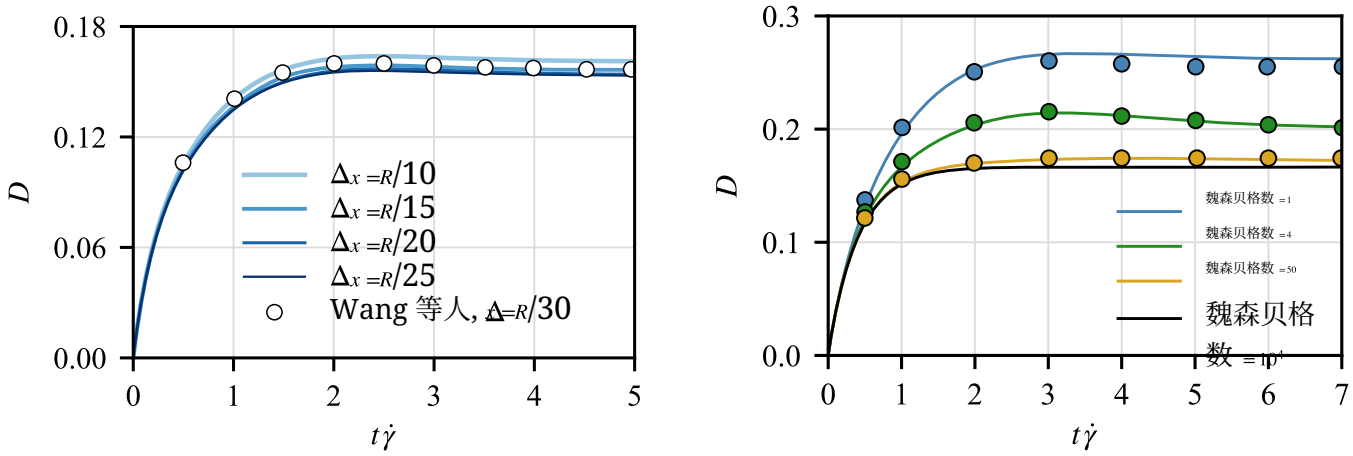
这些结果表明，应力-速度耦合会对速度场施加滤波，并引入一个与 Δx^2成正比的误差，这与方程（36所述一致。因此，作为所提出的全耦合算法的一部分，所采用的应力-速度耦合保留了基础有限体积格式的二阶精度。

6.3. 剪切流中的液滴

通过研究一个置于两块无限平行板之间的 Giesekus流体中的牛顿型液滴，展示所提出的全耦合算法在具有表面张力的界面流方面的能力。该液滴受剪切率为 $\dot{\gamma} = 2U/H$ 的剪切流作用，如图7所示。遵循 Wang 等人 [53], 的近期研究，将初始为球形、半径为 R 的液滴置于尺寸为$9R \times 5.5R \times 4R$的计算域中心，并采用等距笛卡尔网格进行表示。两块平行板被建模为无滑移壁面，而其他所有计算域边界均设为周期性边界。主体流体的溶剂黏度比为$\beta = \mu_{\mathrm{h}}/(\mu_{\mathrm{h}} + \eta_{\mathrm{h}}) = 0.5$，非仿射参数为 $\xi = 0$，迁移率参数为 $\alpha = 0.3$；液滴黏度比为 $m = \mu_{\mathrm{d}}/(\mu_{\mathrm{h}} + \eta_{\mathrm{h}}) = 1$ ，流体界面的表面张力系数 σ 根据所考虑的毛细数 Ca $= (\mu_{\mathrm{h}} + \eta_{\mathrm{h}})\dot{\gamma}R/\sigma \in \{0.15, 0.25\}$确定。该剪切流处于爬行流区，雷诺数为 Re $= \rho_{\mathrm{h}}\dot{\gamma}R^2/(\mu_{\mathrm{h}} + \eta_{\mathrm{h}}) = 0.1$。

为检验所提出数值框架的网格收敛性，我们考虑在黏弹性剪切流中具有 Ca $= 0.15$和 Wi $= \dot{\gamma}\lambda = 1$的液滴，并采用不同的网格分辨率。图 8a 展示了泰勒变形参数的演变，

$$D = \frac{|\mathbf{L}| - |\mathbf{S}|}{|\mathbf{L}| + |\mathbf{S}|}, \tag{61}$$



(a) 毛细数 = 0.15 和魏森贝格数 = 1

(b) 毛细数 = 0.25 和网格分辨率为 $\Delta x = R/20$

图8：黏弹性剪切流中液滴的泰勒变形参数的演化 D，见方程（61）。(a) 毛细数 = 0.15 和魏森贝格数 = 1，采用不同网格分辨率获得；圆圈表示 Wang 等人的参考结果 [53]。(b) 毛细数 = 0.25 采用网格分辨率 $\Delta x = R/20$，对应不同的魏森贝格数 Wi = $\dot{\gamma}\lambda$；彩色圆圈表示 Wang 等人相应的参考结果 [53]。

表1：P2500 质量分数 0.8% 水溶性黏弹性液体的材料参数。

ρ_l [千克 米$^{-3}$]	η [帕·秒]	μ [帕·秒]	λ [秒]	σ [牛顿 米$^{-1}$]	ξ	ϵ
1000.9	1.483	0.03	0.203	0.07555	0.12	0.05

其中 **L** 和 **S** 分别是变形后液滴的半长轴和半短轴，如图 7所示。即使网格分辨率低至每个初始气泡半径仅包含 10 个单元，所提出的数值框架仍能提供精度合理的结果。随着网格分辨率的提高，结果逐渐收敛，并与 Wang 等人的参考结果整体上非常吻合。 [53]。

泰勒变形参数的演化 D，见方程（61），对于 Ca = 0.25 和不同魏森伯格数 Wi 的液滴，采用网格分辨率 $\Delta x = R/20$，如图 8b所示。所提出的数值框架所得结果与 Wang 等人 [53] 在 Wi = 50范围内的结果高度吻合；这是 Wang 等人研究的最大魏森伯格数 [53]。即使对于 Wi = 10^4 较大的强弹性情形，所提出的数值框架也能得到符合物理规律的结果，并且无需采用任何形式的欠松弛或对数变换即可稳健收敛。

6.4. 上升气泡

为进一步展示所提出的全耦合算法在界面流问题中的能力，本文考虑一个基准算例：单个气泡在黏弹性液体中上升。这是一个很有说服力的验证案例，因为实验研究表明，超过某一临界气泡体积后，气泡的终端上升速度会发生跃变，且气泡尾端后方会形成负尾流区。主要目标是使数值预测与实验测量结果定量吻合，并分析气泡周围的流动结构，以阐明上升速度、气泡变形和黏弹性应力之间的相互作用。

6.4.1. 算例设置与概述

Pilz 和 Brenn 对 P2500 水溶液（质量分数 0.8%）中气泡上升过程的实验结果[85] 用于验证所提出的全耦合算法。如图 9所示，该聚合物溶液具有剪切变稀特性，因此采用指数型 Phan-Thien-Tanner（EPTT）模型，并通过拟合该模型在稳态剪切流中的黏度材料函数与实验流变数据来确定模型参数。关于黏度材料函数的完整推导，请参阅 Alves 等人 [66]。液体密度、聚合物黏度、溶剂黏度、表面张力系数和松弛时间取自 Pilz 和 Brenn [85],；伸展性系数和滑移参数则通过拟合过程确定，如图9所示。按照 Niethammer 等人 [28]的研究，所得模型参数列于表 1 。

初始为球形、直径为 D 的气泡放置在大小为 $20D \times 20D \times 20D$的立方体计算域中心，以消除计算域边界造成的约束效应。计算域采用等距笛卡尔网格离散。气泡在浮力作用下沿 y轴正方向上升。计算域边界上的速度场采用狄利克雷条件和诺伊曼条件组合指定。在 x和 z 边界上施加不可渗透的自由滑移边界：法向速度分量设为零（狄利克雷条件），切向分量则施加齐次诺伊曼条件（法向梯度为零）。在下方 y 边界上施加无滑移壁面

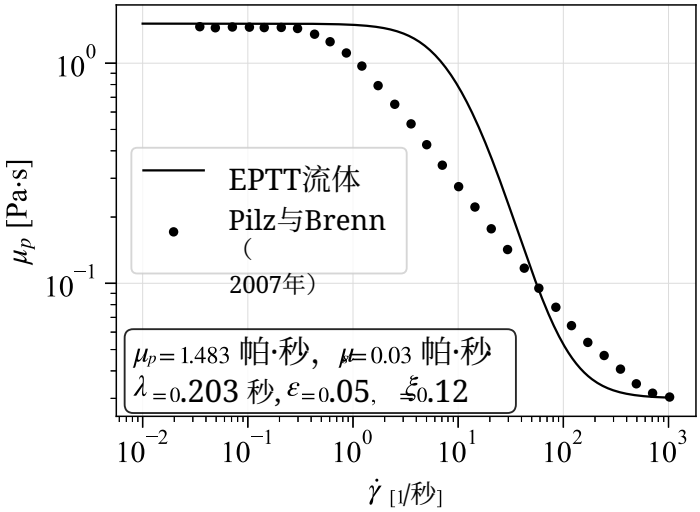


图 9：聚合物黏度 与剪切率的关系，适用于 Pilz 和 Brenn 的含水0.8%质量分数P2500溶液 [85]，并采用拟合数据 ta 针对 EPTT模型。

，将所有速度分量设为零（狄利克雷条件）。在上方 y 边界上采用出口条件：对所有速度分量施加齐次诺伊曼条件（法向梯度为零），同时将压力固定为参考值（狄利克雷条件），以确定明确的压力水平。其余所有边界上的压力均满足齐次诺伊曼条件。最后，在所有计算域边界面上对聚合物应力分量施加齐次诺伊曼条件，以确保边界处法向梯度为零。

与剪切流中的液滴不同，后者在界面处对黏弹性应力函数、聚合物黏度、松弛时间和非仿射参数采用线性插值；在此，我们为上升气泡模拟采用相同聚合物属性的平滑但更尖锐的非线性插值。上升速度跃变和负尾流的形成受气泡周围薄层内黏弹性应力的局部化程度和强度所支配。具体而言，详细分析表明，流态变化与沿气泡轮廓的聚合物拉伸，以及储存的弹性能相对于气泡赤道的释放位置有关 [86]。本文采用的非线性插值将中间属性限制在狭窄的界面带内，同时保持连续，从而更好地保留界面附近的应力分布，并提高与参考结果的一致性。上升气泡模拟所用的聚合物属性定义如下

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\left[1-\mathcal{I}(\mathbf{x})\right]^n \phi_\mathrm{a} + \omega\left[\mathcal{I}(\mathbf{x})\right]^n \phi_\mathrm{b}}{\left[1-\mathcal{I}(\mathbf{x})\right]^n + \omega\left[\mathcal{I}(\mathbf{x})\right]^n} \tag{62}$$

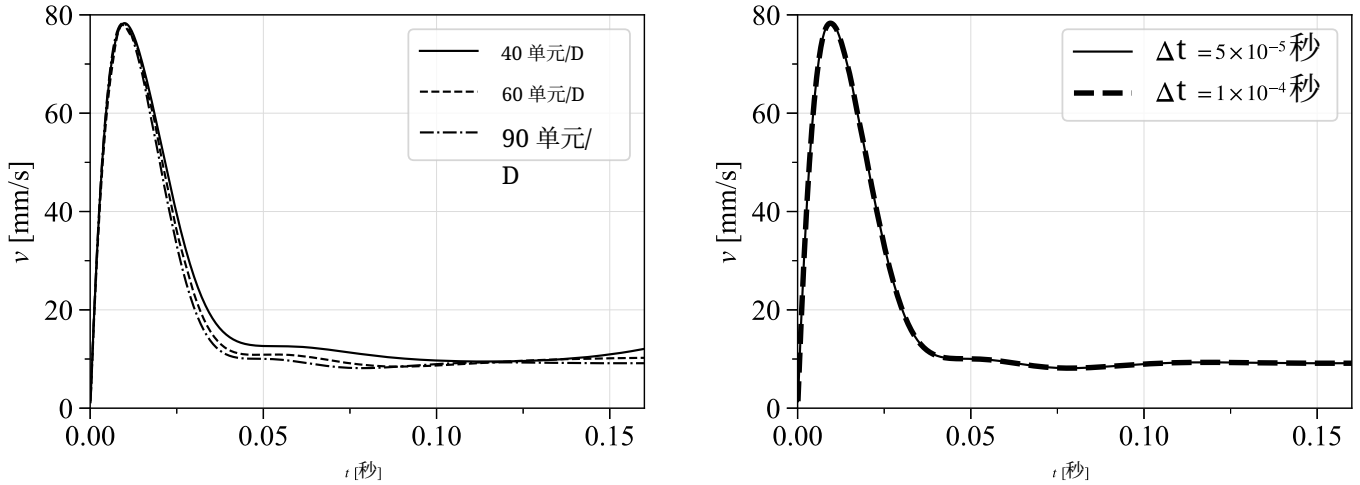
$$\omega = \left(\frac{1-I_c}{I_c}\right)^n, \tag{63}$$

其中，ω 是加权因子，用于设定过渡在指示函数场中的位置；$I_c \in (0,1)$表示用于在数值弥散界面区域内定义有效界面的指示函数值；$n > 0$ 是控制过渡陡峭程度的陡峭度指数（较大的 n 会使两相之间的切换更加 abrupt，而较小的 n 则会产生更加平滑的变化）。在本研究中，所有模拟体积均采用 $I_c = 0.47$ 和 $n = 20$，因为这些值能实现最陡峭的过渡，并与我们的参考结果吻合得最好。

我们开展了网格与时间步收敛性研究，以评估数值结果对空间分辨率和时间离散的敏感性。本研究旨在确定高效的空间和时间分辨率（网格单元尺寸和时间步），同时确保终端上升速度的预测可靠。气泡上升速度定义为气泡质心的垂直速度分量，通过速度场的指示函数加权体积平均计算。对于体积为$30\mathrm{mm}^3$ 的气泡，我们比较了三种网格分辨率和两种时间步长下的数值结果，以评估网格和时间步的收敛性，如图10a和10b所示。我们在气泡附近采用自适应网格细化，使界面周围具有较高分辨率，同时允许在远离气泡的区域使用较粗的网格。图10a 和10b 显示，每个气泡直径采用60 个网格单元，时间步长取 1×10^{-4} s 即已足够，因为进一步加密网格或减小时间步长对结果的影响可以忽略不计。时间步长的选取始终满足 0.2 的 CFL稳定性约束。

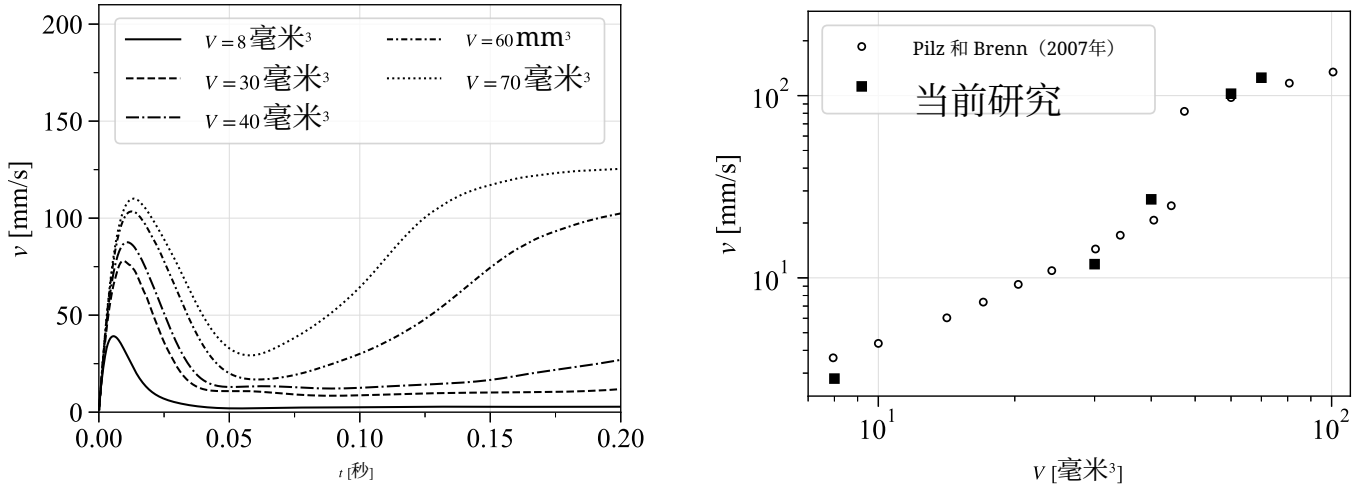
6.4.2 结果

基于上一节设定的数值参数和材料性质，我们报告了瞬态上升速度演变和终端上升速度随气泡体积的变化关系，并讨论了



(a) 网格收敛性研究　　(b) 时间步长收敛性研究

图10：直径为 30 mm^3 的气泡瞬态上升速度随时间的变化。(a) 在 $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$ 秒时，采用每个气泡直径对应网格单元数不同的三种网格进行网格收敛性研究。每级网格的空间分辨率依次提高.5 倍。(b) 在固定空间分辨率（每个气泡直径 60 个网格单元）下进行时间步收敛性研究。



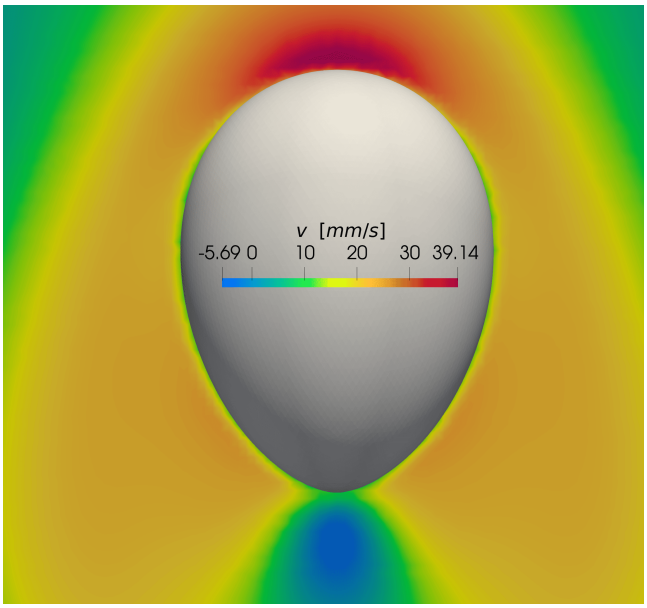
(a) 瞬态上升速度　　(b) 终端上升速度

图11：不同体积气泡的瞬态和终端上升速度随时间的变化。(a) 五种气泡体积 8、30、40、60 和 70 mm^3 气泡的瞬态上升速度。(b) 五种气泡体积 8 、 30 、 40 、 60 和 70mm^3 气泡的终端上升速度，并与 Pilz 和 Brenn 的实验结果进行比较 [85]。

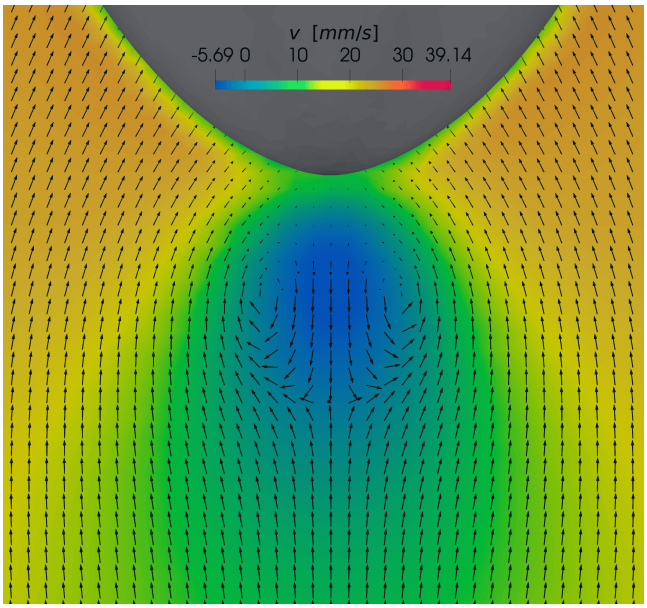
相关的负　　超临界气泡尾端下游区域内尾迹的出现

图 11a 展示了四种气泡体积对应的瞬态上升速度随时间的变化，包括三种亚临界气泡体积 $V < V_c$（8、30 和 40 mm^3）以及两种超临界气泡体积 $V > V_c$（60 和 70 mm^3）。根据实验测量结果，Pilz 和 Brenn [85] 报告称，对于所考虑的流体组合，临界体积为 $V_c \approx 46$ mm^3 。在亚临界区间，气泡从静止状态迅速加速，并在早期达到单个局部最大值，随后逐渐减速至稳定的终端值。达到终端状态的过程在首次达到最大值后呈单调变化，且未观察到第二加速阶段。相比之下，超临界情况表现出明显不同的两阶段瞬态响应。初始加速及首次达到局部最大值的情况与亚临界情况相似，但随后气泡继续减速，速度降至终端值以下并达到局部最小值。达到该最小值后，气泡进入第二加速阶段，最终在所考察的情况下达到高于首次局部最大值的终端速度。这种非单调演变是超临界状态的典型特征。图11b展示了终端上升速度随气泡体积的变化，并将本文的模拟结果与 Pilz 和 Brenn 的测量结果进行比较 [85]。结果捕捉到了终端速度的跳跃不连续，并与实验数据总体吻合良好。

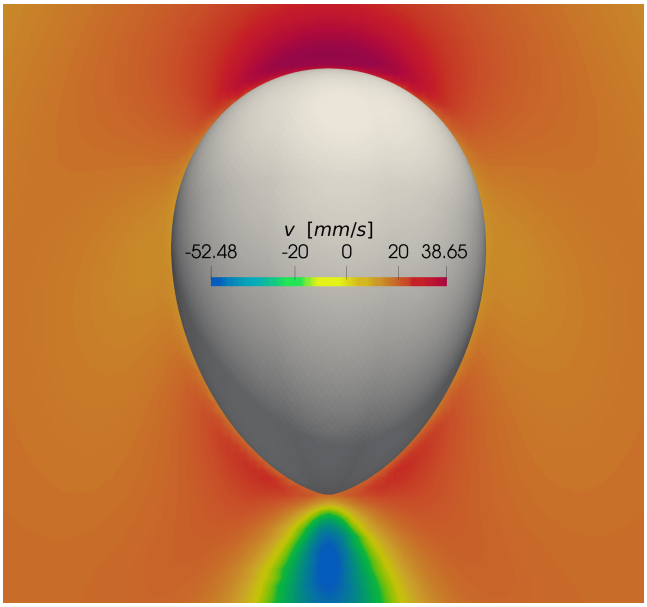
在超临界状态下，气泡后方会形成负尾流。在惯性参考系中，气泡尾迹内的液体垂直速度会在尾端下游的一片区域内反向。图12 通过垂直速度等值线展示了70mm^3气泡在两个时刻的尾迹，以识别负尾流的起始及其空间发展：在 t = 0.05s时负尾流开始形成；在 t = 0.07 s时，负尾流



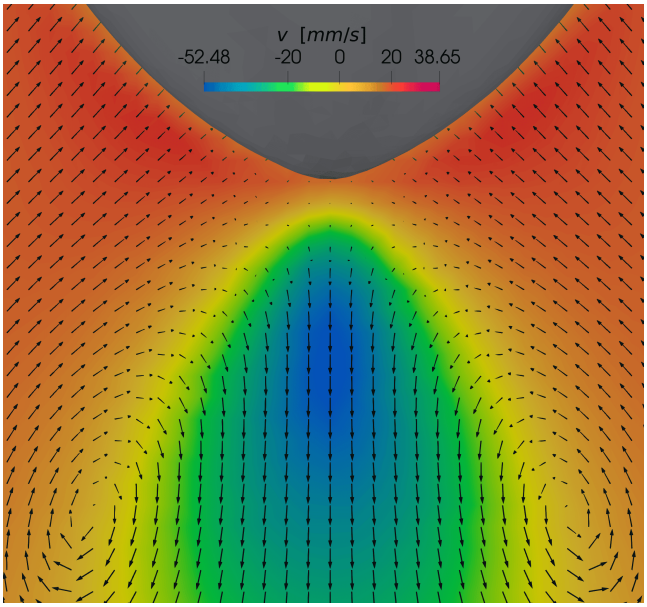
(a) v 于 $t = 0.05$秒



(b) $t = 0.05$秒时的速度矢量（仅显示方向）



(c) v 于 $t = 0.07$秒



(d) $t = 0.07$秒时的速度矢量（仅显示方向）

图12：体积为 70mm^3 的气泡在两个代表性时刻的垂直速度分量 v（左）和速度矢量场（右）。在 $t = 0.05$ 秒时，尾端下游开始出现反向流动；而在 $t = 0.07$ 秒时，形成了更明显的反向流动区。矢量图元经过缩放，仅用于显示方向。

发展得更加充分，也更加明显。与先前的数值研究结果一致，随着气泡接近超临界稳态，负尾流会以动态尾迹结构的形式形成，并从尾尖向下游延伸。

7. 结论

本文提出了一种用于不可压缩黏弹性界面流动的全耦合隐式有限体积框架，其中连续性方程、动量方程以及包含有限伸展性和剪切变稀行为的上对流麦克斯韦本构模型同时求解，以获得压力、速度和聚合物应力张量。所提出的离散化方法对所有相关耦合项均采用隐式处理，包括应力-速度耦合和压力-速度耦合，从而在标准有限体积框架下，于每次非线性迭代中形成紧密耦合的线性系统。此外，采用先进的锋面追踪方法来表示不断演化的界面，并考虑表面张力。

本方法采用具有代表性的单相和多相基准算例进行评估。对于 LPTT 流体的顶盖驱动方腔流，预测的速度剖面与参考数据高度吻合；与最精细网格的结果相比，应力场呈现二阶网格收敛。泰勒涡

测试算例通过追踪域积分动能，分离出应力-速度耦合的数值影响。直接代入参数组恢复了溶剂应力基准，并在采用中心差分时收敛至解析值；而缩放应力函数和聚合物黏度算例的残差在网格加密时以二阶速度衰减，这证实了在所提出的全耦合算法中，该耦合保持了当前有限体积离散的二阶精度。对于在剪切变稀 Giesekus 流体中受剪切作用的牛顿型液滴，预测的瞬态 Taylor 参数变形与参考结果高度吻合，直至已报告的最高魏森贝格数；即使将魏森贝格数大幅提高，模拟仍保持稳定且符合物理规律。因此，该基准算例验证了界面精度以及随弹性增强时的稳健性，且无需欠松弛或对数变换。最后，对于在 EPTT 黏弹性液体中上升的气泡，模拟清晰地区分了亚临界和超临界状态下的瞬态上升动力学。预测的终端上升速度随气泡体积的变化再现了实验观察到的跳跃不连续；流场则显示了超临界状态下负尾流的出现及其向下游的发展。网格与时间步长敏感性研究证实，在所选分辨率下，这些上升速度预测的数值分辨率充分。该基准算例尤其具有挑战性，因为它同时涉及强烈的界面变形、界面附近高度局部化的黏弹性应力，以及对应力-流动耦合高度敏感的状态转变。对这些特征的统一捕捉，凸显了全隐式耦合公式在处理复杂黏弹性界面动力学问题时的稳健性和有效性。

总体而言，这四个测试算例表明，所提出的全隐式耦合公式能够从单相黏弹性流动到强弹性界面动力学，提供准确且稳健的求解结果；即使在高魏森贝格数下，也无需借助对数构象方法即可保持稳健性。

数据可用性声明

支持本研究　　结论的数据可复现，且已在存储库中公开提供　　ry DOI 为 10.5281/zenodo.18547566，可通过以下网址获取：https://doi.org/10.5281/zenodo.18547566

写作过程中生成式人工智能和人工智能辅助技术的声明

作者使用 OpenAI 的 ChatGPT 协助编辑和校对本稿件。随后，作者根据需要对文本进行了审阅和修订，并对出版物的最终内容承担全部责任。

致谢

我们感谢 Christian Gorges、Fabien Evrard 和 Bruno Blais 富有成效的讨论。本研究由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）资助，资助编号为 420239128 和 458610925；同时也由加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）资助，资助参考编号为 RGPIN-2024-04805。

参考文献

[1] B. Williamson、K. Walters、T. Bates、R. Coy、A. Milton，多级润滑油的黏弹性性质及其对滑动轴承特性的影响，《非牛顿流体力学杂志》73（1997）115–126。[2] S. Gamaniel、D. Dini、L. Biancofiore，存在空化时流体黏弹性对润滑接触的影响，《国际摩擦学》160（2021）107011。[3] K. Wei、D. Liang、M. Mei、X. Yang、L. Chen，含粘结剂碳纤维织物预成型工艺中的压缩与松弛行为黏弹性模型，《复合材料B辑：工程》158（2019）1–9。[4] H. Yuk、X. Zhao，利用黏弹性墨水的变形、失稳和断裂实现一种新的 3D打印策略，《先进材料》30（2018）1704028。[5] A. Z. Nelson、B. Kundukad、W. K. Wong、S. A. Khan、P. S. Doyle，屈服应力流体中的嵌入式液滴打印，《美国国家科学院院刊》117（2020）5671–5679。[6] V. Frumkin、M. Bercovici，光学元件的流体成形，《Flow》1（2021）E2。[7] P.-T. Brun，流体介导制造复杂组件，《JACS Au》（2022）jacsau.2c00427。[8] S. K. Lai、Y.-Y. Wang、D. Wirtz、J. Hanes，黏液的微观与宏观流变学，《先进药物递送评论》61（2009）86–100。

[9] D. A. Siginer，《黏弹性流体非线性本构表述的稳定性》，Springer应用科学与技术简明丛书，Springer国际出版公司，Cham，2014。

[10] F. Dupret、J. Marchal、M. Crochet, 《黏弹性流动数值计算中离散化误差的影响》, 非牛顿流体力学杂志 18 (1985) 173–186。[11] M. Alves、P. Oliveira、F. Pinho, 《黏弹性流体流动的数值方法》, 流体力学年度评论 53 (2021) 509–541。[12] R. Keunings, 《关于高魏森贝格数问题》, 非牛顿流体力学杂志 20 (1986) 209–226。[13] T.-P. Tsai、D. S. Malkus, 《非牛顿收缩流在高魏森贝格数下的数值崩溃》, 流变学学报 39 (2000) 62–70。[14] K. Walters、M. F. Webster, 《计算流变学中特有的计算流体力学挑战》, 国际流体数值方法杂志 43 (2003) 577–596。[15] I. Keshtiban、F. Belblidia、M. Webster, 《可压缩黏弹性液体的数值模拟》, 非牛顿流体力学杂志 122 (2004) 131–146。[16] F. Habla、A. Obermeier、O. Hinrichsen, 《黏弹性模型的半隐式应力表述：在三维收缩流中的应用》, 非牛顿流体力学杂志 199 (2013) 70–79。[17] C. Fernandes、V. Vukčević、T. Uroić、R. Simoes、O. Carneiro、H. Jasak、J. Nóbrega, 《用于求解不可压缩黏弹性流动的耦合有限体积流动求解器》, 非牛顿流体力学杂志 265 (2019) 99–115。[18] R. Fattal、R. Kupferman, 《构象张量矩阵对数的本构定律》, 非牛顿流体力学杂志 123 (2004) 281–285。[19] R. Fattal、R. Kupferman, 《利用对数构象表示对高魏森贝格数下的黏弹性流动进行时变模拟》, 非牛顿流体力学杂志 126 (2005) 23–37。[20] F. Becker、K. Rauthmann、L. Pauli、P. Knechtges, 《对数构象表述的无特征值实现》, 非牛顿流体力学杂志 322 (2023) 105133。[21] W. Doherty、T. N. Phillips、Z. Xie, 《单相和多相轴对称黏弹性流动的对数构象表述》, 计算物理学杂志 508 (2024) 113014。[22] M. A. Hulsen、R. Fattal、R. Kupferman, 《高魏森贝格数下黏弹性流体绕圆柱流动：采用矩阵对数的稳定模拟》, 非牛顿流体力学杂志 127 (2005) 27–39。[23] A. Afonso、P. Oliveira、F. Pinho、M. Alves, 《有限体积法框架中的对数构象张量方法》, 非牛顿流体力学杂志 157 (2009) 55–65。[24] F. Martins、C. Oishi、A. Afonso、M. Alves, 《瞬态黏弹性流体流动中核构象变换的数值研究》, 计算物理学杂志 302 (2015) 653–673。[25] M. Niethammer、H. Marschall、C. Kunkelmann、D. Bothe, 《一种用于黏弹性流体流动的数值稳定化框架：在一般非结构网格上的有限体积法》, 国际流体数值方法杂志 86 (2018) 131–166。[26] C. Fernandes, 《用于求解不可压缩非等温黏弹性流动的全隐式对数构象张量耦合算法》, Polymers 14 (2022) 4099。[27] M. Tomé、A. Castelo、A. Afonso、M. Alves、F. Pinho, 《对数构象张量在三维时变自由表面流动中的应用》, 非牛顿流体力学杂志 175–176 (2012) 44–54。[28] M. Niethammer、G. Brenn、H. Marschall、D. Bothe, 《一种扩展的流体体积法及其在黏弹性液体中单个上升气泡问题上的应用》, 计算物理学杂志 387 (2019) 326–355。[29] C. Fernandes、S. Faroughi、O. Carneiro、J. M. Nóbrega、G. McKinley, 《利用浸入边界法对含颗粒黏弹性流体进行完全解析模拟》, 非牛顿流体力学杂志 266 (2019) 80–94。[30] H. U. Naseer、Z. Ahmed、D. Izbassarov、M. Muradoglu, 《浮力作用下黏弹性流体中平行气泡的动力学与相互作用》, 非牛顿流体力学杂志 (2023) 105000。[31] C.-N. Xiao、F. Denner、B. van Wachem, 《用于复杂几何中全速域流动模拟的全耦合基于压力的有限体积框架》, 计算物理学杂志 346 (2017) 91–130。

[32] F. Denner、F. Evrard、B. van Wachem，适用于全速度范围内不可压缩、理想气体和真实气体流体流动的守恒有限体积框架与基于压力的算法，《计算物理学杂志》409（2020）109348。[33] M. Darwish、I. Sraj、F. Moukalled，采用耦合有限体积求解器求解非结构网格上的不可压缩流动，《计算物理学杂志》228（2009）180–201。[34] M. Darwish、F. Moukalled，适用于全速度范围内流体流动的全耦合纳维–斯托克斯求解器，《数值传热，B辑：基础》65（2014）410–444。[35] Z. Chen、A. J. Przekwas，适用于不可压缩/可压缩流动的耦合基于压力的计算方法，《计算物理学杂志》229（2010）9150–9165。[36] F. Denner、B. van Wachem，适用于任意网格、基于体积分数采用最小二乘曲率评估的全耦合平衡力VOF框架，《数值传热 B辑：基础》65（2014）218–255。[37]F. Denner、C.-N. Xiao、B. van Wachem，具有声学守恒界面离散的可压缩界面流基于压力的算法，《计算物理学杂志》367（2018）192–234。[38] F. Denner、B. van Wachem，具有不可压缩和可压缩流体的界面流统一算法，载于：D. Zeidan、L. T. Zhang、E. G. Da Silva、J. Merker（编），《流体力学进展：建模与模拟》，施普林格·自然新加坡，新加坡，2022年，第179–208页。[39] C. Gorges、F. Evrard、B. van Wachem、F. Denner，通过散度保持速度插值和抛物线拟合顶点定位减少前沿追踪中的体积误差和形状误差，《计算物理学杂志》457（2022）111072。[40] M. Darwish、A. Aziz、F. Moukalled，适用于不可压缩两相流的耦合基于压力的有限体积求解器，《数值传热，B辑：基础》67（2015）47–74。[41] F. Pimenta、M. Alves，电驱动流动数值模拟的耦合有限体积求解器，《计算机与流体》193（2019）104279。[42] C. Hirt、B. Nichols，自由边界动力学的流体体积（VOF）方法，《计算物理学杂志》39（1981）201–225。[43]S. Osher、J. A. Sethian，依赖曲率的速度传播的前沿：基于哈密顿–雅可比形式的算法，《计算物理学杂志》79（1988）12–49。[44] M. Sussman、P. Smereka、S. Osher，计算不可压缩两相流解的水平集方法，《计算物理学杂志》114（1994）146–159。[45] S. Unverdi、G. Tryggvason，黏性不可压缩多流体流动的前沿追踪法，《计算物理学杂志》100（1992）25–37。[46] G. Tryggvason、B. Bunner、A. Esmaeeli、D. Juric、N. Al-Rawahi、W. Tauber、J. Han、S. Nas、Y. Jan，多相流计算的前沿追踪法，《计算物理学杂志》169（2001）708–759。[47] F. Habla、H. Marschall、O. Hinrichsen、L. Dietsche、H. Jasak、J. L. Favero，使用openFOAM®数值模拟黏弹性两相流，《化学工程科学》66（2011）5487–5496。[48] J. V. Giliberto、O. Desjardins，模拟多相黏弹性流动的锐界面计算方法，《非牛顿流体力学杂志》348（2026）105559。[49] SB. Pillapakkam、P. Singh，计算黏弹性两相流解的水平集方法，《计算物理学杂志》174（2001）552–578。[50] K. K. Kabanemi、J.-P. Marcotte，模拟挤出黏弹性薄片起皱的水平集方法，《聚合物工程与科学》60（2020）1662–1675。[51] A. Amani、N. Balcázar、A. Naseri、J. Rigola，采用守恒水平集方法处理非牛顿两相流的数值方法，《化学工程杂志》385（2020）123896。[52] D. Izbassarov、M. Muradoglu，黏弹性两相流系统计算建模的前沿追踪法，《非牛顿流体力学杂志》223（2015）122–140。[53] D. Wang、N. Wang、H. Liu，简单剪切流下剪切变稀黏弹性流体中的液滴变形与破碎，《流变学杂志》66（2022）585–603。

[54] P. Yue、J. J. Feng、C. Liu、J. Shen，模拟复杂流体两相流的扩散界面法，《流体力学杂志》515（2004）293–317。[55] P. Yue、C. Zhou、J. J. Feng、C. F. Ollivier-Gooch、H. H. Hu，采用具有自适应网格的有限元进行黏弹性流体界面动力学的相场模拟，《计算物理学杂志》219（2006）47–67。[56] M. Rodriguez、E. Johnsen，具有松弛和弹性的黏弹性流体与固体高阶精度五方程可压缩多相方法，《计算物理学杂志》379（2019）70–90。[57] K. Zografos、A. M. Afonso、R. J. Poole、M. S. N. Oliveira，采用相场方法的黏弹性两相求解器，《非牛顿流体力学杂志》284（2020）。[58] F. Denner、B. van Wachem，毛细波导致的数值时间步限制，《计算物理学杂志》285（2015）24–40。[59] S. Popinet，表面张力的数值模型，《流体力学年度评论》50（2018）49–75。[60] F. Denner、F. Evrard、B. van Wachem，采用具有隐式表面张力的耦合VOF方法突破毛细时间步约束，《计算物理学杂志》459（2022）111128。[61] R. Janodet、B. van Wachem、F. Denner，适用于大密度比界面流的具有隐式表面张力处理的全耦合算法，《计算物理学杂志》520（2025）113520。[62] N. Phan-Thien、R. I. Tanner，从网络理论推导出的新本构方程，《非牛顿流体力学杂志》2（1977）353–365。[63] H. Giesekus，基于变形依赖张量迁移率概念的聚合物流体简单本构方程，《非牛顿流体力学杂志》11（1982）69–109。[64] C. Gorges、A. Hodžić、F. Evrard、B. van Wachem、C. M. Velte、F. Denner，通过采用表面法向传播限制的前沿追踪高效减少顶点聚类，《计算物理学杂志》491（2023）112406。[65] J. H. Snoeijer、A. Pandey、M. A. Herrada、J. Eggers，黏弹性与弹性之间的关系，《英国皇家学会会刊A辑：数学、物理与工程科学》476（2020）20200419。[66] M. A. Alves、F. T. Pinho、P. J. Oliveira，单模Phan-Thien–Tanner流体稳态管流和槽道流动研究，《非牛顿流体力学杂志》101（2001）55–76。[67] P. Bartholomew、F. Denner、M. Abdol-Azis、A. Marquis、B. van Wachem，同位变量布置下动量加权插值的统一公式，《计算物理学杂志》375（2018）177–208。[68] F. Moukalled、L. Mangani、M. Darwish，《计算流体动力学中的有限体积法：结合OpenFOAM和Matlab的高级导论》，施普林格，2016年。[69] M. A. Alves、P. J. Oliveira、F. T. Pinho，用于处理对流的收敛且普适有界插值格式，《国际流体数值方法杂志》41（2003）47–75。[70] I. Demirdžić、S. Muzaferija，使用具有任意拓扑单元的非结构化运动网格进行耦合流体流动、传热和应力分析的数值方法，《应用力学与工程中的计算机方法》125（1995）235–255。[71] S. Mathur、J. Murthy，适用于非结构网格的基于压力的方法，《数值传热 B辑 基础》31（1997）195–215。[72] J. Ferziger，Tryggvason方法中的界面传递，《国际流体数值方法杂志》41（2003）551–560。[73] J. Mencinger、I. Zun，同位网格上不连续体积力场的有限体积离散：在VOF方法中的应用，《计算物理学杂志》221（2007）524–538。[74] R. Guénette、M. Fortin，计算黏弹性流动的新型混合有限元法，《非牛顿流体力学杂志》60（1995）27–52。[75] F. Pimenta、M. Alves，黏弹性流动开源有限体积求解器的稳定化，《非牛顿流体力学杂志》239（2017）85–104。

[76] C. M. Rhie，W. L. Chow，具有后缘分离的翼型周围湍流的数值研究，《AIAA Journal》21（1983年）1525–1532。[77] C. S. Peskin，心脏血流的数值分析，计算物理学杂志25（1977年）220–252。[78] G. Tryggvason，R. Scardovelli，S. Zaleski，《气液多相流的直接数值模拟》，剑桥大学出版社，剑桥；纽约，2011年。[79] M. R. Pivello，《用于三维两相流模拟的全自适应前沿追踪法》，博士学位论文，乌贝兰迪亚大学，乌贝兰迪亚，2012年。[80] F. de Sousa，N. Mangiavacchi，L. Nonato，A. Castelo，M. Tomé，V. Ferreira，J. Cuminato，S. McKee，用于具有自由表面的三维多流体流动模拟的前沿追踪/前沿捕捉法，计算物理学杂志198（2004年）469–499。[81] S. Balay，S. Abhyankar，M. F. Adams，J. Brown，P. Brune，K. Buschelman，L. Dalcin，V. Eijkhout，D. Kaushik，M. G. Knepley，D. A. May，L. C. McInnes，W. D. Gropp，K. Rupp，P. Sanan，B. F. Smith，S. Zampini，H. Zhang，H. Zhang，PETSc 用户手册，技术报告 ANL-95/11 - 修订版3.8，阿贡国家实验室，2017年。[82] S. Balay，S. Abhyankar，M. F. Adams，J. Brown，P. Brune，K. Buschelman，L. Dalcin，V. Eijkhout，W. D. Gropp，D. Kaushik，M. G. Knepley，L. C. McInnes，K. Rupp，B. F. Smith，S. Zampini，H. Zhang，H. Zhang，PETSc 网页，http://www.mcs.anl.gov/petsc，2017年。[83] K. Yapici，高阶有界格式的比较研究：顶盖驱动方腔中的PTT线性流体流动，《韩国-澳大利亚流变学杂志》24（2012年）11–21。[84] F. Ham，G. Iaccarino，非结构网格上同位网格离散格式中的能量守恒，《湍流中心年度研究简报》（2004年）3–14。[85] C. Pilz，G. Brenn，黏弹性液体上升速度跃变不连续性处的临界气泡体积，《非牛顿流体力学杂志》145（2007年）124–138。[86] D. Bothe，具有界面质量的多组分流体系统的锐界面连续介质热力学，《国际工程科学杂志》179（2022年）103731。