arXiv:2602.08650v1 [math.DG] 9 Feb 2026

四维 pp 波李群与调和曲率

E. GARC´IA- R´IO，R. RODR´IGUEZ-GIGIREY，R. V´AZQUEZ- LORENZO

Abstract. 我们确定了所有具有调和曲率的四维李群。由此，得到了四维 pp 波李群的描述。

1. 引言

伪黎曼流形（M, g）若其 Weyl 张量散度为零，即 $\operatorname{div} W = 0$，则称其具有调和魏尔曲率张量，或等价地说，其 Cotton 张量消失。由于爱因斯坦度量具有调和魏尔张量，条件 $\operatorname{div} W = 0$ 已得到广泛研究，旨在将爱因斯坦度量的几何性质推广至更一般的情形。显然，任何具有平行里奇张量的伪黎曼流形都具有调和魏尔张量，局部共形平坦流形也如此。由 [12, 24] 可知，在四维齐性黎曼情形下，反命题也成立。此外，若标量曲率为常数，则魏尔张量的调和性等价于曲率张量的调和性，即 $\operatorname{div} R = 0$。

具有平行传播射线的平面前沿波（pp-波）是一类特殊的洛伦兹流形，它们构成了爱因斯坦场方程精确解中最简单的数学族。平面波是 pp-波的一个特例，其中包括作为真空解的引力平面波。自 Brinkmann 在 [6], 引入以来，pp-波多次作为解出现在由物理或纯几何问题所引出的研究中。从曲率的角度看，pp-波是最简单的非平坦洛伦兹流形，因为其里奇算子和 Weyl 曲率算子都是二步幂零的。此外，平面波具有调和魏尔张量，而一般情况下 pp-波并非 Cotton 平坦。

鉴于 pp 波具有特殊的几何意义，本文的首要目的，是在定理 1.1 中描述四维李群上的所有非平坦左不变 pp 波度量。基于这一描述，我们最终确定了所有具有调和曲率的非平凡四维李群。定理 1.2 的一个显著推论是：存在一个具有调和曲率的四维洛伦兹李群单参数族，其里奇张量并不平行，并且既非局部共形平坦，也不是平面波。

Data Availability Statement：支持本研究结论的数据可在提出合理请求后向通讯作者获取。
Funding Statement：本研究获项目 PID2022-138988NB-I00（AEI/FEDER，西班牙）和 ED431C 2023/31（加利西亚自治区政府，西班牙）资助。

1.1. pp 波与平面波洛伦兹流形。 如果一个洛伦兹流形 (M, g) 具有一个平行退化线场 $\mathcal{U}$，且该平行线场局部上由一个平行零向量场 U 生成，同时 (M, g) 横向平坦，即对于所有 $X, Y \in \mathcal{U}^{\perp}$，都有 $R(X, Y) = 0$，则称其为 *pp*波 。任何这样的四维洛伦兹流形都具有局部坐标 (x^+, x^-, x^1, x^2)，使得

$$g = 2dx^+ \circ dx^- + H(x^+, x^1, x^2)dx^+ \circ dx^+ + dx^1 \circ dx^1 + dx^2 \circ dx^2 \,,$$

其中，退化的平行直线场由 $U = \partial_{x^-}$ 生成。

pp波的里奇张量秩为一，且有 $\rho(\partial x^+, \partial x^+) = -\frac{1}{2}\Delta_x H$，其中$\Delta_x = \partial^2_{x^1x^1} + \partial^2_{x^2x^2}$ 是空间拉普拉斯算子。因此，当且仅当 H 的空间拉普拉斯算子为零时，该度量是爱因斯坦度量（实际上是 Ricci 平坦）。一般而言，四维 pp波具有调和曲率，当且仅当定义函数 H满足 $\Delta_x H = \varphi(x^+)$，其中某个函数为 $\varphi(x^+)$（例如，参见 [21]）。

若 pp波（$M, g, \mathcal{U}$）的曲率张量的协变导数对所有 $X \in \mathcal{U}^{\perp}$ 都满足 $\nabla_X R = 0$，则称其为平面波 。在这种情况下，可以对上述局部坐标作特化，使函数 H 关于空间坐标为二次函数；此外，还可以假设 $H(x^+, x^1, x^2) = a_{ij}(x^+)$ $x^i x^j$，由此立即可得平面波具有调和曲率。显然，任何局部对称的 pp波都是平面波。此外，在某些几何条件下，pp波可约化为平面波，例如在局部共形平坦的情形下。

1.2. 齐性情形。 齐性 pp 波已得到广泛研究（例如参见 [15] 及其中的参考文献）。在许多情形下，它们可归结为平面波，不过，pp 波也可能存在，例如在可约情形中。这在一定程度上是由三维情形所致。

1.2.1. 三维齐性 *pp* 波。 [13] 中描述了三维空间中的局部齐性 pp 波。在局部坐标 (x^+, x^-, x) 中，它们由 $g = 2dx^+ \circ dx^- + H(x^+, x)dx^+ \circ dx^+ + dx \circ dx$ 给出，其中函数 $H(x^+, x)$ 对应于以下情形之一：

$(\mathcal{N}_b)$: $H(x^+, x) = -2b^{-2}e^{bx}$, where $b \neq 0$, or
$(\mathcal{P}_c)$: $H(x^+, x) = -\alpha(x^+)x^2$, where $\alpha' = c\alpha^{3/2}$, $c \neq 0$ and $\alpha > 0$, or
$(\mathcal{CW})$: $H(x^+, x) = -2x^2$.

类别 $(\mathcal{P}_c)$ 和 $(\mathcal{CW})$ 中的度量是平面波，后者对应于三维 Cahen-Wallach 对称空间。相比之下，度量 $(\mathcal{N}_b)$ 是*pp*-波，但不是平面波。所有这些度量都可实现为三维李群上的左不变度量。事实上，直接计算可知，非平坦三维洛伦兹李群是 pp 波，当且仅当它同构相似于由以下某个洛伦兹李代数所确定的左不变度量（这里沿用 [3] 中的记号）：

(1) 李代数 $\mathfrak{e}(1,1)$ 具有由 $[u_1, u_3] = \lambda u_1 + u_2$, $[u_2, u_3] = -\lambda u_2$ 描述的洛伦兹度量，对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$。(2) 李代数 $\mathfrak{e}(1,1)$ 具有由 $[u_1, u_2] = u_1$, $[u_2, u_3] = u_3$ 描述的洛伦兹度量。(3) 李代数 $\mathfrak{r}_{3,\lambda}$ 以及由 $[u_1, u_2] = u_2$, $[u_1, u_3] = \gamma u_2 + \lambda u_3$ 描述的洛伦兹度量，对任意 $\gamma, \lambda \in \mathbb{R}$，且 $\lambda(\lambda^2 - 1) \neq 0$。(4) 李代数 $\mathfrak{r}_{3,0} = \mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ 具有由$[u_1, u_3] = \gamma u_2 + u_3$描述的洛伦兹度量，对任意 $\gamma \in \mathbb{R}$,

其中 $\{u_i\}$ 是伪正交基，满足 $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_3, u_3\rangle = 1$。

第 (1) 类中的左不变度量是 pp 波，对应于局部模型 ($\mathcal{N}_b$)；而第 (2) 类和第 (3) 类中的度量则是非对称平面波，其局部模型为 ($\mathcal{P}_c$)。最后，第 (4) 类中的左不变度量是 Cahen-Wallach 对称空间，对应于模型 ($\mathcal{CW}$)。由于连通单连通李群 $E(1,1)$ 存在余紧子群（见 [5]），pp 波结构 (1) 因而可下降到商可解流形上，从而得到紧致的齐性 pp 波，它们不是平面波。

1.2.2. 四维齐性平面波。目前尚无对四维齐性 pp 波的完整描述，尽管平面波情形已得到充分理解。四维中的齐性平面波可用一个 2×2 斜对称矩阵 F 和一个 2×2 对称矩阵 A_0来描述，使得定义函数 $H(x^+, x^1, x^2)$ 具有如下形式：$H = \vec{x}^T A(x^+)\vec{x}$，其中 $\vec{x} = (x^1, x^2)$，且矩阵 $A(x^+)$ 的定义见（参见 [4]）

$$(i)\ A(x^+) = e^{x^+F} A_0 e^{-x^+F}, \quad \text{or} \quad (ii)\ A(x^+) = \frac{1}{(x^+)^2} e^{\log(x^+)F} A_0 e^{-\log(x^+)F}.$$

此外，当且仅当 A_0 迹为零时，平面波度量是 Ricci 平坦的；当 A_0 是单位矩阵的倍数时，它局部共形平坦。

注意，类型 (i) 和 (ii) 的四维齐性平面波是同一共形类的不同代表元，因为对于任意类型 (ii) 的齐性平面波 $g = 2dx^+\circ dx^- + H(x^+, \vec{x})$ $dx^+\circ dx^+ + \sum_i dx^i\circ dx^i$，其中$H(x^+, \vec{x}) = \vec{x}^T A(x^+)\vec{x}$ 由一个对称矩阵 A_0确定，变量替换 $x^+ \mapsto e^{x^+}$，$x^- \mapsto x^- - \frac{1}{4}\sum (x^i)^2$,$x^i \mapsto e^{\frac{1}{2}x^+} x^i$将度量变换为如下形式的共形度量

$$\widetilde{g} = e^{x^+}\left(2dx^+\circ dx^- + \widetilde{H}(x^+, \vec{x})dx^+\circ dx^+ + \sum_i dx^i\circ dx^i\right)$$

其中 $\widetilde{H}(x^+, \vec{x}) = \vec{x}^T \widetilde{A}(x^+)\vec{x}$ 对应于由对称矩阵 $\widetilde{A}_0 = A_0 - \frac{1}{4}\,\mathrm{id}$ 确定的 (i) 型平面波（见 [17]）。

直接计算可知，(i) 类中的四维齐性平面波具有平行里奇张量，而 (ii) 类中的度量具有平行里奇张量当且仅当它们是 Ricci 平坦的。此外，非平坦局部对称平面波对应于由常系数矩阵$A(x^+)$确定的 (i) 类度量。注意，尽管非对称的三维齐性平面波属于 (ii) 型，但根据后续分析可知，四维中也存在许多非对称的 (i) 型左不变平面波。

1.3. 调和魏尔张量。 n维伪黎曼流形（M, g）的舒滕张量 由 $S = \rho - \frac{\tau}{2(n-1)} g$ 给出，并确定了由 $C(X,Y,Z) = (\nabla_X S)(Y,Z) - (\nabla_Y S)(X,Z)$ 定义的*Cotton* 张量 。Cotton 张量在三维情形下具有共形不变性，三维局部共形平坦流形的特征是其 $C = 0$。在更高维数下，它不具有共形不变性，但 $C = -\frac{n-2}{n-3}\mathrm{div}\ W$，由此可知，Cotton 张量为零当且仅当 Weyl 张量是调和的。因此，局部共形平坦流形以及具有平行里奇张量的流形，其魏尔张量均为调和的。

曲率张量是调和的，当且仅当里奇张量满足 Codazzi 条件，即 $(\nabla_X \rho)(Y,Z) - (\nabla_Y \rho)(X,Z) = 0$，这表明当标量曲率为常数时，魏尔张量的调和性与曲率张量的调和性等价（见 [16]）。此前已有研究考察具有调和曲率的洛伦兹李群 [1]，作者着重讨论了里奇算子的若尔当标准形的一些可能情形，但并未考虑以下示例所展示的所有可能情况。

1.3.1. *Cotton*平坦三维齐性流形。 具有可对角化里奇算子的局部共形平坦齐性三维流形是局部对称的。既非局部对称也非平面波的局部共形平坦齐性三维流形，在局部同构且相似变换意义下等价于由下式确定的洛伦兹李群（见 [18]）：

(1) 李代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$，其洛伦兹度量由下式描述

$$[e_1,e_2] = e_3 - \sqrt{3}e_2, \quad [e_1,e_3] = e_2 + \sqrt{3}e_3, \quad [e_2,e_3] = 2e_1,$$

(2) 李代数 $\mathfrak{r}_{3,3}$，其洛伦兹度量由下式描述

$$[e_1,e_2] = (\tfrac{1}{2} + \varepsilon\gamma)e_2 + \gamma e_3, \quad [e_1,e_3] = (\varepsilon - \gamma)e_2 + (\tfrac{3}{2} - \varepsilon\gamma)e_3, \quad \varepsilon^2 = 1,$$

对于任意 $\gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq \frac{\varepsilon}{2}$，其中 $\{e_i\}$ 是一个标准正交基，且 e_3 为类时。

任意左不变度量 (1) 的里奇算子具有实特征值和复特征值 $\{-8, 4(1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1})\}$，而度量 (2) 的里奇算子只有一个特征值 -2，它是最小多项式的一个二重根。由 (1) 确定的左不变度量也曾在 [1，命题 4.1] 中被研究过。然而，情形 (2) 具有单一里奇特征值，并不对应于 [1] 中考察的任何情形。

任意三维局部共形平坦流形 (N,h) 都可平凡地扩展为一个四维 Cotton平坦乘积 $(N \times \mathbb{R}, h \oplus \pm dt^2)$，但该乘积不一定是局部共形平坦的。因此，当且仅当里奇张量不平行，且该流形既不是局部共形平坦的，也不是乘积或平面波时，我们称四维 Cotton平坦洛伦兹流形是非平凡的 。

1.4. **结果概要**。 本研究有两个目的。首先，我们确定李群上所有作为 pp 波的非平坦四维左不变度量。其次，我们分析 Weyl 张量的调和性，从而完整描述具有调和曲率的四维洛伦兹李群。

我们的第一个结果表明，pp 波洛伦兹李群对应于平面波，或对应于李群 $E(1,1) \times \mathbb{R}$，其度量是第 1.2.1 节讨论的三维齐性 pp 波与实直线的乘积度量。该结果概括如下：

定理 1.1。 四维非平坦左不变 *pp* 波李群同构相似于以下其中之一：

(1) $[u_1,u_4] = \gamma_1 u_1 + u_2 - \gamma_3 u_3$, $[u_2,u_4] = -\gamma_1 u_2$, $[u_3,u_4] = \gamma_3 u_2$, $\gamma_1 \neq 0$。
(2) $[u_2,u_4] = -(\gamma_2 - 1)u_3$, $[u_3,u_4] = (\gamma_2 + 1)u_1$。(3) $[v_1,v_4] = \gamma_1 v_1 - \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3$, $[v_2,v_4] = \gamma_2 v_1 + \gamma_4 v_2 + \gamma_5 v_3$, $[v_3,v_4] = \gamma_8 v_3$。(4) $[v_1,v_2] = v_3$, $[v_1,v_4] = \gamma_1 v_1 - \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3$, $[v_2,v_4] = \gamma_2 v_1 + \gamma_4 v_2 + \gamma_5 v_3$, $[v_3,v_4] = (\gamma_1 + \gamma_4) v_3$。

(5) $[v_1, v_3] = v_2$, $[v_2, v_3] = -v_1$, $[v_1, v_4] = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2$, $[v_2, v_4] = -\gamma_2 v_1 + \gamma_1 v_2$, $\gamma_1 \neq 0$.

此外，情形(2)、(3),(4) 和(5) 中的左不变度量都是平面波。这里，$\{u_i\}$ 和 $\{v_i\}$ 是伪标准正交基，分别对应 $\langle u_1、\ u_2\rangle = \langle u_3、\ u_3\rangle = \langle u_4、\ u_4\rangle = 1$和 $\langle v_1、\ v_1\rangle = \langle v_2、\ v_2\rangle = \langle v_3、\ v_4\rangle = 1$。

定理 1.1–(1) 中的左不变度量，是唯一并非平面波的左不变 pp 波。其底层李代数为乘积 $\mathfrak{e}(1,\ 1)\times\mathbb{R}$，该度量与 $E(1,\ 1)$ 中三维齐性 pp 波的黎曼直积扩张等距；该 pp 波在第 1.2.1 节中讨论（见注 2.3）。

定理 1.1 中的所有李代数都是可解的。此外，情形 (5) 中的李代数是 $\mathfrak{aff}(\mathbb{C})$，而情形 (2) 中的李代数在 $\gamma_2 = \pm 1$ 时为 $\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}$（分别地，在 $\gamma_2 \neq \pm 1$ 时为 $\mathfrak{n}_4$）。情形 (3) 和 (4) 对应的左不变度量可在阿贝尔代数和海森堡代数的所有半直扩张上实现，但李代数 $\mathfrak{r}_{4,\ 1,\ 1}$ 和 $\mathbb{R}^4$ 除外；在这两个李代数上，任意左不变度量都具有常截面曲率（见 [23]）。

四维阿贝尔李群 $\mathbb{R}^4$上的任意左不变洛伦兹度量都是平坦的；同样，对于与李代数 $\mathfrak{r}_{4,\ 1,\ 1}$ 对应的 $\mathcal{G}$型李群，其上 Ricci 算子为幂零的任意左不变洛伦兹度量也都是平坦的（见 [23]）。除这些情况外，只有与李代数 $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})\times\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ 对应的乘积仿射群不允许任何 pp 波左不变度量（见第 4 节）。因此有

> 除与李代数 $\mathfrak{r}_{4,\ 1,\ 1}$ 和$\mathfrak{aff}$（$\mathbb{R}$）$\times$ $\mathfrak{aff}$（$\mathbb{R}$）对应的李群外，任何非阿贝尔四维李群都允许非平坦的左不变洛伦兹度量，且这些度量是平面波。

与平面波形成鲜明对比的是，具有调和曲率的非平凡洛伦兹李群的存在条件非常苛刻。除了具有三维局部共形平坦因子的乘积、平面波、局部共形平坦情形以及具有平行里奇张量的度量（见 [2, 8, 9, 10]）外，具有调和曲率的四维洛伦兹李群可归结为一族底层李代数为 $\mathfrak{r}_{4,\ \mu,\ -\mu}$ 且 $\mu = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{5})$ 如下的例子。

定理 1.2。任意非平凡的、具有调和曲率的四维洛伦兹李群都与

$$[u_1, u_4] = -\tfrac{1}{4}\eta_2(1+\varepsilon_1\sqrt{5})u_1 + \varepsilon_2 u_2, \quad [u_2, u_4] = \tfrac{1}{4}\eta_2(1+\varepsilon_1\sqrt{5})u_2, \quad [u_3, u_4] = \eta_2 u_3,$$

其中 $\eta_2 \neq 0$、$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$ 和 $\{u_i\}$ 是伪正交基，且 $\langle u_1、\ u_2\rangle = \langle u_3、\ u_3\rangle = \langle u_4、\ u_4\rangle = 1$。

定理 1.2 中任意度量的里奇算子的特征值为 $\{0, 0, -\eta_2^2, -\eta_2^2\}$，其中特征值 0 是最小多项式的二重根。根据里奇算子的若尔当标准形，上述度量对应于定理 5.1] 中的情形 [1, 。

由定理 1.1 和定理 1.2 可知,

四维 *pp* 波李群是平面波，当且仅当其曲率是调和的。

1.5. **论文结构**。四维连通单连通非可解李群可归约为 $SU(2)\times\mathbb{R}$ 和 $SL(2,\mathbb{R})\times\mathbb{R}$。在可解情形下，它们同构于三维幺模李群的半直扩张（例如参见 [3]），因此对应于 $\mathbb{R}^3\rtimes\mathbb{R}$, $\mathcal{H}^3\rtimes\mathbb{R}$, $E(1,1)\rtimes\mathbb{R}$ 和 $E(2)\rtimes\mathbb{R}$，其中 $\mathbb{R}^3$ 是阿贝尔李群，$\mathcal{H}^3$ 是海森堡群，而 $E(1,1)$（分别为 $E(2)$）是庞加莱（分别为欧几里得）李群。为了讨论左不变度量，我们在李代数层面考察李代数 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathbb{R}$ 上洛伦兹度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的不同可能性。

由于任何 pp波都具有二步幂零里奇算子，且属于 Petrov N型，我们分析四维李群上所有左不变洛伦兹度量的这些性质。随后，我们研究 Cotton 张量，以描述具有调和曲率的洛伦兹李群。根据 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 在幺模理想 $\mathfrak{k}$ 上的限制是黎曼、洛伦兹还是退化，分析分为三种一般情形。

关于限制在 $\mathfrak{k}$ 上为黎曼度量的洛伦兹度量，相关讨论源自 Milnor [22]，的研究；而限制在 $\mathfrak{k}$ 上为洛伦兹度量的情形，则以 Rahmani [25] 的研究为基础。若 $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}}$ 退化，则我们受 [7] 中的讨论启发，考虑导出代数 $\mathfrak{k}'=[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]$ 维数的不同可能性（另见 [14]）。第 2 节讨论 $\mathbb{R}^3\rtimes\mathbb{R}$ 上的左不变洛伦兹度量。第 3 节分析 $\mathcal{H}^3\rtimes\mathbb{R}$ 上的左不变度量。第 4 节讨论欧几里得群和庞加莱群的半直扩张；第 5 节则处理对应于 $SU(2)\times\mathbb{R}$ 和 $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ 的非可解情形。

最后我们强调，对于任意洛伦兹左不变度量，性质 $\mathrm{Ric}^2=0$ 或 $\operatorname{div}W=0$ 归结为求解结构常数中的若干多项式方程组。由于多项式方程组的解依赖于这些多项式所生成的理想，而非多项式本身，我们利用 Gr¨obner 基理论（例如参见 [11]）来寻找相应理想中的简单多项式。作为一项技术事实，本文中所有 Gr¨obner 基的计算均借助 MATHEMATICA 12 完成，并采用关于各变量的字典序进行计算，具体变量在每种情形中另行说明。我们提供了一份包含 Gr¨obner 基计算的补充文件，可在 https://doi.org/10.5281/zenodo.18548828 获取。注意，尽管 $\mathrm{Ric}^2=0$ 蕴含标量曲率 τ 为零，但与 $\tau=0$ 对应的多项式未必属于由里奇算子的二步幂零性所确定的那些多项式生成的理想。因此，在研究性质 $\mathrm{Ric}^2=0$ 时，我们在计算 Gr¨obner 基时显式使用由 τ 确定的这一多项式。

2. Semi-direct extensions of the Abelian Lie group

我们分别考虑度量在三维阿贝尔理想 $\mathbb{R}^3$ 上的限制为黎曼型（第 2.1 节）、洛伦兹型（第 2.2 节）或退化型（第 2.3 节）的情形。以下定理的证明可由下面的分析得出。

定理 2.1。 作为 *pp* 波的阿贝尔李群的四维非平坦半直扩张，同构相似于以下之一：

(1) $[u_1,u_4]=\gamma_1u_1+u_2-\gamma_3u_3$, $[u_2,u_4]=-\gamma_1u_2$, $[u_3,u_4]=\gamma_3u_2$, $\gamma_1\neq0$.(2) $[u_2,u_4]=-(\gamma_2-1)u_3$, $[u_3,u_4]=(\gamma_2+1)u_1$.(3) $[v_1,v_4]=\gamma_1v_1-\gamma_2v_2+\gamma_3v_3$, $[v_2,v_4]=\gamma_2v_1+\gamma_4v_2+\gamma_5v_3$, $[v_3,v_4]=\gamma_8v_3$,

其中，$\{u_i\}$ 和 $\{v_i\}$ 是伪标准正交基，分别为 $\langle u_1,\ u_2\rangle=\langle u_3,\ u_3\rangle=\langle u_4,\ u_4\rangle=1$ 以及 $\langle v_1,\ v_1\rangle=\langle v_2,\ v_2\rangle=\langle v_3,\ v_4\rangle=1$。

此外，阿贝尔群的任何非平凡 *Cotton* 平坦半直扩张都与下列对象同构相似：

$$[u_1,u_4]=-\tfrac{1}{4}\eta_2(1+\varepsilon_1\sqrt{5})u_1+\varepsilon_2u_2,\quad [u_2,u_4]=\tfrac{1}{4}\eta_2(1+\varepsilon_1\sqrt{5})u_2,\quad [u_3,u_4]=\eta_2u_3,$$

其中，$\eta_2\neq0$、$\varepsilon_1^2=\varepsilon_2^2=1$和 $\{u_i\}$ 构成上述伪标准正交基。

注 2.2. (i) 上述情形 (1) 中不是平面波的左不变度量，既不是爱因斯坦度量，也不是局部共形平坦的。

(ii) 定理 2.1–(2) 中的左不变度量是爱因斯坦度量，当且仅当 $\gamma_2=0$；它们是局部共形平坦的，当且仅当 $\gamma_2=1$。此外，由于里奇张量是平行的，当 $\gamma_2\neq0$ 时，它们是 (i) 型平面波。

(iii) 情形 (3) 中的左不变度量满足爱因斯坦条件，当且仅当 $\gamma_1^2+\gamma_4^2-(\gamma_1+\gamma_4)\gamma_8=0$。此外，这些度量是局部共形平坦的，当且仅当 $\gamma_1=\gamma_4$ 或 $\gamma_1\neq\gamma_4$，$\gamma_2=0$ 且 $\gamma_8=\gamma_1+\gamma_4$。里奇张量是平行的，当且仅当该度量是爱因斯坦度量或 $\gamma_8=0$。因此，在非爱因斯坦情形下，若 $\gamma_8=0$，则平面波为 (i) 型；否则为 (ii) 型。

注 2.3. 直接计算可知，$\xi=\frac{\gamma_3}{\gamma_1}u_2+u_3$ 在对应于定理 2.1–(1) 的李群上确定了一个左不变单位类空平行向量场。此外，考虑新的基 $\bar u_1=u_1-\frac{\gamma_3^2}{2\gamma_1^2}u_2-\frac{\gamma_3}{\gamma_1}u_3$,$\bar u_2=u_2$, $\bar u_3=u_4$，$\bar u_4=\xi$，内积保持不变，李括号变换为 $[\bar u_1,\bar u_3]=\gamma_1\bar u_1+\bar u_2$和 $[\bar u_2,\bar u_3]=-\gamma_1\bar u_2$。这表明底层李群是乘积 $E(1,\ 1)\times\mathbb{R}$，而洛伦兹度量是第 1.2.1 节中对应于 (1) 的度量与实直线 $\mathbb{R}\xi$上的度量的乘积。

对于李代数 $\mathfrak{g}$ 的给定基 $\{x_i\}$，令 $\Lambda^2\mathfrak{g}$ 为以 $\{x_1\wedge x_2,x_1\wedge x_3,x_1\wedge x_4,x_2\wedge x_3,x_2\wedge x_4,x_3\wedge x_4\}$ 为基的双向量空间。我们考虑由 $\langle\!\langle x_i\wedge x_j,x_k\wedge x_\ell\rangle\!\rangle=\langle x_i,x_k\rangle\langle x_j,x_\ell\rangle-\langle x_i,x_\ell\rangle\langle x_j,x_k\rangle$ 给出的诱导内积，使得曲率张量在双向量空间上的作用为 $\langle\!\langle\mathcal{R}(x_i\wedge x_j)\ x_k\wedge x_\ell\rangle\!\rangle=R(x_i,x_j,x_k,x_\ell)$。由此可知，$\mathcal{R}$ 的唯一非零分量为 $\langle\!\langle\mathcal{R}(u_1\wedge u_4)\ u_1\wedge u_4\rangle\!\rangle=-2\gamma_1$，因此 $\mathcal{R}(u_1\wedge u_4)=-2\gamma_1u_2\wedge u_4$。

2.1. 具有黎曼李群的半直扩张 $\mathbb{R}^3$。设 $\mathfrak{g}=\mathbb{R}^3\rtimes\mathbb{R}$ 是阿贝尔李代数 $\mathbb{R}^3$ 的一个半直扩张。若 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的洛伦兹内积，且其在 $\mathbb{R}^3$ 上的限制具有黎曼符号差，则存在 $\mathfrak{g}$ 的标准正交基 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$，其中 e_4 为类时，使得度量李代数的结构由下式给出：

$$(1)\qquad \begin{aligned}&[e_1,e_4]=\eta_1e_1-\gamma_1e_2-\gamma_2e_3,\qquad [e_2,e_4]=\gamma_1e_1+\eta_2e_2-\gamma_3e_3,\\&[e_3,e_4]=\gamma_2e_1+\gamma_3e_2+\eta_3e_3,\end{aligned}$$

对某些 η_i, $\gamma_i \in \mathbb{R}$。在这种情况下，直接计算可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ric}_1{}^1 = (\eta_1+\eta_2+\eta_3)\eta_1, \quad \mathrm{Ric}_1{}^2 = \mathrm{Ric}_2{}^1 = \gamma_1(\eta_1-\eta_2),\\
&\mathrm{Ric}_2{}^2 = (\eta_1+\eta_2+\eta_3)\eta_2, \quad \mathrm{Ric}_1{}^3 = \mathrm{Ric}_3{}^1 = \gamma_2(\eta_1-\eta_3),\\
&\mathrm{Ric}_3{}^3 = (\eta_1+\eta_2+\eta_3)\eta_3, \quad \mathrm{Ric}_2{}^3 = \mathrm{Ric}_3{}^2 = \gamma_3(\eta_2-\eta_3),\\
&\mathrm{Ric}_4{}^4 = \eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2,
\end{aligned}$$

因此，标量曲率为 $\tau = 2(\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2+\eta_1\eta_2+\eta_1\eta_3+\eta_2\eta_3)$。注意， τ 当且仅当 $\eta_1=\eta_2=\eta_3=0$ 时为零，在这种情况下，空间是平坦的。

注 2.4. 由于任意左不变度量的标量曲率都是常数，Cotton 张量等价地表示为 $C(X, Y, Z) = (\nabla_X\rho)(Y, Z) - (\nabla_Y\rho)(X, Z)$。我们用 $C_{ijk} = C(e_i, e_j, e_k)$ 表示由 $\{e_i\}$ 确定的左不变向量场基上的 Cotton 张量分量。接下来，我们证明，式 (1) 描述的任意左不变度量是 Cotton 平坦的，当且仅当它是爱因斯坦度量或局部对称。我们先计算 Cotton 张量的以下三个分量:

$$C_{124} = -\gamma_1(\eta_1-\eta_2)^2, \quad C_{134} = -\gamma_2(\eta_1-\eta_3)^2, \quad C_{234} = -\gamma_3(\eta_2-\eta_3)^2.$$

注意，等距变换 $(e_1, e_2, e_3, e_4) \mapsto (e_1, e_3, e_2, e_4)$ 给出对应关系 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \sim (\eta_1, \eta_3, \eta_2, \gamma_2, \gamma_1, -\gamma_3)$，而 $(e_1, e_2, e_3, e_4) \mapsto (e_3, e_2, e_1, e_4)$ 表明 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \sim (\eta_3, \eta_2, \eta_1, -\gamma_3, -\gamma_2, -\gamma_1)$。利用这些等距变换并排除爱因斯坦情形 $(\eta_1 = \eta_2 = \eta_3)$，上述分量的消失促使我们分析情形 $\eta_1 = \eta_2 \neq \eta_3$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ 以及情形 $\eta_1 \neq \eta_2 \neq \eta_3$, $\eta_1 \neq \eta_3$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$。

若 $\eta_1 = \eta_2 \neq \eta_3$ 且 $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$，则得到 $C_{141} = \eta_1\eta_3(\eta_3-\eta_1)$。因此， η_1或 η_3 必有一个为零，且该空间是局部对称的。现在，若所有 η_i都互不相同且 $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$，则 Cotton 张量由下式确定

$$C_{141} = \eta_1\left(\eta_2^2+\eta_3^2-\eta_1(\eta_2+\eta_3)\right), \quad C_{242} = \eta_2\left(\eta_1^2+\eta_3^2-\eta_2(\eta_1+\eta_3)\right),$$

由此得到 $\eta_1 C_{242} - \eta_2 C_{141} = \eta_1\eta_2(\eta_1+\eta_2+\eta_3)(\eta_1-\eta_2)$。由于 η_i互不相同，容易验证，只要前三个因子 η_1、 η_2 或 $\eta_1+\eta_2+\eta_3$ 中任意一个为零， $C_{141} = C_{242} = 0$ 就不成立。因此，式 (1) 所给出的非平凡 Cotton 平坦左不变度量不存在。

2.2. 洛伦兹李群上的半直扩张 $\mathbb{R}^3$. 设 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$是阿贝尔李代数 $\mathbb{R}^3$的一个半直扩张。若洛伦兹内积 $\langle\cdot, \cdot\rangle$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的限制具有洛伦兹符号差，则我们必须考虑确定该半直扩张的导子的自伴部分可能具有的若尔当标准形。接下来我们分别分析这些情形。

2.2.1. 导子的自伴部分可对角化。 在这种情况下，存在标准正交基 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$，其中 e_3 为类时，从而左不变度量可描述为

$$\begin{aligned}
&[e_1, e_4] = \eta_1 e_1 - \gamma_1 e_2 + \gamma_2 e_3, \qquad [e_2, e_4] = \gamma_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \gamma_3 e_3,\\
&[e_3, e_4] = \gamma_2 e_1 + \gamma_3 e_2 + \eta_3 e_3,
\end{aligned} \tag{2}$$

对于某些 $\eta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$。

我们按前一种情形进行。里奇算子由

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ric}_1{}^1 = -(\eta_1+\eta_2+\eta_3)\eta_1, \quad \mathrm{Ric}_1{}^2 = \quad \mathrm{Ric}_2{}^1 = -\gamma_1(\eta_1-\eta_2),\\
&\mathrm{Ric}_2{}^2 = -(\eta_1+\eta_2+\eta_3)\eta_2, \quad \mathrm{Ric}_1{}^3 = -\mathrm{Ric}_3{}^1 = \quad \gamma_2(\eta_1-\eta_3),\\
&\mathrm{Ric}_3{}^3 = -(\eta_1+\eta_2+\eta_3)\eta_3, \quad \mathrm{Ric}_3{}^2 = -\mathrm{Ric}_2{}^3 = -\gamma_3(\eta_2-\eta_3),\\
&\mathrm{Ric}_4{}^4 = -(\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2),
\end{aligned}$$

因此，标量曲率 $\tau = -2(\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2+\eta_1\eta_2+\eta_1\eta_3+\eta_2\eta_3)$ 当且仅当 $\eta_1=\eta_2=\eta_3=0$ 时为零；此时该空间是平坦的。

注 2.5。 尽管在这种情况下我们只有一个基本等距变换，$(e_1,e_2,e_3,e_4)\mapsto(e_2,e_1,e_3,e_4)$，这表明 $(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\sim(\eta_2,\eta_1,\eta_3,-\gamma_1,\gamma_3,\gamma_2)$，Cotton 平坦条件可以像注 2.4 中那样处理。事实上，考虑到该等距变换以及各分量的消失

$$C_{124}=\gamma_1(\eta_1-\eta_2)^2, \quad C_{134}=\gamma_2(\eta_1-\eta_3)^2, \quad C_{234}=\gamma_3(\eta_2-\eta_3)^2,$$

由此得到三种可能情形： $\eta_1=\eta_2\neq\eta_3$、 $\gamma_2=\gamma_3=0$的情形，$\eta_1=\eta_3\neq\eta_2$、 $\gamma_1=\gamma_3=0$ 的情形，以及 $\eta_1\neq\eta_2\neq\eta_3$、 $\eta_1\neq\eta_3$、 $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=0$ 的情形（不包括爱因斯坦情形 $\eta_1=\eta_2=\eta_3$）。我们完全按照注 2.4 的方法，证明由 (2) 确定的任何 Cotton 平坦度量都是平凡的。

2.2.2.导子的自伴部分具有复特征值。存在 $\mathfrak{g}=\mathbb{R}^3\rtimes\mathbb{R}$的一个标准正交基 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$，其中 e_3 为类时，使得相应的左不变度量可表示为

$$\begin{aligned}
&[e_1,e_4]=\eta e_1-\gamma_1e_2+\gamma_2e_3, \qquad [e_2,e_4]=\gamma_1e_1+\delta e_2+(\gamma_3-\nu)e_3,\\
&[e_3,e_4]=\gamma_2e_1+(\gamma_3+\nu)e_2+\delta e_3,
\end{aligned} \tag{3}$$

对于某些 η， δ， $\gamma_i\in\mathbb{R}$ 和 $\nu\neq0$。直接计算可得，里奇算子由下式确定

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ric}_1{}^1 = -(\eta+2\delta)\eta, \qquad \mathrm{Ric}_1{}^2 = \quad \mathrm{Ric}_2{}^1 = \gamma_1(\delta-\eta)-\gamma_2\nu,\\
&\mathrm{Ric}_2{}^2 = -\delta\eta-2\delta^2-2\gamma_3\nu, \quad \mathrm{Ric}_1{}^3 = -\mathrm{Ric}_3{}^1 = \gamma_2(\eta-\delta)-\gamma_1\nu,\\
&\mathrm{Ric}_3{}^3 = -\delta\eta-2\delta^2+2\gamma_3\nu, \quad \mathrm{Ric}_2{}^3 = -\mathrm{Ric}_3{}^2 = (\eta+2\delta)\nu,\\
&\mathrm{Ric}_4{}^4 = 2\nu^2-\eta^2-2\delta^2,
\end{aligned}$$

因此，Ric_{44} 是一个特征值。因此，Ric_{44} 必为零，所以 $\nu^2=\frac{1}{2}(\eta^2+2\delta^2)$。在这种情况下，标量曲率 $\tau=-(\eta+2\delta)^2$，因此 $\eta=-2\delta$。

此时我们考虑 Ric^2 算子，它必为零。考虑到 $\eta=-2\delta$，我们计算得 $\left(\mathrm{Ric}^2\right)_2{}^2-\left(\mathrm{Ric}^2\right)_3{}^3=(\gamma_1^2+\gamma_2^2)(9\delta^2+\nu^2)$。由于$\nu\neq0$，可得 $\gamma_1=\gamma_2=0$，经过冗长但直接的计算可知，Weyl 张量作用于双向量空间时， $\mathcal{W}:\ \Lambda^2\to\Lambda^2$，满足

$$\langle\!\langle \mathcal{W}^2(e_1\wedge e_4), e_1\wedge e_4\rangle\!\rangle = \tfrac{4}{9}(3\delta^2+\nu^2)^2\neq0.$$

因此，我们得出结论：这种情况下不存在左不变 pp 波度量。

注 2.6. 任何 Cotton 平坦左不变度量 (3) 必然是爱因斯坦度量。为证明这一点，我们先计算 $C_{234}=-4\gamma_3\nu^2$，由此得到 $\gamma_3=0$。现在，

$C_{124}=\gamma_1\left((\delta-\eta)^2-\nu^2\right)-2\gamma_2(\delta-\eta)\nu$， $C_{134}=\gamma_2\left((\delta-\eta)^2-\nu^2\right)+2\gamma_1(\delta-\eta)\nu$，这意味着 $\gamma_1C_{134}-\gamma_2C_{124}=2(\gamma_1^2+\gamma_2^2)(\delta-\eta)\nu$，因此要么是 $\delta=\eta$，要么是 $\gamma_1=\gamma_2=0$。此外，如果 $\delta=\eta$，那么 $C_{124}=-\gamma_1\nu^2$ 和 $C_{134}=-\gamma_2\nu^2$。因此，无论哪种情况，

$\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ 并且在这一假设下，直接计算表明 Cotton 张量由以下内容确定

$$C_{243} = (2\delta^2 - \eta^2 + 2\delta\eta + 2\nu^2)\nu, \quad C_{343} = -(\delta^2 - \delta\eta - \nu^2)\eta.$$

最后，容易验证这些分量的消失会导出 $\eta = -2\delta = -\frac{2\nu}{\sqrt{3}}\varepsilon$，其中 $\varepsilon^2 = 1$，且相应的左不变度量是爱因斯坦的。

2.2.3.导子的自伴部分的最小多项式有一个二重根。 存在一个伪正交基 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$，其中 $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_3, u_3\rangle = \langle u_4, u_4\rangle = 1$，使得相应的左不变度量可表示为

$$(4)\qquad \begin{aligned} &[u_1, u_4] = (\eta_1 + \gamma_1)u_1 + \varepsilon u_2 - \gamma_3 u_3, \quad [u_2, u_4] = (\eta_1 - \gamma_1)u_2 - \gamma_2 u_3, \\ &[u_3, u_4] = \gamma_2 u_1 + \gamma_3 u_2 + \eta_2 u_3, \end{aligned}$$

其中 η_i, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ 且 $\varepsilon^2 = 1$。

通过直接计算可知，里奇算子由下式确定

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ric}_1{}^1 = \mathrm{Ric}_2{}^2 = -(2\eta_1 + \eta_2)\eta_1, \quad && \mathrm{Ric}_1{}^2 = -\varepsilon(2\eta_1 + \eta_2 + 2\gamma_1), \\ &\mathrm{Ric}_3{}^3 = -(2\eta_1 + \eta_2)\eta_2, && \mathrm{Ric}_1{}^3 = \mathrm{Ric}_3{}^2 = -\gamma_3(\eta_1 - \eta_2) - \varepsilon\gamma_2, \\ &\mathrm{Ric}_4{}^4 = -2\eta_1^2 - \eta_2^2, && \mathrm{Ric}_2{}^3 = \mathrm{Ric}_3{}^1 = -\gamma_2(\eta_1 - \eta_2). \end{aligned}$$

因此，标量曲率 $\tau = -2(3\eta_1^2 + \eta_2^2 + 2\eta_1\eta_2)$，故必有$\eta_1 = \eta_2 = 0$。此时，$\mathrm{Ric}^2$ 的唯一非零分量为 $\left(\mathrm{Ric}^2\right)_1{}^2 = \gamma_2^2$。因此，$\gamma_2 = 0$，且左不变度量为

$$(5)\qquad [u_1, u_4] = \gamma_1 u_1 + \varepsilon u_2 - \gamma_3 u_3, \quad [u_2, u_4] = -\gamma_1 u_2, \quad [u_3, u_4] = \gamma_3 u_2.$$

注意，等距变换 $u_4 \mapsto -u_4$ 将 ε、γ_1 和 γ_3 的符号互换。因此，不失一般性，我们可以假设 $\varepsilon = 1$。此外，直接计算可得，当且仅当 $\gamma_1 = 0$ 时，该度量是平坦的。

在非平坦情形下，由于对于 $i = 1, 2, 3$，有 $\nabla_{u_i} u_2 = 0$，且 $\nabla_{u_4} u_2 = \gamma_1 u_2$，可知 u_2 确定了一个左不变循环零向量场。此外，直接计算表明，曲率张量满足 $R(x, y) = 0$，对所有 x, $y \in u_2^{\perp} = \mathrm{span}\{u_2, u_3, u_4\}$均成立。然而，协变导数 $(\nabla_{u_4} R)(u_1, u_4, u_1) = -4\gamma_1^2 u_4 \neq 0$。因此，我们得出结论：由方程（5）确定的左不变度量所对应的底层结构是 pp波而非平面波（参见 [20]），对应于定理 2.1 中的情形 (1)。

注2.7。 考虑任意度量 (4) 的 Cotton 张量分量，

$$C_{234} = \gamma_2(\eta_1 - \eta_2)^2, \quad C_{142} = -\varepsilon\gamma_2^2 - (2\gamma_2\gamma_3 - \eta_1\eta_2)(\eta_1 - \eta_2),$$

若 Cotton 张量消失，则可得 $\gamma_2 = 0$ 和 $\eta_1\eta_2(\eta_1 - \eta_2) = 0$。于是有 $C_{134} = \gamma_3(\eta_1 - \eta_2)^2$,，因此得到三种可能：情形$\eta_1 = \eta_2$、情形 $\gamma_3 = \eta_2 = 0 \neq \eta_1$和情形 $\gamma_3 = \eta_1 = 0 \neq \eta_2$。

若 $\eta_1 = \eta_2$，则 Cotton 张量由 $C_{141} = \varepsilon(2\gamma_1 + 3\eta_1)(2\gamma_1 + \eta_1)$ 决定，并且当 $2\gamma_1 + 3\eta_1 = 0$ 时该空间为爱因斯坦空间，当 $2\gamma_1 + \eta_1 = 0$时则局部共形平坦。

若 $\gamma_3 = \eta_2 = 0 \neq \eta_1$，Cotton 张量由 $C_{141} = 2\varepsilon(\gamma_1 + \eta_1)(2\gamma_1 + \eta_1)$ 给出。对于 $\gamma_1 + \eta_1 = 0$，该度量是局部对称的。否则，若 $2\gamma_1 + \eta_1 = 0$，左不变度量对应于直积李代数 $\mathfrak{k} \times \mathbb{R}$，其中 $\mathfrak{k} = \mathrm{span}\{u_1, u_2, u_4\}$，直接计算可得 $\nabla_{u_i} u_3 = 0$, $i = 1,$ ……, 4。因此， u_3 生成一个左不变类空平行向量场，而洛伦兹

李群分解为一个洛伦兹乘积李群，对应于李代数 $\mathfrak{r}_{3,\ 3} \times \mathbb{R}$ ，其三维因子上的度量由第 1.3.1 节中的 (2) 给出。

最后，我们分析 $\gamma_3 = \eta_1 = 0 \neq \eta_2$ 的情形。在这一最后的情形中，Cotton 张量由 $C_{141} = \varepsilon(4\gamma_1^2 - \eta_2^2 + 2\gamma_1\eta_2)$ 决定。取 $\gamma_1 = -\frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{5})\eta_2 \neq 0$，直接计算表明，由下式给出的左不变度量

$$[u_1, u_4] = \gamma_1 u_1 + \varepsilon u_2, \quad [u_2, u_4] = -\gamma_1 u_2, \quad [u_3, u_4] = \eta_2 u_3,$$

是非平凡的 Cotton 平坦度量，对应于定理 1.2 中的洛伦兹李群。

直接计算表明，由u_2 确定的左不变向量场 U_2 是零的且为递归的，这说明底层结构是一个在非幺模李代数$\mathfrak{r}_{4,\mu,-\mu}$ 上不是横向平坦的 Brinkmann 波，其中 $\mu = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{5})$。此外，里奇算子的特征值为 0 和 $-\eta_2^2$，前者是最小多项式的二重根。Weyl 曲率算子$\mathcal{W}\colon\ \Lambda^2 \to \Lambda^2$的特征值为 $-\frac{1}{3}\eta_2^2$（重数为二）和 $\frac{1}{6}\eta_2^2$（重数为四），后者是最小多项式的二重根。因此属于 Petrov II 型。 –

2.2.4. 导子的自伴部分有一个三重根。 存在一个伪正交基 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ of $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$，其中 $\langle u_1,\ u_2\rangle = \langle u_3,\ u_3\rangle = \langle u_4,\ u_4\rangle = 1$，使得左不变度量为

$$\begin{aligned} &[u_1, u_4] = (\eta + \gamma_1)u_1 - \gamma_3 u_3, \quad [u_2, u_4] = (\eta - \gamma_1)u_2 - (\gamma_2 - 1)u_3, \\ &[u_3, u_4] = (\gamma_2 + 1)u_1 + \gamma_3 u_2 + \eta u_3, \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\eta,\ \gamma_i \in \mathbb{R}$。

在这种情况下，里奇算子由以下关系确定

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ric}_1{}^1 = \mathrm{Ric}_2{}^2 = -3\eta^2 + \gamma_3, \quad \mathrm{Ric}_2{}^1 = 2\gamma_2, \\ &\mathrm{Ric}_3{}^3 = -3\eta^2 - 2\gamma_3, \qquad\quad \mathrm{Ric}_3{}^1 = \mathrm{Ric}_2{}^3 = -3\eta + \gamma_1, \\ &\mathrm{Ric}_4{}^4 = -3\eta^2, \end{aligned}$$

因此 $\tau = -12\eta^2$ ，这导致 $\eta = 0$。现在，直接计算可得，$\mathrm{Ric}^2 = 0$ 当且仅当 $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$，相应的左不变度量为

$$[u_2, u_4] = -(\gamma_2 - 1)u_3, \quad [u_3, u_4] = (\gamma_2 + 1)u_1. \tag{7}$$

直接计算可得， u_1 确定了一个左不变的平行零向量场；此外，曲率张量满足 $R(x,\ y) = 0$ ，对所有$x,\ y \in u_1^{\perp} = \mathrm{span}\{u_1, u_3, u_4\}$均成立，而协变导数 $\nabla_x R = 0$ 对所有$x \in u_1^{\perp}$均成立。因此，由 [20] 可知，左不变度量 (7) 的底层结构是与定理 2.1–(2) 对应的平面波。

注 2.8. 由式 (6) 给出的任意左不变度量的 Cotton 张量是否为零，取决于以下表达式是否为零:

$C_{143} = -3\gamma_3^2$, $C_{242} = \gamma_1(6\gamma_2 - 1) - (8\gamma_2 - 3)\eta$, $C_{243} = (\gamma_1 - 3\eta)(\gamma_1 - \eta) - (5\gamma_2 - 2)\gamma_3$.

因此有三种可能： $\gamma_1 = \gamma_3 = \eta = 0$的情形、 $\gamma_1 = 3\eta \neq 0$、$\gamma_2 = \gamma_3 = 0$的情形，以及 $\gamma_1 = \eta \neq 0$、 $\gamma_2 = 1$、 $\gamma_3 = 0$的情形。注意，第一种情形对应于式（7）给出的平面波。此外，第二种情形下度量为爱因斯坦度量，第三种情形下则局部共形平坦。

2.3. 具有退化李群的半直扩张 $\mathbb{R}^3$。 在这种情况下，我们考虑一个带有洛伦兹内积 $\langle\cdot$的四维李代数 $\mathfrak{g}=\mathbb{R}^3\rtimes\mathbb{R}\ \cdot\rangle$，该内积限制在子代数 $\mathbb{R}^3$上时为退化内积。存在 $\mathfrak{g}$ 的一个伪正交基 $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$，其中 $\langle u_1,\ u_1\rangle=\langle u_2,\ u_2\rangle=\langle u_3,\ u_4\rangle=1$; 必要时可旋转向量 u_1 和 u_2，使得

$$
\begin{aligned}
&[u_1,u_4]=\gamma_1u_1-\gamma_2u_2+\gamma_3u_3, \qquad [u_2,u_4]=\gamma_2u_1+\gamma_4u_2+\gamma_5u_3,\\
&[u_3,u_4]=\gamma_6u_1+\gamma_7u_2+\gamma_8u_3,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

对于某些 $\gamma_i\in\mathbb{R}$。

我们首先计算里奇算子，它由下式确定

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ric}_1{}^1=-\tfrac{\gamma_6^2}{2},\quad \mathrm{Ric}_2{}^2=-\tfrac{\gamma_7^2}{2},\quad \mathrm{Ric}_1{}^3=\mathrm{Ric}_4{}^1=\tfrac{1}{2}(2\gamma_1\gamma_6-\gamma_2\gamma_7+\gamma_4\gamma_6),\\
&\mathrm{Ric}_3{}^3=\mathrm{Ric}_4{}^4=\tfrac{1}{2}(\gamma_6^2+\gamma_7^2),\quad \mathrm{Ric}_2{}^3=\mathrm{Ric}_4{}^2=\tfrac{1}{2}(\gamma_1\gamma_7+\gamma_2\gamma_6+2\gamma_4\gamma_7),\\
&\mathrm{Ric}_1{}^2=\mathrm{Ric}_2{}^1=-\tfrac{\gamma_6\gamma_7}{2},\qquad \mathrm{Ric}_4{}^3=-\gamma_1^2-\gamma_4^2+\gamma_1\gamma_8-\gamma_3\gamma_6+\gamma_4\gamma_8-\gamma_5\gamma_7,
\end{aligned}
$$

由此可得 $\tau=\frac{1}{2}(\gamma_6^2+\gamma_7^2)$。因此，必然有 $\gamma_6=\gamma_7=0$，这确保了 $\mathrm{Ric}^2=0$，且相应的左不变度量对应于

$$
[u_1,u_4]=\gamma_1u_1-\gamma_2u_2+\gamma_3u_3,\quad [u_2,u_4]=\gamma_2u_1+\gamma_4u_2+\gamma_5u_3,\quad [u_3,u_4]=\gamma_8u_3. \tag{9}
$$

现在，直接计算可知，u_3 确定了一个左不变的循环零向量场，因为对于 $i=1,2,3$，有 $\nabla_{u_i}u_3=0$，且 $\nabla_{u_4}u_3=-\gamma_8u_3$。此外，曲率张量满足 $R(x,\ y)=0$，对所有 $x,\ y\in u_3^{\perp}=\mathrm{span}\{u_3,u_1,u_2\}$ 均成立；而协变导数对所有 $x\in u_3^{\perp}$ 均满足 $\nabla_xR=0$。因此，我们得出结论：由方程（9）确定的左不变度量的底层结构是一个平面波（参见 [20]），对应于定理 2.1 中的情形（3）。

注 2.9. 任意度量 (8) 的 Cotton 张量的分量 $C_{134}=-\frac{1}{2}(\gamma_6^2+\gamma_7^2)\gamma_6$和 $C_{234}=-\frac{1}{2}(\gamma_6^2+\gamma_7^2)\gamma_7$ 意味着 $\gamma_6=\gamma_7=0$。因此，Weyl 张量是调和的，当且仅当底层结构是由 (9) 给出的平面波。

3. Semi-direct extensions of the Heisenberg Lie group $\mathcal{H}^3$

海森堡代数的半直扩张包括幂零李代数 $\mathfrak{h}_3\times\mathbb{R}$ 和 $\mathfrak{n}_4$，它们也是阿贝尔李代数的半直扩张。由于这两种情形已在上一节的讨论中考察过，我们将重点放在非几乎阿贝尔的海森堡群半直扩张上（关于直积李群 $\mathcal{H}^3\times\mathbb{R}$上的左不变度量的描述，参见 [19] ）。

我们按照阿贝尔李群的情形分别考察诱导在 $\mathcal{H}^3$ 上的度量为正定、洛伦兹或退化的情况。在此情形下，使用 Gr¨obner 基有助于得出以下结果，该结果由我们下面进行的分析推导而来。

定理 3.1. 海森堡李群的一个四维非平坦半直扩张，若它是未在 $\mathbb{R}^3\rtimes\mathbb{R}$ 上实现的 *pp*波，则同构相似于一个平面波

$$
\begin{aligned}
&[v_1,v_2]=v_3, && [v_1,v_4]=\gamma_1v_1-\gamma_2v_2+\gamma_3v_3,\\
&[v_2,v_4]=\gamma_2v_1+\gamma_4v_2+\gamma_5v_3, && [v_3,v_4]=(\gamma_1+\gamma_4)v_3,
\end{aligned}
$$

其中 $\{v_i\}$ 是由 $\langle v_1、\ v_1\rangle=\langle v_2、\ v_2\rangle=\langle v_3、\ v_4\rangle=1$ 构成的伪正交基。

此外，任何未在 $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ 上实现的海森堡群的 *Cotton* 平坦半直扩张，都如上所述为局部共形平坦或平面波。

注 3.2。上述定理给出的左不变度量是爱因斯坦度量，当且仅当 $4\gamma_1\gamma_4 + 1 = 0$；它们是局部共形平坦的，当且仅当 $(\gamma_1 - \gamma_4)(2\gamma_2 - 1) = 0$。此外，里奇张量平行，当且仅当该度量是爱因斯坦度量或 $\gamma_1 + \gamma_4 = 0$。因此，在非爱因斯坦情形下，定理 3.1 中的平面波在 $\gamma_1+\gamma_4 = 0$ 时属于类型 (i)，否则属于类型 (ii)。

考虑新的基 $\bar{v}_1 = v_1, \bar{v}_2 = v_2, \bar{v}_3 = v_3, \bar{v}_4 = \gamma_5 v_1 - \gamma_3 v_2 + v_4$，李括号变为

$$[\bar{v}_1, \bar{v}_2] = \bar{v}_3,\ [\bar{v}_1, \bar{v}_4] = \gamma_1\bar{v}_1 - \gamma_2\bar{v}_2,\ [\bar{v}_2, \bar{v}_4] = \gamma_2\bar{v}_1 + \gamma_4\bar{v}_2,\ [\bar{v}_3, \bar{v}_4] = (\gamma_1 + \gamma_4)\bar{v}_3,$$

直接计算可得，在基底 $\{\bar{v}_i\}$上取值时，

$$\mathrm{ad}_{\bar{v}_4} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \operatorname{tr} A \end{pmatrix}, \quad \text{where } A = \begin{pmatrix} -\gamma_1 & -\gamma_2 \\ \gamma_2 & -\gamma_4 \end{pmatrix}.$$

因此，当且仅当 $\gamma_4 = -\gamma_1$ 和$\gamma_1^2 = \gamma_2^2$ 时，该李代数对应于 $\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}$ 或 $\mathfrak{n}_4$ （参见 [3]）。事实上，令 $\gamma_2 = \varepsilon\gamma_1$，其中 $\varepsilon^2 = 1$，并考虑基

$$\widetilde{v}_1 = -\gamma_5 v_1 + \gamma_3 v_2 - v_4, \quad \widetilde{v}_2 = v_3, \quad \widetilde{v}_3 = \varepsilon v_1 - v_2, \quad \widetilde{v}_4 = v_1,$$

李括号变为 $[\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_4] = \varepsilon\gamma_1\widetilde{v}_3$ 和 $[\widetilde{v}_3, \widetilde{v}_4] = \widetilde{v}_2$。因此我们得出结论：只有当 $\gamma_4 = -\gamma_1$ 和 $\gamma_1^2 = \gamma_2^2$ 时，定理 3.1 中的半直扩张才是几乎阿贝尔的，因而适用于定理 2.1。

3.1. 具有黎曼正规子群的半直扩张 $\mathcal{H}^3$。本节考虑由三维黎曼海森堡李群 $\mathcal{H}^3$扩张得到的左不变洛伦兹度量。考虑标准正交基 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$（其中 e_4 为类时），即可描述所有此类洛伦兹扩张，此时李括号为

$$\begin{aligned} &[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, && [e_1, e_4] = \gamma_1 e_1 - \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3, \\ &[e_2, e_4] = \gamma_2 e_1 + \gamma_4 e_2 + \gamma_5 e_3, && [e_3, e_4] = (\gamma_1 + \gamma_4) e_3, \end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\lambda_3 \neq 0$ 和 $\gamma_i \in \mathbb{R}$。

我们首先引入辅助变量 λ_3'，以通过$\lambda_3\lambda_3' - 1$表示 $\lambda_3 \neq 0$。在多项式环 $\mathbb{R}[\lambda_3', \gamma_3, \gamma_5, \gamma_2, \gamma_1, \gamma_4, \lambda_3]$ 中，我们计算理想 $\mathcal{I} = \langle \left(\mathrm{Ric}^2\right)_j^i \cup \{\tau, \lambda_3\lambda_3' - 1\}\rangle$ 的 Gr¨obner 基，得到 19 个多项式，其中包括 $\mathbf{g}_1 = \gamma_2^2$、$\mathbf{g}_2 = (4\gamma_4^2 + \lambda_3^2)(16\gamma_4^2 + \lambda_3^2)\gamma_4^2$ 和 $\mathbf{g}_3 = (\gamma_1 + 2\gamma_4)(2\gamma_1 + \gamma_4)$。因此，由于 $\lambda_3 \neq 0$，必然有 $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_4 = 0$，而可能的左不变 pp 波度量对应于

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_1, e_4] = \gamma_3 e_3, \quad [e_2, e_4] = \gamma_5 e_3. \tag{11}$$

现在，基变换 $\bar{e}_1 = -\frac{\gamma_5}{\lambda_3} e_1 + \frac{\gamma_3}{\lambda_3} e_2 - e_4$，$\bar{e}_2 = \lambda_3 e_3$，$\bar{e}_3 = -e_2$，$\bar{e}_4 = e_1$ 将李括号变为 $[\bar{e}_3, \bar{e}_4] = \bar{e}_2$。因此，我们得出结论：左不变度量 (11) 也可以在 $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ 上实现。

注 3.3。任何具有调和曲率的左不变度量（10）也可在 $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ 上实现。事实上，在与上述相同的多项式环中，对理想 $\mathcal{I} = \langle C_{ijk} \cup \{\lambda_3\lambda_3' - 1\}\rangle$ 计算 Gr¨obner 基会得到 9 个多项式，其中三个分别为 $\mathbf{g}_1 = \gamma_2(4\gamma_4^2 + \lambda_3^2)$、$\mathbf{g}_2 = \gamma_4(4\gamma_4^2 + \lambda_3^2)$ 和 $\mathbf{g}_3 = \gamma_1 - \gamma_4$，它们如上所述推出 $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_4 = 0$。

3.2. 具有洛伦兹正规子群的半直扩张 $\mathcal{H}^3$。 Rahmani [25] 证明了，在 $\mathcal{H}^3$ 上存在三个非位似类的左不变洛伦兹度量，它们对应于 Ia 型和 II 型的结构算子。若结构算子 L 可对角化，则根据 $\ker L$ 是正定的还是具有洛伦兹符号差，可区分为两种情形。若结构算子为 II 型，则其必然是幂零的。下面我们将分别分析这三种情形。

3.2.1. **结构算子可对角化，秩为一，且具有正定核。**在此情形下，存在一个标准正交基 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$（$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \rtimes \mathbb{R}$ 的基），其中 e_3 为类时，使得

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_2] = -\lambda_3 e_3, && [e_1, e_4] = \gamma_1 e_1 - \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3,\\
&[e_2, e_4] = \gamma_2 e_1 + \gamma_4 e_2 + \gamma_5 e_3, && [e_3, e_4] = (\gamma_1 + \gamma_4) e_3,
\end{aligned} \tag{12}
$$

其中 $\lambda_3 \neq 0$ 且 $\gamma_i \in \mathbb{R}$。

我们取一个辅助变量 λ_3'，用以借助多项式 $\lambda_3\lambda_3' - 1$ 表明 $\lambda_3 \neq 0$，并在多项式环 $\mathbb{R}[\lambda_3', \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_5, \gamma_4, \lambda_3]$中计算理想 $\mathcal{I} = \langle (\mathrm{Ric}^2)_{j}^{\,i} \cup \{\tau, \lambda_3\lambda_3' - 1\}\rangle$的 Gr¨obner 基。由此我们得到 20 个多项式，其中两个为$\mathbf{g}_1 = (4\gamma_4^2 + \lambda_3^2)(16\gamma_4^2 + \lambda_3^2)\gamma_4^2$ 和$\mathbf{g}_2 = \gamma_3^2 + \gamma_5^2 + \lambda_3^2 + 10\gamma_1\gamma_4$。因此 $\gamma_4 = 0$，又由于 $\lambda_3 \neq 0$，这导致$\mathbf{g}_2 \neq 0$。故在此情形下不存在左不变 pp 波度量。

注 3.4. 请注意，没有任何左不变度量 (12) 具有调和曲率。事实上，直接计算可得 $C_{123} = \left((\gamma_1 + \gamma_4)^2 + \gamma_3^2 + \gamma_5^2 + \lambda_3^2\right)\lambda_3$，其不为零。

3.2.2.结构算子可对角化，秩为一，且其核为洛伦兹核。 在此情形下，可以选取 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \rtimes \mathbb{R}$ 的一个标准正交基 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$，其中 e_3 为类时，从而左不变度量可表示为

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_3] = -\lambda_2 e_2, && [e_1, e_4] = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3,\\
&[e_2, e_4] = \gamma_4 e_2, && [e_3, e_4] = \gamma_5 e_1 + \gamma_6 e_2 - (\gamma_1 - \gamma_4) e_3,
\end{aligned} \tag{13}
$$

其中 $\lambda_2 \neq 0$ 和 $\gamma_i \in \mathbb{R}$。

我们沿用前面各情形的处理方法。令 λ_2' 为一个辅助变量，使多项式 $\lambda_2\lambda_2' - 1$ 反映 λ_2 的非零性。我们考虑多项式环 $\mathbb{R}[\lambda_2', \gamma_2, \gamma_6, \gamma_1, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \lambda_2]$ 中的理想 $\mathcal{I} = \langle (\mathrm{Ric}^2)_{j}^{\,i} \cup \{\tau, \lambda_2\lambda_2' - 1\}\rangle$。计算 Gröbner 基后，得到一组包含 48 个多项式的集合，其中包括

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{g_1} = (16\gamma_4^2 + \lambda_2^2)\gamma_4^3, \quad \mathbf{g_2} = (16\gamma_4^2 + \lambda_2^2)\gamma_5^3, \quad \mathbf{g_3} = (\gamma_3 + \gamma_5)(\gamma_3^2 + \gamma_5^2 - \gamma_3\gamma_5),\\
&\mathbf{g_4} = 20\gamma_1^2 - 7\gamma_3^2 - 40\gamma_4^2 - 7\gamma_5^2 - 20\gamma_1\gamma_4 + 6\gamma_3\gamma_5.
\end{aligned}
$$

由于 $\lambda_2 \neq 0$，可得 $\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 0$，因此可能的左不变 pp 波度量为

$$
[e_1, e_3] = -\lambda_2 e_2, \quad [e_1, e_4] = \gamma_2 e_2, \quad [e_3, e_4] = \gamma_6 e_2. \tag{14}
$$

注意，基变换 $\bar{e}_1 = -\frac{\gamma_6}{\lambda_2} e_1 + \frac{\gamma_2}{\lambda_2} e_3 + e_4$，$\bar{e}_2 = \lambda_2 e_2$，$\bar{e}_3 = e_1$，$\bar{e}_4 = -e_3$ 将李括号变换为 $[\bar{e}_3, \bar{e}_4] = \bar{e}_2$。因此我们得出结论，公式（14）给出的左不变度量也能在 $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ 上实现。

注 3.5. 任意 Cotton 平坦左不变度量 (13) 也能在 $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ 上实现。事实上，在与上文相同的多项式环中，我们计算理想 $\mathcal{I} = \langle C_{ijk} \cup \{\lambda_2\lambda_2' - 1\}\rangle$ 的 Gr¨obner 基，得到 19 个多项式，其中包括$\mathbf{g}_1 = \gamma_3(\gamma_4^2+\lambda_2^2)$、$\mathbf{g}_2 = \gamma_4(\gamma_4^2+\lambda_2^2)$、$\mathbf{g}_3 = \gamma_5(\gamma_4^2+\lambda_2^2)$和$\mathbf{g}_4 = 4\gamma_1^2-\gamma_4^2-2\gamma_3(\gamma_3-\gamma_5)$。因此， $\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 0$ 如上所述。

3.2.3. **结构算子是二步幂零的**。在这种情况下，存在 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \rtimes \mathbb{R}$的伪正交基 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$，其中 $\langle u_1,\ u_2\rangle = \langle u_3,\ u_3\rangle = \langle u_4,\ u_4\rangle = 1$，使得

$$
\begin{aligned}
&[u_1, u_3] = -\varepsilon u_2, \quad [u_1, u_4] = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3,\\
&[u_2, u_4] = \gamma_4 u_2, \quad [u_3, u_4] = \gamma_5 u_1 + \gamma_6 u_2 - (\gamma_1 - \gamma_4) u_3,
\end{aligned} \tag{15}
$$

其中 $\varepsilon^2 = 1$ 和 $\gamma_i \in \mathbb{R}$。

我们考虑多项式环 $\mathbb{R}[\varepsilon, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_6, \gamma_1, \gamma_4, \gamma_5]$。对于由 $\left(\mathrm{Ric}^2\right)_j^i \cup \{\tau, \varepsilon^2 - 1\}$ 生成的理想 $\mathcal{I}$，计算 Gr¨obner 基得到 52 个多项式，其中包括$\mathbf{g_1} = \gamma_1^5$、$\mathbf{g_2} = \gamma_4^4$和$\mathbf{g_3} = \gamma_5^3$。因此 $\gamma_1 = \gamma_4 = \gamma_5 = 0$，所以可能的左不变 pp 波度量为

$$
[u_1, u_3] = -\varepsilon u_2, \quad [u_1, u_4] = \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3, \quad [u_3, u_4] = \gamma_6 u_2. \tag{16}
$$

若 $\gamma_3 \neq 0$，则基变换 $\bar{u}_1 = -\varepsilon\gamma_6 u_1 + \varepsilon\gamma_2 u_3 + u_4$，$\bar{u}_2 = -\varepsilon u_2$，$\bar{u}_3 = \gamma_3 u_3$,$\bar{u}_4 = -u_1$ 将李括号变为 $[\bar{u}_1, \bar{u}_4] = \bar{u}_3$，$[\bar{u}_3, \bar{u}_4] = \gamma_3\bar{u}_2$；而若$\gamma_3 = 0$，我们考虑 $\bar{u}_1 = -\varepsilon\gamma_6 u_1 + \varepsilon\gamma_2 u_3 + u_4$，$\bar{u}_2 = \varepsilon u_2$，$\bar{u}_3 = u_1$，$\bar{u}_4 = -u_3$，李括号则变为 $[\bar{u}_3, \bar{u}_4] = \bar{u}_2$。因此，方程（16）给出的左不变度量也可以在 $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ 上实现。

注 3.6. 接下来我们证明，未能在 $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ 上实现且具有调和曲率的左不变度量 (15) 必然是局部共形平坦的。由于 $C_{123} = \frac{3\varepsilon}{4}\gamma_5^2$ 和 $C_{131} = -\frac{\varepsilon}{4}$（$4(3\gamma_1 - \gamma_4)\gamma_4 - \gamma_5(\gamma_3 + 7\gamma_6)$），可知 $\gamma_5 = 0$，且 $\gamma_4 = 0$ 或 $\gamma_4 = 3\gamma_1 \neq 0$ 成立。若 $\gamma_5 = \gamma_4 = 0$，则 $C_{142} = -\frac{3}{4}\gamma_1^3$，因此 $\gamma_1 = 0$，且该度量也能在 $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ 上实现。最后，若 $\gamma_5 = 0$ 且 $\gamma_4 = 3\gamma_1 \neq 0$，则 $C_{143} = \frac{5}{2}\gamma_1^2(\gamma_3 + \gamma_6)$ 推出 $\gamma_6 = -\gamma_3$，从而该空间是局部共形平坦的。

3.3. **退化正规子群的半直扩张 $\mathcal{H}^3$**。设$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \rtimes \mathbb{R}$ 是一个带有洛伦兹内积$\langle\cdot$的$\cdot\rangle$ 四维李代数，该内积在 $\mathfrak{h}_3$ 上限制为退化内积。我们考虑两种不同情形：度量在导出子代数 $\mathfrak{h}_3'$ 上的限制是退化的，或是类空的。

3.3.1. **$\mathfrak{h}_3'$ = 张成{v} 是一个零子空间**。在这种情况下，令 $u_3 = v$，我们可以取 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \rtimes \mathbb{R}$ 的伪正交基 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$，其中 $\langle u_1,\ u_1\rangle = \langle u_2,\ u_2\rangle = \langle u_3,\ u_4\rangle = 1$，使得

$$
\begin{aligned}
&[u_1, u_2] = \lambda_1 u_3, && [u_1, u_4] = \gamma_1 u_1 - \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3,\\
&[u_2, u_4] = \gamma_2 u_1 + \gamma_4 u_2 + \gamma_5 u_3, && [u_3, u_4] = (\gamma_1 + \gamma_4) u_3,
\end{aligned} \tag{17}
$$

其中 $\lambda_1 \neq 0$ 和 $\gamma_i \in \mathbb{R}$。

直接计算可知，在不附加任何假设的情况下，里奇张量唯一的非零分量为 $\rho(u_4,\ u_4) = \frac{1}{2}(4\gamma_1\gamma_4 + \lambda_1^2)$，这证明里奇算子是迷向的。此外,$^-$对于 $i = 1,\ 2,\ 3,\ \nabla_{u_i} u_3 = 0\ \nabla_{u_4} u_3 = -(\gamma_1 + \gamma_4)u_3$，因此 u_3 确定了一个零回归左不变

向量场。此外，直接计算可知，对于所有 $x,\ y \in u_3^{\perp} = \mathrm{span}\{u_3, u_1, u_2\}$，$R(x, y) = 0$且 $\nabla_x R = 0$。因此，由 (17) 确定的左不变度量是平面波（见 [20]）。最后，由于 $\lambda_1 \neq 0$，我们可以取$\lambda_1 = 1$，在初始度量的相似类中工作，对应于定理 3.1 中给出的度量。

3.3.2. **$\mathfrak{h}_3'$ =张成{v} 是一个类空子空间**。我们设定 $u_1 = \frac{v}{\|v\|}$，并考虑 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \rtimes \mathbb{R}$ 的一个伪正交基 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$，其中 $\langle u_1,\ u_1\rangle = \langle u_2,\ u_2\rangle = \langle u_3,\ u_4\rangle = 1$，使得

$$
\begin{aligned}
&[u_1, u_4] = \gamma_1 u_1, \quad [u_2, u_3] = \lambda_3 u_1, \quad [u_2, u_4] = \gamma_2 u_1 + \gamma_3 u_2 + \gamma_4 u_3,\\
&[u_3, u_4] = \gamma_5 u_1 + \gamma_6 u_2 + (\gamma_1 - \gamma_3) u_3,
\end{aligned} \tag{18}
$$

其中 $\lambda_3 \neq 0$ 且 $\gamma_i \in \mathbb{R}$。

我们先引入一个辅助变量 λ_3'，以通过 $\lambda_3\lambda_3' - 1$ 表示 $\lambda_3 \neq 0$，以及多项式环 $\mathbb{R}[\lambda_3', \lambda_3, \gamma_2, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_4, \gamma_3, \gamma_1]$ 中的理想 $\mathcal{I} = \langle \left(\mathrm{Ric}^2\right)_j^i \cup \{\tau, \lambda_3\lambda_3' - 1\}\rangle$。对该理想计算 Gröbner 基后，我们得到 27 个多项式，其中四个为 $\mathbf{g_1} = \gamma_1^3$、$\mathbf{g_2} = 2\gamma_3^2 - 3\gamma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_3$、$\mathbf{g_3} = \gamma_4^3$ 和 $\mathbf{g_4} = \gamma_6^2$。因此 $\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_6 = 0$，可能的左不变 pp 波度量为

$$
[u_2, u_3] = \lambda_3 u_1, \quad [u_2, u_4] = \gamma_2 u_1, \quad [u_3, u_4] = \gamma_5 u_1. \tag{19}
$$

现在，基变换 $\bar{u}_1 = \frac{\gamma_5}{\lambda_3} u_2 - \frac{\gamma_2}{\lambda_3} u_3 + u_4$，$\bar{u}_2 = \lambda_3 u_1$，$\bar{u}_3 = u_3$，$\bar{u}_4 = -u_2$ 将李括号变换为 $[\bar{u}_3, \bar{u}_4] = \bar{u}_2$。因此我们得出结论，方程（19）给出的左不变度量也可在 $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ 上实现。

注 3.7. 任意 Cotton 平坦左不变度量 (18) 也可在 $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$ 上实现。事实上，考虑与上文相同的多项式环，并为 $\mathcal{I} = \langle C_{ijk} \cup \{\lambda_3\lambda_3' - 1\}\rangle$ 计算一个 Gr¨obner 基，可得 7 个多项式，包括 $\mathbf{g}_1 = \gamma_1$,$\mathbf{g}_2 = \gamma_3$, $\mathbf{g}_3 = \gamma_4$ 和 $\mathbf{g}_4 = \gamma_6$。因此，$\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_6 = 0$ 与上文相同。

4. Semi-direct extensions of the Euclidean and Poincaré Lie groups

如果欧几里得李群或庞加莱李群的半直扩张是幺模的，那么 [3] 中的结果表明，它可化为直积 $E(1,1) \times \mathbb{R}$ 或$\widetilde{E}(2) \times \mathbb{R}$，因此它同构于第 2 节所分析的阿贝尔李群的一个半直扩张。考虑到这一事实，在此情形下使用格罗布纳基是证明以下结果的关键工具；该结果由后续分析推导得出。

定理 4.1。一个非幺模 *pp*波形式的欧几里得李群或庞加莱李群的四维半直扩张，在同构意义下与 $\mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ 上的一个左不变平面波度量共形等价，该度量由以下内容确定

$$
\begin{aligned}
&[v_1, v_3] = v_2, && [v_2, v_3] = -v_1,\\
&[v_1, v_4] = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2, && [v_2, v_4] = -\gamma_2 v_1 + \gamma_1 v_2, \qquad \gamma_1 \neq 0,
\end{aligned}
$$

其中，$\{v_i\}$ 是伪正交基，$\langle v_1,\ v_1\rangle = \langle v_2,\ v_2\rangle = \langle v_3,\ v_4\rangle = 1$。

此外，欧氏群或庞加莱群的非幺模半直扩张具有调和曲率，当且仅当它们是局部对称的。

注 4.2. 欧氏群和庞加莱群的非幺模扩张分别同构于由李代数 $\mathfrak{aff}(\mathbb{C})$ 和$\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ 确定的仿射群。因此，根据前一定理还可得出， $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ 上不存在左不变 pp 波度量。

定理 4.1 中给出的左不变度量是局部共形平坦且局部对称的，但绝非爱因斯坦度量。因此，它们是 (i) 型平面波。

4.1. 黎曼欧氏群和庞加莱´李群的扩张。设 $G = G_3 \rtimes \mathbb{R}$，且 $G_3 = E$为 (1, 1) 或 $G_3 = E(2)$，使得度量在 G_3 上的限制为正定。此时，李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathbb{R}$ 存在一个标准正交基$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$，其中 e_4 为类时，满足

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_3] = -\lambda_2 e_2, && [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \\
&[e_1, e_4] = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 \lambda_2 e_2, && [e_2, e_4] = -\gamma_2 \lambda_1 e_1 + \gamma_1 e_2, \quad [e_3, e_4] = \gamma_3 e_1 + \gamma_4 e_2,
\end{aligned} \tag{20}
$$

其中 $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ 且 $\gamma_i \in \mathbb{R}$。

直接计算表明，当且仅当$\gamma_1 = 0$时，该李代数是幺模的。在非幺模情形下，我们引入辅助变量 γ_1'，并使用多项式 $\gamma_1 \gamma_1' - 1$ 表示 $\gamma_1 \neq 0$。考虑多项式环 $\mathbb{R}[\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \lambda_1, \lambda_2, \gamma_1', \gamma_1]$和理想 $\mathcal{I} = \langle \left(\mathrm{Ric}^2\right)_j^i \cup \{\tau, \gamma_1 \gamma_1' - 1\} \rangle$，我们计算出一个 Gr¨obner 基，并得到 9 个多项式，其中一个是

$$
\mathbf{g} = (\gamma_1^2 + \lambda_2^2)(9\gamma_1^2 + \lambda_2^2)(64\gamma_1^4 + 48\gamma_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^4).
$$

显然 $\mathbf{g} \neq 0$，因此我们得出结论：在非幺模情形下，不存在左不变 pp 波度量。

注 4.3. 为了分析 Cotton 平坦条件，我们将范围限定在非幺模情形，并考虑与上文相同的多项式环，计算理想 $\mathcal{I} = \langle C_{ijk} \cup \{\gamma_1 \gamma_1' - 1\} \rangle$ 的 Gr¨obner 基。得到 5 个多项式，其中包括 $\mathbf{g}_1 = \gamma_3$、$\mathbf{g}_2 = \gamma_4$、$\mathbf{g}_3 = \lambda_1^2 - \lambda_2^2$ 和 $\mathbf{g}_4 = -(\lambda_1 - \lambda_2)(\gamma_1^2 - (\gamma_2^2 - 1)\lambda_2^2)$。因此， $\gamma_3 = \gamma_4 = 0$，且 $\lambda_1 = \lambda_2$ 或 $\lambda_1 = -\lambda_2$， $\gamma_1^2 - (\gamma_2^2 - 1)\lambda_2^2 = 0$。最后，直接计算表明，在上述任一情形下，左不变度量 (20) 都是局部对称的。

4.2.洛伦兹欧氏群与庞加莱群的扩张´李群。我们考虑结构算子 L 的若尔当标准形的不同可能性。

4.2.1. 核为类空的可对角化结构算子 L。在此情况下，左不变度量可用标准正交基 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 描述，其中e_3 为类时，具体为

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_2] = -\lambda_3 e_3, && [e_1, e_3] = -\lambda_2 e_2, \\
&[e_1, e_4] = \gamma_1 e_2 + \gamma_2 e_3, && [e_2, e_4] = \gamma_3 e_2 + \gamma_4 \lambda_3 e_3, \quad [e_3, e_4] = \gamma_4 \lambda_2 e_2 + \gamma_3 e_3,
\end{aligned} \tag{21}
$$

其中 $\lambda_2 \lambda_3 \neq 0$ 且 $\gamma_i \in \mathbb{R}$。

李代数是幺模的当且仅当 $\gamma_3 = 0$。与前一情形相同，我们考虑非幺模情形，并引入辅助变量 γ_3'，用以借助多项式 $\gamma_3 \gamma_3' - 1$表明 $\gamma_3 \neq 0$。设 $\mathcal{I}$ 为多项式环 $\mathbb{R}[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4, \lambda_2, \lambda_3, \gamma_3', \gamma_3]$中由 $\left(\mathrm{Ric}^2\right)_j^i \cup \{\tau, \gamma_3 \gamma_3' - 1\}$ 生成的理想。对该理想计算 Gr¨obner 基得到 11 个多项式，其中之一为$\mathbf{g} = (\gamma_3^2 + \lambda_3^2)(9\gamma_3^2 + \lambda_3^2)(64\gamma_3^4 + 48\gamma_3^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^4)$。由于 $\lambda_3 \neq 0$，我们有

$\mathbf{g} \neq 0$，从而我们得出在非幺模情形下不存在左不变 pp-波度量。

注 4.4. 任何非幺模的 Cotton 平坦左不变度量 (21) 都是局部对称的。事实上，考虑与上文相同的多项式环中的理想 $\mathcal{I} = \langle C_{ijk} \cup \{\gamma_3\gamma_3' - 1\}\rangle$，计算格罗布纳基可得到一组包含 $\mathbf{g}_1 = \gamma_1$、$\mathbf{g}_2 = \gamma_2$ 和 $\mathbf{g}_3 = (\lambda_2 - \lambda_3)(\gamma_3^2 + (\gamma_4^2 + 1)\lambda_3^2)$ 的 5 个多项式。因此，$\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ 和 $\lambda_2 = \lambda_3$，由此可知该度量是局部对称的。

4.2.2. **核为类时的可对角化结构算子 L。** 相应的左不变度量在标准正交基 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$（其中 e_3 为类时）下表示为

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_3] = -\lambda_2 e_2, && [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1,\\
&[e_1, e_4] = \gamma_1 e_1 + \gamma_2\lambda_2 e_2, && [e_2, e_4] = -\gamma_2\lambda_1 e_1 + \gamma_1 e_2, \quad [e_3, e_4] = \gamma_3 e_1 + \gamma_4 e_2,
\end{aligned} \tag{22}
$$

其中 $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ 和 $\gamma_i \in \mathbb{R}$。

容易验证，当且仅当 $\gamma_1 = 0$时，该李代数是幺模的。假设 $\gamma_1 \neq 0$，并添加一个辅助变量 γ_1' 以使用多项式 $\gamma_1\gamma_1' - 1$，我们考虑多项式环 $\mathbb{R}[\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \lambda_1, \lambda_2, \gamma_1', \gamma_1]$。我们为理想 $\mathcal{I} = \langle (\mathrm{Ric}^2)_j^i \cup \{\tau, \gamma_1\gamma_1' - 1\}\rangle$ 计算一个格¨布纳基，得到一组包含 9 个多项式的集合，其中我们发现 $\mathbf{g} = (\gamma_1^2 + \lambda_2^2)(9\gamma_1^2 + \lambda_2^2)(64\gamma_1^4 + 48\gamma_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^4)$。由于 $\lambda_2 \neq 0$，可知 $\mathbf{g} \neq 0$，因此我们得出结论：在非幺模情形下，不存在左不变 pp-波度量。

注记 4.5. 我们完全按照注记 4.3 的方法可得，在非幺模情形下，任意 Cotton 平坦左不变度量 (22) 都是局部对称的。

4.2.3. **具有复特征值的结构算子 L。** 左不变度量由以下条件确定：

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_2] = -\beta e_2 - \alpha e_3, && [e_1, e_3] = -\alpha e_2 + \beta e_3, && [e_1, e_4] = \gamma_1 e_2 + \gamma_2 e_3,\\
&[e_2, e_4] = 2\gamma_3\beta e_2 + (\gamma_3 - \gamma_4)\alpha e_3, && [e_3, e_4] = (\gamma_3 - \gamma_4)\alpha e_2 + 2\gamma_4\beta e_3,
\end{aligned} \tag{23}
$$

其中 $\beta \neq 0$、$\alpha, \gamma_i \in \mathbb{R}$ 和 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 是标准正交基，且 e_3 为类时。

在这种情况下，在多项式环 $\mathbb{R}[\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_1, \beta]$ 中计算理想 $\mathcal{I} = \langle (\mathrm{Ric}^2)_j^i \cup \{\tau\}\rangle$ 的 Gr¨obner 基，得到一个包含 74 个元素的集合，其中含有多项式 $\mathbf{g} = \left((8\gamma_4^2 + 2)\beta^2 + \gamma_1^2\right)^2 \left((\beta^2 + 2\gamma_1^2)\beta^2 + 2\gamma_1^4\right)(8\beta^2 + \gamma_1^2)\beta$。注意，$\mathbf{g}$ 不为零，因为 $\beta \neq 0$。因此我们得出结论，这种情况下的左不变度量永远不是 pp 波。

注 4.6. 任意 Cotton 平坦左不变度量 (23) 都是局部对称的。事实上，考察分量 $C_{144} = -\frac{3}{4}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\beta$，可得 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$。现在，$C_{231} = 4\left((\gamma_3 - \gamma_4)^2 + 1\right)\alpha\beta^2$，因此 $\alpha = 0$。在这些条件下，直接计算表明，Cotton 张量的消失由分量 $C_{122} = -2(4\gamma_3\gamma_4 - 1)\beta^3$ 决定。因此，$4\gamma_3\gamma_4 = 1$，并且容易验证相应的度量是局部对称的。

4.2.4. **退化核的 II 型结构算子。** 在此情况下，左不变度量可通过李代数的伪正交基 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ 并满足 $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_3, u_3\rangle = \langle u_4, u_4\rangle = 1$来描述，其李括号为

李括号

$$\begin{aligned}&[u_1,u_2]=\lambda_2u_3,\qquad &&[u_1,u_3]=-\varepsilon u_2,\ [u_1,u_4]=\gamma_1u_2+\gamma_2u_3,\\&[u_2,u_4]=\gamma_3u_2+\gamma_4\lambda_2u_3,\qquad &&[u_3,u_4]=\gamma_3u_3-\varepsilon\gamma_4u_2,\end{aligned}\tag{24}$$

其中 $\lambda_2\neq0$、$\varepsilon=\pm1$ 和 $\gamma_i\in\mathbb{R}$。

令 $\mathcal{I}$ 为由多项式环$\mathbb{R}[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\varepsilon,\lambda_2]$中的 $\left(\mathrm{Ric}^2\right)_j^i\cup\{\tau,\varepsilon^2-1\}$ 生成的理想。我们计算该理想的 Gr¨obner 基，得到 38 个多项式，其中一个是 $\mathbf{g}=\lambda_2^5\neq0$。因此，与前一种情况一样，这种情况下的左不变度量从来都不是 pp波。

注4.7。为了分析 Cotton 张量的消失情况，我们计算分量 $C_{344}=-\frac{1}{4}\varepsilon\gamma_4^2\lambda_2^2$和 $C_{132}=\frac{1}{2}(\gamma_3^2+\lambda_2^2-2\bar{\gamma}_2\gamma_4\lambda_2)\lambda_2$。因此，$\bar{\gamma_4}=0$和 $C_{132}=\frac{1}{2}(\gamma_3^2+\lambda_2^2)\lambda_2$ 不为零，因为 $\lambda_2\neq0$，这表明没有任何左不变度量 (24) 具有调和曲率。

4.2.5. **具有类空核的II型结构算子**。左不变度量由以下形式描述

$$\begin{aligned}&[u_1,u_3]=-\lambda_1u_1-\varepsilon u_2,\ [u_2,u_3]=\lambda_1u_2,\\&[u_1,u_4]=\gamma_1u_1+\gamma_2u_2,\quad [u_2,u_4]=(\gamma_1-2\varepsilon\gamma_2\lambda_1)u_2,\ [u_3,u_4]=\gamma_3u_1+\gamma_4u_2,\end{aligned}\tag{25}$$

其中 $\lambda_1\neq0$、$\varepsilon=\pm1$、$\gamma_i\in\mathbb{R}$ 和 $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ 是李代数的伪正交基，且 $\langle u_1,u_2\rangle=\langle u_3,u_3\rangle=\langle u_4,u_4\rangle=1$。

直接计算表明，该李代数为幺模当且仅当$\varepsilon\gamma_2\lambda_1-\gamma_1=0$。我们考虑非幺模情形，并引入辅助变量 φ 以表明 $\varepsilon\gamma_2\lambda_1-\gamma_1\neq0$，所用多项式为$(\varepsilon\gamma_2\lambda_1-\gamma_1)\varphi-1$。在多项式环 $\mathbb{R}[\varphi,\varepsilon,\lambda_1,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4]$ 中，我们计算 Gr¨obner 基，其对应理想为 $\mathcal{I}=\langle\left(\mathrm{Ric}^2\right)_j^i\cup\{\tau,(\varepsilon\gamma_2\lambda_1-\gamma_1)\varphi-1\}\rangle$，并观察到它约化为 $\{1\}$。由此我们断定，在非幺模情形下不存在左不变 pp-波度量。

注 4.8. 左不变度量 (25) 从不为 Cotton 平坦。事实上，$C_{232}=-\frac{5}{4}\gamma_3^2\lambda_1$的消失蕴含 $\gamma_3=0$，进而有 $C_{134}=\frac{1}{2}\gamma_4(\gamma_1^2-\varepsilon\gamma_1\gamma_2\lambda_1-\lambda_1^2)$，而$C_{341}=\frac{1}{2}\gamma_4(2\gamma_1^2-\varepsilon\bar{\gamma_1}\gamma_2\lambda_1+\lambda_1^2)$。因此，$C_{134}-C_{341}=-\frac{1}{2}\gamma_4(\gamma_1^2+2\lambda_1^2)$，从而$\gamma_4=0$。最后，利用 $\gamma_3=\gamma_4=0$ 我们计算得$C_{131}=-2\varepsilon\left(\gamma_1^2+(\gamma_2^2+2)\lambda_1^2\right)$，它并不为零。

4.2.6. **III 型结构算子**。在此情况下，左不变度量可描述为

$$\begin{aligned}&[u_1,u_2]=u_1,\qquad [u_2,u_3]=u_3,\\&[u_1,u_4]=\gamma_1u_1,\quad [u_2,u_4]=\gamma_2u_1+\gamma_3u_3,\quad [u_3,u_4]=\gamma_4u_3,\end{aligned}\tag{26}$$

其中，$\gamma_i\in\mathbb{R}$ 和 $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ 是李代数的伪正交基，且 $\langle u_1、u_2\rangle=\langle u_3、u_3\rangle=\langle u_4、u_4\rangle=1$。

容易验证，李代数是幺模的当且仅当 $\gamma_1+\gamma_4=0$。在非幺模情形下，令 φ为辅助变量，它通过多项式 $(\gamma_1+\gamma_4)\varphi-1$反映了 $\gamma_1+\gamma_4\neq0$。我们在多项式环 $\mathbb{R}[\varphi,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4]$中进行计算。与前一种情形一样，对由 $\left(\mathrm{Ric}^2\right)_j^i\cup\{\tau,(\gamma_1+\gamma_4)\varphi-1\}$ 生成的理想 $\mathcal{I}$ 计算 Gr¨obner 基可归结为 $\{1\}$。因此，非幺模情形下不存在左不变 pp 波度量。

注 4.9。在非幺模情形下，任何 Cotton 平坦左不变度量 (26) 都是局部对称的。为证明这一点，我们在上述同一多项式环中计算理想 $\mathcal{I} = \langle C_{ijk} \cup \{(\gamma_1+\gamma_4)\varphi - 1\}\rangle$ 的 Gr¨obner 基。因此，我们得到 4 个多项式，其中三个为 $\mathbf{g}_1 = \gamma_3$、$\mathbf{g}_2 = (\gamma_2\gamma_4+1)(\gamma_2\gamma_4+2)$ 和 $\mathbf{g}_3 = \gamma_1 + 2(\gamma_2\gamma_4+1)\gamma_4$。因此，$\gamma_3 = 0$，且 $\gamma_1 = 0$、$\gamma_2\gamma_4 = -1$ 或 $\gamma_1 = 2\gamma_4$ 和 $\gamma_2\gamma_4 = -2$。最后，直接计算表明，在任何情况下，底层度量都是局部对称的。

4.3.退化欧几里得和庞加莱´李群。设⌣$G = G_3 \rtimes \mathbb{R}$，其中 $G_3 = E(1,1)$ 或 $G_3 = E(2)$。由于度量在 $\mathfrak{g}_3$ 上的限制是符号差为 $(++0)$ 的退化度量，我们分别讨论以下情况：第 4.3.1 节中，导出代数 $\mathfrak{g}_3' = [\mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_3]$ 上的诱导度量为黎曼度量；第 4.3.2 节中，导出代数 $\mathfrak{g}_3'$ 上的度量限制是退化的。

4.3.1. 导出代数上的诱导度量 $\mathfrak{g}_3'$ 是正定的。李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathbb{R}$存在一个伪正交基 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$，满足 $\langle u_1, u_1\rangle = \langle u_2, u_2\rangle = \langle u_3, u_4\rangle = 1$，使得 $\mathfrak{g}_3 =$张成 $\{u_1, u_2, u_3\}$，而导出代数 $\mathfrak{g}_3' =$ 张成$\{u_1, u_2\}$。在这种情况下，利用 $\mathfrak{g}_3$ 是幺模的且导出代数 $\mathfrak{g}_3'$ 是阿贝尔的，雅可比恒等式导出两种不同的情形，我们将分别讨论如下。

情形 *1.* 李代数存在一个伪正交基 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$，满足 $\langle u_1, u_1\rangle = \langle u_2, u_2\rangle = \langle u_3, u_4\rangle = 1$，使得

$$
\begin{aligned}
&[u_1, u_3] = \lambda_1 u_2, && [u_2, u_3] = -\lambda_1 u_1,\\
&[u_1, u_4] = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2, && [u_2, u_4] = -\gamma_2 u_1 + \gamma_1 u_2, \quad [u_3, u_4] = \gamma_3 u_1 + \gamma_4 u_2,
\end{aligned} \tag{27}
$$

其中 $\lambda_1 \neq 0$ 且 $\gamma_i \in \mathbb{R}$。

直接计算可知，李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathbb{R}$ 是幺模的，当且仅当 $\gamma_1 = 0$。接下来我们分析非幺模情形，即 $\gamma_1 \neq 0$。简单计算可知，里奇算子满足

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ric}_1{}^1 = -\tfrac{1}{2}\gamma_3^2, \quad \mathrm{Ric}_1{}^3 = \mathrm{Ric}_4{}^1 = \tfrac{1}{2}(3\gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_4), \quad \mathrm{Ric}_1{}^4 = \mathrm{Ric}_3{}^1 = -\tfrac{1}{2}\gamma_4\lambda_1,\\
&\mathrm{Ric}_2{}^2 = -\tfrac{1}{2}\gamma_4^2, \quad \mathrm{Ric}_2{}^3 = \mathrm{Ric}_4{}^2 = \tfrac{1}{2}(3\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2\gamma_3), \quad \mathrm{Ric}_2{}^4 = \mathrm{Ric}_3{}^2 = \tfrac{1}{2}\gamma_3\lambda_1,\\
&\mathrm{Ric}_4{}^3 = -2\gamma_1^2, \quad \mathrm{Ric}_3{}^3 = \mathrm{Ric}_4{}^4 = \tfrac{1}{2}(\gamma_3^2 + \gamma_4^2), \qquad \mathrm{Ric}_1{}^2 = \mathrm{Ric}_2{}^1 = -\tfrac{1}{2}\gamma_3\gamma_4.
\end{aligned}
$$

因此，容易验证 $\mathrm{Ric}^2 = 0$ 当且仅当 $\gamma_3 = \gamma_4 = 0$，此时相应的左不变度量为

$$
\begin{aligned}
&[u_1, u_3] = \lambda_1 u_2, && [u_2, u_3] = -\lambda_1 u_1,\\
&[u_1, u_4] = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2, && [u_2, u_4] = -\gamma_2 u_1 + \gamma_1 u_2.
\end{aligned} \tag{28}
$$

现在，经过直接计算可知，u_3 确定了一个左不变零平行向量场。此外，对于所有 $x,\ y \in u_3^{\perp} =,\ R(x,\ y) = 0$ 且 $\nabla_x R = 0$ 张成 $\{u_3, u_1, u_2\}$。因此，方程（28）给出的左不变度量是平面波（见 [20]）。注意，在非幺模情形（$\gamma_1 \neq 0$）中，这些度量定义在与 $\mathfrak{aff}(\mathbb{C})$对应的李群上。此外，由于 $\lambda_1 \neq 0$，我们可以取 $\lambda_1 = 1$，在初始度量的相似类中进行计算，从而得到定理 4.1 中给出的度量。直接计算可知，由（28）确定的左不变度量是局部对称且局部共形平坦的。

注 4.10。 在非幺模情形中，唯一的 Cotton 平坦左不变度量（27）对应于（28）给出的平面波，因为$C_{123} = \frac{1}{4}(\gamma_3^2+\gamma_4^2)\lambda_1 = 0$蕴含 $\gamma_3 = \gamma_4 = 0$。 –

情形 *2.* 李代数存在一组伪正交基 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$，其中 $\langle u_1, u_1\rangle = \langle u_2, u_2\rangle = \langle u_3, u_4\rangle = 1$，使得

$$
\begin{aligned}
&[u_1,u_3]=\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2, \quad [u_2,u_3]=-\lambda_2 u_1-\lambda_1 u_2, \quad [u_3,u_4]=\gamma_3 u_1+\gamma_4 u_2,\\
&[u_1,u_4]=\gamma_1 u_1+\tfrac{(\gamma_1-\gamma_2)\lambda_2}{2\lambda_1}u_2, \quad [u_2,u_4]=-\tfrac{(\gamma_1-\gamma_2)\lambda_2}{2\lambda_1}u_1+\gamma_2 u_2,
\end{aligned}
\tag{29}
$$

其中 $\lambda_1 \neq 0$、 $\lambda_1^2 - \lambda_2^2 \neq 0$ 和 $\gamma_i \in \mathbb{R}$。

容易验证，在此情形下，李代数是幺模的，当且仅当$\gamma_1 + \gamma_2 = 0$。在非幺模情形下，我们引入辅助变量 φ，并使用多项式 $(\gamma_1 + \gamma_2)\varphi - 1$。在多项式环 $\mathbb{R}[\varphi, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \lambda_1, \lambda_2]$中，我们考虑 $\mathcal{I} = \langle \lambda_1^2 \left(\mathrm{Ric}^2\right)_j^i \cup \{\tau, (\gamma_1+\gamma_2)\varphi - 1\}\rangle$，其中我们取了 $\lambda_1^2 \left(\mathrm{Ric}^2\right)_j^i$ 以消去分母中的变量。对该理想计算 Gr¨obner 基，得到一个包含 91 个元素的集合，其中含有多项式 $\mathbf{g} = \lambda_1^5$。由于 $\lambda_1 \neq 0$，我们得出结论：非幺模情形下不存在左不变 pp-波度量。

注释 4.11。 非幺模左不变度量 (29) 是 Cotton 平坦的，当且仅当它们是局部对称的。事实上，考虑与上文相同的多项式环，并为理想 $\mathcal{I} = \langle \lambda_1^2 C_{ijk} \cup \{(\gamma_1+\gamma_2)\varphi - 1\}\rangle$计算一个 Gr¨obner 基，我们得到 46 个多项式，其中包括$\mathbf{g}_1 = \lambda_1^3\lambda_2$、$\mathbf{g}_2 = (\gamma_1 - \gamma_2)\lambda_1^4$、$\mathbf{g}_3 = \gamma_3\lambda_1^3$ 和$\mathbf{g}_4 = \gamma_4\lambda_1^3$。由于 $\lambda_1 \neq 0$，可知 $\lambda_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$ 且$\gamma_1 = \gamma_2 \neq 0$，直接计算表明该空间是局部对称的。

4.3.2. 导出代数上的诱导度量 $\mathfrak{g}_3'$ 是退化的。 李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 \rtimes \mathbb{R}$ 存在一个伪正交基 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$，满足$\langle u_1,\ u_1\rangle = \langle u_2,\ u_2\rangle = \langle u_3,\ u_4\rangle = 1$，使得 $\mathfrak{g}_3 =$张成$\{u_1, u_2, u_3\}$，而导出代数 $\mathfrak{g}_3' =$张成$\{u_1, u_3\}$。在这种情况下，利用 $\mathfrak{g}_3$ 是幺模的、$\mathfrak{g}_3'$ 是阿贝尔的这一事实，雅可比恒等式导出两种不同的情形，下面分别讨论。

情形 *1.* 存在该李代数的一个伪正交基 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$，其中 $\langle u_1, u_1\rangle = \langle u_2, u_2\rangle = \langle u_3, u_4\rangle = 1$，使得左不变度量由下式确定

$$
\begin{aligned}
&[u_1,u_2]=\lambda_1 u_3, && [u_2,u_3]=\lambda_2 u_1,\\
&[u_1,u_4]=\gamma_1 u_1+\gamma_2 u_3, && [u_2,u_4]=\gamma_3 u_1+\gamma_4 u_3, \quad [u_3,u_4]=-\tfrac{\gamma_2\lambda_2}{\lambda_1}u_1+\gamma_1 u_3,
\end{aligned}
\tag{30}
$$

其中 $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ 且 $\gamma_i \in \mathbb{R}$。

我们在多项式环 $\mathbb{R}[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \lambda_1, \lambda_2]$ 中进行计算。对由 $\lambda_1^4 \left(\mathrm{Ric}^2\right)_j^i \cup \{\lambda_1^2\tau\}$ 生成的理想 $\mathcal{I}$ 求 Gr¨obner 基（这里我们乘以 λ_1 的幂以消去分母中的变量），得到 24 个多项式，其中一个是 $\mathbf{g} = \lambda_1^5\lambda_2^3$。由于 $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$，我们得出结论：这种情形下的左不变度量绝不是 pp波。

注 4.12. 左不变度量 (30) 从来都不是 Cotton 平坦的。事实上，考察 Cotton 张量的各分量

$$
C_{132} = \frac{(\lambda_1^3 - 4\gamma_3\lambda_1^2 + 2\gamma_2^2\lambda_2)\lambda_2^2}{4\lambda_1^2}, \quad C_{231} = \frac{(\lambda_1^3 - 8\gamma_3\lambda_1^2 + 4\gamma_2^2\lambda_2)\lambda_2^2}{4\lambda_1^2},
$$

可得 $2C_{132} - C_{231} = \frac{1}{4}\lambda_1\lambda_2^2$，由于 $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$，它永不消失。

情形 *2.* 存在李代数的一个伪正交基 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$，其中 $\langle u_1,\ u_1\rangle = \langle u_2,\ u_2\rangle = \langle u_3,\ u_4\rangle = 1$，使得

$$
\begin{aligned}
&[u_1,u_2] = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_3, \quad [u_2,u_3] = \lambda_3 u_1 + \lambda_1 u_3, \quad [u_2,u_4] = \gamma_2 u_1 + \gamma_3 u_3,\\
&[u_1,u_4] = \gamma_1 u_1 + \tfrac{(\gamma_1-\gamma_4)\lambda_2}{2\lambda_1} u_3, \quad [u_3,u_4] = -\tfrac{(\gamma_1-\gamma_4)\lambda_3}{2\lambda_1} u_1 + \gamma_4 u_3,
\end{aligned} \tag{31}
$$

其中 $\lambda_1 \neq 0$、$\lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_3 \neq 0$ 和 $\gamma_i \in \mathbb{R}$。

我们取一个辅助变量 λ_1'，用来表示 $\lambda_1 \neq 0$ 通过 $\lambda_1\lambda_1' - 1$。我们考虑多项式环$\mathbb{R}[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\lambda_1',\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3]$ 中的理想 $\mathcal{I} = \langle \lambda_1^4 \left(\mathrm{Ric}^2\right)_j^i \cup \{\lambda_1^2\tau, \lambda_1\lambda_1' - 1\}\rangle$（与前面的情形一样，我们乘以 λ_1 的幂以消去分母中的变量），并计算该理想的 Gröbner 基。因此得到 8 个多项式，其中我们发现 $\mathbf{g} = \lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_3$。由于 $\lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_3 \neq 0$，我们得出结论：此情形下的左不变度量绝不会是 pp波。

注 4.13。 左不变度量 (31) 从不满足 Cotton 平坦。为证明这一点，我们考虑与上文相同多项式环中的理想 $\mathcal{I} = \langle \lambda_1^3 C_{ijk} \cup \{\lambda_1\lambda_1' - 1\}\rangle$，并计算一个 Gröbner 基，得到 6 个多项式，其中一个包含 $\mathbf{g} = \lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_3$，该项不为零。

5. Direct extensions of the non-solvable Lie groups

我们按照前几节的方法，考察非可解四维李群 $SL(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$和 $SU(2) \times \mathbb{R}$ 上的所有可能的左不变~洛伦兹度量。对应于 $SL(2,\mathbb{R})$ 或 $SU(2)$ 上黎曼、洛伦兹或~退化度量的不同情形，分别在第 5.1、5.2 和 5.3 节中进行讨论。作为下文分析的结果，我们证明，在这一背景下，左不变度量既不是 pp波，也不是非平凡的 Cotton 平坦度量。此外，Gr¨obner 基再次成为获得以下结果的基本工具：

~**定理 5.1**。 $SL(2,\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ 或 $SU(2)\times\mathbb{R}$ 上不存在使二步幂零里奇算子成立的左不变洛伦兹度量。

此外，左不变洛伦兹度量定义在 $SL(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ 或 $SU(2) \times \mathbb{R}$ 上具有调和曲率，当且仅当它是局部共形平坦的，或是乘积度量 ~，定义在 $SL(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ 上，且由 $SL(2,\mathbb{R})$上的局部共形平坦度量确定。

~**5.1. 与黎曼李群的直接扩张 $SL(2,\mathbb{R})$ 或 $SU(2)$.** ~设 $G = G_3 \times \mathbb{R}$ 具有 $G_3 = SL(2,\mathbb{R})$ 或 $G_3 = SU(2)$，且度量在 G_3 上的限制为正定。因此，存在李代数的一组标准正交基$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$，其中 e_4 为类时，使得

$$
\begin{aligned}
&[e_1,e_2] = \lambda_3 e_3, \qquad [e_1,e_3] = -\lambda_2 e_2, \qquad [e_2,e_3] = \lambda_1 e_1,\\
&[e_1,e_4] = \gamma_1\lambda_2 e_2 + \gamma_2\lambda_3 e_3, \qquad [e_2,e_4] = -\gamma_1\lambda_1 e_1 + \gamma_3\lambda_3 e_3,\\
&[e_3,e_4] = -\gamma_2\lambda_1 e_1 - \gamma_3\lambda_2 e_2,
\end{aligned} \tag{32}
$$

其中 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ 和 $\gamma_i \in \mathbb{R}$。

令 $\mathcal{I} = \langle \left(\mathrm{Ric}^2\right)_j^i \cup \{\tau\} \rangle \subset \mathbb{R}[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3]$。计算该理想的 Gr¨obner 基，我们得到 212 个多项式，其中一个是$\mathbf{g} = \lambda_1^3\lambda_2^3\lambda_3^3$。由于

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ 我们得出 $\mathrm{Ric}^2 \neq 0$，因此在这种情况下不存在左不变 pp 波度量。

注 5.2。为了分析左不变度量 (32) 的 Cotton 张量消失情形，我们使用辅助变量 φ，借助多项式 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\varphi - 1$ 表示 λ_1、λ_2 和 λ_3 均非零。现在，我们考虑多项式环 $\mathbb{R}[\varphi, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$ 中的理想$\mathcal{I} = \langle C_{ijk} \cup \{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\varphi - 1\}\rangle$，并计算一个 Gröbner 基，得到 12 个多项式，其中两个为 $\mathbf{g}_1 = (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_2\lambda_3)$ 和 $\mathbf{g}_2 = \lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2$。因此，$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$，由此可知该度量是局部共形平坦的，且局部等距于 $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$。

5.2. 洛伦兹李群的直接扩张 $SL(2,\mathbb{R})$ 或 $SU(2)$。我们考察结构算子的约当标准形的不同可能性。

5.2.1. **可对角化结构算子**。李代数存在一个标准正交基$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$，其中 e_3 为类时，使得

$$
\begin{aligned}
&[e_1,e_2] = -\lambda_3 e_3, \qquad [e_1,e_3] = -\lambda_2 e_2, \qquad [e_2,e_3] = \lambda_1 e_1,\\
&[e_1,e_4] = \gamma_1\lambda_2 e_2 + \gamma_2\lambda_3 e_3, \qquad [e_2,e_4] = -\gamma_1\lambda_1 e_1 + \gamma_3\lambda_3 e_3,\\
&[e_3,e_4] = \gamma_2\lambda_1 e_1 + \gamma_3\lambda_2 e_2,
\end{aligned} \tag{33}
$$

其中 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ 和 $\gamma_i \in \mathbb{R}$。

我们完全按照前一种情形进行推导，并得出 $\mathrm{Ric}^2 \neq 0$。因此，这种情形下不存在左不变 pp 波度量。

注 5.3。我们完全按照注 5.2 的方法推导，可得任何 Cotton 平坦左不变度量 (33) 都必须局部共形平坦，且局部等距于$\mathbb{S}^3_1 \times \mathbb{R}$。

5.2.2. **结构算子 L 具有复特征值**。在这种情形下，李代数存在一个标准正交基 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$，其中 e_3 为类时，使得李代数结构由下式给出

$$
\begin{aligned}
&[e_1,e_2] = -\beta e_2 - \alpha e_3, \qquad [e_1,e_3] = -\alpha e_2 + \beta e_3, \quad [e_2,e_3] = \lambda e_1,\\
&[e_1,e_4] = (\alpha^2+\beta^2)(\gamma_1 e_2 + \gamma_2 e_3), \quad [e_2,e_4] = -(\gamma_1\alpha - \gamma_2\beta)\lambda e_1 + \gamma_3\beta e_2 + \gamma_3\alpha e_3,\\
&[e_3,e_4] = (\gamma_2\alpha + \gamma_1\beta)\lambda e_1 + \gamma_3\alpha e_2 - \gamma_3\beta e_3,
\end{aligned}
$$

其中 $\beta\lambda \neq 0$ 和 α，$\gamma_i \in \mathbb{R}$。在这种情况下，三维幺模李代数对应于 $\mathfrak{sl}(2,\ \mathbb{R})$。

在多项式环 $\mathbb{R}[\lambda, \alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]$ 中，我们考虑由$\left(\mathrm{Ric}^2\right)^i_j \cup \{\tau\}$生成的理想 $\mathcal{I}$。对该理想计算 Gröbner 基后，我们得到一个包含 108 个元素的集合，其中包括多项式 $\mathbf{g} = (\gamma_3^2+1)^3(\alpha^2+\beta^2)\beta^3$，它不为零，因为 $\beta \neq 0$。因此我们得出结论，$\mathrm{Ric}^2 \neq 0$，所以在这种情况下，左不变度量永远不是 pp波。

备注 5.4。$SL(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ 上具有复特征值结构算子的左不变 Cotton 平坦度量可化为乘积度量，其中，$SL(2,\mathbb{R})$上的度量是第 1.3.1 节所述的局部共形平坦度量。事实上，考虑与上文相同的多项式环，并对理想 $\mathcal{I} = \langle C_{ijk}\rangle$计算 Gröbner 基，可以得到 44 个多项式，其中包括$\mathbf{g}_1 =$

$(\gamma_1^2+\gamma_2^2)(\gamma_3^2+1)\beta^5$ 以及$\mathbf{g}_2=\gamma_3(\gamma_3^2+1)^2\beta^5$。因此，$\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3$ 左不变度量就是乘积度量，由此可知，$SL(2,\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ 是 Cotton 平坦的，当且仅当 $SL(2,\mathbb{R})$ 配备诱导的洛伦兹度量时也是 Cotton 平坦的；该度量对应于第 1.3.1 节中的度量 (1)。

5.2.3. **II 型结构算子**。在这种情况下，左不变度量可描述为

$$
\begin{aligned}
&[u_1,u_2]=\lambda_2u_3, \qquad [u_1,u_3]=-\lambda_1u_1-\varepsilon u_2, \qquad [u_2,u_3]=\lambda_1u_2,\\
&[u_1,u_4]=\gamma_1\lambda_1u_1+\varepsilon\gamma_1u_2+\gamma_2\lambda_2u_3, \quad [u_2,u_4]=-\gamma_1\lambda_1u_2+\gamma_3\lambda_2u_3,\\
&[u_3,u_4]=-\gamma_3\lambda_1u_1-(\gamma_2\lambda_1+\varepsilon\gamma_3)u_2,
\end{aligned}
\tag{34}
$$

其中 $\varepsilon^2=1$、$\lambda_1\lambda_2\neq0$、$\gamma_i\in\mathbb{R}$ 和 $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ 是李代数的伪正交基，满足 $\langle u_1,\ u_2\rangle=\langle u_3,\ u_3\rangle=\langle u_4,\ u_4\rangle=1$。

在多项式环 $\mathbb{R}[\varepsilon,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\lambda_1,\lambda_2]$ 中计算理想 $\mathcal{I}=\langle\left(\mathrm{Ric}^2\right)_j^i\cup\{\tau,\varepsilon^2-1\}\rangle$ 的 Gröbner 基，得到 41 个多项式，其中一个是$\mathbf{g}=\lambda_2^5$。由于 $\mathbf{g}\neq0$，可得 $\mathrm{Ric}^2\neq0$，因此这种情况下不存在左不变 pp 波度量。

注 5.5. 左不变度量 (34) 从来不是 Cotton 平坦的。事实上，在与上文相同的多项式环中，我们计算得到该理想$\mathcal{I}=\langle C_{ijk}\cup\{\varepsilon^2-1\}\rangle$ 的一个 Gröbner 基，其中有 27 个多项式，其中之一是$\mathbf{g}=\lambda_2^4$，它不为零。

5.2.4. **III 型结构算子**。李代数存在一个伪正交基$\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$，其中 $\langle u_1,\ u_2\rangle=\langle u_3,u_3\rangle=\langle u_4,u_4\rangle=1$，使得相应的李括号由下式确定

$$
\begin{aligned}
&[u_1,u_2]=u_1+\lambda u_3, \qquad [u_1,u_3]=-\lambda u_1, \qquad [u_2,u_3]=\lambda u_2+u_3,\\
&[u_1,u_4]=\gamma_1\lambda u_1+\gamma_2\lambda^2u_3, \quad [u_2,u_4]=\gamma_3u_1-(\gamma_1-\gamma_2)\lambda u_2-(\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3\lambda)u_3,\\
&[u_3,u_4]=-\gamma_3\lambda u_1-\gamma_2\lambda^2u_2-\gamma_2\lambda u_3,
\end{aligned}
$$

其中 $\lambda\neq0$ 和 $\gamma_i\in\mathbb{R}$。直接计算表明

$\mathrm{Ric}_1{}^1=\mathrm{Ric}_2{}^2=\frac{-1}{2}(\gamma_2^2-\gamma_1\gamma_2+1)\lambda^2$，$\mathrm{Ric}_3{}^3=\frac{1}{2}(2\gamma_2^2-2\gamma_1\gamma_2-1)\lambda^2$，$\mathrm{Ric}_4{}^4=\frac{-3}{2}\gamma_2^2\lambda^2$，因此标量曲率 $\tau=-\frac{3}{2}(\gamma_2^2+1)\lambda^2$ 不为零。由此，里奇算子不可能是幂零的，而且这种情况下的左不变度量从来不是 pp-波。

注 5.6。考察 Cotton 张量的分量

$$C_{121}=-\tfrac{9}{4}\gamma_2^2\lambda^4, \quad C_{122}=\tfrac{3}{4}\left(\gamma_1^2+2-\gamma_2(2\gamma_2+5\gamma_3\lambda)\right)\lambda^2,$$

可得 $\gamma_2=0$，因此 $C_{122}=\frac{3}{4}(\gamma_1^2+2)\lambda^2$，其不为零。因此，不存在结构算子为 III 型的 Cotton 平坦左不变度量。

5.3. **退化李群的直接扩张 $SL(2,\mathbb{R})$ 或 $SU(2)$**。接下来，我们假设左不变度量在 $SL(2,\mathbb{R})$ 或$SU(2)$ 上的限制是退化的。设 u 使得 $\mathrm{span}\{u\}$ 是退化的。我们分别考虑 ad_u 具有两个纯虚复特征值、两个非零相反实特征值，或为三步幂零的情形。

5.3.1. $\mathbf{ad_u}$ 具有复特征值。存在李代数的一组基 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，其中 $\langle v_1,\ v_1\rangle = \langle v_2,\ v_2\rangle = \langle v_3,\ v_4\rangle = 1$, $\langle v_1,\ v_2\rangle = \kappa$ 且满足 $\kappa^2 < 1$，使得李括号（在同构缩放意义下）为

$$
\begin{aligned}
&[v_1, v_2] = v_3, \quad [v_1, v_3] = \beta\lambda^2 v_2, \quad [v_1, v_4] = \gamma_1\lambda^2 v_2 + \gamma_2 v_3,\\
&[v_2, v_3] = -\beta v_1, \ [v_2, v_4] = -\gamma_1 v_1 + \gamma_3 v_3, \ [v_3, v_4] = \gamma_2\beta v_1 + \gamma_3\beta\lambda^2 v_2,
\end{aligned} \tag{35}
$$

其中 $\beta\lambda \neq 0$ 和 $\gamma_i \in \mathbb{R}$。

我们引入辅助变量 λ'、β' 和 φ，通过多项式 $\lambda\lambda' - 1$、$\beta\beta' - 1$ 和 $(\kappa^2 - 1)\varphi - 1$来表示 λ、β 和 $\kappa^2 - 1$均非零。设 $\mathcal{I} = \langle (\kappa^2 - 1)^2 \left(\mathrm{Ric}^2\right)_j^i \cup \{(\kappa^2 - 1)\beta^{-1}\tau,\ \lambda\lambda' - 1,\ \beta\beta' - 1,\ (\kappa^2 - 1)\varphi - 1\}\rangle$ 属于多项式环 $\mathbb{R}[\lambda, \kappa, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \beta, \lambda', \beta', \varphi]$，其中我们乘以 $\kappa^2 - 1$ 的幂，以消去分母中的变量。计算该理想的 Gr¨obner 基后，可将其化简为 $\{1\}$。因此 $\mathrm{Ric}^2 \neq 0$，这表明此情形不支持任何左不变 pp 波度量。

注 5.7. 左不变度量 (35) 绝非 Cotton 平坦。事实上，由分量 $C_{133} = -\frac{1}{4}\beta^3\lambda^2(\lambda^2 + 1)\gamma_2$ 与 $C_{233} = -\frac{1}{4}\beta^3\lambda^2(\lambda^2 + 1)\gamma_3$ 可得 $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$。于是，$^-$ 有分量 $C_{124} = {}^{\beta}_{(\lambda^2+1)((8\kappa^2\lambda^2+2(\lambda^2-1)^2)\gamma_1^2+1)\ 2(\kappa^2-1)}$，它不为零。

5.3.2. $\mathbf{ad_u}$ 具有非零实特征值。存在李代数的一个基 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，其中 $\langle v_1, v_1\rangle = \langle v_2, v_2\rangle = \langle v_3, v_4\rangle = 1$, $\langle v_1, v_2\rangle = \kappa$ 满足 $\kappa^2 < 1$，使得

$$
\begin{aligned}
&[v_1, v_2] = v_3, \quad [v_1, v_3] = \lambda v_1, \quad [v_1, v_4] = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_3,\\
&[v_2, v_3] = -\lambda v_2, \ [v_2, v_4] = -\gamma_1 v_2 + \gamma_3 v_3, \ [v_3, v_4] = \gamma_3\lambda v_1 + \gamma_2\lambda v_2,
\end{aligned} \tag{36}
$$

其中 $\lambda \neq 0$ 和 $\gamma_i \in \mathbb{R}$。

我们按照前一种情况的做法，乘以 $\kappa^2 - 1$ 的幂以消去分母中的变量；当我们在多项式环 $\mathbb{R}[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \kappa, \lambda]$中考虑 $\mathcal{I} = \langle (\kappa^2 - 1)^2 \left(\mathrm{Ric}^2\right)_j^i \cup \{(\kappa^2 - 1)\tau\}\rangle$时，对该理想计算 Gr¨obner 基，得到 3 个多项式，其中一个是 $\mathbf{g} = \lambda^2$。由于 $\lambda \neq 0$，我们有 $\mathrm{Ric}^2 \neq 0$，这表明在这种情况下不存在左不变 pp 波度量。

注 5.8. 度量 (36) 具有调和曲率，当且仅当它们局部共形平坦。事实上，考虑与上文相同的多项式环，并对理想 $\mathcal{I} = \langle (\kappa^2 - 1)C_{ijk}\rangle$ 计算 Gr¨obner 基，可得到 11 个多项式，其中包括 $\mathbf{g}_1 = \gamma_1\lambda^2$、$\mathbf{g}_2 = \gamma_2\lambda^2$、$\mathbf{g}_3 = \gamma_3\lambda^2$ 和 $\mathbf{g}_4 = \kappa\lambda^2$。由于 $\lambda \neq 0$, 可知 $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \kappa = 0$；直接计算表明，该左不变度量局部共形平坦，但并非局部对称。

5.3.3. $\mathbf{ad_u}$ 是三步幂零的。 </style}相对于李代数的一组基，其中包含 、 $v_1\rangle = \langle v_2$、$v_2\rangle = \langle v_3$、$v_4\rangle = 1$ 和 $\langle v_1$、$v_2\rangle = \kappa$，且满足 $\kappa^2 < 1$，左不变度量由以下李括号确定：

$$
\begin{aligned}
&[v_1, v_2] = \alpha v_1 + \beta v_3, \ [v_1, v_3] = -v_2, \quad [v_1, v_4] = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \tfrac{\beta\gamma_1}{\alpha} v_3,\\
&[v_2, v_3] = \alpha v_3, \quad [v_3, v_4] = \gamma_3 v_2 - \gamma_1 v_3, \ [v_2, v_4] = -\alpha\gamma_3 v_1 - (\alpha\gamma_2 + \beta\gamma_3) v_3,
\end{aligned}
$$

其中 $\alpha \neq 0$、$\kappa^2 \neq 1$ 和 β、$\gamma_i \in \mathbb{R}$。

我们考虑 $\mathcal{I} = \langle (\kappa^2 - 1)^2\alpha^2 \left(\mathrm{Ric}^2\right)_j^i \cup \{(\kappa^2 - 1)\tau\}\rangle \subset \mathbb{R}[\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \alpha, \kappa]$, 这里我们再次乘以 α 和 $\kappa^2 - 1$ 的幂，以消去

分母中的变量。对这个理想计算 Gr¨obner 基，我们得到 10 个多项式，其中一个是 $\mathbf{g} = (\kappa^2 - 1)\alpha^5$。由于 $\alpha \neq 0$ 和 $\kappa^2 \neq 1$，可知 $\mathrm{Ric}^2 \neq 0$，因此我们得出结论：这种情况下不存在左不变 pp 波度量。

注 5.9。直接计算表明 $C_{233} = {}_4{}^{\alpha}{}_{(1-\kappa^2)} \neq 0$，这说明在此情况下不存在 Cotton 平坦左不变度量。

References

[1] I. Aberaouze 和 M. Boucetta，赋有左不变洛伦兹度量的李群上的左不变 Codazzi 张量与调和曲率，arXiv: 2402 16381 1 。 v H. An 和 Z. Yan，[2] 论非爱因斯坦的伪黎曼里奇平行李群，*J. Geom. Anal.* **35** (2025年)，28。[3] A. Andrada、M. L. Barberis、I. G. Dotti 和 G. P. Ovando，四维可解李代数上的乘积结构，*Homology Homotopy Appl.* **7** (2005年)，9–37。[4] M. Blau 和 M. O'Loughlin，齐性平面波，*Nuclear Physics B* **654** (2003年)，135–176。[5] Chr. Bock，论低维可解流形，*Asian J. Math.* **20** (2016年)，199–262。[6] H. W. Brinkmann，彼此可经共形映射的爱因斯坦空间，*Math. Ann.* ( )，–。**94** 1925 119 145
[7] G. Calvaruso 和 M. Castrill´on，循环洛伦兹李群，*Geom. Dedicata* **181** (2016年)，119–136。[8] G. Calvaruso 和 A. Zaeim，共形平坦齐性伪黎曼四维流形，*Tohoku Math. J. (2)* **66** (2014年)，31–54。[9] G. Calvaruso 和 A. Zaeim，四维洛伦兹李群，*Differential Geom.* ( )，–。*Appl.* **31** 2013 496 509
[10] E. Calvi˜no-Louzao、E. Garc´ıa-R´ıo、I. Guti´errez-Rodr´ıguez 和 R. V´azquez-Lorenzo，四维李群上的共形爱因斯坦左不变度量，*Advances in Submani-fold Theory and Related Topics*，《拉丁美洲数学丛书》(LAMS)，施普林格，即将出版。[11] D. Cox、D. Little 和 D. O'Shea，*Ideals varieties and algorithms. An introduction to compu-* , , , *tational algebraic geometry and commutative algebra*
《数学本科生教材》。施普林格，查姆，2015年。[12] J. E. D'Atri，左不变度量的 Codazzi 张量与调和曲率，*Geom. Ded-* ( )，–。*icata* **19** 1985 229 236
[13] E. Garc´ıa-R´ıo、P. Gilkey 和 S. Nikcevi´c，具有循环曲率的洛伦兹三维流形的齐性，*Math. Nachr.* **287** (2014年)，32–47。[14] E. Garc´ıa-R´ıo、R. Rodr´ıguez-Gigirey 和 R. V´azquez-Lorenzo，四维洛伦兹代数里奇孤立子，即将出版。[15] W. Globke 和 Th. Leistner，局部齐性 pp 波，*J. Geom. Phys.* **108** (2016年)，83–101。[16] A. Gray，并非爱因斯坦空间的类爱因斯坦流形，*Geom. Dedicata* **7** (1978年)，259–280。[17] J. Holland 和 G. Sparling，萨克斯方程与平面波 II：等距变换与共形等距变换。arXiv:2405.12748。[18] K. Honda 和 K. Tsukada，三维共形平坦齐性洛伦兹流形，*J. Phys. A: Math. Theor.* **40** (2007年)，831–851。[19] Y. Kondo 和 H. Tamaru，某些幂零李群上的左不变洛伦兹度量分类，*Tohoku Math. J. (2)* **75** (2023年)，89–117。[20] T. Leistner，C 空间、Ricci 平坦流形及洛伦兹流形的共形挠率，*Differ-ential Geom. Appl.* **24** 2006 458 478 ( )，–。
[21] Th. Leistner 和 P. Nurowski，n *Comm. Math.* 维 pp 波 *Phys.* **296** 2010 881 898 的环境度量，( )，–。[22] J. Milnor，李群左不变度量的曲率，*Adv. Math.* **21** (1976年)，293–329。[23] K. Nomizu，李群上的左不变洛伦兹度量，*Osaka J. Math.* **16** (1979年)，143–150。[24] F. Podest`a 和 A. Spiro，四维类爱因斯坦流形与曲率齐性，*Geom. Dedicata* **54** (1995年)，225–243。

[25] S. Rahmani，三维单模李群上的洛伦兹度量，*J. Geom. Phys.* **9** (1992年)，295–302。

EGR: Department of Mathematics, CITMAga, University of Santiago de Compostela, 15782 Santiago de Compostela, Spain*Email address*: eduardo.garcia.rio@usc.es

RRG: IES Fuentesnuevas, 24411 Fuentesnuevas, Spain
Email address: rosalia.rodvil@educa.jcyl.es

RVL: IES de Ribadeo Dionisio Gamallo, 27700 Ribadeo, Spain
Email address: ravazlor@edu.xunta.gal