arXiv:2602.08651v1 [math.FA] 9 Feb 2026

加权 Dirichlet 空间上的加权复合算子：有界性、紧性与谱性质

ANIRBAN SEN

ABSTRACT. 我们建立了加权复合算子作用于加权 Dirichlet 空间时有界和紧的充要条件，并确定了某一类此类算子的谱。我们的结果拓展了关于非加权复合算子的早期研究，并凸显了加权复合算子的算子理论行为与其诱导函数的函数论性质之间的密切联系。我们还给出若干例子，以说明所得结果的适用性。

1. INTRODUCTION

令 Hol($\mathbb{D}$) 表示开单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \text{ 上的复值全纯函数空间：} |z| < 1\}$. 对于 $\psi,\ \varphi \in$ Hol($\mathbb{D}$)，其中 $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$，加权复合算子 $C_{\psi,\,\varphi}$ 在 Hol($\mathbb{D}$) 上定义为

$$C_{\psi,\varphi} f = \psi f \circ \varphi,\ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}).$$

这里，ψ 和 φ 称为该算子的诱导函数。特别地，当 $\psi \equiv 1$，算子 $C_{\psi,\,\varphi}$ 变为复合算子 C_φ，而当 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的恒等映射，算子 $C_{\psi,\,\varphi}$ 与乘法算子 M_ψ. 相同

复合算子和加权复合算子的理论已相当成熟，关于它们在不同函数空间上的行为已有大量文献。文献 [7, 16], 研究了它们在 Hardy-Hilbert空间上的有界性和紧性，而关于伯格曼空间和加权伯格曼空间的相应结果见 [5, 12]。关于Besov型空间和狄利克雷空间的相关研究见 [3, 18]。

本文着重分析加权狄利克雷空间上的加权复合算子。对于 $\alpha \in \mathbb{R}$，加权狄利克雷空间 $\mathcal{D}_\alpha = \mathcal{D}_\alpha(\mathbb{D})$ 定义为

$$\mathcal{D}_\alpha = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{1-\alpha} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

对于这些空间，[13], 建立了复合算子有界性和紧性的必要条件，并给出了完整的刻画

2020 数学主题分类。主要分类：47B38, 47B91；次要分类：47B33, 30H05。关键词和短语。加权复合算子、加权狄利克雷空间、谱。

随后在 [20]中给出了完整刻画。相比之下，加权复合算子的情形要复杂得多。尽管 [11], 给出了基于 Carleson 测度的刻画，但这些条件通常难以明确验证。

加权复合算子的谱行为同样深受诱导函数的影响。关于复合算子谱理论的一般性结果，参见 [1, 2, 9], ；而针对狄利克雷空间和加权狄利克雷空间的结果，则见 [3, 6, 8]。

本文探讨加权 Dirichlet 空间上的加权复合算子的性质如何受其诱导函数的函数论特征支配，并着重研究易于验证的条件。对于 $\alpha \geq 1$ 这一情形，人们已有充分了解；我们研究 ψ 与 φ 的函数论性质之间的联系，以刻画$C_{\psi,\ \varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上、当$\alpha \in$ 为-1，**1)**。时的有界加权复合算子和紧加权复合算子。由于当 $\psi \equiv 0$时，$C_{\psi,\ \varphi}$ 会退化为零算子，因此我们不考虑这一情形。根据闭图定理，$C_{\psi,\ \varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上有界的必要条件是 ψ ，且 $\psi\varphi$属于 $\mathcal{D}_\alpha$. 。我们首先针对 $\mathcal{D}_\alpha$ 上的加权复合算子，在 $\alpha \in$ 为**(0，1)**，时，提出关于其有界性和紧性的另一项必要条件，并说明这些判据不足以构成完整的刻画。接着，我们给出 $\mathcal{D}_\alpha$ 上的加权复合算子在 $\alpha \in$ 为-1，**1)**。时有界和紧的充分条件。我们的主要结果列于以下定理中。

定理 1.1。设 φ 是 $\mathbb{D}$ 的单叶全纯自映射，且 ψ $\in\in$全纯函数空间$(\mathbb{D})$ 满足

$$
\begin{aligned}
&(i)\ \sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi''(z)|(1-|z|^2) < \infty,\\
&(ii)\ \sup_{z\in\mathbb{D}} |\varphi'(z)\psi'(z)|(1-|z|^2) < \infty,\\
&(iii)\ \sup_{z\in\mathbb{D}} |\varphi''(z)\psi(z)|(1-|z|^2) < \infty,\\
&(iv)\ \sup_{z\in\mathbb{D}} |\varphi'(z)\psi(z)| \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1} < \infty,
\end{aligned}
$$

那么$C_{\psi,\ \varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$. 上有界

定理 1.2。设 φ 是 $\mathbb{D}$ 的单叶全纯自映射，且 ψ $\in\in$全纯函数空间$(\mathbb{D})$ 满足

$$
\begin{aligned}
&(i)\ \lim_{|z|\to 1^-} |\psi''(z)|(1-|z|^2) = 0,\\
&(ii)\ \lim_{|z|\to 1^-} |\varphi'(z)\psi'(z)|(1-|z|^2) = 0,\\
&(iii)\ \lim_{|z|\to 1^-} |\varphi''(z)\psi(z)|(1-|z|^2) = 0,\\
&(iv)\ \lim_{|z|\to 1^-} |\varphi'(z)\psi(z)| \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1} = 0,
\end{aligned}
$$

那么$C_{\psi,\ \varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$. 上是紧的

我们指出，这些条件相当简单且有效，可用于验证一大类诱导函数 ψ 和 φ 生成有界且紧的加权复合算子，其适用范围超出了非加权复合算子的情形。

基于前文得到的必要条件，我们针对诱导函数的某些特定选择，精确刻画加权复合算子 $C_{\psi,\varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$ 上有界或紧的条件。下面的定理给出了这一刻画。

定理 1.3。设 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的单叶全纯自映射，且满足 $\varphi'' \in H^\infty$，并设 $\psi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$。$(\mathbb{D})$

(i) 假设 $\sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi''(z)|(1-|z|^2) < \infty.$，则 $C_{\psi,\varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上有界，当且仅当

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} < \infty.$$

(ii) 假设 $\lim_{|z|\to 1^-} |\psi''(z)|(1-|z|^2) = 0.$，则 $C_{\psi,\varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上紧，当且仅当

$$\lim_{|z|\to 1^-} |\psi(z)| \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} = 0.$$

作为这一结果的推论，我们证明了比较定理的一个加权版本，它推广了 [13] 中给出的非加权版本。

最后，在诱导函数 ψ 和 φ 满足适当的函数论假设时，我们得到 $\alpha \in (-1, 1)$. 上谱 $\sigma(C_{\psi,\varphi};\ \mathcal{D}_\alpha)$ 的如下完整刻画。

定理 1.4. 设 φ 是 $\mathbb{D}$ 上一个具有不动点 $a \in \mathbb{D}$, 且满足 $\varphi'' \in H^\infty(\mathbb{D})$. 的单叶全纯自映射。设 $\psi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ 满足：

$$(i)\ \lim_{|z|\to 1^-} |\psi''(z)|(1-|z|^2) = 0,$$

$$(ii)\ \lim_{|z|\to 1^-} |\psi(z)| \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1} = 0.$$

那么 $0 < |\varphi'(a)| < 1$ 且 $\sigma(C_{\psi,\varphi};\mathcal{D}_\alpha) = \{\psi(a)(\varphi'(a))^n :\ n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}\cup\{0\}$.此外，若 $\psi(a) = 0$，则 $\sigma(C_{\psi,\varphi};\mathcal{D}_\alpha) = \{0\}$.

本文结构如下。在第2节，我们回顾定义并介绍加权狄利克雷空间的预备结果。第3节致力于建立 $C_{\psi,\varphi}$ 有界性和紧性的必要且充分条件，这些条件取决于 ψ 与 φ 之间的相互作用。最后，在第 4节，我们考察在 ψ 和 φ 取特定选择时 $C_{\psi,\varphi}$ 的谱。

2. Preliminaries

加权狄利克雷空间 $\mathcal{D}_\alpha$ 可视为权重序列为 $\beta(n) = (n+1)^{\frac{1-\alpha}{2}}$. 的加权哈代空间 $H^2(\beta)$。特别地， $\mathcal{D}_1$ 与经典 Hardy-Hilbert 空间—$H^2(\mathbb{D})$ $\mathcal{D}_2$ 重合； $A^2(\mathbb{D})$ 是经典伯格曼空间

且 $\mathcal{D}_0$ 与经典狄利克雷空间 $\mathcal{D}$. 重合。每个 $\mathcal{D}_\alpha$ 都是一个可分希尔伯特空间，其内积为

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{D}_\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{1-\alpha}a_n\bar{b}_n,$$

∞ ∞其中 $f(z) = \sum a_n z^n$ 和 $g(z) = \sum b_n z^n$. 此外，这些空间是再生核希尔伯特空间，其在 $w \in \mathbb{D}$ 处的再生核为 $n=0$ $n=0$

$$k_w^\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\overline{w}z)^n}{(n+1)^{1-\alpha}},\ z \in \mathbb{D}. \tag{2.1}$$

$\mathbb{D}$ 上的归一化勒贝格面积测度记为 dA，对于 $\alpha > -1$， $\mathbb{D}$ 上的有限测度 dA_α 定义为

$$dA_\alpha(z) = (1-|z|^2)^\alpha dA(z).$$

利用 $f \in \mathcal{D}_\alpha$ 的斯特林公式可得

$$\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} \cong \begin{cases} |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}}|f'(z)|^2 dA_\alpha(z) \text{ if } \alpha \in (-1,1), \\ \int_{\mathbb{D}}|f(z)|^2 dA_{\alpha-2}(z) \text{ if } \alpha > 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

本文中，我们用 $A \lesssim B$ 表示 $A \leq CB$，其中$C > 0$为某个隐含常数，而 $A \cong B$ 表示 $A \lesssim B$ 和 $B \lesssim A$ 均成立。
回顾一下，对于 $\alpha > -1$，加权伯格曼空间 $A^2_\alpha = A^2_\alpha(\mathbb{D})$ 定义为

$$A^2_\alpha = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \int_{\mathbb{D}}|f(z)|^2 dA_\alpha(z) < \infty \right\}.$$

再次，斯特林公式表明，若 $f \in A^2_\alpha$ 且 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，则

$$\|f\|^2_{A^2_\alpha} \cong \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-1-\alpha}|a_n|^2.$$

因此，我们得到如下关系，它们将在后续证明中发挥重要作用。

(*i*) $\mathcal{D}_{\alpha+2} = A^2_\alpha$ 对所有 $\alpha > -1$.
(*ii*) 设 $f \in Hol(\mathbb{D})$且 $\alpha > -1$。则 $f \in \mathcal{D}_\alpha$ 当且仅当 $f' \in A^2_\alpha$.
(*iii*) 连续嵌入 $\mathcal{D}_\alpha \subseteq A^2_\alpha$对所有 $\alpha > -1$， $i.e.$， $\|f\|_{A^2_\alpha} \lesssim \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha}$对所有 $f \in \mathcal{D}_\alpha$.成立
(*iv*) $\|f\|^2_{A^2_\alpha} \cong |f(0)|^2 + \|f'\|^2_{A^2_{\alpha+2}}$对所有 $\alpha > -1$.(*v*) $\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} \cong |f(0)|^2 + |f'(0)|^2 + \|f''\|^2_{A^2_{\alpha+2}}$对所有 $f \in \mathcal{D}_\alpha$且 $\alpha \in (-1,\ 1)$。

关于加权狄利克雷空间的进一步细节，我们参阅 [4, 13]。

3. Boundedness and compactness

我们首先建立$C_{\psi,\ \varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上对于 $\alpha \in (0,\ 1)$的有界性与紧性的一个必要条件。

命题 3.1. (i) 如果 $C_{\psi,\varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上有界，则

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} < \infty.$$

(ii) 如果 $C_{\psi,\varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上紧，则

$$\lim_{|z|\to 1^-} |\psi(z)| \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} = 0.$$

ˆ证明。 设 k_z^α为 $\mathcal{D}_\alpha$ 在 $z \in \mathbb{D}$. 处的归一化再生核。对于所有 $\alpha > 0$,我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{\alpha-1}|z|^{2n} \cong (1-|z|^2)^{-\alpha}.$$

这可由二项级数展开得到

$$(1-|z|^2)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)}|z|^{2n},$$

结合斯特林公式，可得

$$\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)} \cong (n+1)^{\alpha-1}.$$

因此，对于 $\alpha \in (0,\ 1)$，我们有

$$\|k_z^\alpha\|_{\mathcal{D}_\alpha} \cong (1-|z|^2)^{-\frac{\alpha}{2}} \text{ for all } z \in \mathbb{D}.$$

(i) 假设 $C_{\psi,\ \varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$. 上有界。于是，由核函数的再生性质可直接得到 $C^*_{\psi,\ \varphi}k_z^\alpha = \overline{\psi(z)}k^\alpha_{\varphi(z)}$. 由此可得

$$\|C^*_{\psi,\varphi}\hat{k}_z^\alpha\|_{\mathcal{D}_\alpha} = \frac{|\overline{\psi(z)}|\|k^\alpha_{\varphi(z)}\|_{\mathcal{D}_\alpha}}{\|k_z^\alpha\|_{\mathcal{D}_\alpha}} \cong |\psi(z)| \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}. \tag{3.1}$$

$C_{\psi,\ \varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上有界意味着

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \|C^*_{\psi,\varphi}\hat{k}_z^\alpha\|_{\mathcal{D}_\alpha} \cong \sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} < \infty,$$

如所需。

(ii) 假设 $C_{\psi,\ \varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$. 上是紧的。对于 $\alpha \in (0,\ 1)$，由 [4, 定理 ˆ 2.17] 可知，归一化核 $\{k_z^\alpha\}$ 当 $|z| \to 1^-$. 时弱收敛于 0。由于 $C_{\psi,\ \varphi}$ 是紧的，因此其伴随算子 $C^*_{\psi,\ \varphi}$也是紧的，从而

$$\|C^*_{\psi,\varphi}\hat{k}_z^\alpha\|_{\mathcal{D}_\alpha} \to 0 \text{ as } |z| \to 1^-.$$

因此，取极限 $|z| \to 1^-$ 于（3.1）的两边，即得所需结果。 □

作为命题3.1的直接结果，我们得到以下两个推论。我们首先回顾，Aut(𝔻) 表示 $\mathbb{D}$ 的所有双全纯自映射所成的群。由初等复分析可知，每个 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ 均可表示为如下形式

$$\varphi(z) = \eta \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}, \ \eta \in \partial\mathbb{D}, \ a \in \mathbb{D}.$$

在本文中，我们用记号 φ_a 表示由 $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ 给出的自同构

推论 3.2. 对于 $\alpha \in (0,1)$，不存在非零的紧加权复合算子 $C_{\psi,\,\varphi}$ 作用于 $\mathcal{D}_\alpha$ 且满足 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$。

证明。 设 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$。 那么，经过简单计算可得

$$(1 - |z|^2)|\varphi'(z)| = 1 - |\varphi(z)|^2 \text{ and } |\varphi'(z)| = |\varphi_a'(z)| \leq \frac{1 + |a|}{1 - |a|}.$$

这意味着

$$|\psi(z)| \left(\frac{1 - |a|}{1 + |a|}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \leq |\psi(z)| \left(\frac{1 - |z|^2}{1 - |\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}. \tag{3.2}$$

由于 $C_{\psi,\,\varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$上是紧算子，由命题 3.1 可知，不等式（3.2）右侧的表达式当 $|z| \to 1^-$. 时趋于 0。这意味着

$$\lim_{|z|\to 1^-} |\psi(z)| = 0.$$

由于 $\psi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$，最大模原理保证 $\psi \equiv 0$. □

推论 3.3。 设 $C_{\psi,\,\varphi}$ 是 $\mathcal{D}_\alpha$ 上的紧算子，其中某个 $\alpha \in$ 满足(0，1)。 如果 φ 在 $\mathbb{D}$ 中没有不动点，且 ψ 在 $\mathbb{D}$上连续，那么 $\overline{\psi}$ 必然在 $\partial\mathbb{D}$.上的某点处为零

证明。 假设 $C_{\psi,\,\varphi}$ 是 $\mathcal{D}_\alpha$ 上的紧算子，其中某个 $\alpha \in$ 满足(0，1)，并且 φ 在 $\mathbb{D}$. 中没有不动点。于是存在一点 $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ 和一个序列 $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(z_n) = \zeta \text{ and } \lim_{n\to\infty} \frac{1 - |\varphi(z_n)|}{1 - |z_n|} \leq 1,$$

见 [4, 第 56]。由施瓦茨-皮克定理 [4,第 48]可得

$$\frac{1 - |\varphi(z_n)|}{1 - |z_n|} \geq \frac{1 - |\varphi(0)|}{1 + |\varphi(0)|} > 0,$$

从而得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - |z_n|}{1 - |\varphi(z_n)|} \geq 1.$$

由于 ψ 在 $\mathbb{D}$上连续，对每个 $\alpha \in (0,\ 1)$，我们得到

$$|\psi(\zeta)| = \lim_{n\to\infty} |\psi(z_n)| \lesssim \lim_{n\to\infty} |\psi(z_n)| \left(\frac{1 - |z_n|^2}{1 - |\varphi(z_n)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}. \tag{3.3}$$

由于 $C_{\psi,\,\varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$上是紧的，命题 3.1表明，式（3.3）右侧的表达式在 $n \to \infty$. 趋于 0。因此， ψ（ζ） $= 0$，证明完毕。□

注记 3.4。 推论 3.3 提供了一个简单的判据，用于识别在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上非紧的加权复合算子，其中 $\alpha \in$ 取遍(0，1)。例如，设 $\varphi(z) = \frac{1+z^2}{2}$ 且 $\psi(z) = 2 + z$，则 φ 在 $\mathbb{D}$ 上没有不动点，且 ψ 在 $\partial\mathbb{D}$上没有零点，由推论 3.3 可知，对于所有 $\alpha \in$ 取值于(0，1)的情形，$C_{\psi,\,\varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上都不是紧的。

现在考虑函数 $\psi(z) = (1+z)^{1+\alpha}$和 $\varphi(z) = z^2.$。简单计算可得

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \leq 2^{1+\alpha}.$$

然而，由于 $\psi \notin \mathcal{D}_\alpha$，算子 $C_{\psi,\,\varphi}$ 在 $D_\alpha.$ 上并非有界。这表明命题 3.1 中的条件不足以保证加权复合算子的有界性。因此，要建立$C_{\psi,\,\varphi}$.有界性的充分条件，还需要对诱导函数施加额外条件。

现在我们可以证明定理 1.1了。

定理 *1.1*的证明。设 $f \in \mathcal{D}_\alpha.$ 则有

$$\begin{aligned}
&\|C_{\psi,\varphi}f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} \\
&\cong |C_{\psi,\varphi}f(0)|^2 + |(C_{\psi,\varphi}f)'(0)|^2 + \|(C_{\psi,\varphi}f)''\|^2_{A^2_{\alpha+2}} \\
&= |\psi(0)f(\varphi(0))|^2 + |(\psi f\circ\varphi)'(0)|^2 + \|(\psi f\circ\varphi)''\|^2_{A^2_{\alpha+2}} \\
&\lesssim |\psi(0)f(\varphi(0))|^2 + |\psi'(0)f(\varphi(0))|^2 + |\psi(0)f'(\varphi(0))\varphi'(0)|^2 + \|(\psi f\circ\varphi)''\|^2_{A^2_{\alpha+2}}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

由于 C_φ 在 A^2_α 上有界（见 [19]），我们得到

$$|f(\varphi(0))| \lesssim \|C_\varphi f\|_{A^2_\alpha} \lesssim \|f\|_{A^2_\alpha} \lesssim \|f\|_{D_\alpha}$$

and

$$|f'(\varphi(0))| \lesssim \|C_\varphi f'\|_{A^2_\alpha} \lesssim \|f'\|_{A^2_\alpha} \lesssim \|f\|_{D_\alpha}.$$

这意味着

$$|\psi(0)f(\varphi(0))|^2 + |\psi'(0)f(\varphi(0))|^2 + |\psi(0)f'(\varphi(0))\varphi'(0)|^2 \lesssim \|f\|^2_{D_\alpha}.$$

Now,

$$\begin{aligned}
&\|(\psi f\circ\varphi)''\|^2_{A^2_{\alpha+2}} \\
&= \int_{\mathbb{D}} |(\psi(z)f(\varphi(z)))''|^2 dA_{\alpha+2}(z) \\
&\lesssim \int_{\mathbb{D}} |\psi''(z)f(\varphi(z))|^2 dA_{\alpha+2}(z) + \int_{\mathbb{D}} |\psi'(z)f'(\varphi(z))\varphi'(z)|^2 dA_{\alpha+2}(z) \\
&+ \int_{\mathbb{D}} |\psi(z)f'(\varphi(z))\varphi''(z)|^2 dA_{\alpha+2}(z) + \int_{\mathbb{D}} |\psi(z)f''(\varphi(z))\varphi'^2(z)|^2 dA_{\alpha+2}(z).
\end{aligned}$$

根据上面的第一个积分以及定理的条件（i），我们得到

$$\int_{\mathbb{D}} |\psi''(z)f(\varphi(z))|^2 dA_{\alpha+2}(z) \lesssim \|C_\varphi f\|^2_{A^2_\alpha} \lesssim \|f\|^2_{A^2_\alpha} \lesssim \|f\|^2_{D_\alpha}.$$

第二个积分结合条件（ii），意味着

$$\int_{\mathbb{D}} |\psi'(z)f'(\varphi(z))\varphi'(z)|^2 dA_{\alpha+2}(z) \lesssim \|C_\varphi f'\|^2_{A^2_\alpha} \lesssim \|f'\|^2_{A^2_\alpha} \lesssim \|f\|^2_{D_\alpha}.$$

由第三个积分，结合条件 (iii)，可得

$$\int_{\mathbb{D}} |\psi(z)f'(\varphi(z))\varphi''(z)|^2 dA_{\alpha+2}(z) \lesssim \|C_\varphi f'\|^2_{A^2_\alpha} \lesssim \|f'\|^2_{A^2_\alpha} \lesssim \|f\|^2_{D_\alpha}.$$

将条件 (iv) 应用于第四个积分，得到

$$\int_{\mathbb{D}} |\psi(z)f''(\varphi(z))\varphi'^2(z)|^2 dA_{\alpha+2}(z) \lesssim \int_{\mathbb{D}} |f''(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 (1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha+2} dA(z).$$

由于 φ 在 $\mathbb{D}$ 上为单叶的，作变量替换 $w = \varphi(z)$，可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{D}} |\psi(z)f''(\varphi(z))\varphi'^2(z)|^2 dA_{\alpha+2}(z)\\ &\lesssim \int_{\mathbb{D}} |f''(w)|^2 (1-|w|^2)^{\alpha+2} dA(w) = \|f''\|^2_{A^2_{\alpha+2}} \lesssim \|f\|^2_{D_\alpha}.\end{aligned}$$

由以上所有关系可知

$$\|C_{\psi,\varphi} f\|_{\mathcal{D}_\alpha} \lesssim \|f\|_{D_\alpha},$$

如所需。 □

$\mathbb{C}$上的线性分式变换（LFTs）是形如以下形式的映射

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}, \text{ where } a,b,c,d \in \mathbb{C} \text{ with } ad-bc \neq 0.$$

特别地，如果一个 LFT 是 $\mathbb{D}$ 的自映射，那么 $|cz+d|$ 在$\mathbb{D}$上与零点保持正距离。因此，由定理 1.1 可知，由一个将 $\mathbb{D}$ 自映射到自身的 LFT 所诱导的复合算子，在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上对每个 $\alpha \in (-1,1)$ 都是有界的。此外，如果 φ 和 ψ 都是同时将 $\mathbb{D}$ 映射到自身的 LFT，那么定理 1.1 意味着加权复合算子 $C_{\psi,\varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$上是有界的，这说明了定理1.1 在非加权情形之外的适用性。此外，定理1.1 还可用于识别那些并非 LFT、但仍能诱导有界加权复合算子的函数。下面给出一个说明性例子。

例 3.5。对于 $r \in (0,1)$，令

$$\varphi_{r,1}(z) = exp\left(\frac{(1-r)(z+1)}{rz-1}\right) \text{ and } \psi \equiv 1.$$

于是 $\varphi_{r,1}$ 是 $\mathbb{D}$的单叶全纯自映射，且 $\varphi''_{r,1} \in H^\infty(\mathbb{D})$。直接计算可得

$$\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi_{r,1}(z)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1} \lesssim \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}.$$

因此，对于每个 $r \in (0,1)$，诱导函数 $\varphi_{r,\,1}$ 和 ψ 满足定理 1.1 的假设，因此加权复合算子 $C_{\psi,\,\varphi_{r,\,1}}$在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上对所有 $\alpha \in (-1,\,1)$。我们注意到，当 ψ 为多项式、 $\psi = \varphi_r$， $\psi = \varphi_{r,\,1}$ 或 $\psi(z) = (1-z)^{1+r}$. 时，同样的结论也成立

现在，我们为 $C_{\psi,\ \varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上对每个$\alpha \in (-1,\ 1)$。均为紧算子建立一个充分条件。为此，我们需要文献中的以下引理。

引理 3.6. [11, 引理 2.9] 设 $C_{\psi,\varphi}$ 是 $\mathcal{D}_\alpha$ 上的有界算子，其中 $\alpha \in (-1,1)$. 那么，当且仅当对于 $\mathbb{D}$ 中任意一个在紧子集上一致收敛到零的有界序列 $\{f_n\}$，都有 $C_{\psi,\varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上是紧的。$\|C_{\psi,\varphi}f_n\|_{\mathcal{D}_\alpha} \to 0$.

引理 3.7. [14, 定理 10.28] 设 $f_n \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, 对 $n = 1, 2, \ldots,$ 且 $\{f_n\}$ 在 $\mathbb{D}$. 的紧子集上一致收敛到 f。那么 $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, 且 $\{f_n'\}$ 在 $\mathbb{D}$. 的紧子集上一致收敛到 f'

定理*1.2*的证明. 设 $\{f_n\}$ 是 $\mathcal{D}_\alpha$ 中在紧子集上一致收敛到零的有界序列。$\mathbb{D}$. 由定理 1.1 可知 $C_{\psi,\varphi}$是 $\mathcal{D}_\alpha$. 上的有界线性算子。由引理 3.6，只需证明$\|C_{\psi,\ \varphi}f_n\|_{\mathcal{D}_\alpha} \to 0$. 由（3.4）得

$$\begin{aligned}&\|C_{\psi,\varphi}f_n\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}\\ &\lesssim |\psi(0)f_n(\varphi(0))|^2 + |\psi'(0)f_n(\varphi(0))|^2 + |\psi(0)f_n'(\varphi(0))\varphi'(0)|^2 + \|(\psi f_n\circ\varphi)''\|^2_{A^2_{\alpha+2}}.\end{aligned}$$

任取 $\epsilon > 0$. 由于 $\{\varphi(0)\}$ 是 $\mathbb{D}$ 的紧子集，由引理 3.7可知，存在 $N_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|\psi(0)f_n(\varphi(0))|^2 + |\psi'(0)f_n(\varphi(0))|^2 + |\psi(0)f_n'(\varphi(0))\varphi'(0)|^2 < \epsilon^2\ \forall n \geq N_0.$$

现在，我们有

$$\begin{aligned}&\|(\psi f_n\circ\varphi)''\|^2_{A^2_{\alpha+2}}\\ &= \int_{\mathbb{D}} |(\psi(z)f_n(\varphi(z)))''|^2 dA_{\alpha+2}(z)\\ &\lesssim \int_{\mathbb{D}} |\psi''(z)f_n(\varphi(z))|^2 dA_{\alpha+2}(z) + \int_{\mathbb{D}} |\psi'(z)f_n'(\varphi(z))\varphi'(z)|^2 dA_{\alpha+2}(z)\\ &+ \int_{\mathbb{D}} |\psi(z)f_n'(\varphi(z))\varphi''(z)|^2 dA_{\alpha+2}(z) + \int_{\mathbb{D}} |\psi(z)f_n''(\varphi(z))\varphi'^2(z)|^2 dA_{\alpha+2}(z).\end{aligned}$$

由条件（i），存在 $r_1 \in (0,1)$ 使得

$$|\psi''(z)|(1-|z|^2) < \epsilon \text{ for all } z \in \mathbb{D}\setminus\overline{B(0,r_1)}.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{B(0,r_1)}} |\psi''(z)f_n(\varphi(z))|^2 dA_{\alpha+2}(z)\\ &\lesssim \epsilon^2 \int_{\mathbb{D}} |f_n(\varphi(z))|^2 dA_\alpha(z) = \epsilon^2\|C_\varphi f_n\|^2_{A^2_\alpha} \lesssim \epsilon^2\|f_n\|^2_{A^2_\alpha} \lesssim \epsilon^2\|f_n\|^2_{D_\alpha} \lesssim \epsilon^2. \quad (3.5)\end{aligned}$$

连续性 φ 和 ψ'' 在$B(0,r_1)$ 意味着 $\varphi(B(0,r_1))$ 是紧的，并且 ψ'' 在 $B(0,r_1)$ 上有界。根据引理3.7，存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|f_n(\varphi(z))| < \epsilon\ \forall n \geq N_1,\ z \in \overline{B(0,r_1)}.$$

因此，对于所有 $n \geq N_1$，我们有

$$\int_{\overline{B(0,r_1)}} |\psi''(z) f_n(\varphi(z))|^2 dA_{\alpha+2}(z) \lesssim \epsilon^2. \tag{3.6}$$

结合（3.5）和（3.6），对于所有 $n \geq N_1$，

$$\int_{\mathbb{D}} |\psi''(z) f_n(\varphi(z))|^2 dA_{\alpha+2}(z) \lesssim \epsilon^2.$$

根据条件（ii），存在 $r_2 \in$ （0，1）使得

$$|\varphi'(z)\psi'(z)|(1-|z|^2) < \epsilon \text{ for all } z \in \mathbb{D} \setminus \overline{B(0,r_2)}.$$

于是可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{B(0,r_2)}} |\psi'(z) f_n'(\varphi(z))\varphi'(z)|^2 dA_{\alpha+2}(z)\\ &\lesssim \epsilon^2 \int_{\mathbb{D}} |f_n'(\varphi(z))|^2 dA_\alpha(z) = \epsilon^2 \|C_\varphi f_n'\|^2_{A^2_\alpha} \lesssim \epsilon^2 \|f_n'\|^2_{A^2_\alpha} \lesssim \epsilon^2 \|f_n\|^2_{D_\alpha} \lesssim \epsilon^2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

由于 φ，φ' 和 ψ' 在 B（0，r_2）上连续，因此 φ（B（0，r_2）$\overline{\ }$）是紧的，且 φ'，ψ' 在B（0，r_2）上有界。由引理3.7 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|f_n'(\varphi(z))| < \epsilon \ \forall n \geq N_2, \ z \in \overline{B(0,r_2)}.$$

因此，对于所有 $n \geq N_2$，我们有

$$\int_{\overline{B(0,r_2)}} |\psi'(z) f_n'(\varphi(z))\varphi'(z)|^2 dA_{\alpha+2}(z) \lesssim \epsilon^2. \tag{3.8}$$

结合（3.7）和（3.8），对所有 $n \geq N_2$，我们得到

$$\int_{\mathbb{D}} |\psi'(z) f_n'(\varphi(z))\varphi'(z)|^2 dA_{\alpha+2}(z) \lesssim \epsilon^2.$$

条件（iii）意味着存在 $r_3 \in$ (0，1)，使得

$$|\varphi''(z)\psi(z)|(1-|z|^2) < \epsilon \text{ for all } z \in \mathbb{D} \setminus \overline{B(0,r_3)}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{B(0,r_3)}} |\psi(z) f_n'(\varphi(z))\varphi''(z)|^2 dA_{\alpha+2}(z)\\ &\lesssim \epsilon^2 \int_{\mathbb{D}} |f_n'(\varphi(z))|^2 dA_\alpha(z) = \epsilon^2 \|C_\varphi f_n'\|^2_{A^2_\alpha} \lesssim \epsilon^2 \|f_n'\|^2_{A^2_\alpha} \lesssim \epsilon^2 \|f_n\|^2_{D_\alpha} \lesssim \epsilon^2. \end{aligned} \tag{3.9}$$

、ψ和 φ'' 在 $B(0,\ r_3)$ 上连续，意味着 $\varphi(B(0,\ r_3))$ 是紧的，且 ψ 和 φ'' 在 $B(0,\ r_3)$上有界。根据引理 3.7，存在 $N_3 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|f_n'(\varphi(z))| < \epsilon \ \forall n \geq N_3, \ z \in \overline{B(0,r_3)}.$$

因此，对于所有 $n \geq N_3$，我们有

$$\int_{\overline{B(0,r_1)}} |\psi(z) f_n'(\varphi(z))\varphi''(z)|^2 dA_{\alpha+2}(z) \lesssim \epsilon^2. \tag{3.10}$$

结合（3.9）和（3.10），对于所有 $n \geq N_3$ 我们得到

$$\int_{\mathbb{D}} |\psi(z) f_n'(\varphi(z))\varphi''(z)|^2 dA_{\alpha+2}(z) \lesssim \epsilon^2.$$

由条件 (iv)，存在 $r_4 \in (0, 1)$，使得

$$|\varphi'(z)\psi(z)|^2(1-|z|^2)^{\alpha+2} < \epsilon^2(1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha+2} \text{ for all } z \in \mathbb{D} \setminus \overline{B(0,r_4)}.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{B(0,r_4)}} |\psi(z) f_n''(\varphi(z))\varphi'^2(z)|^2 dA_{\alpha+2}(z)\\ &\lesssim \epsilon^2 \int_{\mathbb{D}} |f_n''(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 (1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha+2} dA(z).\end{aligned}$$

由于 φ 在 $\mathbb{D}$上是单叶的，通过 $w = \varphi(z)$ 进行变量代换可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{B(0,r_4)}} |\psi(z) f_n''(\varphi(z))\varphi'^2(z)|^2 dA_{\alpha+2}(z)\\ &\lesssim \epsilon^2 \int_{\mathbb{D}} |f_n''(w)|^2 (1-|w|^2)^{\alpha+2} dA(w) = \epsilon^2 \|f_n''\|^2_{A^2_{\alpha+2}} \lesssim \epsilon^2 \|f_n\|^2_{D_\alpha} \lesssim \epsilon^2. \qquad (3.11)\end{aligned}$$

由于 φ、ψ和 φ'在 $B(0, r_4)$上连续，集合 $\varphi(B(0, \overline{r_4}))$ 是紧集，且 ψ 和 φ' 在 $B(0, r_4)$上有界。应用引理 3.7，我们可以选取$N_4 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|f_n''(\varphi(z))| < \epsilon \ \forall n \geq N_4, \ z \in \overline{B(0,r_4)}.$$

因此，对每个 $n \geq N_4$，都有

$$\int_{\overline{B(0,r_1)}} |\psi(z) f_n''(\varphi(z))\varphi'^2(z)|^2 dA_{\alpha+2}(z) \lesssim \epsilon^2. \qquad (3.12)$$

结合（3.11）和（3.12），对所有 $n \geq N_4$，我们得到

$$\int_{\mathbb{D}} |\psi(z) f_n''(\varphi(z))\varphi'^2(z)|^2 dA_{\alpha+2}(z) \lesssim \epsilon^2.$$

现在，令

$$N = \max\{N_0, N_1, N_2, N_3, N_4\}.$$

最后，结合前面的所有关系，我们得到

$$\|C_{\psi,\varphi} f_n\|_{\mathcal{D}_\alpha} \lesssim \epsilon \ \forall n \geq N.$$

证明至此完成。 □

定理 1.2 给出了一种在 $\mathcal{D}_\alpha$上构造紧加权复合算子的方法。作为一个具体例子，若 φ 是 $\mathbb{D}$的一个线性分式变换自映射，且满足 $\|\varphi\|_\infty < 1$，则它诱导出一个定义在 C_φ 上的紧复合算子 $\mathcal{D}_\alpha$。这与已知结果 [21, 定理 2]对$\alpha < 0$紧性的刻画一致。此外，当 ψ 也是 $\mathbb{D}$的线性分式变换自映射时，加权算子$C_{\psi,\varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上是紧的，其中 $\alpha \in (-1, 1)$。这表明定理 1.2的适用范围不止于非加权复合算子。

在下面的例子中，我们给出一个 $\mathbb{D}$ 的自映射 φ，满足 $\|\varphi\|_\infty = 1$，使得加权复合算子 $C_{\psi,\varphi}$ 对每个 $\alpha \in (-1, 1)$，都是 $\mathcal{D}_\alpha$ 上的紧算子

尽管对所有 $\alpha \in (0,\ 1)$，，复合算子 C_φ 和乘法算子M_ψ 在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上都不是紧算子。

例 3.8. 设 $\psi(z) = (1-z)^{2+\alpha}$和 $\varphi(z) = 1 - \frac{\lambda_\varphi z}{(1-\lambda_\varphi)z}$，其中 $\lambda_\varphi \in [\frac{1}{2}, 1)$。则 φ 是 $\mathbb{D}$上的单叶全纯自映射，具有不动点 0，并且在 $\partial\mathbb{D}$. 的每一点都存在角导数。根据 [13, 定理 5.3]，，复合算子 C_φ 在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上对任意 $\alpha \in (-1, 1)$ 都不是紧的。此外，根据推论 3.2，乘法算子 M_ψ 对每个 $\alpha \in (0, 1)$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上都不是紧的。

直接计算可知 ψ 和 φ满足定理1.2中的条件 (ii) 和 (iii)。此外，我们有

$$|\psi''(z)| \lesssim \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha \in [0,1) \\ (1-|z|)^\alpha & \text{if } \alpha \in (-1,0), \end{cases}$$

这意味着定理的条件 (1.2) 对所有 $\alpha \in (-1,1)$均成立。最后，对于$\lambda_\varphi \in [\frac{1}{2}, 1)$，

$$|\psi(z)| \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \right)^{\frac{\alpha}{2}+1} \lesssim (1-|z|^2)^{\frac{\alpha}{2}+1},$$

这验证了定理 1.2 的条件 (iv)。因此，对于每个 $\alpha \in (-1,1)$，$C_{\psi,\ \varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上都是紧的。

这个例子揭示了一个有趣的现象：通过选取适当的权函 $\mathcal{D}_\alpha$，可以使 上的非紧复合算子变为紧算子。此外，在例 3.8 中，权函数在 $\varphi(\partial\mathbb{D}) \cap \partial\mathbb{D}$.上为零。这一观察引出了下面的问题：

问题 3.9。 设 $C_{\psi,\varphi}$ 是 $\mathcal{D}_\alpha$. 上的有界算子。假设 φ 在 $\partial\mathbb{D}$ 上连续，且 ψ 连续并在 $\varphi(\partial\mathbb{D}) \cap \partial\mathbb{D}$. 上为零。那么，$C_{\psi,\varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上必然是紧的吗?

下面的引理将用于证明下一个定理。

引理 3.10。 若 $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ 且 $\sup_{z \in \mathbb{D}} |f'(z)|(1-|z|^2) < \infty$，则

$$\lim_{|z|\to 1^-} |f(z)|(1-|z|^2)^\alpha = 0 \text{ for every } \alpha > 0.$$

证明。 对于 $f \in$ 全纯函数空间$(\mathbb{D})$ 和 $z \in \mathbb{D}$，我们得到

$$|f(z) - f(0)| = \left| \int_{[0,z]} f'(\xi) d\xi \right| \leq M \int_0^{|z|} \frac{d\xi}{1-\xi^2} \leq M \left(\log 2 + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{1-|z|^2} \right) \right),$$

其中 $M = \sup_{z\in\mathbb{D}}$上确界 $(1-|z|^2)|f'(z)|$. 由于， $M < \infty$，因此对所有 $z \in \mathbb{D}$ ，

$$|f(z)| \lesssim 1 + \log \left(\frac{1}{1-|z|^2} \right). \tag{3.13}$$

最后，将等式（3.13）两边乘以 $(1-|z|^2)^{\ \alpha}$，并令 $|z| \to 1^-$，即可得到所需结果。 □

现在我们证明引言中所述的有界加权复合算子的刻画。

定理 *1.3* 的证明。 由命题 3.1 可立即得到一个方向，因此只需证明其逆命题。

由于 $\lim_{|z|\to 1^-} |\psi''(z)|(1-|z|^2) = 0$ 且 $\varphi'' \in H^\infty(\mathbb{D})$，引理3.10 表明定理$i$)、$(ii)$ 和 (iii) 中的条件1.2 成立。还需证明

$$\lim_{|z|\to 1^-} |\psi(z)| \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} = 0$$

蕴含

$$\lim_{|z|\to 1^-} |\psi(z)| \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1} = 0.$$

这由施瓦茨-皮克定理 [4, 第48], 页得出，该定理给出，对于任意全纯自映射 φ，$\mathbb{D}$，$\frac{1-|z|}{1-|\varphi(z)|} \leq \frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}$。

有界性的情形可用完全类似的论证得出，只需将 $|z| \to 1^-$ 时的极限替换为 $z \in \mathbb{D}$ 上的上确界，并使用定理1.1 而非定理1.2。□

在下一个结果中，我们将经典比较定理推广到加权复合算子$C_{\psi,\,\varphi}$ 其中诱导函数 ψ 和 φ，满足适当条件，从而得到经典定理的自然加权类比。回忆一下，比较定理 [13, 定理 5.2] 指出，如果 C_φ 在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上对某个$\alpha \in (-1,\ 1)$有界或紧，那么它对所有 $\mathcal{D}_\beta$的 $\beta \in (\alpha,\ 1)$也具有相同性质。

命题 3.11。设 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的单叶全纯自映射，且满足 $\varphi'' \in H^\infty(\mathbb{D})$，并设 $\psi \in Hol(\mathbb{D})$。

(i) 若 $\sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi''(z)|(1-|z|^2) < \infty$，且 $C_{\psi,\,\varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上有界（对某个 $\alpha \in (0,1)$成立），则对每个 $\beta \in (\alpha,\ 1)$，$C_{\psi,\,\varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\beta$ 上有界。(ii) 若 $\lim_{|z|\to 1^-} |\psi''(z)|(1-|z|^2) = 0$，且 $C_{\psi,\,\varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上紧（对某个 $\alpha \in (0,1)$成立），则对每个 $\beta \in (\alpha,\ 1)$，$C_{\psi,\,\varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\beta$ 上紧。

证明。证明分为两个步骤：先考虑 φ 固定原点的情形，然后考虑一般情形。

步骤 1：由于 $\varphi(0) = 0$，施瓦茨引理表明

$$1-|z|^2 \leq 1-|\varphi(z)|^2 \text{ for all } z \in \mathbb{D}$$

从而

$$|\psi(z)| \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{\beta}{2}} \leq |\psi(z)| \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \text{ for all } \beta \in (\alpha, 1).$$

紧性条件可通过令 $|z| \to 1^-$ 并应用定理 1.3 (ii) 得到，而有界性条件则通过对 $z \in \mathbb{D}$ 取上确界并应用定理 1.3 (i)得到。

步骤 2：设 φ 是一个不固定 $\mathbb{D}$ 原点的全纯自映射。则存在 $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$，使得 $\varphi(0) = a$.。函数 $\varphi_a \circ \varphi$ 随后固定原点，并且是 $\mathbb{D}$ 的单叶全纯自映射，满足 $(\varphi_a \circ \varphi)'' \in H^\infty(\mathbb{D})$。

直接计算表明

$$\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right) = |\varphi_a'(\varphi(z))|\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi_a(\varphi(z))|^2}\right) \ \forall z \in \mathbb{D}. \tag{3.14}$$

由于对于所有 $z \in \mathbb{D}$,

$$\frac{1-|a|^2}{4} \leq |\varphi_a'(\varphi(z))| \leq \frac{1+|a|}{1-|a|}.$$

因此，由等式（3.14）对任意 $\alpha \in (0,1)$，可得

$$\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \cong \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi_a(\varphi(z))|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}. \tag{3.15}$$

现在，在等式（ $|z| \to 1^-$ 两边取极限可得（3.15）蕴含

$$\lim_{|z|\to 1^-} |\psi(z)|\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} = 0 \text{ iff } \lim_{|z|\to 1^-} |\psi(z)|\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi_a(\varphi(z))|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} = 0.$$

根据定理 1.3 (ii)，对每个 $\alpha \in (0,1)$，算子 $C_{\psi,\varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上紧，当且仅当 $C_{\psi,\varphi_a\circ\varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$. 上紧。因此，$C_{\psi,\varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$上的紧性蕴含$C_{\psi,\varphi_a\circ\varphi}$. 的紧性。根据步骤 1， $C_{\psi,\varphi_a\circ\varphi}$ 对每个$\beta \in (\alpha,1)$均在 上紧。 因此，$C_{\psi,\varphi}$ 对每个 $\beta \in (\alpha,1)$均在 上紧。

有界性可通过类似的论证得到，只需将当 $|z| \to 1^-$ 时的极限替换为在 $z \in \mathbb{D}$. □ 上取上确界

4. Spectral properties

由施瓦茨-皮克定理可知，单位圆盘的任意非平凡全纯自映射在 $\mathbb{D}$. 至多有一个不动点。本节在额外假设加权复合算子 $C_{\psi,\varphi}$ 满足 φ 在 $\mathbb{D}$.有不动点的条件下，研究其谱。我们首先证明若干预备结果。

在第一个结果中，我们假设该不动点是原点，并考虑形如 φ 的函数

$$\varphi(z) = z\tau(z) \text{ for all } z \in \mathbb{D}, \tag{4.1}$$

其中 $\tau \in$Hol$(\mathbb{D})$。

引理 4.1。设 φ 是 $\mathbb{D}$ 中形如 (4.1) 的全纯自映射。那么$\varphi'' \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$ 当且仅当 $\tau'' \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$。

证明。 对所有 $z \in \mathbb{D}$，对 (4.1) 求导，得到

$$\varphi'(z) = z\tau'(z) + \tau(z) \tag{4.2}$$

and

$$\varphi''(z) = z\tau''(z) + 2\tau'(z). \tag{4.3}$$

设 $\tau'' \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$。 由（4.3）可得 $\varphi'' \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$.

反之，假设 $\varphi'' \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$。 现在，固定 $0 < \delta < 1$. τ在 $B(0,\delta)$ 上的连续性意味着 τ在 $B(0,\delta)$ 上有界。 由 (4.1) 可得

$$|\tau(z)| = \frac{|\varphi(z)|}{|z|} \leq \frac{|\varphi(z)|}{\delta} \text{ for all } z \in \mathbb{D} \setminus \overline{B(0,\delta)}.$$

由于 $\varphi \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$，可知 $\tau \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$。类似地，(4.2) 与 $\tau, \varphi' \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$ 一起推出 $\tau' \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$。同理，(4.3) 结合 $\tau', \varphi'' \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$ 意味着 $\tau'' \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$。□

为证明下一个结果，我们回顾以下内容。对于 $\alpha \in (-1,1)$， $\mathcal{D}_\alpha$ 拥有标准正交基 $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n=0}^\infty$，其中 $e_n(z) = (n+1)^{\frac{\alpha-1}{2}} z^n$. 此外，每个函数 e_n 都是 $\mathcal{D}_\alpha$ 上的乘子，即 $e_n \mathcal{D}_\alpha \subseteq \mathcal{D}_\alpha$. 关于 $\mathcal{D}_\alpha$ 空间上的乘子的全面论述可见 [17]。

引理 4.2。设 φ 是 $\mathbb{D}$ 的单叶全纯自映射，满足 $\varphi'' \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$ 且 $\varphi(0) = 0.$。给定 $\alpha \in (-1,1)$，取 $\psi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ 使得：

$$(i)\ \sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi''(z)|(1-|z|^2) < \infty,$$

$$(ii)\ \sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1} < \infty.$$

于是 $C_{\psi,\,\varphi}(e_n\mathcal{D}_\alpha) \subseteq e_n\mathcal{D}_\alpha$ 对所有 $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$ 均成立

证明。由于 $\varphi(0) = 0$，存在 $\tau \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ 使得 $\varphi(z) = z\tau(z)$，对所有$z \in \mathbb{D}.$。对于任意 $f \in \mathcal{D}_\alpha$，有

$$C_{\psi,\varphi}(e_n f)(z) = (n+1)^{\frac{\alpha-1}{2}} z^n (\tau(z))^n \psi(z) f(\varphi(z)) = (n+1)^{\frac{\alpha-1}{2}} z^n \zeta(z)\psi(z) f(\varphi(z)),$$

其中 $\zeta(z) = (\tau(z))^n.$ 要证明所需结论，只需证明 $\zeta\psi f\circ\varphi \in \mathcal{D}_\alpha$，这等价于 $(\zeta\psi f \circ \varphi)'' \in A^2_{\alpha+2}.$ 我们计算

$$(\zeta\psi f \circ \varphi)'' = \zeta''(\psi f \circ \varphi) + 2\zeta'(\psi f \circ \varphi)' + \zeta(\psi f \circ \varphi)''. \tag{4.4}$$

仿照定理 1.1 的证明，我们得到 $(\psi f\circ\varphi)'' \in A^2_{\alpha+2}.$ 因此，$(\psi f \circ \varphi)' \in A^2_\alpha$ 并且 $\psi f \circ \varphi \in \mathcal{D}_\alpha.$ 由于 $\mathcal{D}_\alpha \subseteq A^2_\alpha \subseteq A^2_{\alpha+2}$，可得

$$\psi f \circ \varphi, (\psi f \circ \varphi)', (\psi f \circ \varphi)'' \in A^2_{\alpha+2}.$$

由引理 4.1，我们有 $\tau'' \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$，这意味着 ζ， ζ'， $\zeta'' \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$。因此，由 (4.4) 可得 $(\zeta\psi f \circ \varphi)'' \in A^2_{\alpha+2}.$ 证明完毕。□

这就得到关于谱的如下结果。

命题 4.3。设 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的单叶全纯自映射，具有不动点 $a \in \mathbb{D}$，并满足 $\varphi'' \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$。对于给定的 $\alpha \in (-1,\ 1)$，令 $\psi \in$ 全纯函数空间$(\mathbb{D})$ 满足：

$$(i)\ \sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi''(z)|(1-|z|^2) < \infty,$$

$$(ii)\ \sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1} < \infty.$$

则 $0 < |\varphi'(a)| \le 1$，且 $\sigma(C_{\psi,\,\varphi};\ \mathcal{D}_\alpha) \supseteq \{\psi(a)(\varphi'(a))^n :\ n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}.$

证明。假设 ψ 和 φ 满足定理的假设。φ 的单叶性意味着 $|\varphi'(a)| > 0$，而施瓦茨-皮克定理给出 $|\varphi'(a)| \le 1$。我们分两步证明这一结果。步骤 1 中，我们证明 φ 固定原点时的结果；步骤 2 中，我们证明一般情形。

步骤 1：设 $n \in \mathbb{N}$，并设 M_n 为 $\mathcal{D}_\alpha$ 中由 $\{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$.张成的子空间。于是，加权 Dirichlet 空间 $\mathcal{D}_\alpha$ 可分解为

$$\mathcal{D}_\alpha = M_n \oplus e_n \mathcal{D}_\alpha.$$

由引理 4.2，$C_{\psi\varphi}(e_n\mathcal{D}_\alpha) \subseteq e_n\mathcal{D}_\alpha$，因此 $C^*_{\psi\varphi}(M_n) \subseteq M_n$. 。于是，关于标准正交基 $\mathcal{B}_n = \{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$，压缩算子$C^*_{\psi,\varphi}|_{M_n}$ 的矩阵表示为上三角矩阵。$C^*_{\psi,\varphi}|_{M_n}$的点谱由对角元素 $\langle C^*_{\psi,\varphi} e_k, e_k\rangle_{\mathcal{D}_\alpha}$（$k = 0, 1, \ldots, n-1$）组成，相应的特征向量属于 M_n. 。现在我们来计算矩阵的对角元素。当 $k = 0$ 时，$\langle C^*_{\psi,\varphi} e_0, e_0\rangle_{\mathcal{D}_\alpha} = \psi(0)$。当 $k \in \mathbb{N}$ 时，我们有

$$\langle C^*_{\psi,\varphi} e_k, e_k\rangle_{\mathcal{D}_\alpha} = \langle e_k, C_{\psi,\varphi} e_k\rangle_{\mathcal{D}_\alpha} = (n+1)^{\frac{1-\alpha}{2}} \langle e_k, \psi\varphi^k\rangle_{\mathcal{D}_\alpha}. \tag{4.5}$$

由于 $\varphi(0) = 0$，φ 的幂级数展开为

$$\varphi(z) = \varphi'(0)z + \text{higher order terms in } z.$$

因此，

$$\psi(z)(\varphi(z))^k = \psi(0)(\varphi'(0))^k z^k + \text{higher order terms in } z.$$

因此，由（4.5），我们得到

$$\langle C^*_{\psi,\varphi} e_k, e_k\rangle_{\mathcal{D}_\alpha} = \overline{\psi(0)}(\overline{\varphi'(0)})^k.$$

由于算子的压缩算子的特征值包含在原算子的特征值中，因此

$$\sigma(C^*_{\psi,\varphi}; \mathcal{D}_\alpha) \supseteq \left\{\overline{\psi(0)}(\overline{\varphi'(0)})^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}.$$

根据谱映射定理，算子及其伴随算子的谱之间满足如下关系：

$$\sigma(C^*_{\psi,\varphi}; \mathcal{D}_\alpha) = \left\{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(C_{\psi,\varphi}; \mathcal{D}_\alpha)\right\}.$$

因此，我们得到

$$\sigma(C_{\psi,\varphi}; \mathcal{D}_\alpha) \supseteq \{\psi(0)(\varphi'(0))^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

步骤 2：现在考虑一般情形。令 $\zeta = \psi \circ \varphi_a$ 和 $\eta = \varphi_a \circ \varphi \circ \varphi_a$.那么 η 是 $\mathbb{D}$ 的单叶全纯自映射，且 $\eta'' \in H^\infty(\mathbb{D})$ 和 $\eta(0) = 0$.由此可得

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in\mathbb{D}} |\zeta''(z)|(1-|z|^2) &\lesssim \sup_{z\in\mathbb{D}} \left\{(|\psi''(\varphi_a(z))| + |\psi'(\varphi_a(z))|)\,(1-|z|^2)\right\} \\
&= \sup_{z\in\mathbb{D}} \left\{(|\psi''(z)| + |\psi'(z)|)\,(1-|\varphi_a(z)|^2)\right\} \\
&= \sup_{z\in\mathbb{D}} \left\{(|\psi''(z)| + |\psi'(z)|)\,|\varphi_a'(z)|(1-|z|^2)\right\} \\
&\cong \sup_{z\in\mathbb{D}} \left\{(|\psi''(z)| + |\psi'(z)|)\,(1-|z|^2)\right\}.
\end{aligned}$$

由于 $\sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi''(z)|(1-|z|^2) < \infty$，并由引理 3.10，$\sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi'(z)|(1-|z|^2) < \infty$，由此可得 $\sup_{z\in\mathbb{D}} |\zeta''(z)|(1-|z|^2) < \infty$.

此外，

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}|\zeta(z)|\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\eta(z)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}=\sup_{z\in\mathbb{D}}|\psi(z)|\left(\frac{1-|\varphi_a(z)|^2}{1-|\varphi_a(\varphi(z))|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}$$
$$\cong\sup_{z\in\mathbb{D}}|\psi(z)|\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi_a(\varphi(z))|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}.$$

因此，由（3.15），我们有

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}|\zeta(z)|\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\eta(z)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}\cong\sup_{z\in\mathbb{D}}|\psi(z)|\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}<\infty.$$

因此，由步骤 1，我们得到

$$\sigma(C_{\zeta,\eta};\mathcal{D}_\alpha)\supseteq\{\zeta(0)(\eta'(0))^n:n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}=\{\psi(a)(\varphi'(a))^n:n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}.$$

加权复合算子$C_{\zeta,\ \eta}$ 和 $C_{\psi,\ \varphi}$ 相似，因为

$$C_{\zeta,\eta}=C_{\varphi_a}^{-1}C_{\psi,\varphi}C_{\varphi_a}.$$

因此，$C_{\zeta,\ \eta}$ 和$C_{\psi,\ \varphi}$ 具有相同的谱，我们得到

$$\sigma(C_{\psi,\varphi};\mathcal{D}_\alpha)=\sigma(C_{\zeta,\eta};\mathcal{D}_\alpha)\supseteq\{\psi(a)(\varphi'(a))^n:n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\},$$

如所需。 □

Th的特征函数 C_φ 是薛定谔方程¨的解（参见 [15]） :

$$f\circ\varphi=\lambda f. \tag{4.6}$$

在 [10], 中，作者研究了具有不动点 $\mathbb{D}$ 的全纯自映射 φ 在 $\mathbb{D}$ 上对应的这一方程，并找出了使方程存在解的 λ 的取值。

在下面的引理中，我们对加权方程进行类似的分析

$$\psi f\circ\varphi=\lambda f. \tag{4.7}$$

这可以看作是（4.6）的加权版本。

引理 4.4。设 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的全纯自映射，具有不动点 $a\in\mathbb{D}$，且ψ ∈全纯函数空间(D)。若存在 $f\in$ 全纯函数空间(D)，满足方程（4.7）。那么，要么存在 $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 使得 $\lambda=\psi(a)(\varphi'(a))^n$，要么 $f\equiv0$.

证明。假设 $f\in$ 全纯函数空间(D) 满足方程（4.7）。由于 $\varphi(a)=a$ 对于 $a\in\mathbb{D}$，由（4.7）可得 $(\psi(a)-\lambda)f(a)=0$. 因此，要么 $\lambda=\varphi(a)$，要么$f(a)=0$.若 $\lambda\neq\varphi(a)$，则有 $f(a)=0$.对（4.7）两边求导得

$$\psi'(f\circ\varphi)+\psi(f'\circ\varphi)\varphi'=\lambda f'.$$

代入 a，可得 $(\psi(a)\varphi'(a)-\lambda)f'(a)=0$，这意味着 $\lambda=\psi(a)\varphi'(a)$ 或 $f(a)=f'(a)=0$.现在，将 (4.7) 两边求 k 次导数，得到

$$\psi^{(k)}(f\circ\varphi)+\psi(f_{(k)}\circ\varphi)(\varphi')^k+\text{含有 }(f_{(m)}\circ\varphi)\text{ 的项，其中 }m<k=\lambda f^{(k)}.$$

如果 $f(a)=f_{(m)}(a)=0$对 $m<k,$则我们得到 $(\psi(a)(\varphi'(a))^k-\lambda)f_{(k)}(a)=0$.这意味着要么 $\lambda=\psi(a)(\varphi'(a))^k$ 要么 $f^{(k)}(a)=0$. 因此，如果 $\lambda\neq$

$\psi(a)(\varphi'(a))^n$ 对每个 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 则 $f(a) = f^{(k)}(a) = 0$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$. 因此，$f \equiv 0$, 即为所求。

□

现在我们证明本节的主要结果。

定理 *1.4* 的证明。 设 ψ 和 φ 满足该定理的假设。由命题 4.3，有 $0 < |\varphi'(a)| \leq 1$. 若 $|\varphi'(a)| = 1$, 施瓦茨引理表明 φ 是 $\mathbb{D}$的自同构。在这种情况下，推论 3.2 给出$\psi \equiv 0$。因此， $0 < |\varphi'(a)| < 1$.

根据施瓦茨-皮克定理， φ 在 $\mathbb{D}$中至多有一个不动点，否则， φ就是恒等映射。在后一种情况下，我们的假设（ii）给出 $\lim_{|z|\to 1^-} |\psi(z)| = 0$, 而由最大模原理，这意味着 $\psi \equiv 0$. 现在，设 λ 是 $\sigma(C_{\psi,\varphi}; \mathcal{D}_\alpha)$ 的一个非零元素，且不具有 $\psi(a)(\varphi'(a))^n$ 的形式。由于 a 是 φ 在 $\mathbb{D}$ 中的唯一不动点，引理 4.4 表明，任何相应的特征函数 f 都必须恒等于零。因此， λ 不可能是特征值。由定理 1.2， $C_{\psi,\varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上是紧算子，并且由于紧算子的每个非零谱值都是特征值，我们通过命题 4.3 得出不存在这样的 λ 。这就完成了谱刻画的证明。 □

为说明这一点，我们将主要结果应用于确定若干特定加权复合算子的谱。

例 4.5。 (i) 考虑 $\psi(z) = (1-z)^{2+\alpha}$ 和 $\varphi(z) = 1 - \frac{\lambda_\varphi z}{(1-\lambda_\varphi)z}$, 其中 $\lambda_\varphi \in [\frac{1}{2}, 1)$。例 3.8表明 ψ 和 φ 满足定理 1.4 的假设。因此，$C_{\psi,\varphi}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$ 上的谱为

$$\sigma(C_{\psi,\varphi}; \mathcal{D}_\alpha) = \left\{\lambda_\varphi^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} \cup \{0\}.$$

(ii) 对于 $r \in (0,1)$ 和 $k > 1$, , 令

$$\varphi_{r,k}(z) = exp\left(\frac{z(rk-1) + (r-k)}{1-rz}\right) \text{ and } \psi(z) = z^2.$$

根据丹乔伊-沃尔夫定理（见 [4]） , $\varphi_{r,k}$ 在 $\mathbb{D}$, 中有一个不动点，记为 $a_{r,k}$。函数$\varphi_{r,k}$ 是 $\mathbb{D}$上的单叶全纯自映射，并满足 $\varphi''_{r,k} \in H^\infty(\mathbb{D})$。直接计算可得

$$\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi_{r,k}(z)|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}+1} \lesssim (1-|z|^2)^{\frac{\alpha}{2}+1}.$$

因此，对于每个 $r \in (0,1)$ 以及 $k > 1$, 诱导函数 $\varphi_{r,k}$ 和 ψ满足定理 1.4的假设。因此，$C_{\psi,\varphi_{r,k}}$ 在 $\mathcal{D}_\alpha$上的谱为

$$\sigma(C_{\psi,\varphi}; \mathcal{D}_\alpha) = \left\{a_{r,k}^2(\varphi'_{r,k}(a_{r,k}))^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} \cup \{0\}.$$

最后，我们提出以下问题，该问题涉及定理1.4的一种可能推广。

问题 4.6。 是否存在一个非零紧加权复合算子 $C_{\psi,\varphi}$, 作用于 $\mathcal{D}_\alpha$, 使得 φ 在 $\mathbb{D}$中没有不动点？若存在，此时能否刻画 $C_{\psi,\varphi}$ 的谱？

Declarations

致谢。 本研究得到了捷克科学基金会（GA CR）项目（编号 25-18042S）的资助。作者感谢 Petr Blaschke 博士认真审阅稿件，并提出了有助于改进本文的宝贵建议。数据可用性： 本文所述研究未使用任何数据。利益冲突： 作者声明不存在利益冲突。

References

1. R. Aron 和 M. Lindstr¨om, 《加权巴拿赫空间中解析函数的加权复合算子的谱》, 《以色列数学杂志》141（2004）, 263–276。2. J. G. Caughran 和 H. J. Schwartz, 《紧复合算子的谱》, 《美国数学学会会刊》51（1975）, 127–130。3. I. Chalendar、E. A. Gallardo-Guti´errez 和 J. R. Partington, 《狄利克雷空间上的加权复合算子：有界性与谱性质》, 《数学年刊》363（2015）, 第 3–4 期, 1265–1279。4. C. C. Cowen 和 B. D. MacCluer, 《解析函数空间上的复合算子》, 《高等数学研究》, CRC 出版社, 美国佛罗里达州博卡拉顿, （1995）。ˇ ˇ5. Z. Cuˇckovi´c 和 R. Zhao, 《伯格曼空间上的加权复合算子》, 《伦敦数学学会杂志》（第 2 辑）70（2004）, 第 2 期, 499–511。6. E. A. Gallardo-Guti´errez 和 R. Schroderus, 《加权狄利克雷空间上线性分式复合算子的谱》, 《泛函分析杂志》271（2016）, 第 3 期, 720–745。7. G. Gunatillake, 《哈代空间上的紧加权复合算子》, 《美国数学学会会刊》135（2007）, 第 2 期, 461–467。8. P. R. Hurst, 《不同加权哈代空间上的复合算子之间的关系》, 《数学档案》（巴塞尔）68（1997）, 第 6 期, 503–513。9. H. Kamowitz, 《形如 uC_{φ},的紧算子》, 《太平洋数学杂志》80（1979）, 第 1 期, 205–211。´10. G. K¨onigs, 《关于某些函数方程的积分的研究》, 《高等师范学校科学年鉴》1（1884）, 第 3 期, 3–41。11. S. Kumar, 《狄利克雷型空间之间的加权复合算子》, 《马德里康普顿斯大学数学杂志》22（2009）, 469–488。12. C. -O. Lo 和 A. W. -K. Loh, 《加权伯格曼空间上的紧加权复合算子与 Hilbert–Schmidt 加权复合算子》, 《澳大利亚数学学会杂志》113（2022）, 第 2 期, 208–225。13. B. D. MacCluer 和 J. H. Shapiro, 《哈代空间和伯格曼空间上的角导数与紧复合算子》, 《加拿大数学杂志》38（1986）, 第 4 期, 878–906。14. W. Rudin, 《实分析与复分析》, McGraw-Hill 图书公司, 美国纽约, （1987）。¨15. E. Schr¨oder, 《关于迭代函数》, 《数学年刊》3（1871）, 296–322。16. J. H. Shaprio, 《复合算子与经典函数论》, 《Universitext 数学专著》, Springer-Verlag, 美国纽约, （1993）。17. G. D. Taylor, 《 D_{α}上的乘子》, 《美国数学学会汇刊》123（1966）, 229–240。18. M. Tjani, 《贝西科维奇空间上的紧复合算子》, 《美国数学学会汇刊》355（2003）, 第 11 期, 4683–4698。19. K. Zhu, 《函数空间中的算子理论》, 《数学调查与专著》138, 美国数学学会, 美国罗德岛州普罗维登斯, （2007）。20. N. Zorboska, 《加权狄利克雷空间上的复合算子》, 《美国数学学会会刊》126（1998）, 第 7 期, 2013–2023。21. N. Zorboska, 《 S_a 空间上的复合算子》, 《印第安纳大学数学杂志》39（1990）, 第 3 期, 847–857。

（Sen） Mathematical Institute、 Silesian University in Opava、 Na Rybníčku 1、74601 Opava、 Czech Republic电子邮箱地址：anirbansenfulia@gmail.com；
Anirban.Sen@math.slu.cz