arXiv:2602.08662v1 [math.DG] 9 Feb 2026

二维 Calderón 问题的数值解：接近圆盘的区域

弗拉基米尔·A·沙拉富季诺夫 和 康斯坦丁·V·斯托罗茹克

摘要。对于带有非空边界 Γ 的紧黎曼曲面（M，g），Dirichlet-to-Neumann算子（狄利克雷到诺伊曼映射） Λ_g : $C^\infty(\Gamma) \to C^\infty(\Gamma)$ 定义为$\Lambda_g f = \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_\Gamma$，其中 ν 是边界的单位外法向量，u 是狄利克雷问题 $\Delta_g u = 0$，$u|_\Gamma = f$ 的解。卡尔德龙问题旨在根据其狄利克雷到诺伊曼映射恢复黎曼曲面。众所周知，（M，g）由 Λ_g 唯一确定，且只确定到共形等价。我们提出了一种卡尔德龙问题的数值解方法。该方法至少对于接近（$\mathbb{D}$，e）的黎曼曲面（M，g）效果良好，其中 $\mathbb{D} = \{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ 是单位圆盘，$e = dx^2 + dy^2$ 是欧几里得度量。我们的数值算例证实了如下论断：狄利克雷到诺伊曼映射对区域形状的微小偏离非常敏感。

1. 引言

具有非空边界$\Gamma = \partial M$ 的连通二维黎曼流形（M, g）称为黎曼曲面。我们将对 M，Γ 和 g 的光滑性要求纳入黎曼曲面的定义；“光滑”一词用作“C^∞-光滑”的同义词。拉普拉斯–贝尔特拉米算子 Δ_g : $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$定义为 $\Delta_g = g^{ij}\nabla_i\nabla_j$，其中$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$。

对于紧 黎曼曲面，*Dirichlet-to-Neumann*算子（DtN 映射）

$$\Lambda_g : C^\infty(\Gamma) \longrightarrow C^\infty(\Gamma) \tag{1.1}$$

定义为

$$\Lambda_g f = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Gamma,$$

其中 ν 是边界的单位外法向量，u 是狄利克雷问题的解

$$\Delta_g u = 0 \quad \text{in} \quad M, \quad u|_\Gamma = f.$$

众所周知，Λ_g 是一个一阶伪微分算子。此外，关于 L^2乘积，Λ_g 是一个非负自伴算子

$$(u, v)_{L^2(\Gamma)} = \int_\Gamma u\overline{v}\, ds_g \quad (u, v \in C^\infty(\Gamma)),$$

其中，ds_g 是曲线 Γ 在度量 g下的弧长。Λ_g 的一维核由常函数构成，而 Λ_g 的值域与以下函数空间一致

$$C_0^\infty(\Gamma) = \Big\{ f \in C^\infty(\Gamma) \mid \int_\Gamma f\, ds_g = 0 \Big\} \tag{1.2}$$

零均值函数。

现在提出这一反问题。假设一维黎曼流形 $(\Gamma,\ ds_g)$ 和算子 Λ_g 已知。需要根据以下数据恢复 $(M,\ g)$

第一作者的工作是根据俄罗斯科学院西伯利亚分院数学研究所的政府科研任务完成的，项目FWNF–2026-0026。

$(\Gamma,\ ds_g,\ \Lambda_g)$。这个问题在 [5]中称为电阻抗层析成像的几何问题，在 [1]中称为卡尔德龙问题。本文采用后一个较短的名称。

M 的连通性条件对于卡尔德龙问题是必要的。事实上，否则 M 的某个连通分支可能是一个没有边界的流形。数据（$\Gamma,\ ds_g,\ \Lambda_g$）不包含关于这一分支的任何信息。

卡尔德龙问题中的以下非唯一性显而易见。

若 $\varphi:\ M \to M$ 是一个将 M 映到自身且在边界 $\varphi|_{\partial M} = Id$上恒等的微分同胚，则度量 $g' = \varphi^* g$ 满足 $ds_{g'} = ds_g$ 和 $\Lambda_{g'} = \Lambda_g$。等式 $g' = \varphi^* g$表示，对于任意点 $p \in M$以及属于切空间 T_pM的任意向量 v和 w，都有 $\langle v,\ w\rangle_{g'} = \langle (d_p\varphi)v,\ (d_p\varphi)w\rangle_g$。此后，$\langle\cdot,\ \cdot\rangle_g$表示关于度量 g 的切向量标量积，而 $d_p\varphi:\ T_pM \to T_{\varphi(p)}M$ 是 φ 在 p处的微分。注意，$\varphi:\ (M,\ g') \to (M,\ g)$是黎曼流形间的等距映射，因此从几何角度看，非唯一性显而易见。

卡尔德龙问题还存在另一种非唯一性。二维黎曼流形上的拉普拉斯–贝尔特拉米算子在以下意义下是共形不变的：$\Delta_{\rho g} = \rho^{-1}\Delta_g$ 对于正函数 $\rho \in C^\infty(M)$。如果该函数满足边界条件 $\rho|_\Gamma = 1$，那么 $\Lambda_{\rho g} = \Lambda_g$。

对于两个流形之间的光滑映射 $\varphi:\ N \to N'$，我们定义 $\varphi^*:\ C^\infty(N') \to C^\infty(N)$，其定义为 $\varphi^* u = u \circ \varphi$。上述提到的两种模糊性涵盖了卡尔德龙问题中的全部非唯一性。

定理1.1。设$(M_j, g_j)\ (j = 1, 2)$是两个带边界的紧黎曼曲面，边界为 Γ_j，且设 $\varphi:(\Gamma_1, ds_{g_1}) \to (\Gamma_2, ds_{g_2})$是一个保持狄利克雷到诺伊曼映射的等距映射，即满足下图交换：

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\Gamma_1) & \xleftarrow{\varphi^*} & C^\infty(\Gamma_2) \\ \Lambda_{g_1}\downarrow & & \downarrow\Lambda_{g_2} \\ C^\infty(\Gamma_1) & \xleftarrow{\varphi^*} & C^\infty(\Gamma_2). \end{array}$$

那么，φ 可延拓为一个微分同胚 $\psi:\ M_1 \to M_2$，使得 $\psi|_{\Gamma_1} = \varphi$ 且 $\psi^* g_2 = \rho g_1$，其中函数 $0 < \rho \in C^\infty(M_1)$ 满足 $\rho|_{\Gamma_1} = 1$。

Lassas – Uhlmann [4] 和 Belishev[1], 至少给出了该定理的两种证明，另见 [6]。[4] 和 [1] 中的证明截然不同，而且并不容易。不过，对于单连通曲面，所有困难都消失了。对于后一种情形，[5]给出了定理1.1的一个初等证明。该证明基于以下几乎显而易见的事实：对于紧黎曼曲面（$M,\ g$），存在一个函数$0 < \rho \in C^\infty(M)$，使得 $\rho|_\Gamma = 1$，且 ρg 是一个平坦度量，即其高斯曲率恒等于零。这意味着，对于单连通的 M，$(M,\ \rho g)$可以等距浸入欧几里得平面。这将定理1.1归结为这样一个特殊情形：两个曲面 M_1 和 M_2 均为单连通的、可能是多层的平面区域，且度量 g_1 和 g_2 均与 $\mathbb{R}^2$ 的标准欧几里得度量一致。在后一种情形下，利用共形映射的基本性质即可轻松证明该定理。

本文其余部分安排如下。第 2 节简要讨论平坦黎曼曲面。第 3 节中，我们证明，对于单连通黎曼曲面，卡尔德龙问题等价于这样一个问题：从其狄利克雷到诺伊曼映射 Λ_Ω（下文问题 3.1）恢复一个配备欧几里得度量的单连通区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$。第 4 节中，我们引入全纯函数的边界迹空间 $\mathcal{A}(\gamma)$，并区分出子空间 $\mathcal{A}_s(\gamma) \subset \mathcal{A}(\gamma)$，其中包含的函数

表示简单曲线（即没有自相交的曲线）。随后，我们证明唯一性定理（下文定理 4.1），该定理构成了我们重构算法的基础。

第 2–4 节实际上对 [5] 和 [6] 的论证进行了复述，并做了少许修改，使其适用于卡尔德龙问题的数值解。定理 4.1 和命题4.2 也同样如此。不过，鉴于这两个结论至关重要，我们仍给出了它们的证明。

我们的重构算法在第 5 节中描述。设 $\gamma(s)$ 是未知区域 Ω 的边界曲线 Γ 的弧长参数化。那么，$\gamma(s)$ 满足一个显然的一阶微分方程（下文的方程 (5.1)）。对于 $\gamma(s)$，有一个不那么显然的零阶伪微分方程（下文的方程 (5.2)），它等价于陈述$\gamma \in \mathcal{A}(\gamma)$。我们强调，参与方程 (5.2) 的算子 $\mathcal{H}_\gamma$ 是已知的，因为它可以通过狄利克雷到诺伊曼映射轻易表示出来。我们用傅里叶级数表示未知函数 γ，并将方程组 (5.1)–(5.2) 替换为一个关于傅里叶系数 $\widehat{\gamma}_n$的无穷二次方程组。当然，实际计算中，我们以傅里叶级数的部分和替代傅里叶级数，并求解一个有限的二次代数方程组。该方程组通过某种迭代法（经典梯度下降法的一种变体）求解。与任何迭代法一样，初始近似的选取至关重要。根据定理 4.1，方程组 (5.1)–(5.2) 在 $\mathcal{A}(\gamma)$ 中有许多解，但其中只有一个属于 $\mathcal{A}_s(\gamma)$。如果未知区域 Ω 足够接近单位圆盘，我们就可以选择一个接近 e^{is}的初始近似 $\gamma^0(s)$。这正是我们只重构接近圆盘的区域的主要原因。

最后的第6节展示了若干数值示例。在我们看来，以下论述是本文的核心观点：

*Dirichlet-to-Neumann*算子对区域形状的微小偏差非常敏感。

我们认为，如果还知道 Ω 的一个足够~好的近似 Ω，以便为迭代算法选择合适的初始近似 γ_0，那么我们的方法也很可能适用于重建不接近圆盘的更一般的单连通区域 Ω。迄今为止，我们还没有这样的示例，原因如下。在当前工作中，正问题（计算给定区域的狄利克雷到诺伊曼映射的矩阵）是用一种仅适用于接近圆盘的区域的方法求解的，详情见第6节开头。我们计划改进后一种方法，并在后续工作中重建一般的单连通区域。

2. 平坦度量

如果二维流形上的黎曼度量的高斯曲率恒等于零，则称其为平坦度量。

命题 2.1。 设(M, g) 是一个边界为 Γ 的紧黎曼曲面。存在唯一的正函数 $\rho \in C^\infty(M)$ 满足边界条件 $\rho|_\Gamma = 1$，且 ρg 是一个平坦度量。

证明见 [5, 引理 2.1] 和 [6, 命题 3.1]。

众所周知（且很容易证明），平坦黎曼曲面（M，g）局部等距于欧几里得平面，即对于每个点 $a \in M$，都存在一个邻域 $U_a \subset M$ 和一个光滑单射映射

$$i_a : U_a \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \tag{2.1}$$

使得 $i_a^* e = g|_{U_a}$ 对于该平面的标准欧几里得度量 $e = |dz|^2 = dx^2 + dy^2$。此外，如果曲面 M 带有定向，并且假设映射 (2.1) 将 M 的选定定向变换为 $\mathbb{R}^2$的标准定向，那么映射 i_a 除与平面的平移和旋转复合外是唯一的。此外，局部等距映射 (2.1) 可沿着每条从 a出发的曲线唯一延拓。更准确地说，后一个陈述的含义如下。设 $\gamma\colon\ [0,1] \to M$ 是一条满足 $\gamma(0) = a$ 的连续曲线。存在一个有限序列 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$，并且对于每个点 $a_k = \gamma(t_k)$，都存在一个局部等距映射

$$i_{a_k} : U_{a_k} \to \mathbb{R}^2 \quad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

使得 (a) $\gamma[0,1] \subset \cup_{k=0}^{n} U_{a_k}$, (b) $U_{a_k} \cap U_{a_{k+1}} \neq \emptyset$, (c) 对于 $k = 0$，映射 (2.2) 与 (2.1) 一致，且 (d) 映射 i_{a_k} 和 $i_{a_{k+1}}$ 在 $U_{a_k} \cap U_{a_{k+1}}$ 上一致。在条件 (a)–(d) 下，所有映射 i_{a_k} 均由映射 (2.1) 唯一确定。

边界点不会给上一段的构造带来困难。序列 $(a_0, \ldots a_n)$ 中的一些点可以属于 ∂M，甚至可能有 $\gamma[0,1] \subset \partial M$。

回顾复分析中的单值化原理。若 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一个单连通域，全纯函数 f 在点$a \in \Omega$ 的某个邻域内有定义，并且沿每条满足 $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$、始于$a$的曲线都可全纯延拓，那么 f 便唯一延拓为 Ω 上的全纯函数。我们强调这一条件的重要性：Ω 是一个单连通域。在多连通域中进行解析延拓可能会产生多值解析函数。对于平坦度量，同一单值化原理也成立，并且有一个重要的简化之处：我们不需要假设沿曲线存在延拓，因为这种延拓总是存在。由此我们得到以下结论。

命题 2.2。 紧致单连通平坦黎曼曲面(M, g) 可局部等距地浸入欧几里得平面，即存在一个光滑映射

$$I : M \to \mathbb{R}^2 \tag{2.3}$$

使得对于每个点 $x \in M$，微分 $d_x I\colon\ T_x M \to \mathbb{R}^2$ 是切空间 $T_x M$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的等距映射，其中切空间 $T_x M$ 配备点积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$，而 $\mathbb{R}^2$ 配备标准欧几里得点积。若曲面 M 还具有定向，并且假设映射(2.3) 将 M 的选定定向映为$\mathbb{R}^2$的标准定向，则浸入 I 在与平面的平移和旋转复合意义下唯一。

参见文献 [5]中命题 2.2的证明细节。

在最简单的情形下，浸入 (2.3) 是 (M, g) 与 $(\Omega, e) = (I(M), e)$ 之间的等距映射（e 是 $\mathbb{R}^2$上的标准欧几里得度量）。一般而言，浸入 (2.3) 不是单射，闭曲线 $\Gamma = I(\partial M)$ 可以有自交，而 $\Omega = I(M)$ 是单连通多层域。关于单连通多层域的定义，参见 [2] 。

接下来我们研究紧致单连通黎曼曲面上的卡尔德龙问题。此外，我们假设浸入（2.3）是单射。在这种情况下，(M, g) 可视为由简单（即无自相交）的光滑闭曲线 $\Gamma = I(\partial M)$ 围成的闭平面域 $\Omega = I(M) \subset \mathbb{C}$。实际上，我们所有的结果对单连通多层域也都成立，但在后一种情况下，下面的某些定义应稍作修改。

3. 单连通平面区域上的卡尔德龙问题

设 $\Omega \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ 是一个由简单（即无自相交）的光滑曲线 Γ围成的紧致单连通区域。区域 Ω 被视为配备标准欧几里得度量 $|dz|^2 = dx^2 + dy^2$的平坦黎曼曲面。令

$$\Lambda_\Omega : C^\infty(\Gamma) \to C^\infty(\Gamma) \tag{3.1}$$

为区域 Ω 的狄利克雷到诺伊曼映射。因此，使用记号 Λ_Ω 代替 Λ_g，参见 (1.1)。我们将曲线 Γ 定向，使逆时针方向为正方向。

定义算子 $D = D_s : C^\infty(\Gamma) \to C^\infty(\Gamma)$，其定义为 $D = -i\frac{d}{ds}$，其中 $\frac{d}{ds}$ 表示沿正方向对弧长求导，i 为虚数单位。将 D 限制在子空间 $C_0^\infty(\Gamma)$（见 (1.2)）上所得的映射 $D|_{C_0^\infty(\Gamma)} : C_0^\infty(\Gamma) \to C_0^\infty(\Gamma)$ 是一个同构。令

$$D^{-1} : C_0^\infty(\Gamma) \to C_0^\infty(\Gamma) \tag{3.2}$$

是 $D|_{C_0^\infty(\Gamma)}$ 的逆算子。因此，对于 $f \in C_0^\infty(\Gamma)$，$D^{-1}f$ 是 f 的唯一零均值原函数。

我们考虑根据狄利克雷到诺伊曼映射恢复区域 Ω 的反问题。由于 Γ 是未知曲线，而我们只知道 Γ 的长度，因此应明确给出定义 (3.1)。不失一般性，可以假设 Γ 的长度等于 2π，因为当常数$c > 0$下进行变换 $\Omega \mapsto c\Omega$ 时，狄利克雷到诺伊曼算子会以显而易见的方式发生变化。

设 $\mathbb{S} = \{e^{is} \mid s \in \mathbb{R}\}$ 为按逆时针方向定向的单位圆。对于函数 $u \in C^\infty(\mathbb{S})$，我们用 $u(s)$ 代替 $u(e^{is})$。我们用弧长 s 对曲线 Γ 进行参数化，其中弧长从某个初始点沿正方向测量。该参数化确定一个光滑的 2π-周期函数 $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$，满足

$$\left|\frac{d\gamma(s)}{ds}\right| = 1. \tag{3.3}$$

同一个函数也可以视为一个微分同胚 $\gamma : \mathbb{S} \to \Gamma$，它保持弧长和定向。借助该微分同胚，我们将算子 (3.1) 转移到圆 $\mathbb{S}$ 上，即定义算子

$$\Lambda_\gamma = \gamma^* \Lambda_\Omega \gamma^{*-1} : C^\infty(\mathbb{S}) \to C^\infty(\mathbb{S}). \tag{3.4}$$

我们称之为 Λ_γ 区域 Ω 的狄利克雷到诺伊曼映射 Λ_γ，并采用自然参数化。我们的反问题具体表述如下。

问题 3.1。 设$\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一个由长度为 2π 的简单光滑曲线 Γ 围成的紧致单连通区域。给定算子 (3.4)，需恢复闭曲线$\Gamma = \gamma(\mathbb{S})$，其中平移和旋转不计。等价地：给定算子 (3.4)，需恢复满足(3.3)的 2π-周期复值函数 $\gamma(s)$ 。

求算子 Λ_γ 作用于函数 $\gamma \in C^\infty(\mathbb{S})$ 时的值。由 (3.4)，

$$\Lambda_\gamma \gamma = (\gamma^* \Lambda_\Omega \gamma^{*-1})\gamma = (\gamma^* \Lambda_\Omega)(Id), \tag{3.5}$$

其中，函数 $Id \in C^\infty(\Gamma)$ 定义为 $Id(z) = z$ for $z \in \Gamma$。由于定义为$Z(z) = z$，函数 $Z \in C^\infty(\Omega)$ 在 Ω 中是调和的，并满足 $Z|_\Gamma = Id$。根据狄利克雷到诺伊曼算子的定义，

$$\Lambda_\Omega(Id) = \left.\frac{\partial Z}{\partial \nu}\right|_\Gamma = \nu_x + i\nu_y = \nu,$$

其中，边界 Γ 上的单位外法向量 $\nu = (\nu_x, \nu_y)$ 可与复数$\nu = \nu_x + i\nu_y$对应。结合 (3.5)，得到 $\Lambda_\gamma\gamma(s) = (\gamma^*\nu)(s) = \nu(\gamma(s)) = -i\frac{d\gamma}{ds}$。由此我们证明了

$$\Lambda_\gamma\gamma = -i\frac{d\gamma}{ds}. \tag{3.6}$$

算子 $D^{-1}: C_0^\infty(\mathbb{S}) \to C_0^\infty(\mathbb{S})$ 的定义与 (3.2) 十分相似。由于 γ 保持弧长不变，算子 D^{-1} 与 γ^* 可交换。因此，将算子 D^{-1} 作用于等式 (3.6)，得到

$$D^{-1}\Lambda_\gamma\gamma = \gamma. \tag{3.7}$$

算子

$$\mathcal{H}_\gamma = D^{-1}\Lambda_\gamma : C^\infty(\mathbb{S}) \to C^\infty(\mathbb{S}) \tag{3.8}$$

该算子定义良好，因为 Λ_γ 的值域与 D^{-1} 的定义域 $C_0^\infty(\mathbb{S})$ 相同。零阶伪微分算子 $\mathcal{H}_\gamma$ 有时称为区域 Ω 在自然参数化下的希尔伯特变换。用这个算子表示，方程 (3.7) 可写为:

$$\mathcal{H}_\gamma\gamma = \gamma. \tag{3.9}$$

方程 (3.9) 给出了求解问题 3.1 的思路：我们必须寻找一个解 $\gamma \in C^\infty(\mathbb{S})$，使其满足伪微分方程 (3.7) 和条件 (3.3)。

4. 唯一性定理

设 $\Omega \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ 是由一条长度为 2π 的简单光滑曲线 Γ 围成的紧致单连通区域。我们用 $\mathcal{A}(\Omega)$ 表示复值函数 $f \in C^\infty(\Omega)$ 所构成的空间，其中函数 f 在内部 $\Omega \setminus \Gamma$ 上的限制是全纯函数。我们还引入空间 $\mathcal{A}(\Gamma) = \{w|_\Gamma \mid w \in \mathcal{A}(\Omega)\}$，它由全纯函数的边界迹构成。迹算子

$$\mathcal{A}(\Omega) \to \mathcal{A}(\Gamma), \quad w \mapsto w|_\Gamma$$

根据全纯函数的模最大值原理，它是一个同构。

重复上一节中的论证，我们固定一个保持弧长和定向的微分同胚 $\gamma: \mathbb{S} \to \Gamma$（两者的定向均为逆时针）。借助该微分同胚，我们将空间 $\mathcal{A}(\Gamma)$ 转移到单位圆上，即定义

$$\mathcal{A}(\gamma) = \{\gamma^* f \mid f \in \mathcal{A}(\Gamma)\}. \tag{4.1}$$

由于 $\mathcal{A}(\gamma) \subset C^\infty(\mathbb{S})$，每个函数 $f \in \mathcal{A}(\gamma)$ 都可以视为一条光滑闭合参数曲线 $\mathbb{S} \to \mathbb{C}$, $s \mapsto f(s)$。令 $\mathcal{A}_s(\gamma)$ 为与无自相交曲线（简单曲线）对应的 $f \in \mathcal{A}(\gamma)$ 的集合。

注意到，函数 $\gamma \in C^\infty(\mathbb{S})$ 属于 $\mathcal{A}(\gamma)$。事实上，在上一节中，我们通过 $(Id)(z) = z$ 定义了函数 $Id \in C^\infty(\Gamma)$。该函数属于 $\mathcal{A}(\Gamma)$，因为它是全纯函数 $Z \in C^\infty(\Omega)$ 在 Γ 上的限制，该全纯函数由$Z(z) = z$ 定义。因此，$\gamma = \gamma^*(Id) \in \mathcal{A}(\gamma)$。

现在我们可以给出问题 3.1 的解唯一性的精确表述。

定理 4.1。设单位圆 $\mathbb{S}$ 上的函数空间 $\mathcal{A}(\gamma)$ 由 (4.1)定义，其中区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是某个紧致单连通区域，其边界为长度为 2π的光滑简单曲线 Γ。那么

(1)方程

$$\left|\frac{df}{ds}\right| = 1 \tag{4.2}$$

有一个解 $f \in \mathcal{A}_s$（γ）。

（2）如果 $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_s$（$\gamma$）是方程 （4.2）的两个解，那么 f_1（s） $= \alpha f_2$（s） $+ c$，其中复常数 α 和 c 满足 $|\alpha| = 1$。

(3) 如果 $f \in \mathcal{A}_s(\gamma)$ 是 (4.2) 的一个解，那么曲线 $s \mapsto f(s)$ 围成的区域由 Ω 经过平移和旋转得到。

证明。 如上所述，函数 γ 属于 $\mathcal{A}^\infty$(γ)。它满足该方程，且属于 $\mathcal{A}_s$(γ)。这就证明了第一个结论。 (4.2)

为了证明定理的最后两个结论，只需证明方程 (4.2) 的每个解 $f \in \mathcal{A}_s(\gamma)$ 都可以通过 γ 表示为

$$f(s) = \alpha\gamma(s) + c, \quad |\alpha| = 1. \tag{4.3}$$

设 $f \in \mathcal{A}_s$(γ) 是方程 (4.2) 的一个解。函数 $g = \gamma^{*-1} f$ 属于$\mathcal{A}$(Γ)，并满足方程

$$\left|\frac{dg}{ds}\right| = 1. \tag{4.4}$$

根据 $\mathcal{A}$(Γ) 的定义，存在一个在 Ω $\setminus$ Γ 内全纯的函数 $w \in C^\infty$(Ω)，且满足边界条件 $w|_\Gamma = g.$。令 $\Gamma' = w$(Γ)。那么

$$\Gamma' = g(\Gamma) = (\gamma^{*-1} f)(\Gamma) = (f \circ \gamma^{-1})(\Gamma) = f(\mathbb{S}).$$

由于 $f \in \mathcal{A}_s$(γ)， Γ′ 是一条光滑简单闭曲线。由 (4.3) 可知，映射 $s \mapsto f$(s) 是 Γ′ 按弧长的参数化，并且随着 s 增大， Γ′(s) 逆时针运行。Γ′ 围成一个紧区域 Ω′。对全纯函数 w 应用 辐角原理 [3, 第 1 章 §5.23]，可知 w 是 Ω 到 Ω′的双全纯映射。由 (4.2) 和 (4.4) 可知，双全纯映射 w 在 Γ 上的限制保持弧长不变，即 $\left|w'|_\Gamma\right| = 1$。众所周知（且易于证明），保持边界弧长不变的双全纯映射是平移与旋转的复合，即

$$w(z) = \alpha z + c, \quad |\alpha| = 1.$$

结合等式 $w|_\Gamma = g = f \circ \gamma^{-1}$，得到

$$(f \circ \gamma^{-1})(z) = \alpha z + c \quad (z \in \Gamma).$$

在此设定 $z = \gamma$(s)，即可得到 (4.3)。 □

备注。 若将假设 $f \in \mathcal{A}_s$(γ) 替换为 $f \in \mathcal{A}$(γ)，定理 4.1便不再成立，以下例子说明了这一点。令 Ω 为单位圆盘，且 γ(s) $= e^{is}$。函数 f(s) $= \frac{1}{n} e^{nis}$ with $n > 1$ 属于 $\mathcal{A}$(γ)，并满足方程 (4.2)，但无法表示为 (4.3) 的形式。

命题4.2。 在定理 *4.1* 的假设下，函数 $f \in C_0^\infty(\mathbb{S})$ </style}属于(γ) </style}当且仅当它满足 $\mathcal{H}_\gamma f = f$。

证明。 我们将说明，该结论可由 [6], 中的命题 6.1 推出，其中使用的记号是 $\mathcal{A}^\infty(\Gamma, g)$, 而非我们的 $\mathcal{A}$(γ)。后一个命题在[6] 中针对一般的紧黎曼曲面 (M, g) 得到了证明，并未假设其为单连通曲面。对于单连通曲面，特别是在定理 4.1 的假设下， [6] 中的命题 6.1 表明

$$\mathcal{A}(\gamma) = \{a + \mathcal{H}_\gamma a \mid a \in C^\infty(\mathbb{S})\}. \tag{4.5}$$

[6]中的命题 6.1 还指出，在定理 4.1 的假设下，

$$\Big(1 - (\Lambda_\gamma D^{-1})^2) Da = 0 \quad \text{for every} \quad a \in C^\infty(\mathbb{S}),$$

其中 1 为恒等算子（参见 [6]第6节末尾的注释）。我们将后一个陈述写成如下形式

$$Da - \Lambda_\gamma D^{-1}\Lambda_\gamma a = 0 \quad \text{for every} \quad a \in C^\infty(\mathbb{S}).$$

将算子 D^{-1} 作用于该等式，并利用 (3.8)，得到

$$D^{-1}Da = \mathcal{H}_\gamma^2 a \quad \text{for every} \quad a \in C^\infty(\mathbb{S}).$$

由于对于 $a \in C_0^\infty(\mathbb{S})$，$D^{-1}Da = a$，这意味着

$$\mathcal{H}_\gamma^2 a = a \quad \text{for every} \quad a \in C_0^\infty(\mathbb{S}). \tag{4.6}$$

现在令 $f \in C_0^\infty(\mathbb{S})$。根据 (4.5)，$f$ 属于 $\mathcal{A}(\gamma)$ 当且仅当它可以表示为以下形式

$$f = a + \mathcal{H}_\gamma a \tag{4.7}$$

对于某个 $a \in C^\infty(\mathbb{S})$。由于 $f \in C_0^\infty(\mathbb{S})$ 且 $\mathcal{H}_\gamma a \in C_0^\infty(\mathbb{S})$，(4.7) 推出 $a \in C_0^\infty(\mathbb{S})$，并且 (4.6) 成立。将算子 $\mathcal{H}_\gamma$ 作用于等式 (4.7)，并利用 (4.6)，得到

$$\mathcal{H}_\gamma f = \mathcal{H}_\gamma a + \mathcal{H}_\gamma^2 a = \mathcal{H}_\gamma a + a = f.$$

这些论证是可逆的。 □

5. 卡尔德龙问题的数值解

为方便起见，我们在此重述方程（3.3）和（3.9）：

$$\Big|\frac{d\gamma(s)}{ds}\Big| = 1, \tag{5.1}$$

$$\mathcal{H}_\gamma \gamma = \gamma. \tag{5.2}$$

再次设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为一个由长度为 2π 的简单光滑曲线 Γ 围成的紧致单连通区域。但现在 Ω 是一个未知区域，我们只给出 DtN 映射 Λ_γ，且它对应于一个保持弧长的微分同胚 $\gamma : \mathbb{S} \to \Gamma$。已知 Λ_γ 等价于已知 $\mathcal{H}_\gamma$，因为微分 $D : C^\infty(\mathbb{S}) \to C^\infty(\mathbb{S})$ 是已知的。给定算子 $\mathcal{H}_\gamma$，我们尝试在平移和旋转意义下恢复区域 Ω。换言之，我们要在变换

$$\gamma \mapsto \alpha\gamma + c, \quad (|\alpha| = 1, c \in \mathbb{C}). \tag{5.3}$$

函数 γ 满足方程组（5.1）–（5.2）。根据命题4.2，方程组的每个解都属于 $\mathcal{A}(\gamma)$。此外，根据定理 4.1，该方程组在变换（5.3）的意义下有唯一解$\gamma \in \mathcal{A}_s(\gamma)$。

不失一般性，通过适当选择 (5.3) 中的常数 c，我们可以假设函数 γ 具有零均值。我们仍可将 γ 乘以满足 $|\alpha| = 1$ 的常数 α。

我们用傅里叶级数表示函数 γ

$$\gamma(s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\gamma}_n\, e^{ins}. \tag{5.4}$$

由于 $\gamma \in C^\infty(\mathbb{S})$，傅里叶系数快速衰减，即对于任意 $K > 0$，$|\widehat{\gamma}_n| = O((1+|n|)^{-K})$，当 $|n| \to \infty$ 时成立。由于 γ 具有零均值，$\widehat{\gamma}_0 = 0$。不失一般性，通过适当选择 (5.3) 中的常数 α，我们可以假设 $\widehat{\gamma}_1 \geq 0$。

我们将方程 (5.1)–(5.2) 写成傅里叶系数 $\widehat{\gamma}_n$ 的形式。对 (5.4) 求导，得到

$$\frac{d\gamma}{ds} = i\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\,\widehat{\gamma}_n\, e^{ins}.$$

将此表达式代入 (5.1)，可知方程 (5.1) 等价于以下方程组

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|\widehat{\gamma}_n|^2 = 1, \tag{5.5}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n(n+k)\,\widehat{\gamma}_n\,\overline{\widehat{\gamma}_{n+k}} = 0 \quad (k=\pm1,\pm2,\dots). \tag{5.6}$$

设 $H_\gamma = (h_{mn})_{m,n=-\infty}^{\infty}$ 为算子 $\mathcal{H}_\gamma$ 关于三角基的矩阵，即

$$(\widehat{\mathcal{H}_\gamma f})_m = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_{mn}\widehat{f}_n \quad \text{for} \quad f\in C^\infty(\mathbb{S}).$$

这等价于

$$\mathcal{H}_\gamma\, e^{ims} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_{nm}\, e^{ins} \quad (m\in\mathbb{Z}). \tag{5.7}$$

特别地，

$$(\widehat{\mathcal{H}_\gamma\gamma})_m = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_{mn}\widehat{\gamma}_n.$$

将此表达式代入 (5.2)，可知方程 (5.2) 等价于如下方程组

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_{mn}\widehat{\gamma}_n = \widehat{\gamma}_m \quad (m\in\mathbb{Z}).$$

矩阵 $H_\gamma = (h_{mn})_{m,n=-\infty}^{\infty}$ 满足 $h_{m0} = h_{0n} = 0$，因为常函数构成 $\mathcal{H}_\gamma$ 的核，且其值域与 $C_0^\infty(\mathbb{S})$ 重合。

设 $(\lambda_{m\ n})_{m,\ n=-\infty}^{\infty}$ 为算子 Λ_γ 在三角基下的矩阵，即

$$(\widehat{\Lambda_\gamma f})_m = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_{mn}\widehat{f}_n \quad \text{for} \quad f\in C^\infty(\mathbb{S}).$$

矩阵 (λ_{mn}) 和 (h_{mn}) 可通过等式相互表示

$$\lambda_{mn} = m h_{mn} \tag{5.8}$$

这可由 (3.8) 直接推出。还要注意，

$$\lambda_{mn} = \overline{\lambda_{nm}} \tag{5.9}$$

因为 Λ_γ 是自伴算子。

一般情况下，(λ_{mn}) 和 (h_{mn}) 是复值矩阵。但有一个重要的例外：如果曲线 Γ 关于某条直线 L 对称，并且弧长 s 是从属于 $\Gamma\cap L$的某个初始点开始测量的，那么这两个矩阵都是实矩阵。这个简单结论的证明从略。

在进一步讨论一般情形之前，我们先考虑最简单的例子：区域 Ω 与单位圆盘重合。此时 $\gamma:\mathbb{S}\to\mathbb{C}$ 是恒等嵌入，我们用 $\mathcal{H}$ 和 H 代替 $\mathcal{H}_\gamma$ 和 H_γ。函数 $\varphi_n = e^{ins}$ (n =, 0, ±1, ±2, ...) 是 $\mathcal{H}$ 的特征向量，而 H 是对角矩阵：

$$H = \operatorname{diag}(\dots,-1,-1,0,1,1,\dots). \tag{5.10}$$

因此，在单位圆盘这一最简单的情形下，方程 (5.2) 的解空间由如下形式的函数组成

$$\gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\gamma}_n\, e^{ins} \tag{5.11}$$

其傅里叶系数任意。

现在我们来讨论最简单情形下的方程 (5.1)。根据 (5.11)，$\widehat{\gamma}_n = 0$ 对于 $n \le 0$，方程 (5.5)–(5.6) 化为

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\widehat{\gamma}_n|^2 = 1, \tag{5.12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+k)\, \widehat{\gamma}_n\, \overline{\widehat{\gamma}_{n+k}} = 0 \quad (k \ge 1). \tag{5.13}$$

要描述方程组 (5.12)–(5.13) 的所有解，只需找出齐次方程组 (5.13) 的所有非零解，然后将 (5.12) 用作归一化条件。

方程组 (5.13) 有显而易见的解

$$(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2, \widehat{\gamma}_3, \widehat{\gamma}_4, \dots) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, 1, 0, 0, \dots) \quad (n = 0, 1, \dots). \tag{5.14}$$

它们给出了方程组 (5.1)–(5.2) 的解 $\gamma(s) = \frac{1}{n+1} e^{i(n+1)s}$ $(n = 0, 1, \dots)$。仅当 $n = 0$ 时，这样的解才属于 $\mathcal{A}_s(\gamma)$。注意，若 $n > 0$，则这样的解满足 $\widehat{\gamma}_1 = 0$。然而，不等式 $\widehat{\gamma}_1 \neq 0$ 并不能保证方程组 (5.1)–(5.2) 的解属于 $\mathcal{A}_s(\gamma)$，如下例所示。

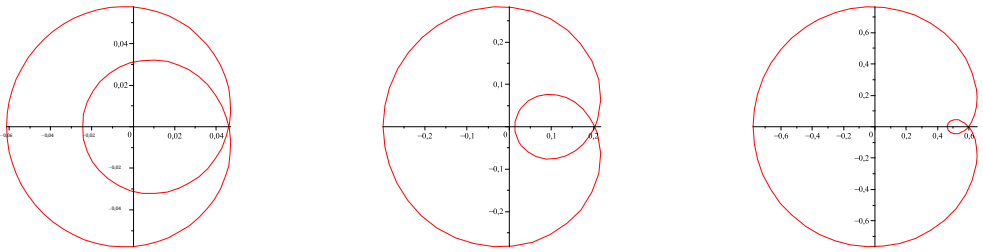
固定满足 $\zeta \in \mathbb{C}$ 的 $0 < |\zeta| < 1$，并令

$$\gamma(s) = \frac{1}{|\zeta|}\Big(e^{is} + \frac{1 - |\zeta|^2}{\bar{\zeta}} \ln(1 - \bar{\zeta}\, e^{is}) \Big). \tag{5.15}$$

该函数的傅里叶系数为

$$\widehat{\gamma}_n = \begin{cases} 0 & \text{for } n \le 0, \\ |\zeta| & \text{for } n = 1, \\ -\frac{1}{n} |\zeta| (1 - |\zeta|^2) \zeta^{-1} \bar{\zeta}^{n-2} & \text{for } n > 1. \end{cases}$$

容易证明，函数 (5.15) 是方程 (5.1)–(5.2) 的解。当 ζ 取三个值时，相应的曲线如图1所示。



$\zeta = 0.3$ $\zeta = 0.6$ $\zeta = 0.9$

图1. 方程 (5.1)–(5.2) 的自交解

回到一般情形，我们假设算子 $\mathcal{H}_\gamma$ 在三角基下由其矩阵 $H_\gamma = (h_{nm})_{m,\ n \in \mathbb{Z}}$ 表示，见 (5.7)。进行数值计算时，我们使用截断矩阵 $H_\gamma^{(N)} = (h_{nm})_{m,\ n=-N}^{N}$ 其中 N 足够大。

令 W 为 $\mathbb{C}^{2N+1}$ 中由列向量构成的最大子空间

$$\widehat{\gamma} = (\widehat{\gamma}_{-N}, \dots, \widehat{\gamma}_{-1}, 0, \widehat{\gamma}_1, \dots, \widehat{\gamma}_N)^t$$

满足

$$\|H_\gamma^{(N)}\widehat{\gamma} - \widehat{\gamma}\| < \varepsilon\|\widehat{\gamma}\| \tag{5.16}$$

其中预先选取一个较小的 $\varepsilon > 0$。这里 $\|x\|^2 = \sum_{i=-N}^{N} |x_i|^2$ 对于 $x \in \mathbb{C}^{2N+1}$。维数 $L = \dim W$ 接近于 N，并且当 N 足够大且 ε 的取值选择恰当时，$L = N$。空间 W 被视为线性方程 (5.2) 解空间的有限维近似。给定矩阵 $H_\gamma^{(N)}$，可以高效地构造 W 的一组基。

作为这样一组基，我们方便地取向量集 $\{e_1, \ldots e_N\} \subset W$，其中 e_k 在 $\mathbb{C}^{2N+1}$ 中的正指标坐标具有如下形式

$$(0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots 0),\ 1 \text{ is on the k-th position.} \tag{5.17}$$

当然，我们用有限方程组替代无穷方程组 (5.5)–(5.6)：

$$\sum_{m=-N}^{N} m^2 |\widehat{\gamma}_m|^2 = 1, \tag{5.18}$$

$$\sum_{m=-N}^{N} m(m+k)\widehat{\gamma}_m \overline{\widehat{\gamma}_{m+k}} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, (N-1)) \tag{5.19}$$

我们在 W 中寻找方程组 (5.18)–(5.19) 的解。为数值求解该方程组，我们使用某种迭代法（经典梯度下降法的一个变体）。与任何迭代法一样，解的初始近似的选择至关重要。假设区域 Ω 与单位圆盘足够接近，我们选取初始近似为 $\widehat{\gamma}^0 \in W$，即基中的向量 e_1。应用迭代算法后，我们得到一个序列 $\widehat{\gamma}^k \in W (k = 0, 1, \ldots\ldots)$，它收敛到方程组 (5.18)–(5.19) 的一个解。在大多数情况下，迭代 10 次就足以获得良好的近似。

至少在下一节给出的例子中，该方法是有效的。不过，我们强调，方程组 (5.18)–(5.19) 有许多“错误解”，它们产生的函数 $\gamma(s)$ 属于 $\mathcal{A}(\gamma)$，但不属于 $\mathcal{A}_s(\gamma)$。当 Ω 不接近单位圆盘，或者初始近似$\widehat{\gamma}^0 \in W$与向量 e_1相差较大时，我们得到了许多这样的错误解。下方图 3 和图 4 展示了其中三个“错误解”。

6. 数值例子

在实际断层成像中，狄利克雷到诺伊曼映射的矩阵是通过测量获得的。在我们的数值实验中，对于一个由光滑曲线 Γ围成的紧区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$，我们计算算子 Λ_Ω 的矩阵。这一实验的第一部分称为正问题。我们先简要讨论正问题的数值解。

根据狄利克雷到诺伊曼映射的定义，$\Lambda_\Omega f = \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_\Gamma$ 对于 $f \in C^\infty(\Gamma)$，其中 u 是狄利克雷问题的解

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u|_\Gamma = f. \tag{6.1}$$

数值求解狄利克雷问题最传统的方法，是用适配区域 Ω 的网格上的差分方程组替代微分方程 $\Delta u = 0$，然后用某种迭代法求解线性代数方程组。也可以用曲线 Γ 上的第二类积分方程替代狄利克雷问题，并应用众所周知的积分方程数值解方法。在这两种方法中，我们都必须计算导数

— $\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\Gamma}$。数值微分对离散化误差相当不稳定。因此，要精确地数值求解正问题并不容易。

对于单连通域 Ω，狄利克雷问题 (6.1) 等价于构造双全纯映射（即一一对应的共形映射） $\Phi\colon \mathbb{D} \to \Omega$ ($\mathbb{D}$ 是单位圆盘) 的问题。根据黎曼映射定理，这样的双全纯映射必定存在。给定 Φ，我们定义微分同胚 $\varphi = \Phi|_{\mathbb{S}}\colon \mathbb{S} = \partial\mathbb{D} \to \Gamma$，并定义函数 $0 < a \in C^{\infty}(\mathbb{S})$：$a(z) = \frac{1}{|\Phi'(z)|}$ ($z \in \mathbb{S}$)，其中 $\Phi'(z)$ 是全纯函数$\Phi(z)$ 的复导数。算子 Λ_Ω 可通过 $\Lambda_{\mathbb{D}}$ 表示为

$$\Lambda_\Omega = \varphi^{*-1}(a\Lambda_{\mathbb{D}})\varphi^*, \tag{6.2}$$

其中 a 表示以函数 a为乘数的乘法算子。这个关系直接源于这样一个事实：共形映射会将调和函数映射为调和函数，详见 [2]。算子 $\Lambda_{\mathbb{D}}$ 是众所周知的：$\Lambda_{\mathbb{D}} e^{in\theta} = |n| e^{in\theta}$ ($n \in \mathbb{Z}$)。结合后一等式，公式 (6.2) 可以让我们轻松计算 Λ_Ω的矩阵。值得注意的是，数值微分问题（计算 $\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\Gamma}$）现在被替换为计算复导数$\Phi'(z)$。特别地，如果 Φ 由显式解析公式给出，则导数 $\Phi'(z)$ 无需任何数值计算即可通过解析方法求得。

在某些特殊情形下，例如下文的例 1，双全纯映射 $\Phi\colon \mathbb{D} \to \Omega$ 可通过复分析求得。但对于一般的单连通域 Ω，构造双全纯映射实际上是一个严峻的数值问题，且等价于狄利克雷问题 (6.1)。

在下文的例 2–4 中，我们借助以下技巧避免对狄利克雷问题进行数值求解。

~ ~我们先选取一个在 $\mathbb{D}$ 上单射的全纯函数 $\Phi(z)$，也就是说，若 $\Phi(z_1) = \Phi(z_2)$，则 $z_1 = z_2$，其中 $z_1,\ z_2 \in \mathbb{D}$。于是，$\Phi|_{\mathbb{D}}$ 是从单位圆盘到~某个区域的双全纯映射。然后通过设置 $\Phi = c\Phi$ 对该双全纯映射进行归一化，其中常数 $c > 0$ 的选取使边界曲线 Γ 的长度等于 2π，并令 $\Omega = \Phi(\mathbb{D})$。由于函数 $\Phi(z)$ 和 $\Phi'(z)$ 已知，我们无需任何数值计算即可求出Λ_Ω 的矩阵。在下文的例 2–4 中，$\Phi(z)$ 是一个低次多项式。

最后，我们回顾算子 Λ_γ 与 $\mathcal{H}_\gamma$ 的矩阵由(5.8)相关联。在求解反问题的算法中，仅使用 $\mathcal{H}_\gamma$ 的矩阵 $H_\gamma^{(N)} = (h_{mn})_{m,n=-N}^{N}$。

例1. 椭圆。设Ω为由椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$所围成的区域。选取常数 $0 < b < a$，使椭圆的周长等于 2π。我们仍有自由参数 a/b。单位圆盘到由该椭圆所围区域上的双全纯映射可用第二类椭圆积分表示，而这些积分在许多软件中均有数值表。这使得我们能够以较高精度计算狄利克雷到诺伊曼映射的矩阵，至少当 a/b 不太大时如此。

在 $a/b = 13/12$的情形下，矩阵 $H_\gamma^{(N)}$的中心 3×3部分在精度 10^{-2}下如下所示：

$$\begin{pmatrix} h_{-1,-1} & h_{-1,0} & h_{-1,1} \\ h_{0,-1} & h_{0,0} & h_{0,1} \\ h_{1,-1} & h_{1,0} & h_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0.06 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.06 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

其他元素与矩阵 (5.10) 中对应元素的精度相同。考虑到对称性 (5.9)，我们看到该矩阵与单位圆盘的情形相比，仅有一个元素不同，即 0.06。尽管如此，这一差异足以

准确重建椭圆。实际使用的矩阵为 $H_\gamma^{(10)}$，精度为10^{-5}。

在 $a/b = 3/2$ 的情况下，矩阵 $H_\gamma^{(3)}$是

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0.01 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0.06 & 0 \\ 0 & 0 & -1.05 & 0 & 0.31 & 0 & 0.03 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.03 & 0 & -0.31 & 0 & 1.05 & 0 & 0 \\ 0 & -0.06 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.01 & 0 & -0.01 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

在这两种情况下，重建出的椭圆在视觉上都与原始椭圆无法区分。然而，由于计算第二类椭圆积分时存在一些困难，我们无法以足够高的精度计算 $a/b > 5$ 的狄利克雷到诺伊曼映射矩阵。椭圆的动画可通过链接查看，另请参阅 [7]，动画展示了算法的迭代过程：迭代起初在一个错误解附近徘徊了一段时间，随后收敛到真实解。黑线表示速度向量。

例 2. 带有两个对称凹陷的圆盘。区域 Ω 定义为 $\Omega = c\{1.5z + 0.4z^3 \mid |z| \le 1\}$，其中常数 c 的选取使边界~曲线的长度等于 2π。换言之，对于本节开头提到的函数，$\Phi(z) = 1.5z + 0.4z^3$。图 2 左图绘出了原始曲线。中图展示了 $N = 5$（红色）和 $N = 20$（蓝色）对应的两条重建曲线。请注意，重建曲线的凹陷比原始曲线浅，因此看起来更长。这让人想起这样一个问题：如果一根绕着地球赤道的绳子加长 10 厘米，它会升高多少？图 2 右图展示了速度向量，即曲线 $s \mapsto {}^{d\gamma}{}_{(s)}\, {}_{ds}$，其中 s 是弧长。速度向量形成的环对应于 γ 曲率变号的区域。

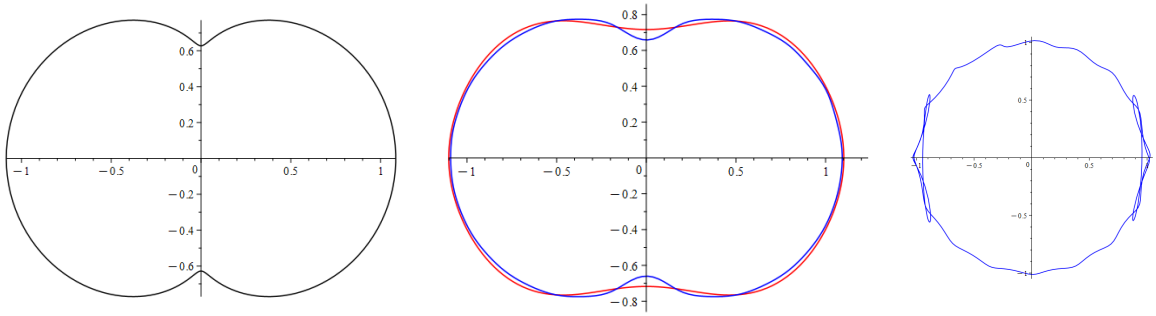


图2. 示例2：原始曲线、两条分别针对$N = 5$ 和 $N = 20$的重构曲线，以及 $N = 20$ 的速度向量

例3. 带凹痕的圆盘。$\Omega = c\{(z+1.5)^2 \mid |z| \le 1\}$。这里我们使用了矩阵$H_\gamma^{(10)}$。经过一次（！）迭代算法后得到的重建曲线显示在图3左图中；在该图的比例尺下，它与原始曲线无法区分。上一节末尾提到的两个“错误解”显示在图3的两幅右图中。

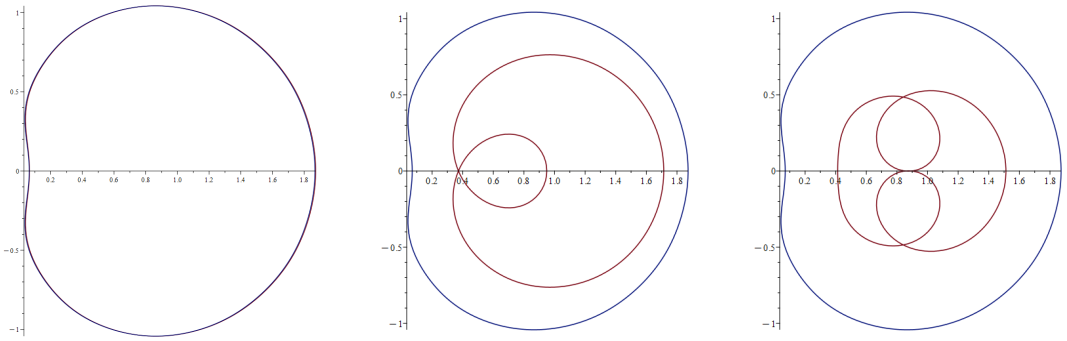


图3. 例3：带凹痕的圆盘，恢复出的曲线和重建曲线，以及两个“错误解”

图4展示了我们用数值解求解方程组 (5.18)– (5.19) 的迭代算法，例子为例3。结果取决于初始近似$\widehat{\gamma}^0 \in W$的选择。令 e_k 如 (5.17) 所示。左图绘出了两个略有不同的初始近似： $\widehat{\gamma}^0 = e_1 + e_2 + 1.62e_3$ （黑色曲线）和 $\widehat{\gamma}^0 = e_1 + e_2 + 1.64e_3$ （红色曲线）。图4最后三幅图展示了经过算法三次迭代得到的曲线。黑色曲线收敛到“真实解”，而红色曲线收敛到一个属于 $\mathcal{A}(\gamma)$但不属于 $\mathcal{A}_s(\gamma)$的“错误解”。

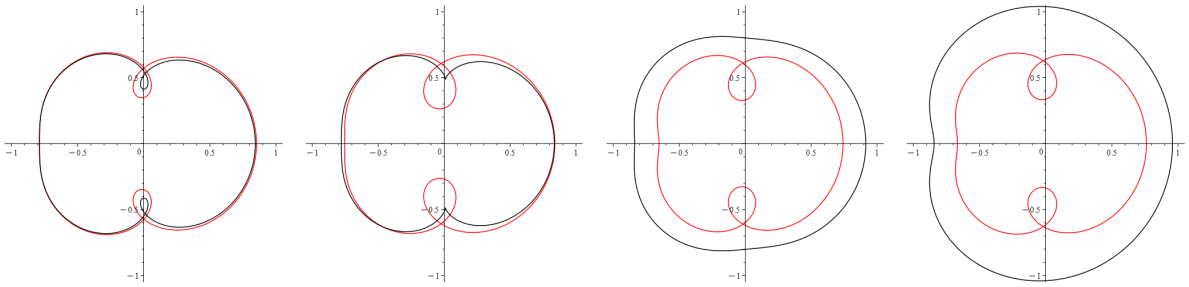


图4. 例3：两个初始近似，经过三次迭代得到的曲线

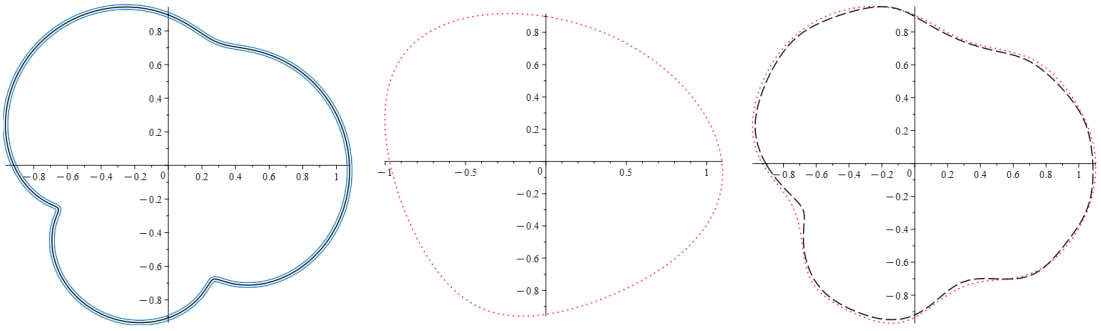


图 5. 例4：原始曲线、$N = 3$对应的重建曲线，以及 $N = 10$对应的重建曲线

例4. 非对称曲线. $\Omega = c\{6z + (0.5 - 0.7i)z^2 + z^4 \mid |z| \le 1\}$. 与前面的例子不同，曲线 $\Gamma = \partial\Omega$ 没有对称轴，参见 (5.9) 后的注释。

因此， $H_\gamma^{(N)}$是一个复值矩阵。特别地， $H_\gamma^{(3)} = A + iB$，其中 A和 B是

$$\begin{pmatrix} -1.01 & 0.01 & 0.00 & 0 & -0.01 & -0.08 & 0.00 \\ 0.01 & -1.03 & 0.00 & 0 & 0.12 & -0.01 & -0.12 \\ 0.01 & 0.00 & -1.04 & 0 & 0.08 & 0.23 & -0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.02 & -0.23 & -0.08 & 0 & 1.04 & 0.00 & -0.01 \\ 0.12 & 0.01 & -0.12 & 0 & 0.00 & 1.03 & -0.01 \\ 0.00 & 0.08 & 0.01 & 0 & 0.00 & 0.01 & 1.01 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.00 & -0.01 & 0.00 & 0 & 0.04 & -0.03 & 0.01 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0 & -0.05 & 0.09 & -0.05 \\ -0.01 & 0.00 & 0.00 & 0 & 0.07 & -0.10 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.12 & -0.10 & 0.07 & 0 & 0.00 & 0.00 & -0.01 \\ -0.05 & 0.09 & -0.06 & 0 & 0.00 & 0.00 & 0.02 \\ 0.01 & -0.03 & 0.04 & 0 & 0.00 & -0.01 & 0.00 \end{pmatrix}.$$

原始曲线绘制在图 5 的左侧。由矩阵 $H_\gamma^{(3)}$重构得到的曲线显示在图 5 的中部。图 5 的右侧有两条线：红色点线是由矩阵 $H_\gamma^{(10)}$重构得到的曲线；黑色虚线表示原始曲线傅里叶级数的部分和

$$\gamma(s) \approx \sum_{m=-10}^{10} \widehat{\gamma}_m \, e^{ims}, \tag{6.3}$$

其中 s 是弧长（对照（5.4））。

所给出的全部例子均证实了我们的主要论点：狄利克雷到诺伊曼映射对区域形状的微小偏差非常敏感。

参考文献

[1] M.I. Belishev. 通过 BC 方法研究二维流形上的卡尔德龙问题。*SIAM J.Math. Anal.* **35** (2003), 第 1 期，172–182.[2] A. Jollivet and V. Sharafutdinov. 关于黎曼曲面斯捷克洛夫谱的一个逆问题。*Contemporary Mathematics* **615** (2014), 165-191.[3] M.A. Lavrent'ev and B.V. Shabat. 复变函数论方法。莫斯科，Nauka，(1973).[4] M.Lassas and G. Uhlmann. 关于从狄利克雷到诺伊曼映射确定黎曼流形。*Ann. Sci. École Norm. Sup.* **34** (2001), 第 4 期，771–787.[5] V. Sharafutdinov. 圆盘中的电阻抗断层成像几何问题。*SiberianMath. J.* **52:1**(2011), 178-190.[6] V. Sharafutdinov. 二维 Calderón 问题与平坦度量。*Anal. Math. Phys.* **15**, 110 (2025).
[7] https://drive.google.com/file/d/1yIKpn4lKWDaUO_JX6FMJpz31uNvgFRRK/view?usp=sharing

索оболев数学研究所。科普秋格大街4号，新西伯利亚，630090，俄罗斯电子邮箱：sharafut@list.ru索оболев数学研究所。科普秋格大街4号，新西伯利亚，630090，俄罗斯电子邮箱： stork@math.nsc.ru