arXiv:2602.08694v1 [math.AT] 9 Feb 2026

有限´étale 空间与广义膨胀的同伦类型

Anton Ayzenberg 和 Nadya Khoroshavkina

Abstract. 单纯复形的膨胀 K 是组合拓扑中一种广为人知的构造。它将每个顶点 i 替换为 K 有限个 n_i 副本，并将每个单纯形 $\{i_0,\dots,i_k\}$ 替换为$n_{i_0}n_{i_1}\cdots n_{i_k}$ 多个副本，使得当且仅当这些顶点副本对应的原顶点在原复形中张成一个单纯形时，它们在膨胀中才张成一个单纯形。Bj¨orner、Wachs 和 Welker 著名的偏序集纤维定理，根据 K 及其链环的同伦类型，描述了此类膨胀的同伦型。在本文中，我们将膨胀推广到单纯偏序集：将每个单纯形替换为任意有限集的副本。这些集合以何种方式拼接，由一个交换图，或等价地，由相应有限拓扑上的一个层来规定。广义膨胀可以理解为该层的 ´étale 空间。我们证明，只要这个膨胀层是软的，偏序集纤维定理仍然成立。我们证明了与顶点膨胀已知结果类似的所有结论。我们还涵盖了第一作者此前关于多重图的团复形同伦类型的结果。

1. 引言

考虑两个有限单纯复形之间的单纯映射 $f\colon\ N \to K$。假设 f是非退化的，即它保持单形的维数，并且在单形上是满射。底空间 K 的同伦型如何与 N的同伦型相关联?

这个问题过于含糊，因此毫无意义。如果一个 $(n-1)$ 维单纯复形 N 的顶点可以用 n 种颜色进行正常着色，那么这种着色会给出一个非退化单纯映射 $c\colon N \to \Delta^{n-1}$。任意复形的第一次重心细分都允许这样的着色。因此，对于满射非退化映射 $f\colon N \to K$，覆盖空间 N 可以具有任意复杂的同伦型，而底空间 K 是可缩的。反过来构造例子并不困难：当 N 可缩而底空间 K 不可缩时。

2020 数学主题分类。 主要分类：06A06, 55U10, 54B40, 55P10 次要分类：18F70, 06A07, 55U05, 18A30, 55R55, 14F45, 18A10, 55P15, 05E45。关键词和短语。 有限拓扑上的层，松软层，´平展空间，偏序集纤维定理，单纯偏序集，单纯复形的膨胀，同伦楔和分解，同伦余极限。N.K. 得到俄罗斯科学基金会的资助（项目编号 24-11-00366）。

单纯复形（或单纯偏序集）的非退化映射在数学中随处可见。分支覆盖（特别是 Dold–Smith 意义下的分支覆盖 [8]）是非退化单纯映射的重要例子。在 [14, 15, 16]，Gugnin 研究了底空间与其分支覆盖空间的上同调环之间的关系。Wachs [21] 引入的膨胀复形构造提供了一个相对简单的例子，其中覆盖空间的同伦型可以通过底空间的同伦型及其所有单形的链环明确描述。在 [4] 中，这项技术被推广用于研究多重图的团复形，尤其是有向图的竞赛图复形；在拓扑数据分析中，引入这些复形是为了分析脑功能网络 [12, 13]。每个多重图的团复形都可以通过一个非退化单纯映射映到相应简单图的团复形。在 [4] 中证明的同伦楔和分解，或可加快以多重图形式给出的数据的同调（及持久同调）计算。

在 [1, 2] 中，Abramsky 等人提出使用单纯复形之间的非退化映射，作为估计量子系统情境性与非局域性的工具。在他们的方法中，基复形 K 的单形表示量子系统中可同时测量的特征子集，而覆盖复形 N 的单形则表示此类测量可能得到的结果。这种模型能够区分经典系统和量子系统，因为量子系统中无法连贯地同时测量所有特征，这一点可以从 K、N 的拓扑结构及其相互作用中体现出来。

在本文中，我们基于层论发展了研究非退化单纯映射的方法。这种方法直截了当，却能以普遍的方式证明组合拓扑和同伦拓扑中的若干已知结果。我们不再考察单纯映射 $f\colon N \to K$，而是考察基复形 K 上的集合值图表D_f，其定义如下。

Construction 1.1. 对每个（非空）单形 $I \in K$，值 $D_f(I)$ 是有限集 $f^{-1}(I)$，即所有位于 f下 I的原像中的单形所组成的集合。这些集合之间存在自然的关联：若 $I \subset J$，则有一个映射

$$\mathrm{glue}_{J,I}\colon D_f(J) \to D_f(I)$$

它将较大单形 J 的每个原像映射到其唯一的面；该面在映射 f下映至子单形 I。详见图 1。

显然，所有这些映射粘合在一起，$_I$ 构成一个交换图，也就是一个函子D_f: cat $(K\backslash\{\varnothing\})^{\mathrm{op}} \to$ 集合范畴。由于每个偏序集都对应一个 Alexandrov 拓扑，并且偏序集上的每个图表都对应于该拓扑上的一个层（如第 2.2 和 2.5 小节所述），我们便得到 Alexandrov 拓扑空间 $X_{(K\backslash\{\varnothing\})^*}$ 上的一个层 $\mathcal{D}_f$；该空间对应于 K 的非空单形按逆序排列所成的偏序集。原覆盖复形 N 可以还原为层 $\mathcal{D}_f$的 ´étale 空间。

本文的主要概念性贡献是以下论断：层 $\mathcal{D}_f$ 的性质有助于研究覆盖空间的同伦类型。我们证明了以下具体结果。

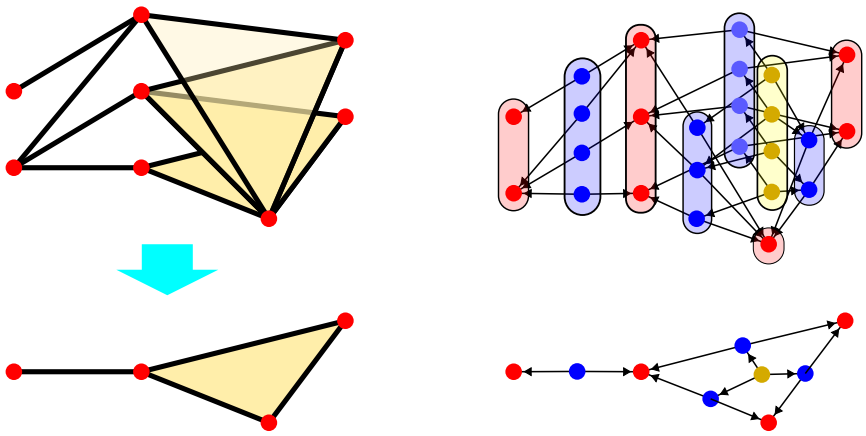

FIGURE 1. 从单纯映射到偏序集上的集合值图表

THEOREM 1.2. 假设 $f\colon\ N \to K$ 是单纯复形（或单纯偏序集）之间的满射非退化映射。此外，假设相应的层 $\mathcal{D}_f$ 是软的。

(1) 若 $K = \Delta^{n-1}$ 是一个 $(n-1)$ 维单纯形，则 N 与若干 $(n-1)$ 维球面的楔和同伦等价。(2) 对于一般的 K，存在一个同伦楔和分解，它通过 K 及其所有链接的同伦类型来表达 N 的同伦型（见公式 (5.1)）。(3) 若 K 是维数为 $n-1$ 的同伦 *Cohen–Macaulay* 复形，则 N亦然。

本定理推广了 Wachs [**21**] 关于顶点膨胀复形的结果，以及此前在 [**4**]中得到的关于单纯形膨胀的全部推广。回顾到，经典测量系统在 [**1**] 中恰好由柔软层加以本体化，由此我们得到如下有趣的推论：经典系统在拓扑层面上预期按照定理 1.2 的方式表现，而任何偏差（例如某个k维单纯形的原像在次数 $< k$上具有非平凡的单纯同调）都是该系统呈现量子行为的证据。请注意，在本文的方法中，我们从不提及任何同调或上同调：所有结果均在非阿贝尔情形下表述并证明。

我们的主要方法之一涉及广义膨胀这一概念，为简洁起见，我们称之为膨胀。任意偏序集 S 都可以沿着对偶偏序集 S^*上的任意图表 D 进行膨胀。粗略地说， S 对应于底空间 K ，而其膨胀对应于覆盖空间 N。

本文结构如下。在接下来的各节（最后一节除外）中，我们不再讨论非退化单纯映射，而是完全转而研究偏序集上的集合范畴值图表、有限拓扑上的层及其 ´etale 空间。第 2 节概述与偏序集、有限拓扑空间、层和图表相关的基本构造。第 3 节概述与组合拓扑和同伦拓扑相关的基本构造：单纯偏序集、同伦 Cohen–Macaulay 偏序集的定义

。此外，本节还描述层的 ´etale 空间与图表的同伦余极限之间的关系。第 4 节中，我们引入沿图表的广义膨胀这一概念，并列举其直接性质。我们给出两个作为动机的例子：Wachs 引入的顶点膨胀，以及多重图的团复形。第 5 节中，我们陈述三个主要技术定理。第 6 节中，我们通过归纳法同时证明这些定理。最后，在第 7 节中，我们推导出定理 1.2，并说明论文 [**21**] 和 [**4**] 的结果如何作为我们构造和论断的特例得到。

2. 概述：层与有限拓扑

关于有限拓扑上的层的大部分构造的详细阐述，可见预印本 [**5**] 的数学附录。

2.1. 预序与记号。设 S 是一个偏序集。对于每个这样的集合 S，我们都可以定义一个小范畴 $\mathsf{cat}(S)$，其对象是 S 中的元素；当 $s_1 \leqslant s_2$ 时，存在从 s_1 到 s_2 的唯一一个态射，否则不存在态射。

偏序集之间的映射 $f\colon S \to T$ 称为单调映射（或偏序集态射），若 $s_1 \leqslant s_2$ 在 S 中成立，则 $f(s_1) \leqslant f(s_2)$ 在 T 中也成立。每个这样的态射都会诱导相应小范畴之间的函子 $\mathsf{cat}(f)\colon \mathsf{cat}(S) \to \mathsf{cat}(T)$。偏预序也有类似的定义。

对于任意偏序集 S 和任意元素 $s \in S$，我们定义 $S_{\geqslant s} = \{t \in S \mid t \geqslant s\}$，以及 $S_{>s} = \{t \in S \mid t > s\}$。偏序集 $S_{\leqslant s}$、$S_{<s}$ 的定义方式类似。

偏序集 S 上的序反向后记作 S^*。

偏序集 f、$S \to T$ 之间的映射称为嵌入，若它是单射。映射 f 称为精确嵌入，若除了是单射之外，还满足：不等式 $f(s_1) \leqslant_T f(s_2)$蕴含 $s_1 \leqslant_S s_2$（即 S是 T的子集，且序由 T继承）。精确嵌入记作 $f\colon S \hookrightarrow T$。

2.2. Alexandrov 拓扑。设 X 是一个集合，Ω 是 X上的一个拓扑，即由 X 的子集构成的一个集合族，这些子集称为开子集。回顾一下，拓扑空间 (X, Ω)称为 Alexandrov 拓扑空间，若它满足以下附加性质：任意（可能无限多个）开集的交仍为开集。若拓扑 Ω 满足分离公理 T_0（柯尔莫哥洛夫公理），则称其为 X 上的分离拓扑：对于每一对点$x_1 \neq x_2 \in X$，要么存在 x_1的一个开邻域 U，其中不包含 x_2；要么存在 x_2的一个开邻域 U，其中不包含 x_1。

偏序集与拓扑空间之间的下述对应（密码同构）广为人知，例如参见 [**3**]。

Proposition 2.1. 部分预预序集及其态射构成的范畴 PrePos，与 *Alexandrov* 拓扑空间及连续函数构成的范畴 $\mathrm{AlexTop}$ 自然等价。在这一等价关系下，偏序集对应于满足 T_0-分离公理的 *Alexandrov* 拓扑。

以下论述需要用到若干用于构造这一对应的概念。我们先简要回顾一下。

CONSTRUCTION 2.2. 设 S 是一个带有预序 $\leqslant$的集合。考虑S 上的拓扑 Ω_S，它由所有上序理想构成。换言之，$U \in \Omega_S$ 当且仅当条件$x \in U$和 $y \geqslant x$蕴含 $y \in U$。于是 $X_S = (S, \Omega_S)$ 是一个 Alexandrov 拓扑空间。若S 是一个偏序集，则 X_S 满足 T_0-分离公理。

CONSTRUCTION 2.3. 设 (X,Ω) 是一个 Alexandrov 拓扑空间。取一点$x \in X$，并考虑 $\mathcal{U} = \{U \in \Omega \mid x \in U\}$ 中由 x 的所有开邻域组成的族。它们的交集

$$U_x = \bigcap\nolimits_{U \in \mathcal{U}} U \tag{2.1}$$

根据 Alexandrov 拓扑的定义，这是一个开集。集合 U_x 称为 x 的最小开邻域。我们在 X 上定义预序：当且仅当 $U_{x_1} \supseteq U_{x_2}$时，令 $x_1 \leqslant x_2$。

REMARK 2.4. 用 S 上的（预）序来表述，拓扑 Ω_S 中$s \in X_S$ 的最小开邻域 U_s，就是 s 的上锥，即 $U_s = S_{\geqslant s}$。

REMARK 2.5. 偏序集之间的态射 $f\colon S \to T$ 是精确嵌入，当且仅当映射 $f\colon X_S \to X_T$ 是嵌入，且 X_S 上的拓扑由 X_T 上的拓扑诱导。在这种情况下，类似于偏序集的情形，我们将该映射记作 $f\colon X_S \hookrightarrow X_T$。

2.3. 偏序集上的图表。设定一个范畴 $\mathcal{V}$。在同调代数中，范畴 $\mathcal{V}$ 通常指阿贝尔群及其群同态构成的范畴、环及其环同态构成的范畴，或向量空间及其线性映射构成的范畴。本文基本上只关注有限集合范畴 $\mathcal{V}$ =FinSets，即有限集及其间映射构成的范畴。为使论述完整，部分基本定义将在更一般的情形下给出。

DEFINITION 2.6. 一个取值于 $\mathcal{V}$的偏序集上的图表 S 是一个函子 $D\colon \mathsf{cat}(S) \to \mathcal{V}$.

所有定义在 S 上的图表构成范畴 $\mathbf{Diag}(S, \mathcal{V})$，其态射是函子之间的自然变换。

2.4. 拓扑上的层。

DEFINITION 2.7. 定义在拓扑空间 (X, Ω_X) 上、取值于范畴 $\mathcal{V}$的一个预层，是一个反变函子 $\mathcal{F}\colon \mathsf{cat}(\Omega_X\backslash\{\varnothing\})^{op} \to \mathcal{V}$。

这里，开子集的集合 Ω_X 按包含关系排序，$\mathsf{cat}(\Omega_X\backslash\{\varnothing\})^{op}$ 是与该偏序集对应范畴相反的范畴，也就是说，它是通过反转所有箭头得到的。换句话说，预层可以视为一条规则：对每个非空开集 $U \in \Omega_X$，赋予一个 $\mathcal{F}(U)$of $\mathcal{V}$ 中的对象；对每一对 $V \subseteq U$，赋予一个态射

$$r_{U \supseteq V} = \mathcal{F}(U \supseteq V)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V),$$

称为限制态射。所有限制态射都满足一致性[1]：$r_{W \supseteq U}$；$r_{U \supseteq V} = r_{W \supseteq V}$。

[1]在此处及下文中，我们采用借自编程和应用范畴论的复合记号：f；$g = g \circ f$。

Remark 2.8. 当 $\mathcal{V}$ 是集合范畴（或任何具体范畴，即表现得像“带有某种结构的集合”的范畴）时，对象 $U \in V$ 有元素。在这种情况下，元素 $u \in \mathcal{F}(U)$ 称为定义在子集 U 上的层截面 $\mathcal{F}$。如果 $U \supseteq V$ 且 $u \in \mathcal{F}(U)$，那么 $\mathcal{F}(U \supseteq V)(u) \in \mathcal{F}(V)$ 称为将截面 u 限制到子集 V，记作 $u|_V$。

Definition 2.9. 一个取值于有限集合范畴的预层 $\mathcal{F}$ 被称为非空，如果对于任意 $U \in \Omega_X \backslash \{\varnothing\}$ 都有 $\mathcal{F}(U) \neq \varnothing$。

Definition 2.10. 如果满足以下两个性质，则称预层 $\mathcal{F}$ 为一个层：

(1)（局部性）设 U 为一个开集，它被一族开子集所覆盖，$\{U_i\}_{i\in I}$，对每个 $i \in I$ 均成立。假设给定两个元素 $u, v \in F(U)$，使得对每个 $i \in I$ 都有 $u|_{U_i} = v|_{U_i}$。则等式 $u = v$ 成立。(2)（粘合）设 U 为一个开集，$\{U_i\}_{i\in I}$ 为其由子集 $U_i \subseteq U$ 构成的开覆盖，并设 $\{u_i \in F(U_i)\}_{i\in I}$ 为一族截面。假设这些截面在其定义域的交叠部分上一致，即对每个 $i, j \in I$ 都有 $u_i|_{U_i\cap U_j} = u_j|_{U_i\cap U_j}$。则存在一个截面 $u \in F(U)$，使得对每个 $i \in I$ 都有 $u|_{U_i} = u_i$。

拓扑 X 上所有取值于 $\mathcal{V}$ 的预层构成范畴 $\mathbf{PreShvs}(X, \mathcal{V})$。其态射是从 $\mathbf{cat}(\Omega_X\backslash\{\varnothing\})^{op}$ 到 $\mathcal{V}$ 的函子的自然变换。层构成 $\mathbf{PreShvs}(X, \mathcal{V})$ 中的完备子范畴 $\mathbf{Shvs}(X, \mathcal{V})$。

Definition 2.11. 若 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 (X, Ω_X) 上的预层，且 $x \in X$，则

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{x\in U, U\in\Omega_X} \mathcal{F}(U) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$$

（预层在所有包含 x 的开子集上的取值的直极限）称为该预层在 x 中的茎 $\mathcal{F}$。

只有当范畴 $\mathcal{V}$ 是闭的（即包含所有直极限），或者当我们讨论有限拓扑时包含所有有限极限，这一定义才有意义。有限集合范畴 $\mathbf{FinSets}$ 包含所有有限极限，见 [**20**]。根据极限的定义，对于每个 $U \in \Omega_X$, $x \in U$，都存在一个典范态射 $\mathcal{F}(U \ni x)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$。

2.5. Alexandrov 拓扑上的层。根据命题 2.1，每个偏序集 S 都与一个 T_0-Alexandrov 拓扑 $X_S = (S, \Omega_S)$ 相对应。$\mathcal{V}$ 值图表在 S 上与 $\mathcal{V}$ 值层在 X_S 上之间存在自然的一一对应。

Proposition 2.12. 偏序集 S 上的图表范畴 $\mathrm{Diag}(S, \mathcal{V})$ 与相应 *Alexandrov* 拓扑上的层范畴 $\mathrm{Shvs}(X_S, \mathcal{V})$ 等价。

这一断言属于 folklore，但较为详细的证明可见于 [**5**]。我们采用如下约定：偏序集 S 上的图表用正体字母表示，而 X_S 上相应的层则用相同字母的花体表示。例如，图表 D 对应于层 $\mathcal{D}$。命题 2.12 保证 D 与 $\mathcal{D}$ 携带相同的信息。然而在某些证明中，为保持类型一致性，有必要对它们加以区分。

REMARK 2.13. 层在开子集上的值可由茎按如下公式重构

(2.2)
$$\mathcal{D}(U)=\varprojlim_{s\in U} D(s)=\left\{(v_s\mid s\in U)\in\prod_{s\in U}D(s)\mid D(s_1\leqslant s_2)v_{s_1}=v_{s_2}\text{ for any }s_1\leqslant s_2\right\}.$$

换言之，开集 U 上的截面 $x\in\mathcal{D}(U)$ 与一族元素$D(s)$相一致，其中 $s\in U$，且这些元素相对于图表中的映射彼此相容。在表示式 (2.2) 中，限制映射 $\mathcal{D}(U\supset V)$ 的定义方式很直接，因为集合 U 上彼此相容的茎族，在其子集 V 上也彼此相容。

2.6. 平凡层。 在每一本代数几何教材中，以下命题都被视为显然。它确实相当简单，但与此同时，将其明确表述出来对后续的组合应用很有帮助。

PROPOSITION 2.14. 设 $\mathcal{D}$ 是 *Alexandrov* 拓扑 $X_S=(S,\Omega_S)$ 上的一个以集合范畴为值的层，它对应于偏序集 S 上的图表 D 。以下两个条件等价：

(1) 所有茎 $D(s)=\mathcal{D}(U_s)$, $s\in S$ 都是单点集。(2)
所有取值 $\mathcal{D}(U)$, $U\in\Omega_S$ 都是单点集。

PROOF. 蕴含关系 $1\Rightarrow 2$ 显然成立，因为最小开邻域 U_s本身也是开集。反向蕴含可由相应茎显式构造出取值 $\mathcal{D}(U)$ 得到，见注 2.13。事实上，任意多个单点集的乘积仍是单点集，而茎的乘积中唯一的元素满足方程 (2.2) 中的相容关系。□

DEFINITION 2.15. 若一个取值于集合范畴的层 $\mathcal{D}$ （及相应的图表 D）满足命题 2.14 的任一等价条件，则称其为平凡的。

当然，命题 2.14 对一般拓扑空间也成立，并不限于 Alexandrov 拓扑空间；目标范畴也可以是（几乎）任意范畴，而不必是集合范畴：在这种情况下，我们要求所有取值（相应的茎）都是目标范畴中的终对象。在阿贝尔情形，这与一个众所周知的事实相似：零层的整体截面模为零[2]。感兴趣的读者可以尝试解答这个练习，以熟悉抽象废话的工具；不过，本文并不需要如此一般的结果。

LEMMA 2.16（粘合引理）。 设 $\mathcal{D}$ 是拓扑空间 X_S 上的一个层。设 U_1、U_2 是 X_S 中的两个开集，使得对于每个点 $x\in U_1\cap U_2$，茎 $D(x)$ 是一个单点集。那么，对于任意两个截面 $v_1\in\mathcal{D}(U_1)$、$v_2\in\mathcal{D}(U_2)$，存在唯一的截面 $v\in\mathcal{D}(U_1\cup U_2)$，其在 U_1 上限制为 v_1，在 U_2 上限制为 v_2 。

[2]不要将这种情况与常值一维层混淆；在后一种情况下，整体截面模的秩等于连通分支的个数。

PROOF. 根据命题 2.14，我们有 $\mathcal{D}(U_1 \cap U_2) = \{*\}$，即一个单点集。因此，$v_1|_{U_1\cap U_2} = v_2|_{U_1\cap U_2}$。虽然这些截面在交叠部分上相容，但根据定义 2.10 中的粘合性质，它们可以延拓为公共截面。□

2.7. 诱导层与层的限制。每个拓扑空间的连续映射 $f\colon X \to Y$ 都会在层范畴上诱导出正像函子和逆像函子

$$f_*\colon \mathrm{Shvs}(X;\mathcal{V}) \to \mathrm{Shvs}(Y;\mathcal{V}), \qquad f^*\colon \mathrm{Shvs}(Y;\mathcal{V}) \to \mathrm{Shvs}(X;\mathcal{V}).$$

我们不需要在最一般的情形下进行这一构造，而只给出偏序集情形的构造。在这种情况下，函子 f^* （层的逆像）的定义在概念层面上得到了显著简化——因此，它在应用拓扑学 [**10**] 和神经网络的当代研究方法 [**7, 5**]中有着众多应用。

设 $f\colon S \to T$ 是偏序集的一个态射（等价地，是相应 Alexandrov 拓扑空间之间的连续映射 $f\colon X_S \to X_T$）。

CONSTRUCTION 2.17. 设 $\mathcal{F} \in \mathsf{Shvs}(X_S;\mathcal{V})$ 是 Alexandrov 拓扑空间 X_S上的一个层。考虑拓扑空间 X_T上的预层 $f_*\mathcal{F}$，其在开集 $U \in \Omega_T$ 和包含关系 $U \supseteq V$ 上的取值定义为

$$f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U)), \qquad f_*\mathcal{F}(U \supseteq V) = \mathcal{F}(f^{-1}(U) \supseteq f^{-1}(V)).$$

预层 $f_*\mathcal{F}$ 已知是一个层 [**18**]。它称为**在连续映射 下 的直接像**。

注意，构造 2.17 无需任何修改即可应用于任意拓扑空间之间的连续映射。映射 f_* 具有函子性，这意味着它是从范畴 $\mathsf{Shvs}(X_S;\,\mathcal{V})$ 到范畴 $\mathsf{Shvs}(X_T;\,\mathcal{V})$的定义良好的函子。

逆像函子的定义更加困难，因为在连续映射下，开集的像未必是开集。但对于偏序集和 Alexandrov 拓扑空间，由于层与其茎构成的图表等价，逆函子像的构造要简单得多。再次假设 $f\colon S \to T$是偏序集态射，且 $\mathcal{G} \in \mathsf{Shvs}(X_T;\,\mathcal{V})$ 是拓扑空间 X_T上的一个层。根据命题 2.12，它对应于一个图表 $G\colon \mathsf{cat}(T) \to \mathcal{V}$。

CONSTRUCTION 2.18. 图表的逆像 G 在 T 上（或层 $\mathcal{G}$ 在X_T上）经态射 $f\colon S \to T$ 得到的图表 f^*G在偏序集 S上（或层 $f^*\mathcal{G}$在X_S上），其定义如下：

$$f^*G(s) = G(f(s)), \qquad f^*G(s \leqslant s') = G(f(s) \leqslant f(s')).$$

根据图表对逆像的定义，很容易推出 f^* 具有函子性，也就是说，它定义了一个函子 $f^*\colon \mathsf{Shvs}(X_T;\,\mathcal{V}) \to \mathsf{Shvs}(X_S;\,\mathcal{V})$。这个函子称为由连续映射 f诱导的逆像函子。

REMARK 2.19. 一个相当重要的特殊情形是：映射 $f\colon S \hookrightarrow T$ 为偏序集的精确嵌入（或者等价地，为相应拓扑空间的精确嵌入，见注记 2.5）。在这种情形下，集合 S （更准确地说，其像 $A = f(S)$）被解释为一个

T 的子集，而层 $f^*\mathcal{G}$被解释为层 $\mathcal{G}$在子集 A上的限制。在这一特殊情形下，自然将逆像 $f^*\mathcal{G}$ 记为 $\mathcal{G}|_A$。

若 $A \subset T$是 X_T的拓扑中的一个开子集，则对每个开子集 $U \subseteq A$，都有 $\mathcal{G}|_A(U) = \mathcal{G}(U)$。注意， X_A上的（诱导）拓扑的所有开子集也是 X_T的拓扑中的开集。

2.8. 柔软层。

Definition 2.20. 取值于有限集合范畴的层 $\mathcal{F}$定义在拓扑空间 (X, Ω_X) 上。若对每对嵌套的开集 U， $V \in \Omega_X$，限制态射 $\mathcal{F}(U \supseteq V)$都是满射，则称其为软。

取值于其他具体范畴（例如 $\mathbf{Vect}_{\Bbbk}$ 和 $\mathbf{Mod}_R$）的层也有类似定义，但我们不需要如此广泛的情形。通俗地说，柔软层是指这样的层：较小开集上的任意截面都可以延拓为较大开集上的截面。

Remark 2.21. 若映射 $S \hookrightarrow T$ 是精确嵌入，且 $A = f(S)$ 在拓扑空间 X_T 中是开集，那么根据 $\mathcal{G}$ 在 X_T 上的软性，可推出其限制 $\mathcal{G}|_A = f^*\mathcal{G}$ 在 A 上也是软性的，见注记 2.19。事实上，层 $\mathcal{G}|_A$ 中的每个限制态射也是层 $\mathcal{G}$ 中的限制态射；若后一个层中的所有态射都是满射，那么其中任意子集也都满足这一点，特别是受限层的态射集合。

3. 概述：组合拓扑与同伦拓扑

3.1. 偏序集的几何实现。 在组合拓扑中，有一种将偏序集转换为单纯复形的经典方法。

Definition 3.1. 设 S 是一个偏序集。序复形 S 是一个单纯复形 $\mathbf{ord}\, S$，其顶点集与 S 相同，其单形则是 S 中的链（良序子集）。单纯复形 $\mathbf{ord}\ S|$ 的标准几何实现 $|$称为 S 的几何实现，记作 $|S|$。

本文中的所有偏序集都是有限的。因此，它们的几何实现都是有限 CW-复形。

3.2. 同伦余极限。设 $D\colon \mathbf{cat}(S) \to \mathcal{V}$ 是定义在偏序集上的一个 $\mathcal{V}$-值图表，其中 $\mathcal{V}$ 或为集合范畴，或为拓扑空间范畴（对于我们的主要结果，我们将使用有限集合范畴，并假设所有集合都带有离散拓扑）。关于有限偏序集上图表的同伦余极限，可参阅 [22] 中易于理解的介绍。

设 $s_1 \leqslant s_2$ 属于 S。存在两个连续映射：一个图表映射 $D(s_1 \leqslant s_2)\colon\ D(s_1) \to D(s_2)$，以及一个锥的嵌入 $i(s_2 \geqslant s_1)\colon\ |S_{\geqslant s_2}| \to |S_{\geqslant s_1}|$。

Definition 3.2. 图表的同伦余极限 D （定义在偏序集 S 上）是拓扑商空间

$$\operatorname{hocolim}_S D = \left(\bigsqcup\nolimits_{s\in S} |S_{\geqslant s}| \times D(s)\right)/\!\sim,$$

其中等价关系 $\sim$ 由以下条件定义： $(x,\ D(s_1 \leqslant s_2)(y)) \sim (i(s_2 \geqslant s_1)(x),\ y)$ 对任意 $s_1 \leqslant s_2$、$x \in |S_{\geqslant s_2}|$、$y \in D(s_1)$ 均成立。

Remark 3.3. 更抽象地说，同伦余极限是下述 pro-函子 $\mathcal{H}\colon \mathsf{cat}(S)^{\mathrm{op}} \times \mathsf{cat}(S) \to \mathsf{Top}$，$\mathcal{H}(s_1, s_2) = |S_{\geqslant s_1}| \times D(s_2)$ 的余端。

Remark 3.4. 注意，对于只包含单点空间的图表 $*$（也就是说，对所有 $s \in S$，$*(s) = \mathsf{pt}$），同伦余极限与底层偏序集的几何实现一致：$\mathsf{hocolim}_S * = |S|$。

3.3. 沿图表的完备化。 如果图表 D 的取值是带离散拓扑的有限集，那么可以通过以下构造轻松定义同伦余极限。

Construction 3.5. 设 S 是一个偏序集，且 $D\colon \mathsf{cat}(S) \to \mathsf{FinSets}$ 是一个任意图表。考虑集合

$$S^D = \bigsqcup\nolimits_{s \in S} D(s)$$

并在其上定义偏序： $d_1 \leqslant d_2$（对于 $d_1 \in D(s_1)$、$d_2 \in D(s_2)$）当且仅当以下条件成立

$$\begin{cases} s_1 \leqslant s_2 \\ D(s_1 \leqslant s_2)(d_1) = d_2. \end{cases}$$

带有此偏序的集合 S^D 称为沿图表 D对偏序集 S 的完备化。注意，存在一个从完备化到原集合的规范单调映射

$$q_D\colon S^D \to S,$$

对于每个 $s \in S$，该映射都将元素 $d \in D(s) \subset S^D$ 映射到 $s \in S$。

在抽象层面上，完备化运算是取余端，其取值不在拓扑空间中，而在偏序集范畴中。考虑到上述构造，下面的命题很容易得出。

Proposition 3.6. 对于任意有限集图表 $D\colon$ 类别$(S) \to$ 有限集合范畴，存在自然同胚

$$\mathrm{hocolim}_S D \cong |S^D|.$$

Remark 3.7. 完备化运算是单纯形替换在偏序集上的类比，后者在同伦论中已有所研究 [**17**]。

´3.4. étale 空间。本段说明，上一小节中的同伦余极限与层的经典概念—— ´étale 空间——之间有何关联。

Definition 3.8. 设 $\mathcal{F}\colon \mathsf{cat}(\Omega_X \backslash \{\varnothing\})^{op} \to \mathcal{V}$ 是拓扑空间 X上的一个预层。那么，该预层的 ´étale 空间 $F(\mathcal{F})$ 是按如下方式定义的拓扑空间。

（1）作为一个集合，

$$F(\mathcal{F}) = \bigsqcup\nolimits_{x \in X} \mathcal{F}_x;$$

（2） $F(\mathcal{F})$ 上的拓扑基由以下集合定义

$$U_v = \{v_x \mid x \in U,\ (\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x)(v) = v_x\}$$

对于每个开集 U和一个元素 $v \in \mathcal{F}(U)$。

回想一下，范畴 PrePos 和 AlexTop 之间存在等价关系；在此等价下，任意偏序集 S 对应于 Alexandrov 拓扑空间 X_S，参见命题 2.1。

PROPOSITION 3.9. 设 S 为一个偏序集， $D\colon \mathrm{cat}(S) \to$ 有限集合范畴 为任意图表。设 $\mathcal{D}$ 为拓扑空间 X_S 上的预层，与该图表对应。则 *étale* 空间 $F(\mathcal{D})$ 同胚于 X_{S^D}，其中 S^D 是沿图表 D对偏序集 S作的完备化。

PROOF. 根据定义可知， S^D 和 $F(\mathcal{D})$ 作为集合是相同的。考虑 S^D 中的任意上序理想 J ，并检验该集合在 $F(\mathcal{D})$上的拓扑中是开集。事实上， J 可表示为基集的并：

$$J = \bigcup\nolimits_{d \in J} (U_s)_d,$$

其中，对于每个 $d \in J$ ，我们用 $s \in S$ 表示偏序集中的这样一个元素，使得 $d \in D(s)$ ；而 U_s按惯例表示 S中 s的最小开邻域。

现在考虑任意一个开集 A in $F(\mathcal{D})$ ，并检查它是否是关于 S^D 上序关系的上序理想。事实上， $A = \bigcup U_t$ ，其中 $U \in X_S$ 是一些开集， $t \in \mathcal{D}(U)$ 是一些元素。我们任取 $F(\mathcal{D})$、 d_1, $d_2 \in A$ 中的一对元素，使得$d_1 \leqslant d_2$。那么存在 U 和 $t \in \mathcal{D}(U)$ ，使得 $d_1 \in U_t$。这意味着，对于某个 $s_1 \in U$，有 $d_1 = t_{s_1}$ 。不等式 $d_1 \leqslant d_2$ 意味着对于 $d_2 \in D(s_2)$，有 $s_1 \leqslant s_2$。因此， $s_2 \in U$。于是存在一个映射 $\mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}_{s_2}$；根据层的性质，该映射等于映射 $\mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}_{s_1}$ 与映射 $\mathcal{D}(s_1 \leqslant s_2)$的复合，因此这个映射将 t 映到 d_2，这意味着 $d_2 \in U_t$，也就是说 $d_2 \in A$。□

REMARK 3.10. 在本文余下部分，我们只使用沿图表的完备化语言来表述主要定理（见第4节）。然而，命题3.9表明，所有结果都可以用 ´étale 空间的术语重新表述。我们建议感兴趣的读者在阅读本文时，也留意这种等价的语言。它为我们的组合方法增添了拓扑视角。

3.5. 单纯偏序集。

DEFINITION 3.11. 若一个偏序集 S 满足以下两个条件，则称其为单纯偏序集

(1) 存在唯一的最小元$\hat{0} \in S$。(2) 对每个 $s \in S$，子集 $S_{\leqslant s}$ 同构于一个布尔格。

单纯偏序集的元素称为单形。数值 rk $s-1$（其中 rk s表示布尔格 $S_{\leqslant s}$的秩）称为该单形的维数。我们使用标准术语：维数为 0 的单形称为顶点，维数为 1 的单形称为边，依此类推。由秩函数的存在性可知，单纯偏序集

是分次的。 S 的单形的最大维数称为 S的维数。若单纯偏序集的所有极大单形具有相同维数，则称其为纯。

Remark 3.12. 任意有限单纯复形的单形集合（包括空单形）按包含关系排序后，构成一个单纯偏序集。

如果 S 是单纯的，那么我们称集合 $S\backslash\{\hat{}0\}$为一个几何单纯偏序集。根据定义，单纯偏序集的几何实现就是相应几何单纯偏序集的几何实现。这意味着在几何实现中永远不考虑空单形。

Definition 3.13. 如果 S 是单纯的且 $s \in S$，那么偏序集链环$_S\, s = S_{\geqslant s}$ 称为单形 s的链环。链环是一个单纯偏序集。

由此可知，几何实现 $|$链环$_S\, s|$ 就是偏序集 $S_{>s} = S_{\geqslant s}\backslash\{s\}$ 的几何实现（移除最小元素以使其成为几何的）。因此我们有 $|$链环$_S\, s| \cong |S_{>s}|$。

下文中，我们用字母 I， J 等表示单纯偏序集中的单形，而不像一般偏序集那样使用 s， t 。

3.6. Cohen–Macaulay 单纯偏序集。

Definition 3.14. 若单纯偏序集 S 满足以下条件，则称其为维数为 $n-1$ 的同伦 ***Cohen–Macaulay*** :

(1) S 是维数为 $n-1$ 的纯偏序集；**(2)** $|S|$ 同伦等价于 $(n-1)$ 维球面的楔和；**(3)** 对每个（非空）单形 $I \in S$，其链环 $|\mathsf{link}_S I|$ 的几何实现同伦等价于 $(n-2-\dim I)$ 维球面的楔和。

Remark 3.15. 回顾标准约定：假定由零个球面组成的楔和（维数不限）是一个可缩空间。反过来，假定一个可缩空间在同伦意义下是一个点，因此它也是由零个楔和项组成的球面楔和。

Remark 3.16. 根据定义，若 S 是维数为 $n-1$ 的同伦 Cohen-Macaulay 偏序集，则 $\mathsf{link}_S I$ 是维数为 $n-2-\dim I$ 的同伦 Cohen-Macaulay 偏序集。

Remark 3.17. 如果 S 是通过从同伦 Cohen–Macaulay 单纯偏序集中移除最小元而得到的，我们就称它为同伦 Cohen–Macaulay 几何单纯偏序集。必须移除这个小家伙（空单形）确实令人恼火，因为在本文中，我们有时会反转顺序，此时最小元就变成了最大元。无论如何，当我们考虑定义在单纯偏序集上的图表时，绝不会给空单形赋予任何有意义的集合：这就是我们总得移除它的原因。引入“几何单纯偏序集”这一附加术语，是为了行文方便。

4. 主要构造

4.1. 偏序集的膨胀。

Definition 4.1. 设 P 是一个偏序集，且 $D\colon \mathsf{cat}(P^*) \to$ 有限集合范畴是定义在对偶偏序集 P^* 上的图表。换言之，为每个元素 $I \in P$ 指定一个有限集 $D(I)$，并且每当 $I \leqslant J$ 时，就有一个映射 $D(J \geqslant I)\colon D(J) \to D(I)$。膨胀 P沿图表D 得到的偏序集为

$$P_D = ((P^*)^D)^*,$$

即沿图表 D 对 P^* 进行完备化，随后反转序。

Remark 4.2. 由构造 3.5 立即可知，存在典范单调映射 $q_D\colon\ P_D \to P$。

我们回顾，几何单纯偏序集是在添加一个形式空单形（即最小元 0）后成为单纯偏序集的偏序集，见第 3.5 小节。

Proposition 4.3. 如果 P 是一个几何单纯偏序集，那么 P_D 也是一个几何单纯偏序集。

Proof. 任取一个元素 $d \in D(q), q \in P$。则有

$$(P_D)_{\leqslant d} = \{t \mid \exists p \in P,\, t \in D(p),\, p \leqslant q,\, D(p \geqslant q)(d) = t\}.$$

我们注意到，对于每个 $t \in (P_D)_{\leqslant d}$，根据上面的公式得到的 $p \in P$ 都是唯一的；反之，对于每个 p，其中 $p \leqslant q$ 都有唯一对应的 $t \in (P_D)_{\leqslant d}$。因此，在 $P_{\leqslant q}$ 与 $(P_D)_{\leqslant d}$之间存在双射对应，在该对应下，q 对应于 d。还可以很容易地验证，在此对应下偏序集结构保持不变，这意味着它是一个同构。于是，P_D 的所有下锥都是布尔格。□

4.2. 示例：Wachs 的膨胀复形。

以下构造由 Wachs 在 [21] 中引入。

Construction 4.4. 设 K 是一个有限单纯复形，其顶点集为 $V = \{1, \dots, m\}$，并设有一列正整数 $(n_1, \dots, n_m)$，每个顶点 K对应一个。考虑如下定义的单纯复形 $K(n_1, \dots, n_m)$

(1) $K(n_1, \dots, n_m)$ 的顶点集是 $V = \bigsqcup_{i\in[m]}[n_i]$。换言之，$K$ 的每个顶点都被“膨胀”为 n_i 个副本。令 $p\colon\ V \to [m]$ 表示自然投影，它返回元素$v \in \bigsqcup_{i\in[m]}[n_i]$ 所属的不交并中各项的索引。(2) 元组 $\{v_1, \dots, v_s\} \subset V$是 $K(n_1, \dots, n_m)$ 的单纯形，当且仅当 $p(v_1), \dots, p(v_s)$两两不同，且元组 $\{p(v_1), \dots, p(v_s)\}$ 是 K的单纯形。

复形 $K(n_1, \dots, n_m)$ 称为 K的顶点膨胀[3]。

这一构造恰好是定义 4.1 中引入的沿图表的单纯偏序集膨胀的一种特殊情形。

[3]最初它仅被称为 K的膨胀。为将其与本文中的构造区分开来，我们为这一术语赋予了更具体的名称。

CONSTRUCTION 4.5. 与前面一样，考虑一个单纯复形 K（视为几何单纯偏序集），以及一个与其顶点对应的数列 $(n_1, \ldots\ldots, n_m)$。设 N_i 是一个基数为 n_i 的有限集。定义图表 $D_{\mathrm{vert}}\colon \mathsf{cat}(K^*) \to$ 有限集合范畴如下：将 K 的每个顶点 i 映射到 N_i；对于一般的非空单形 $I \in K$，我们定义 $D_{\mathrm{vert}}(I)$ 为

$$D_{\mathrm{vert}}(I) = \prod\nolimits_i N_i, \quad \text{over all vertices } i \text{ of } I. \tag{4.1}$$

我们还将映射 $D_{\mathrm{vert}}(I \geqslant J)$ 定义为从 I 到其每个面 J 的自然投影（面 J 所含的顶点数当然更少，因此，出现在 $D_{\mathrm{vert}}(J)$ 中的每个因子 N_i 也会出现在 $D_{\mathrm{vert}}(I)$ 中，故该投影定义良好）。

下一个命题显然成立。

PROPOSITION 4.6. 顶点膨胀单纯复形 $K(n_1, \ldots, n_m)$ 与上述投影图表 D_{vert} 下的 K 的膨胀 $K_{D_{\mathrm{vert}}}$ 一致。

REMARK 4.7. Alexandrov 拓扑中对应于 K^* 的开集 U 是 K^* 中的一个上序理想。这意味着 U 是 K 的一个单纯子复形（详见下文注 6.2）。不难证明，与图表 D_{vert} 对应的层 $\mathcal{D}_{\mathrm{vert}}$ 的取值满足以下公式：

$$\mathcal{D}_{\mathrm{vert}}(U) = \prod\nolimits_i N_i, \quad \text{over all vertices } i \text{ of } U. \tag{4.2}$$

REMARK 4.8. 由于构造 4.5 中的所有集合 N_i 均非空，因此与图表 D_{vert} 对应的层 $\mathcal{D}_{\mathrm{vert}}$ 非空。层 $\mathcal{D}_{\mathrm{vert}}$ 的软性由公式 (4.2) 推出。事实上，$\mathcal{D}_{\mathrm{vert}}$ 的所有限制映射都是投影，因而均为满射。

4.3. 示例：多重图中的团。我们将含有多条边但没有环的图称为“多重图”，详见 [4]。

DEFINITION 4.9. 多重图是一维单纯偏序集。

任何多重图都可以视为简单图的一种特殊膨胀，具体如下。设多重图 G_μ，其中 $G = (V, E)$ 是其底层简单图，$\mu\colon E \to \mathbb{Z}_{>0}$ 是重数函数。考虑由该图的面（顶点和边）组成的偏序集 $P = \mathcal{F}(G) = V \sqcup E$，其偏序关系为包含关系。最后，考虑图表 $D_{\mathrm{edge}}\colon \mathsf{cat}(P^*) \to$ 有限集合范畴，它将图中的每个顶点 $v \in V$ 映射到一个单点集，并将每条边 $e \in E$ 映射到一个基数为 $\mu(e)$ 的集合。下一个命题显然成立。

PROPOSITION 4.10. 对于多重图 G_μ、相应简单图的面偏序集 $P = \mathcal{F}(G)$ 以及图表 $D_{\mathrm{edge}}\colon \mathrm{cat}(P^*) \to$ 有限集合范畴，有

$$|P_D| \simeq |G_\mu|. \tag{4.3}$$

图的团复形（亦称惠特尼复形）是相应图的所有团构成的偏序集——它恰好是一个单纯偏序集，而且是一个单纯复形。这一概念在拓扑组合学中是标准且广为人知的 [**19**,

定义9.1], 计算拓扑学 [9], 拓扑数据分析 [11, 定义2.16] 及其他领域。类似地，多重图的团复形 是该多重图所有团构成的偏序集，参见 [4]。多团复形是单纯偏序集，但未必是单纯复形。

考虑一个多重图 G_μ。我们声称，其团复形 $mF(G_\mu)$ 可以概念性地描述为：沿着适当的图表，将相应简单图G的团复形 $mF(G)$ 进行膨胀。

Construction 4.11. 考虑底层简单图 G的团复形 $P = mF(G)$ 。我们在对偶偏序集上归纳地定义图表 $D_{\text{edge}}\colon \mathsf{cat}(P^*) \to$有限集合范畴。首先，对于维数为 0 和 1 的元素，我们按照前一个示例中的相同方式定义其取值，参见命题 4.10：每个顶点映射到一个单点集，每条边映射到一个基数为 $\mu(e)$的集合 M_e 。对于简单图 G的任意团 $I \in P$ ，我们将其取值 $D_{\text{edge}}(I)$定义为

$$D_{\text{edge}}(I) = \prod\nolimits_e M_e, \quad \text{over all edges } e \text{ in } I. \tag{4.4}$$

我们将 I 与其每个面 J 之间的结构映射 $D_{\text{edge}}(I \geqslant J)$ 定义为自然投影（一个面 J 当然包含较少的边，因此出现在 $D_{\text{edge}}(J)$ 中的每个因子 M_e 也出现在 $D_{\text{edge}}(I)$ 中，该投影因而定义良好）。

下一个命题几乎是显然的。

Proposition 4.12. 对于多重图 G_μ，其多团复形 $mF(G_\mu)$ 同构于沿着上述投影图表D_{edge} 对团复形 $P = mF(G)$ 进行膨胀所得的复形 $P_{D_{\text{edge}}}$ 。

Remark 4.13. 对应于图表 D_{edge}的层 $\mathcal{D}_{\text{edge}}$ 的取值满足如下公式：

$$\mathcal{D}_{\text{edge}}(U) = \prod\nolimits_e M_e, \quad \text{over all edges } e \text{ of } U. \tag{4.5}$$

这里， U 是 P的一个单纯子复形。

Remark 4.14. 由于构造 4.5 中的所有集合 M_e 都非空，层 $\mathcal{D}_{\text{edge}}$ 也非空。由公式 (4.5) 可知， $\mathcal{D}_{\text{edge}}$的所有限制映射都是投影，因而是满射，所以该层也是软的。

5. 主要结果

令 $\mathcal{F}(\Delta^{n-1})$ 表示 $(n-1)$ 维单纯形的所有非空面的集合，并按包含关系排序。

Theorem 5.1. 设 $P = \mathcal{F}(\Delta^{n-1})$ 和 $D\colon \mathrm{cat}(P^*) \to$有限集合范畴 是对偶偏序集上的一个图表，使其对应的层 $\mathcal{D}$ 非空且为软层。则膨胀 $|P_D|$ 的几何实现同伦等价于若干个 $(n-1)$维球面的楔和。

简言之，沿着一个软且非空的层对 $(n-1)$维单纯形进行膨胀，所得空间同伦等价于若干个 $(n-1)$维球面的楔和。我们用 $n(D)$表示该楔和中球面的数量；显然，这是一个非负整数。

THEOREM 5.2. 设 P 是任意一个维数为$n-1$ 的连通几何单纯偏序集，且 $D\colon \mathrm{cat}(P^*) \to$ 有限集合范畴 是定义在对偶偏序集上的图表，使得相应的层 $\mathcal{D}$ 非空且软。则存在一个同伦楔和分解

$$|P_D| \simeq |P| \vee \bigvee\nolimits_{I\in P} (\Sigma^{\dim I+1} |\operatorname{link}_P I|)^{\vee n(D_I)}, \tag{5.1}$$

其中， D_I 表示图表 D 在子集 $(P_{\leqslant I})^*$上的限制。

将前一定理的一个特殊（且相当直接的）推论单独表述为一个结果也很有用。

THEOREM 5.3. 设 P 是一个维数为 $n-1$ 的同伦 ***Cohen-Macaulay*** 几何单纯偏序集，且 $D\colon \mathrm{cat}(P^*) \to$ 有限集合范畴 是一个图表，使得相应的层 $\mathcal{D}$ 非空且软。那么，P_D 也是一个维数为 $n-1$ 的同伦***Cohen-Macaulay***单纯偏序集。

对于固定的维数 $n-1$，定理 5.2 可由定理 5.1 应用 Bj¨orner、Wachs 和 Welker 的偏序集纤维定理 [6] 得出。我们将在下一节给出该定理及相应的推论。定理 5.3 则可通过直接应用同伦Cohen-Macaulay单纯偏序集的定义，由定理 5.2 得出。

主要定理 5.1 通过对 n 作归纳法证明，不过归纳步骤中会用到定理 5.3。总体而言，从方法论上看，将所有定理放在同一节中，以便更好地跟踪归纳方案，是合理的。为方便起见，对于固定的 n ，我们分别将定理 5.1、5.2 和 5.3 的陈述记为 $\mathrm{Th}_1(n)$、$\mathrm{Th}_2(n)$ 和 $\mathrm{Th}_3(n)$。

6. 证明

6.1. $\mathrm{Th}_1(\leqslant n) \Rightarrow \mathrm{Th}_2(n)$**.** 这一蕴含基于 Bj¨orner、Wachs 与 Welker 的结果，即偏序集纤维定理 [6]。设 $f\colon S \to T$ 为偏序集态射。对每个元素 $t \in T$，子集 $f^{-1}(T_{\leqslant t})$（或其几何实现 $|f^{-1}(T_{\leqslant t})|$）称为该映射的纤维。回顾：拓扑空间 X 称为 r-连通的，如果对所有 $i \leqslant r$ 都有 $\pi_i(X) = 1$ 。

THEOREM 6.1（偏序集纤维定理；[6, 定理1.1]）. 设 $f\colon S \to T$ 为偏序集态射，使得对每个元素 $t \in T$，纤维 $|f^{-1}(T_{\leqslant t})|$ 是维 $|f^{-1}(T_{<t})|$-连通拓扑空间。若 $|T|$ 连通，则存在同伦等价

$$|S| \simeq |T| \vee \bigvee\nolimits_{t\in T} |f^{-1}(T_{\leqslant t})| * |T_{>t}|. \tag{6.1}$$

如果 $|T|$ 不连通，则该公式分别适用于 $|T|$ 的所有连通分支。

我们使用偏序集纤维定理来证明蕴含关系 $\mathrm{Th}_1(\leqslant n) \Rightarrow \mathrm{Th}_2(n)$。

PROOF. 回顾一下，在定理 5.2 中， P是一个维数为 $n-1$ 的任意几何单纯偏序集，而 $D\colon \mathsf{cat}(P^*)\to$ 有限集合范畴是定义在对偶偏序集上的图表。相应的层 $\mathcal{D}$ 非空且为软层。考虑自然投影映射 $q_D\colon P_D\to P$，如注 4.2 中所述。我们将偏序集纤维定理（定理 6.1）应用于这个偏序集映射。

首先，我们检查偏序集纤维定理的假设是否成立。由于P 是一个几何单纯偏序集，对于每个 $I\in P$，子集 $P_{\leqslant I}$ 都同构于偏序集$\mathcal{F}(\Delta^k)$，即单纯形的所有非空面组成的偏序集（也就是不含最小元的布尔格），并且 $k\leqslant n-1$。此外， $P_{\leqslant I}$是 P中的一个精确嵌入子集。注意，根据定义，纤维 $(q_D)^{-1}(P_{\leqslant I})$ 与沿着图表 D在子集 $(P_{\leqslant I})^*\subset P^*$上的限制 $D|_{(P_{\leqslant I})^*}$对单纯形 $P_{\leqslant I}$ 所作的膨胀相同。

在与 P^*对应的 Alexandrov 拓扑中，子集 $(P_{\leqslant I})^*=(P^*)_{\geqslant I}$总是开集（因为它是一个上序理想）。因此，对应的松软层 $\mathcal{D}$ 在该子集上的限制$\mathcal{D}_I=\mathcal{D}|_{P_{\leqslant I}}$ 也是松软的，参见注 2.21。总之，定理 5.1 的所有条件均成立：在维数为 $k\leqslant n-1$的单纯形的面范畴（取对偶）上存在一个松软层。

由于我们假设 $\mathrm{Th}_1(\leqslant n)$ 成立，根据定理 5.1，纤维$|q_D^{-1}(P_{\leqslant I})|$是一个 k维空间，同伦等价于由 $n(D_I)$个 k维球面组成的楔和。因此，纤维 $|(q_D)^{-1}(P_{\leqslant I})|$ 是一个 $(k-1)$连通空间。偏序集纤维定理的主要假设成立。因此，将偏序集纤维定理应用于映射 $q_D\colon P_D\to P$，我们得到同伦等价

$$|P_D|\simeq |P|\vee\bigvee\nolimits_{I\in P}|q_D^{-1}(P_{\leqslant I})|*|P_{>I}|. \tag{6.2}$$

注意，根据定义， $P_{>I}$ 是单纯偏序集P中 k维单纯形 I 的链环；而空间 $|f^{-1}(P_{\leqslant I})|$如我们已经证明的，同伦等价于楔和 $\bigvee_{n(D_I)}S^k$。因此，

$$|f^{-1}(P_{\leqslant I})|*|P_{>I}|\simeq(\Sigma^{k+1}|\operatorname{link}_P I|)^{\vee n(D_I)}$$

由此观察可知，命题 $\mathrm{Th}_2(n)$成立。 □

6.2. $\mathrm{Th}_2(n)\Rightarrow\mathrm{Th}_3(n)$. 这一蕴含几乎可以直接由同伦Cohen-Macaulay单纯偏序集的定义得出。

PROOF. 设 P 是一个维数为 $n-1$ 的几何单纯、同伦 Cohen-Macaulay 偏序集。那么 $|P|$ 同伦等价于若干个 $(n-1)$ 维球面的楔和；对于每个维数为 k 的（非空）单纯形 I，都存在一个同伦等价 $|\mathbf{link}_P I|\simeq\bigvee S^{n-2-k}$。我们假设命题 $\mathrm{Th}_2(n)$ 成立，由此可推出同伦等价

$$\begin{aligned}|P_D|\simeq|P|\vee\bigvee\nolimits_{I\in P}(\Sigma^{\dim I+1}|\operatorname{link}_P I|)^{\vee n(D_I)}\simeq\\ \simeq\left(\bigvee S^{n-1}\right)\vee\bigvee\nolimits_{I\in P}(\Sigma^{\dim I+1}\left(\bigvee S^{n-2-\dim I}\right)^{\vee n(D_I)})\simeq\bigvee S^{n-1}.\end{aligned} \tag{6.3}$$

到目前为止，我们已经证明，同伦 Cohen-Macaulay 几何单纯偏序集的膨胀同伦等价于若干个球面的楔和。现在我们需要验证，该膨胀中所有单形的链接也都同伦等价于若干个球面的楔和。这个结论相当技术性，可以用与 [4, 命题 5.8] 类似的方法证明。□

6.3. 定理 5.1 的证明。 主要定理 5.1 通过对 $n \geqslant 1$ 进行归纳法得证。至此，柔软性这一性质终于派上了用场。

Remark 6.2. 与定理 5.1 中一样，设 $P = \mathcal{F}(\Delta^{n-1})$ 是一个由单纯形的非空面组成的偏序集， D 是定义在偏序集 P^* 上的图表。相应的层定义在拓扑空间 X_{P^*} 上。该拓扑中的开集是 P^* 中的上序理想，或者等价地说，是 P 中的下序理想。细心的读者会发现，顶点集为 $[n]$ 的单纯形的面偏序集中的下序理想，就是同一顶点集 $[n]$ 上的单纯复形。由此得出一种有趣的解释：开集就是单纯子复形。对于单纯形 $I \in P$，其最小开邻域 U_I 是由该单纯形生成的单纯子复形，也就是包含 I 及其所有面的单纯子复形。

在拓扑 X_{P^*} 上构造一个层 $\mathcal{D}$，等价于为 Δ^{n-1} 中的每个单纯子复形 U 指定一个有限集 $\mathcal{D}(U)$，并为每一对嵌套的子复形 $U \supset V$指定一个限制态射 $\mathcal{D}(U \supset V)\colon \mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(V)$。

让我们证明定理 5.1。

6.4. $\mathsf{Th}_1(1)$**.** 归纳基是 $n = 1$。在此情形下，单纯形的维数为$n-1=0$，因此它是一个点。单点集 $\{v\}$ 上的层只包含一个有限集，因此我们有 $|P_D| = D(v) \simeq \bigvee_{|D(v)|-1} S^0$。任意有限集都与一个 0 维球面的楔和同伦等价（甚至同胚）。

6.5. $\mathsf{Th}_1(\leqslant n-1) \Rightarrow \mathsf{Th}_1(n)$**.** 让我们证明归纳步骤 $\mathsf{Th}_1(\leqslant n-1) \Rightarrow \mathsf{Th}_1(n)$，其中 $n \geqslant 2$。根据假设，层 $\mathcal{D}$ 非空，因此对单纯形的每个非空面 I，也就是偏序集 $P = \mathcal{F}(\Delta^{n-1})$的每个元素，都有 $D(I) \neq \varnothing$。我们引入层（或相应图表）的一个数值特征：

$$c(D) = \sum_{I \in P, I \neq \varnothing} \#D(I) = \#P_D,$$

我们称之为图表的复杂度 D。由非空性条件可知 $c(D) \geqslant 2^n - 1$，并且仅当对单纯形的每个面 I都有$\#D(I) = 1$ 时，等号才成立。

我们将对图表的复杂度 $c(D)$ 使用内归纳。归纳基，即情形 $c(D) = 2^n - 1$，可以容易地验证。在此情形下，层的所有茎都是单点集，并且膨胀 P_D 自然同构于初始偏序集P。因此 $|P_D| \cong |P| \cong \Delta^{n-1}$是可缩空间，从而可视为$(n-1)$维球面的楔和，见注 3.15。

假设 $c = c(D) > 2^n - 1$，且定理已对任意复杂度小于 c 的单纯形 $P = \mathcal{F}(\Delta^{n-1})$ 上的非空软层证明成立。我们考虑集合 $M \subseteq P$，它包含所有满足 $\#D(I) > 1$ 的单形 I。由于 $c > 2^n - 1$，集合 M 是

非空。我们考虑 M 中关于包含关系极小的任意元素 I_0，也就是满足以下两个性质的非空单形 I_0：(1) $\#D(I_0) \geqslant 2$；(2) 对任意 $J \subsetneq I_0$，$\#D(J) = 1$。

L我们将集合 $D(I_0)$ 表示为两个非空子集的不交并

$$D(I_0) = A_1 \sqcup A_2, \quad A_1, A_2 \neq \varnothing.$$

由于 $\#D(I_0) \geqslant 2$，这样的表示存在。现在，我们考虑将图表D 划分为定义在集合 A_1 和 A_2上的两个图表——摩天大楼图表的并。更正式地说，我们在 P 上定义两个图表 D_1，D_2（ D中的子图表），其所有取值如下：

$$D_\varepsilon(J) = \begin{cases} D(J \geqslant I_0)^{-1}(A_\varepsilon), & \text{if } J \geqslant I_0 \\ D(J), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{6.4}$$

对于 $\varepsilon = 1$ 和 2。我们回顾一下，D 是对偶偏序集 P^*上的一个图表，因此它的所有态射都将较大的单形映射到较小的单形。简单来说，我们构造了图表 D_ε，其元素恰好是 D 的茎中那些可以限制到 A_ε 的元素。我们可以将其视为包含关系 D_1，$D_2 \subset D$，因为存在函子 D_1，$D_2 \to D$之间的自然变换，且它们在每个茎上都是单态射。特别地，由此可知，膨胀偏序集 $P_{D_1} \subset P_D$和 $P_{D_2} \subset P_D$之间存在自然包含关系。

可以看出，两个图表 D_1 和 D_2的复杂度严格小于 D的复杂度：

$$c(D_1) < c(D), \quad c(D_2) < c(D),$$

现在，我们来陈述几个辅助命题，以完成内归纳步骤。

LEMMA 6.3. 与图表 D_1 和 D_2对应的层 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$均非空且软。

PROOF. 由 D的非空性可知，对于 $J \in P$，所有集合 $D(J)$均非空。集合 A_1, A_2 根据构造均非空。所有态射 $D(J \geqslant I_0)$都是满射，因为它们是层 $\mathcal{D}$中的限制态射的特例，而该层是软的。由此可得图表 D_1, D_2 的非空性。

我们来证明层 $\mathcal{D}_\varepsilon$, $\varepsilon = 1$,2 的软性。设 $U \supset V$ 是 Alexandrov 拓扑 X_{P^*}中的两个开集，也就是说，根据注 6.2，它们是两个单纯子复形。我们需要证明映射 $\mathcal{D}_\varepsilon(U \supset V)$：$\mathcal{D}_\varepsilon(U) \to \mathcal{D}_\varepsilon(V)$ 是满射。下面分三种情况讨论。

(1) $I_0 \notin U$。在这种情况下，态射 $\mathcal{D}_\varepsilon(U \supset V)$：$\mathcal{D}_\varepsilon(U) \to \mathcal{D}_\varepsilon(V)$ 与原层的限制态射 $\mathcal{D}(U \supset V)$：$\mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(V)$ 完全一致；根据假设，该态射是满射。(2) $I_0 \in U$, $I_0 \notin V$。令 $u \in \mathcal{D}_\varepsilon(V) = \mathcal{D}(V)$ 为 V 上的任意截面。我们考虑一个任意截面 $v \in A_\varepsilon \subset D(I_0) = \mathcal{D}(U_{I_0})$。回忆一下，在 Alexandrov 拓扑中，$U_{I_0}$ 是 I_0 的最小开邻域，同时也是由单纯形 I_0 生成的单纯子复形，见注 6.2。I_0 的选取意味着，对于每个真面 $J < I_0$，集合 $D(J)$ 都是单点集。

因此，粘合引理 2.16 的条件对 U_{I_0} 和 V 均成立，这意味着存在一个截面 $u' \in \mathcal{D}(V \cup U_{I_0})$，定义在由将单纯形 I_0 粘合到 V 所生成的子复形上。由 $\mathcal{D}$ 的软性可知，存在一个截面 $u'' \in \mathcal{D}(U)$，将 u' 延拓到子复形 U 上。我们断言 u'' 属于截面 $\mathcal{D}_\varepsilon(U) \subset \mathcal{D}(U)$ 的子集。这几乎是不言自明的：由构造可知，u'' 在子复形 U_{I_0} 上的限制是 $v \in A_\varepsilon$，这实际上意味着截面 u'' 属于指定的层 $\mathcal{D}_\varepsilon$。至此，我们证明了对于任意元素 $u \in \mathcal{D}_\varepsilon(V)$，都存在一个覆盖它的元素，即 $u'' \in \mathcal{D}_\varepsilon(U)$，因此映射 $\mathcal{D}_\varepsilon(U \supset V)$ 是满射。

(3) $I_0 \in V \subset U$。这种情况可以用与前一种情况类似的方法证明，但在这种情况下，无需执行将 I_0 粘合到 V 的步骤。

□

Lemma 6。4. $P_D = P_{D_1} \cup P_{D_2}$。

Proof.这个结论相当直接，因为将 D 茎中的任意元素限制到单纯形 I_0 上后，它要么属于 A_1，要么属于 A_2。不包含 I_0 的单纯形上的茎元素同时属于两种膨胀。□

我们将较大的图表 D 中“子图表” D_1 与 D_2 的交集记为 D_{12}。注意，若 $J \geqslant I_0$，则 $D_{12}(J) = D_1(J) \cap D_2(J) = \varnothing$，因为相应的原像不相交（见公式 (6.4)）。另一方面，对于任意满足 $J \not\geqslant I$ 的 J，集合 $D_1(J)$ 和 $D_2(J)$ 均与 $D(J)$ 相同，因此也彼此相同。下面的构造给出了一类可作为 D_{12} 支撑的单纯复形。

Construction 6.5. 设 $I \in P = \mathcal{F}(\Delta^{n-1})$ 是顶点集 $[n]$ 上单纯形的一个面。考虑其单纯子复形 $K(I)$，它是偏序集 P 的一个子集，形式如下

$$K(I) = \{J \in P \mid J \not\geqslant I\}.$$

定义这个单纯子复形有多种不同的方法。例如，$K(I)$ 是一个单纯复形，其中 I 是其唯一的极小非单纯形。或者，$K(I)$ 是所有 $i \in I$ 对应的超面 $\mathcal{F}_i = [n]\backslash\{i\}$ 的并。还有一种描述：$K(I)$ 是单纯形 ∂U_I 的边界与单纯形 $U_{[n]\backslash I}$ 的单纯连接。回顾一下，U_J 表示由单纯形 J 生成的子复形，这与最小开邻域的一般术语一致（见注 2.4 和注 6.2）。

下面描述 $K(I)$ 的拓扑性质。

Lemma 6.6. 设 $P = \mathcal{F}(\Delta^{n-1})$ 是 $(n-1)$ 维单纯形的面所构成的偏序集，$I \in P$ 是其非空面。则单纯复形 $K(I)$ 是维数为 $n-2$ 的同伦 *Cohen–Macaulay* 空间。

Proof. 估计维数等于 $n-2$，因为 $K(I)$ 是单纯形 Δ^{n-1} 的一组非空超面的并，参见构造 6.5。证明具有同伦 Cohen-Macaulay 性质可以分三步进行。(1) 单纯形总是一个

同伦 Cohen-Macaulay 复形；(2) 单纯形的边界也总是一个同伦 Cohen-Macaulay 复形；(3) 同伦 Cohen-Macaulay 复形的连接也同样是同伦 Cohen-Macaulay 的。这三步都很直接，留给读者作为练习。我们的最后一个观察是，根据构造 6.5，$K(I) = \partial U_I * U_{[n]\setminus I}$，从而完成证明。□

回到子图表的交集 D_{12}，我们有

$$D_{12} = D_1|_{K(I_0)} = D_2|_{K(I_0)} = D|_{K(I_0)}. \tag{6.5}$$

由 D_{12} 的构造以及偏序集膨胀的定义可知

$$P_{D_{12}} = P_{D_1} \cap P_{D_2}. \tag{6.6}$$

Lemma 6.7. 与图表 D_{12} 在 $K(I_0)$ 上对应的层 $\mathcal{D}_{12}$ 是非空且软的。

Proof. 非空性显然，因为单纯复形 $K(I_0)$ 按构造是 D_{12} 在单纯形 $P = \mathcal{F}(\Delta^{n-1})$ 上的支撑。软性由公式 (6.5) 得出，因为 $\mathcal{D}$ 是软的（根据假设），$K(I_0)$ 是 X_{P*} 拓扑中的一个开集（见注 6.2），而软层在开集上的限制仍然是软层（见注记 2.19）。□

现在我们陈述最后一个有用的技术引理，以汇总此前的所有结果，并最终证明定理 5.1。

Lemma 6.8. 设 X_1、X_2 是 *CW* 复形 Y 的两个胞腔子复形，满足 $Y = X_1 \cup X_2$，并且满足以下两个条件：*(1)* X_1 同伦等价于 k维球面的楔和，X_2 同伦等价于 k维球面的楔和；*(2)* 交集$A = X_1 \cap X_2$同伦等价于 $(k-1)$维球面的楔和。则它们的并集 Y 同伦等价于 k维球面的楔和。

这个陈述相当标准，也很容易证明。[4, Lm.4.1]中给出了一个足够详细的证明。

Proof of Theorem 5.1. 此时，我们已经准备好证明定理 5.1中内归纳的步骤。考虑几何实现 $|P_D|$、$|P_{D_1}|$、$|P_{D_2}|$ 和$|P_{D_{12}}|$。它们都是 CW 复形，此外，

$$|P_D| = |P_{D_1}| \cup |P_{D_2}|, \qquad |P_{D_{12}}| = |P_{D_1}| \cap |P_{D_2}|$$

根据引理 6.4 和等式 (6.5)。层 $\mathcal{D}_1$、$\mathcal{D}_2$ 在一个单纯形上非空且为软层，其复杂度小于 $\mathcal{D}$ 的复杂度。因此，根据内归纳假设，空间$|P_{D_1}|$ 和 $|P_{D_2}|$ 同伦等价于若干个 $(n-1)$ 维球面的楔和。空间 $|P_{D_{12}}|$ 是沿图表 D_{12} 对单纯偏序集 $K(I_0)$ 进行膨胀后的几何实现。根据引理 6.7，相应的层非空且为软层。此外，$K(I_0)$ 是维数为 $n-2$ 的 Cohen-Macaulay 单纯偏序集。因此，我们可以应用命题 $\mathrm{Th}_3(n-1)$（该命题已由归纳假设证明）。命题 $\mathrm{Th}_3(n-1)$ 表明，空间 $|K(I_0)_{D_{12}}|$ 同伦等价于若干个 $(n-2)$ 维

球面的楔和。现在我们可以应用引理 6.8：它表明 $|P_D|$ 同伦等价于若干个 $(n-1)$ 维球面的楔和。证明完毕。□

7. 最后评述

7.1. 非退化单纯映射。 引言中陈述的定理 1.2 可由第 5 节的结果轻易推出。事实上，若 $f\colon\ N \to K$ 是一个满单纯映射，则相应的层 $\mathcal{D}_f$ 定义在偏序集 $(K\backslash\{\varnothing\})^*$ 上（见构造 1.1）且为非空的。可以看出，膨胀 $(K\backslash\{\varnothing\})_{D_f}$ 与原覆盖空间 N同构，因此，第 5 节的三个定理以直接明了的方式推出定理 1.2 的三个结论。

7.2. 顶点膨胀。 如第4节所述，膨胀偏序集有两类重要的例子：Wachs 引入的顶点膨胀，以及导出多重图的多团复形的边膨胀。根据备注 4.8 和 4.14，这两类都对应于柔软的含点层，因此定理 5.1、5.2 和 5.3 均适用。

说到顶点膨胀单纯复形，上一段证明的定理推出了以下结果，该结果最初由 Wachs [21]发现。

Corollary 7.1. 以下结论成立

(1) 对于单纯形 Δ^{n-1}，其顶点膨胀 $\Delta^{n-1}(k_1,\dots,k_n)$ 同伦等价于由 $n_I=\prod_{i\in I}(k_i-1)$ 个 $(n-1)$维球面组成的楔和，其中 $I=[n]$。(2) 对于任意连通单纯复形 K，其顶点膨胀 $K(k_1,\dots,k_m)$具有同伦楔和分解

$$|K(k_1,\dots,k_m)| \simeq |K| \vee \bigvee_{I\in K\backslash\{\varnothing\}} (\Sigma^{\dim I+1}|\operatorname{link}_K I|)^{\vee n_I}.$$

(3) 若 K 是维数为 $n-1$的同伦 ***Cohen–Macaulay*** 复形，则其顶点膨胀 $K(k_1,\dots,k_m)$ 也具有这一性质。

请注意，在这种情况下，第 1 项相当简单。复形 $\Delta^{n-1}(k_1,\dots,k_n)$ 是若干 0 维复形的单纯连接 $[k_1]*\cdots*[k_n]$，其同伦型是同伦拓扑中的一个直接练习。

7.3. 多重图中的团与边膨胀。关于边膨胀的单纯复形，上一段的定理蕴含了如下结果，该结果最初发表于 [4]。

Corollary 7.2。设 G_μ 是一个多重图，其底层简单图为 G，重数函数为 μ。设 $P=mF(G)$是 G 的团复形，$P_{D_{\text{edge}}}=mF(G_\mu)$是多重图 G_μ的多团复形。则以下结论成立

(1) 对于一个满图 $K_n=\left([n],\binom{[n]}{2}\right)$ 以及任意的边重数函数 $\mu\colon\ \binom{[n]}{2}\to\mathbb{Z}_{>0}$，相应多重图的团复形 $mF((K_n)_\mu)$ 同伦等价于一个 $(n-1)$ 维球面的楔和。

(2) 对于任意多重图 G_μ，其团复形 $mF(G_\mu)$ 可根据团复形 $mF(G)$及其单形的链环作同伦楔和分解。(3) 如果一个图的团复形 $mF(G)$ 是维数为 $n-1$的同伦 ***Cohen–Macaulay*** 复形，那么支撑在 G上的多重图 G_μ的团复形 $mF(G_\mu)$ 也是如此。

论文 [4] 引入了沿任意维数单形的更一般的膨胀概念，并为这类一般膨胀证明了一个类似的定理。现论文的定理 5.1、5.2、5.3 也涵盖了这一推广，因为与这些一般连续单形膨胀相对应的层同样是软的。

REMARK 7.3. 在 [4], 中，函子性版本的同伦楔和分解得到了表述和证明。我们认为，本文提出的层语言为证明这类函子性结果提供了一种更加透明、直接的方式。希望相关细节将在另一篇论文中加以阐述。

参考文献

[1] S. Abramsky、A. Brandenburger。《非局域性与情境性的层论结构》，《新物理学杂志》13:11（2011）。[2] S. Abramsky、R. S. Barbosa、K. Kishida、R. Lal、S. Mansfield，《情境性、上同调与悖论》，Stephan Kreutzer 编，第二十四届 EACSL计算机科学逻辑年会（CSL 2015）。莱布尼茨国际信息学论文集（LIPIcs）41（2015），211–228。[3] G. Arenas，《Alexandroff空间》，Acta Math. Univ. Comenianae LXVIII.1（1999），17–25。[4] A. Ayzenberg、A. Rukhovich，《多重图的团复形、边膨胀与竞赛复形》，《同调、同伦与应用》27(2)，2025，401–422（预印本 arXiv:2012.07600）[5] A. Ayzenberg、T. Gebhart、G. Magai、G. Solomadin，《层论：从深层几何到深度学习》，预印本 arXiv:2502.15476。[6] A. Bj¨orner、M. L. Wachs、V. Welker，《偏序集纤维定理》，Trans. Amer. Math. Soc. 357:5（2005），1877–1899。[7] C. Bodnar、F. Di Giovanni、B. P. Chamberlain、P. Li`o、M. M. Bronstein，《神经层扩散：从拓扑视角看图神经网络中的异配性与过平滑》，《神经信息处理系统进展》35（2022），18527–18541。[8] V. M. Buchstaber、A. Yu. Vesnin，《n值群、分支覆盖与双曲三维流形》，《数学文集》215:11（2024）1441–1467。[9] M. Crichigno、T. Kohler，《团同调是》 QMA_1《-困难》，《自然通讯》15，9846，2024。[10] J. M. Curry，《层、余层及其应用》，预印本 arXiv:1303.3255v2[11] T. Dey、Y. Wang，《数据分析的计算拓扑学》。剑桥大学出版社（2022）。[12] D. Govc，《计算有向旗复形的同伦类型》，预印本 arXiv:2006.05333。[13] D. Govc、R. Levi、J. P. Smith，《竞赛图复形、方向性过滤与持续同调》，《应用与计算拓扑杂志》5:2（2021），313–337，预印本 arXiv:2003.00324[14] D. V. Gugnin，《分次 Frobenius n-同态的拓扑应用》，《莫斯科数学会汇刊》，2011，97–142。[15] D. V. Gugnin，《分次 Frobenius n-同态的拓扑应用，II》，《莫斯科数学会汇刊》，2012，167–182。[16] D. V. Gugnin，《流形分支覆盖次数的下界》，《数学札记》103:2（2018），187–195。[17] D. Dugger，《同伦余极限入门》，2008，预印本。[18] B. Iversen。《层的上同调》。Universitext丛书，施普林格出版社，1986。

[19] D. Kozlov，《组合代数拓扑》，AACIM系列第21卷，2008。[20] S. Mac Lane。《工作数学家的范畴》。施普林格科学与商业媒体，第5卷，1978。[21] Michelle L. Wachs，《偏序集拓扑：工具与应用》，《几何组合学》，IAS／帕克城数学系列，2004。[22] V. Welker、G. M. Ziegler、R. T. ˇZivaljevi´c，《同伦余极限——组合应用的比较引理》，《纯粹与应用数学杂志》（克雷尔杂志）999:509（1999），117–149。

Noeon Research电子邮箱地址：
ayzenberga@gmail.com

National Research University „Higher School of Economics“,
International Laboratory of Cluster Geometry电子邮箱地址：
vkhoroshavkina@gmail.com