arXiv:2602.08748v1 [math.GR] 9 Feb 2026

代数 Bieri-Strebel 群的树对

LEWIS MOLYNEUX

摘要。我们重新介绍一种此前发现的、用于构造代数 Bieri-Strebel 群的树对表示的方法，并展示一类不具有树对表示的高阶群。通过这一研究，我们证明不存在某个最大次数，使得对于所有更高次数的多项式，其相关的代数 Bieri-Strebel 群都必然具有树对表示。

1. 引言

树对表示。在 Thompson 类群的研究中具有独特的重要性，尤其是在研究有限性性质时。即使仅考虑 Thompson 群 **F**，将元素表示为有序树对的等价类这一方法，对于确定**F** 具有 F_∞ 性质 [Bro87] [Zar19], 、计算无限及有限表示 [CFP96] [Bura],、计算 BNSR 不变量 [WZ15], ，乃至证明 **F** 在一个 $CAT(0)$ 立方复形上无不动点作用 [Far03], 都发挥着至关重要的作用。这种方法同样有益于研究 Thompson 类群家族的其他成员。不仅可以为 Stein 群 [Ste92], 、Lodha-Moore群 [Burb], ，甚至 Brin 群 2V[BC10], 等多种多样的群构造此类表示，而且对于计算其中许多群的性质也很有帮助 [SZ], [Zar17], [Wla11]。

Bieri-Strebel 群是一类源自 Thompson 群 **F**推广的群。Thompson 群通常被理解为由$[0,1]$上的分段线性保向同胚构成的群，其斜率属于 $\langle 2\rangle$，断点属于 $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \{\frac{a}{2^b} | a,\ b \in \mathbb{N}\}$。比耶里和施特雷贝尔的构造使我们能够将这个初始群的许多方面推广。给定实直线的一个区间 I、实数的一个乘法群 P 以及 A ——实数加法群的一个 $\mathbb{Z}P$ 子模——我们可以将 $G(I、A、P)$ 定义为由 I 上的分段线性保向同胚构成的群，其斜率属于 P ，断点属于 A [BS16]。这是一类极其庞大的群。除了旨在确定 Bieri-Strebel 群一般性质的研究之外，对这类群的大部分研究都集中于

这类群中可表示为$G([0,1],\mathbb{Z}[\beta],\langle\beta\rangle)$的子类，其中 β 是 $\mathbb{R}$中的某个代数数。请注意，这个类包含 $\mathbf{F}$，因为 $G([0,1],\mathbb{Z}[\frac{1}{2}],\langle 2\rangle)$；但也包含每个布朗-汤普森群 $\mathbf{F}_n$，因为 $G([0,1],\mathbb{Z}[\frac{1}{n}],\langle n\rangle)$。

对代数 Bieri-Strebel 群这一类群的研究，始于 Cleary 的工作 [Cle95] and [Cle00]，。不过，直到 Burillo、Nucinkis 和 Reeves 的研究 [BNR21]，人们才发现了一个代数 Bieri-Strebel 群的树对表示，该群所关联的代数数不是线性的。然而，这篇论文的重点是群 $\mathbf{F}_\tau$，并未为任何一类代数 Bieri-Strebel 群提供通用的树对表示。Winstone [Win] 将这项工作推广，为一大类关联代数数为二次代数数的代数 Bieri-Strebel 群构造了树对。不过，Winstone 也发现，有一类代数 Bieri-Strebel 群无法拥有树对表示。对于 Thompson 类群而言，这种情况极不寻常，也使数学家研究这类群时常用的许多方法失效。Thompson 类群具有许多相似的性质，尤其是有限性性质。例如，对于许多已知 BNSR 不变量的 Thompson 类群，包括 Thompson 群 $\mathbf{F}$ [BGK10]，、布朗-汤普森群 $\mathbf{F}_n$ [Koc12][Zar17]，、Stein 群 $\mathbf{F}_{2,3}$ [SZ] 以及 $\mathbf{F}_\tau$ [MNSR24]，，其 BNSR 不变量的结构都非常相似。同样，我们通常也认为 Thompson 类群具有 F_∞ 性质。在许多情况下，这些性质可以从树对表示推导出来。对于没有树对表示的 Thompson 类群，其性质几乎无法轻易推断。具体到没有树对表示的 Bieri-Strebel 群，目前真正已知的只有关于 Bieri-Strebel 群整体的结果，例如 Tanner 关于有限生成的结果 [Tan23]。与其他 Thompson 类群相比，这些群的性质可能截然不同。

本文扩展了无法拥有树对表示的代数 Bieri-Strebel 群这一类。具体而言，本文证明了以下定理。

定理 1.1. 代数 *Bieri-Strebel* 群 $G([0。1],\ \mathbb{Z}[\beta],\ \langle\beta\rangle)$，其中 β 是多项式 $ax^{2n}+bx^n-1$ 的根，且 $0<\beta<1$，不可能拥有树对表示。

这一类包含代数 Bieri-Strebel 群，其关联代数数的次数可以任意高，从而有别于 Winstone 那一类仅由二次 Bieri-Strebel 群构成的类。

2. Thompson 群

定义 2.1. Thompson 群 **F** 是单位区间 $I = [0,1]$ 上分段线性、保向的同胚所构成的群，使得 ([Bura], 1.1.1)

- 每条线性线段的斜率都属于乘法群 $\langle 2 \rangle$
- 断点（即斜率之间的点）落在 $I \bigcap \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \{ a\, 2^b \in I | a,b \in \mathbb{N} \}$

这个群以及相关的**T** 和**V**群，最初由 Richard Thompson 于 1965年研究。已有证明表明**F** 具有 F_∞ 性质，因此它是有限表示的。有限表示见（[Bura], 2.4.1），但对我们的目的并无用处。更常见的做法是采用无限表示（[Bura], 2.1.1）

$$\mathbf{F} = \langle x_0, x_1, x_2, \ldots | x_j x_i = x_i x_{j+1}, j > i \rangle \tag{1}$$

许多性质，包括这一无限表示，都是从**F** 的一种性质推导而来，这种性质称为树对表示

2.1. F 群的树对。 将**F** 的每个元素视为一个从I映射到I的函数，可以看出，根据定义 2.1 的约束，每个这样的函数仅由其断点的位置决定，因为函数不过是连接各个断点的线性线段。函数的每个断点都由定义域区间上的一个值和陪域区间上的一个值组成。**F** 的元素是$I = [0,1]$的保向同胚，因此对于任意$f \in TF$，$f(0) = (0)$且 $f(1) = 1$。对于**F**的给定元素，我们可以取每个断点在定义域上的值，并构成集合 $\{x_0, \ldots, x_n\}$，其中$x_0 = 0$，$x_1 = 1$，且$j > i \Rightarrow x^j > x_i$。Cannon、Floyd 和 Parry 将其称为区间划分[CFP96],第 2 节）。

由于所有断点都位于$I \bigcap \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$中，我们可以计算它们之间各区间的长度，并将其表示为$a\, 2^b$、a、$b \in \mathbb{N}$的形式。然后，我们可以通过引入冗余断点（即函数梯度不变处的断点）来细化这个区间划分，从而将任意长度为$a\, 2^b$ 的区间改写为a 个长度为 $\frac{1}{2^b}$的区间。这样便得到 Cannon、Floyd 和 Parry 所说的二进划分。我们可以对定义域区间划分 $\{x_d,0, x_d,1, \ldots, x_d,n\}$和陪域区间划分 $\{x_c,0, x_c,1, \ldots, x_c,n\}$都进行这种细化。接下来，可以将元素$f \in \mathbf{F}$ 视为一个函数，它将定义域区间 $[x_d,i, x_d,i+1]$

映射到陪域区间 $[x_{c,i}, x_{c,i+1}]$，其中 $0 \leqslant i \leqslant n-1$。由此得到**F**群元素的区间划分表示。

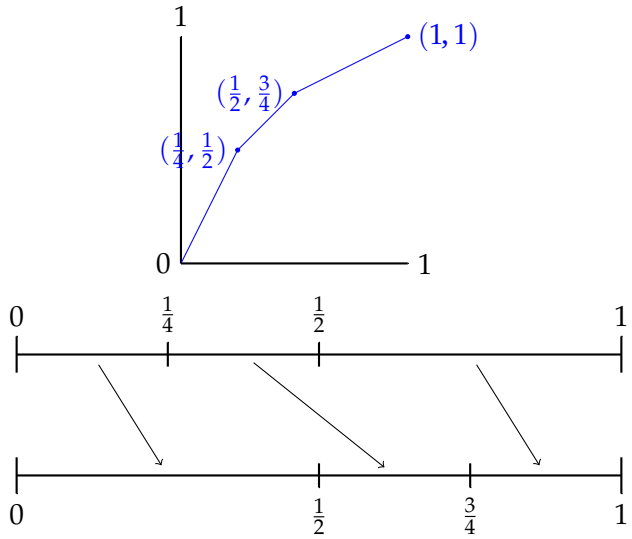

图1. F 群的同一个元素，既可表示为函数 $f : I \to I$，也可表示为一对划分。

我们可以将区间划分表示转换为树对表示：对区间的每个二进划分，按以下方式将其转换为一棵有根二叉树

- 树的每个节点表示一个标准二进区间（即长度为 $\frac{1}{2^a}$ 的区间，$a \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$）。
- 树的根节点表示区间 I。• 对于对应区间为 $[\,a\ 2^b、a_{2^b}^{+1}]$ 的节点，正下方的两个节点分别表示 $[\frac{2a}{2^b}, {}^2a_{2^{b+1}}^{+1}]$（左侧）和 $[\frac{2a+1}{2^{b+1}}、\frac{a+1}{2^b}]$（右侧）。

因此，深度为 n 的叶节点（下方没有节点的节点）表示区间划分中的一个长度为 $\frac{1}{2^n}$ 的区间；其中根节点的深度为 0，其他节点的深度等于该节点与根节点之间唯一路径上的边数。

正如两个区间划分可以表示一个同胚，两个有根二叉树也可以表示 F 群中的一个元素：将最左侧的树中从左向右数第 n 个叶节点所表示的区间线性映射到最右侧的树中的第 n 个叶节点。

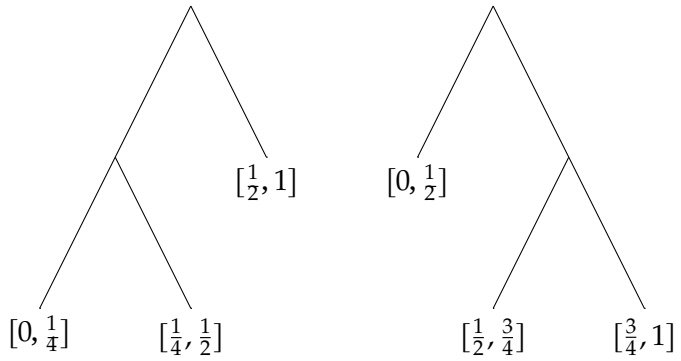

图 2. 上文 1 中的元素现在以树对形式表示。请注意，树中的节点位置与划分中的断点位置相似。

我们可以通过两个重要步骤，将这种表示单个群元素的方法转化为表示整个群的方法。第一步是在树对的集合上施加一个等价关系，使得 F 群中的每个元素恰好对应一个等价类；第二步是在树对的等价类之间定义一种二元关系，使其等价于 F 群中的函数复合。

第一步是认识到，在元素的区间划分表示中插入一个冗余断点，会反映为在树对表示中添加一对冗余树枝。正如冗余断点会将一个二进区间及其映射到的区间各自平分，一对冗余树枝也会通过分别向最左侧的树和最右侧的树添加一个叉形，将一个叶节点及其对应的叶节点分开。（[Bura], 第 14 页）。冗余断点不会改变底层函数，因此一对冗余树枝也不会改变底层函数。由此，我们可以在树对集合上建立一个等价关系：如果一个树对可以通过有限次添加或移除冗余树枝对从另一个树对得到，则这两个树对相关。

在此关系下的每个等价类中，我们都能找到至少一个不含冗余树枝的“约化”树对图。事实上，正如（[Bura], 2.3.5）所示，该约化图在此等价类中是唯一的。

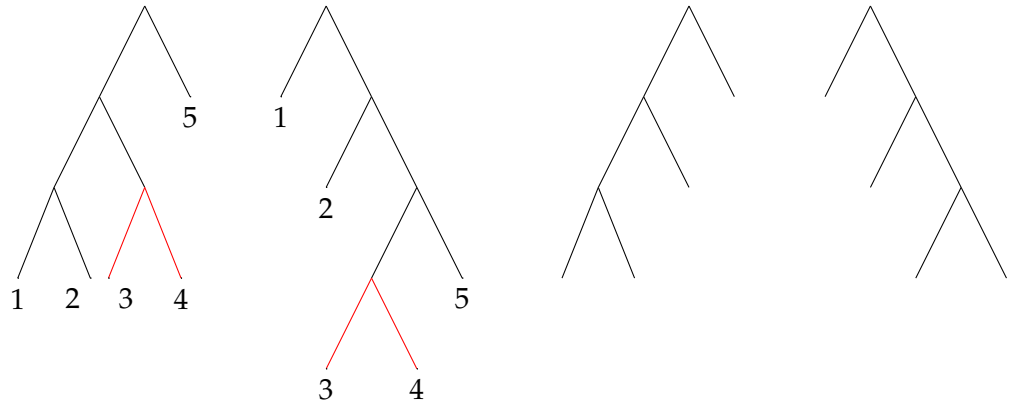

图 3. 带有一个冗余插入符（以红色突出显示）的树对图，以及与之等价的约简图。

我们利用这一等价类来构造二元运算。考虑**F 群**中的两个元素，并将它们分别表示为约化树对。通过向每个树对添加冗余树枝，直到第一个树对的最右侧的树与第二个树对的最左侧的树完全相同，我们就能找到表示这两个元素复合的树对。由第一个树对的最左侧的树和第二个树对的最右侧的树构成的树对，属于表示原来两个元素复合的树对的等价类，但它不一定是该等价类的约化代表（[Bura], 第 1.3 节）。

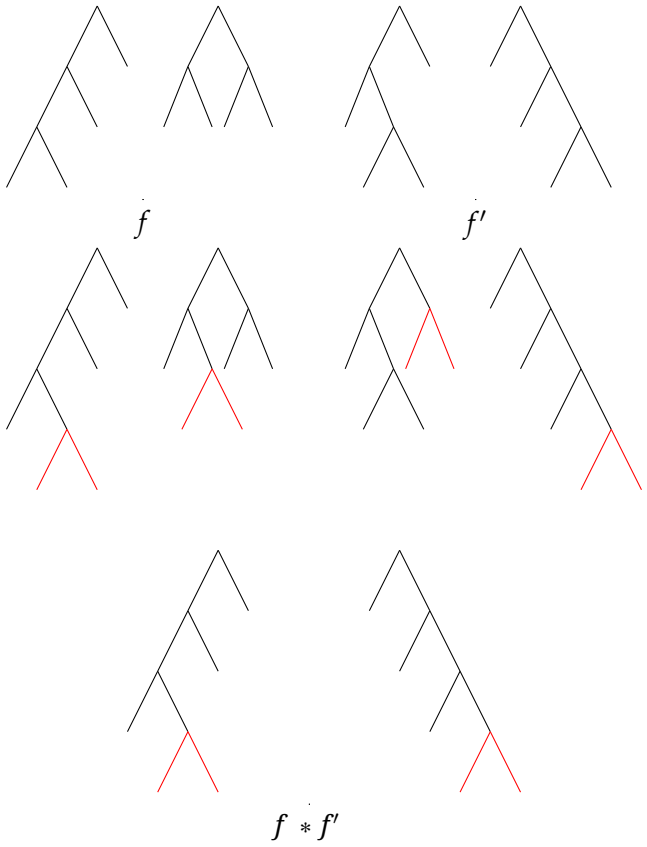

图 4. 树对复合的演示。

2.2. **F**$_n$**.** 虽然有许多种将 Thompson 群 **F**推广的方法，但布朗-汤普森群这一族在 Thompson 群与 Bieri-Strebel 群之间提供了一个有用的折中。许多关于布朗-汤普森群的概念都可以推广到代数 Bieri-Strebel 群，而我们已经讨论以及将要讨论的许多关于**F** 的概念也适用于**F**$_n$ 群。因此，在继续讨论 Bieri-Strebel 群之前，先定义并讨论布朗-汤普森群是明智之举。

定义 2.2. 对于$n \in \mathbb{N}$、$n \geqslant 2$，布朗-汤普森群**F**$_n$ 是单位区间 $[0,1]$（通常记作I）上的分段线性保向同胚所组成的群，满足：

- 所有梯度都属于 $\langle n \rangle$。

• 这些斜率之间有有限个断点。• 所有断点都落在 $I \bigcap \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ 中。

显然，布朗-汤普森群是 Thompson 群的自然推广。可以看出，Thompson 群 **F** 与布朗-汤普森群 $\mathbf{F}_2$相同。布朗-汤普森群的表示与**F**类似。

$$\mathbf{F}_n = \langle x_0, x_1, ..., | x_j x_i = x_i x_{j+n-1} \text{ for } j > i \rangle \tag{2}$$

与**F**类似，布朗-汤普森群$\mathbf{F}_n$ 既可以用划分对表示，也可以用树对图表示。表示不同布朗-汤普森群的树对，其主要区别在于叉节点的形状。在**F**中，每次细分一个区间时，都会将其分成两个相等的部分。这一概念推广到$\mathbf{F}_n$，此时每个区间都细分为N 个相等的部分。这意味着，在$\mathbf{F}_n$的树对图中，每个叉形都有n 个分支。也就是说，每个节点要么没有直接后代（因此是一个叶节点），要么有n 个直接后代。

除了这一差异，树对在$\mathbf{F}_n$ 中的作用方式与在**F**中完全相同。冗余树枝也可以用相同的方法检测。我们仍然构造相同的树对等价类，树对合成的方式也完全相同。因此，许多根据树对图得出的**F** 的性质，都可以类比推广到$\mathbf{F}_n$，即使这些性质并不完全相同。第 2 节中的表示就是一个很好的例子：它与**F**的表示类似，但会随着n 的变化而改变。

3. BIERI-STREBEL 群

Thompson 群已通过多种不同方式得到推广，其中一些值得注意的例子包括 Stein 群 [Ste92] 和布林群 [Bri04]。我们选择的推广方法由比耶里和施特雷贝尔提出，它允许灵活选择同胚所作用的区间、同胚的斜率以及断点的位置。

定义 3.1。 ([BS16], 第 ii 页) 对于实数集中的一个区间 I、正实数乘法群的一个乘法子群 P 以及实数集的一个$\mathbb{Z}[P]$子模 A，我们将 Bieri-Strebel 群 $G(I、A、P)$ 定义为满足以下条件的分段线性保向同胚的群：

• 所有梯度都属于P。• 这些斜率之间有有限多个断点。

- 所有断点都落在$I \bigcap A$中。

Thompson 群 **F** 是群 $G([0,1], \mathbb{Z}[\frac{1}{2}], \langle 2 \rangle)$。我们也可以将 Brown 对 Thompson 群的推广（[Bro87]）$\mathbf{F}_n$ 定义为群$G([0,1], \mathbb{Z}[\frac{1}{n}], \langle n \rangle)$。

3.1. **代数数与细分多项式**。 由于 Bieri-Strebel 群在基本定义上非常一般，我们考虑一类范围较小的群。我们称这类群为代数 Bieri-Strebel 群。

定义 3.2。 对于正代数数 β，代数 Bieri-Strebel 群 $\mathbf{F}_\beta$ 是 Bieri-Strebel 群 $G([0,1], \mathbb{Z}[\beta], \langle \beta \rangle)$。

如 2.1 节所述，代数 Bieri-Strebel 群作为划分对的群来研究尤其有用。这是因为代数数与多项式相关联，而我们可以利用多项式构造划分。

定义 3.3. 细分多项式是形如$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x - 1$的多项式，其中$a_i$均属于 $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$。

引理 3.4. *([Win],* 引理 *2.2.1)* 任何非平凡细分多项式 $P(x)$恰有一个大于0的实根，且该根位于0 与1之间。

证明。 我们显然可以看出$P(0) = -1$，并且$P(1) > 0$，只要我们没有$a_i = 0 \; \forall i$，也没有恰好一个a_i 等于 1、其余都等于 0（这些情况很简单，可以忽略）。由于 $P(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续函数，因此必定存在某个值 $0 < \beta < 1$，使得$P(\beta) = 0$。

为了证明 β 是唯一的，我们假设存在 $\beta' \neq \beta$。不失一般性，假设 $\beta < \beta'$。由于a_i 均为非负数（再次排除$a_i = 0$ 对所有i均成立这一平凡情形），我们知道$P(\beta) < P(\beta')$。因此，它们不可能相等，且$P(\beta') \neq 0$。□

请注意，在 [Win], Winstone 将其细分多项式表示为 $x^n - a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ 的形式。这种形式在他的情形中有其用途，但并不是我们表达细分多项式时所偏好的方法。由此产生的主要差异是：我们的细分多项式在 0 和 1 之间有唯一的根，而 Winstone 的多项式有唯一的正根。

我们之所以将这种形式的多项式称为“细分多项式”，是因为它们提供了一种将区间划分为 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 个区间的方法，每个区间的长度都属于 $\langle \beta \rangle$。这对于构造 $\mathbf{F}_\beta$ 群元素的分割对表示极为有用。我们可以通过写成$P(\beta) = 0$来实现这一点，其中 β 是我们的细分多项式 P 的正实根。

由于每个细分多项式都有一个 -1 常数项，我们可以将这个等式改写为 $a_n\beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \ldots\ldots + a_1\beta = 1$。由于构造代数 Bieri-Strebel 群时，我们通常会将区间长度取为 1，因此可以将这个等式理解为这些线段长度之和（每条线段的长度都可以表示为 β^k，其中 $k \in \mathbb{N}$）等于 1。于是，我们可以将区间划分为 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 条线段，其中 a_n 条线段的长度为 β^n，a_{n-1} 条线段的长度为 β^{n-1}，依此类推。对于任何作为细分多项式正实根的 β，我们都能找到这样的划分。

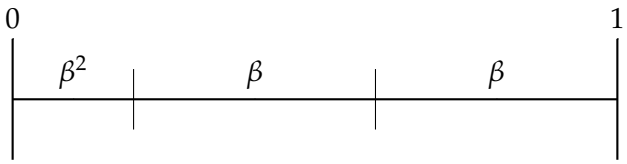

图 5. 基于细分多项式 $x^2 + 2x - 1$ 的单位区间划分

这种划分方法可以应用于先前划分所产生的任何子区间，其方式类似于为 **F** 群构造划分对时所采用的反复二等分。只要始终使用相同的多项式划分，所有生成的子区间长度都将为 $\langle\beta\rangle$。这在构造 $\mathbf{F}_n$ 的元素时非常有用，因为任何将 β^i 映射到 β^j 的元素，其对应部分的梯度为 β^{j-i}，而这始终属于 $\langle\beta\rangle$，即 $\mathbf{F}_\beta$ 的斜率群。

将细分多项式的方法应用于先前的例子，可以看出代数 Bieri-Strebel 群是 **F** 群和 $\mathbf{F}_n$ 的自然推广。由于 **F** 群中的划分将一个区间分成 2 个相等部分，而 $\mathbf{F}_n$ 中的划分将一个区间分成 n 个相等部分，我们可以分别为它们指定细分多项式 $2x - 1$ 和 $nx - 1$。因此，我们可以将 $\mathbf{F}_n$ 视为“线性” Bieri-Strebel 群，也就是说，具有线性细分多项式的代数 Bieri-Strebel 群。

3.2. **Winstone 的树对**。对我们理解代数 Bieri-Strebel 群，尤其是那些具有二次细分多项式的群而言，一项重要成果是为这些群发展了树对表示。树对最初由 Burillo、Nucinkis 和 Reeves 在 [BNR21] 中针对细分多项式为 $x^2 + x - 1$ 的群引入，该群通常记作 **F 群**$_\tau$。本文有三个主要结论

对于代数 Bieri-Strebel 群的树对表示的发展。首先，区间的不同长度（其形式均为 β^k）对于群 **F 群**β 而言对应于树上的不同深度；并且由于 Bieri-Strebel 群中的划分会产生不同长度的区间，表示这些划分的叉节点应具有延伸至不同深度的分支。

第二种实现方式延续了第一种。由于划分不再产生多个长度相同的区间，因此这些区间出现的顺序很重要。为了在树对中表示这一点，我们必须使用多种不同的叉形，它们以不同方式排列长短不一的分支。

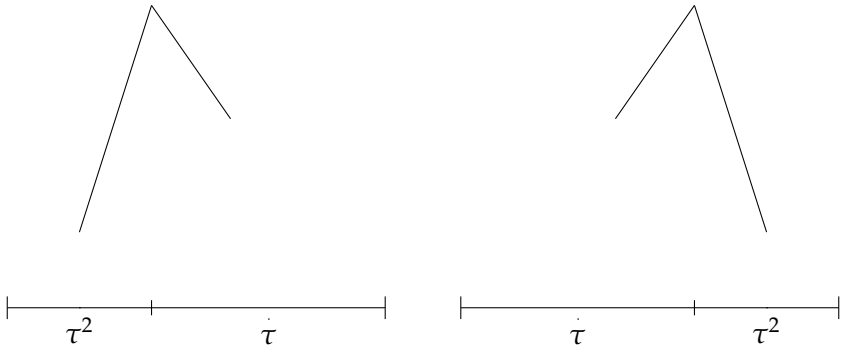

图 6. 对应于$x^2 + x - 1$的 Bieri-Strebel 群的两种叉形类型，称为$\mathbf{F}_\tau$，以及它们各自表示的区间划分。我们将长分支视为深度 2，短分支视为深度 1。

最终的实现是第二种实现的扩展。由于构建树时可使用两种不同类型的叉节点，现在可以构造两棵叉节点不同、但表示同一划分的树。因此，当我们像在 2.1 节中那样构造树对图的等价类时，必须在等价关系中加入在等价子树之间切换的规则。我们将由不同叉节点构成的一对等价树称为叉节点关系。

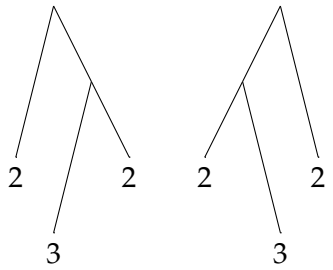

图 7. 由叉节点构成的两个等价树，位于 $\mathbf{F}_\tau$树对表示中。

Burillo、Nucinkis 和 Reeves 利用这种树对表示，为 $\mathbf{F}_\tau$ 构造了一个无限表示。该表示包含两组不同的无限生成元族，分别对应树对表示中的两种不同叉形类型。该表示还包含一组与 1 中 $\mathbf{F}$ 群表示类似的关系，以及一组对应于 7 中所示树等价的关系。综合以上内容， [BNR21] 构造的表示可以写作

$$\mathsf{F}_\tau = \langle x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots | a_j b_i = b_i a_{j+1} \text{ for } a, b \in \{x, y\}, i < j; x_i x_{i+1} = y_i^2 \rangle \tag{3}$$

将x_i 和y_i 视为分段线性同胚时，我们可以将它们写成如下形式

$$\begin{aligned} x_i(n) &= \begin{cases} n & \text{for } 0 \leqslant n \leqslant 1-\tau^i, \\ \tau^{-2}n - \tau^{-1}(1-\tau^i) & \text{for } 1-\tau^i \leqslant n \leqslant 1-\tau^i+\tau^{i+4}, \\ n + \tau^{i+3} & \text{for } 1-\tau^i+\tau^{i+4} \leqslant n \leqslant 1-\tau^{i+1}, \\ \tau n + \tau^2 & \text{for } 1-\tau^{i+1} \leqslant n \leqslant 1, \end{cases} \\ y_i(n) &= \begin{cases} n & \text{for } 0 \leqslant n \leqslant 1-\tau^i, \\ \tau^{-1}n - \tau^{-1}(1-\tau^i) & \text{for } 1-\tau^i \leqslant n \leqslant 1-\tau^{i+1}, \\ \tau n + \tau^2 & \text{for } 1-\tau^{i+1} \leqslant n \leqslant 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

Burillo、Nucinkis 和 Reeves 也成功将这个无限表示简化为一个包含 4 个生成元和 10 个关系的有限表示。与**F 群**的有限表示一样，相较于无限表示，这个表示使用起来较为繁琐，但可见于（[BNR21],第 4 节）。

在他的论文中， [Win], Winstone 将这些结果推广到了二次 Bieri-Strebel 群，也就是说，推广到了具有二次关联细分多项式的代数 Bieri-Strebel 群。在此过程中，Winstone 提出了两个与我们的讨论相关的定理，并给出了这类群的一个子集的无限表示。 [Win] 中最重要的结果很可能是以下内容：

引理 3.5。*([Win],* 定理 *1.2.3)* 对于一个二次 *Bieri-Strebel* 群$\boldsymbol{F}_\beta$，若其细分多项式的形式为 $ax^2 + bx - 1$，则$\boldsymbol{F}_\beta$ 存在良定义的树对表示，当且仅当 $a \leqslant b$。

在考察其他二次 Bieri-Strebel 群的树对表示时，我们必须考虑细分多项式的系数增大时叉形类型的迅速增加。如图 6 所示，细分多项式决定了可能的区间划分，进而决定了可能的叉形类型。一个重要的观察是，$\mathbf{F}_\beta$ 的一个划分中的区间数等于$a + b$，其中$\mathbf{F}_\beta$ 的细分多项式为$ax^2 + bx - 1$。我们预期任一叉形都有a 条长度为 2 的分支和b 条长度为 1 的分支（分别对应于a 个长度为 β^2的区间和b 个长度为 β 的区间，这些区间构成$\mathbf{F}_\beta$的一个划分）。因此，$\mathbf{F}_\beta$的树对表示中共有$\binom{a+b}{a}$种可能的叉形类型。

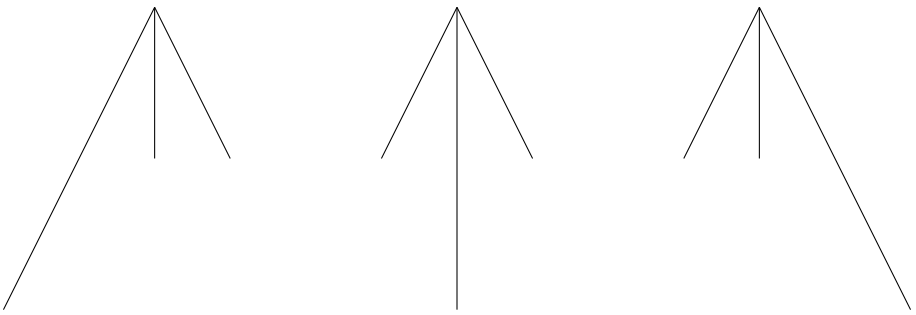

图 8. 带有细分多项式$\mathbf{F}_\beta$ $x^2 + 2x - 1$时，三种可能的叉形类型。

Winstone 的第二个主要结果简化了二次 Bieri-Strebel 群中种类繁多的叉形类型，使树对表示更易于处理。

引理 3.6. *([Win],* 注释*35)* 在二次 *Bieri-Strebel* 群的每个定义良好的树对表示中，都存在两种叉形类型，使得对于该树

对表示中的任意树，都可以仅使用这两种类型的叉形构造出一棵等价的树

这一结果不仅对于简化树对表示十分重要，还引出了具有树对表示的二次 Bieri-Strebel 群的一般表示。再次约化每个树对表示后，我们可以用两族无限生成元生成 $\mathbf{F}^\beta$。利用这些叉形类型及其之间的叉节点关系，Winstone 得以为大量二次 Bieri-Strebel 群构造无限表示。

引文 3.7。*([Win], 定理 1.2.5)* 设 F^β 为一个代数 *Bieri-Strebel* 群，其相应的细分多项式为 $ax^2 + bx - 1$。若 $a \leqslant b$，则 F^β 具有以下无限表示：

$$F_\beta = \langle x_0, y_0, x_1, y_1, ... | R_1, R_2 \rangle \tag{5}$$

其中 R_1 和 R_2 是以下关系：

$$\begin{aligned} &R_1 : f_j g_i = g_i f_{j+a+b-1} \text{ for } g, f \in \{x, y\}, i < j \\ &R_2 : x_{i+a} x_{i+a+1} ... x_{i+2a-1} x_i = y_i y_{i+1} ... y_{i+a-1} y_i \text{ for all } i \geqslant 0 \end{aligned} \tag{6}$$

如果需要，我们可以将这些无限表示约化为有限表示。我们目前并不需要有限表示，因此将暗示其存在，而不明确写出它们。

对于细分多项式为$ax^2 + bx - 1$,$a > b$的二次 Bieri-Strebel 群，除了适用于所有 Bieri-Strebel 群或这类群的其他大型子集的一般性结论外，目前所知不多。Winstone（[Win], 定理 1.2.4）得出结论：每个这样的群都含有一个元素g，它既不能表示为划分对，也不能表示为树对。Owen Tanner（[Tan23],定理 3）证明了所有这类群都是有限生成的。

特别值得关注的是，多项式形式为 $(n-1)nx^2 + x - 1$，其中 $n \geqslant 2$ 的群。该多项式可因式分解为 $(nx - 1)((n-1)x + 1)$，因此具有唯一正根 1_n。根据 3.2 中给出的代数 Bieri-Strebel 群定义，我们预计具有此细分多项式的群，其斜率属于 $\langle 1_n \rangle$，断点属于$\mathbb{Z}[1_n]$，这将使其与 $\mathbf{F}_n$ 相同。值得注意的是，$\mathbf{F}_n$ 可表示为细分多项式为 $nx - 1$ 的代数 Bieri-Strebel 群；按 Winstone 的方法用该多项式计算区间划分和树对，会得到 2.2 中描述的树对。这引出了以下猜想：

猜想 3.8。 代数 *Bieri-Strebel* 群 F_β 的一个定义良好的树对，只能由相应的细分多项式 $P(x)$ 推导得出，前提是 $P(x)$ 是在形式为 $a_n x^n + \ldots + a_1 x - 1$、$a_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 的多项式中，以 β 为根的极小多项式。

在线性和二次细分多项式中，我们可以看到支持这一猜想的证据。具体来说，我们知道，所有线性细分多项式都具有 $nx - 1$ 的形式，其中 x（该多项式的根为1_n）。如果某个二次细分多项式的根为 1_n，那么根据因式定理，该多项式必定有 $(x - 1_n)$ 作为因子；在处理整系数多项式时，可将其表示为 $nx - 1$。现在，我们可以利用已知的细分多项式一般形式，确定这个二次多项式其他因子的性质。由于该多项式是二次多项式，它只能分解为两个线性多项式的乘积，因此我们可以写成

$$ax^2 + bx - 1 = (nx - 1)(cx + d) \tag{7}$$

由此我们可以立即得出 $d = 1$，因为 $-1 * 1 = -1$。同样，我们可以得出 $c > 0$；否则 $a \leqslant 0$，这意味着该二次多项式不是细分多项式。因此，我们得到以下两个方程：$a = nc$ 和 $b = n - c$。由于 n 和 c 都是正整数，因此可以得出 $a > b$。因此，每当二次细分多项式 $ax^2 + bx - 1$ 与线性细分多项式 $nx - 1$ 共享其唯一正根时，就有 $a > b$，因此它不属于 Winstone 推导树对所针对的细分多项式集合。

我们注意到，这一陈述不能构成充要条件。也就是说，一个与次数较低的细分多项式没有公共根的细分多项式，不一定具有树对表示。作为一个简短的例子，多项式 $3x^2 + x - 1$ 的根为$\frac{\sqrt{13}-1}{6}$，显然是无理数，因此不可能成为任何一次多项式的根；但根据 3.5，该细分多项式并没有明确定义的树对表示。

4. 高阶多项式

对于具有高阶细分多项式的代数 Bieri-Strebel 群，除了 Bieri-Strebel 群的一般性结果（例如 Tanner 的有限生成结果 [Tan23]）之外，我们所知甚少。在研究高阶

多项式时，我们预计可以推广用于构造二次 Bieri-Strebel 群的树对表示的方法。具体而言，对于细分多项式为 $ax^2 + bx - 1$ 的群，其树=对表示中的每个叉形都有 a 条长度为 2 的分支和 b 条长度为 1 的分支。因此，推广到高阶多项式时，我们预计细分多项式为 $\Sigma_{i=1}^{n} a_i x^i - 1$ 的群将有 a_i 条长度为i 的分支。沿着这一推广思路，已知与多项式 $x^3 + x - 1$ 对应的群存在叉形关系，但尚不清楚这是否能得到定义良好的树对表示。

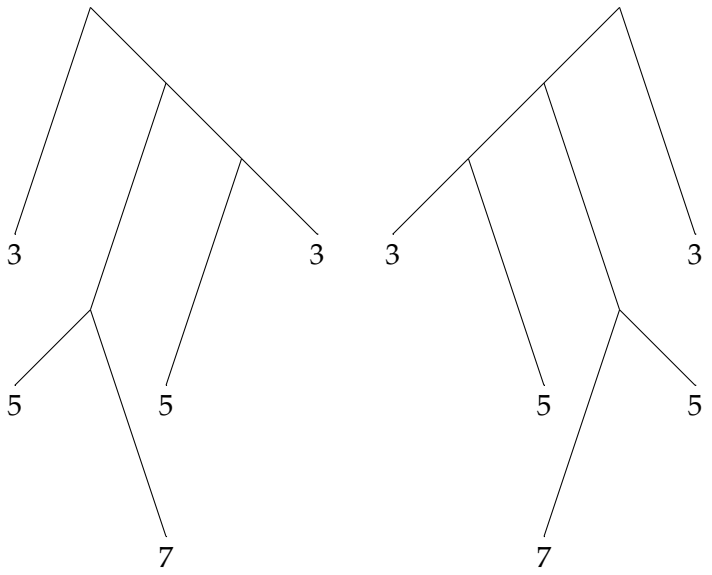

图 9。$x^3 + x - 1$ 的叉形关系。它与二次叉形关系的不同之处在于，每棵树都使用了两种叉形类型。

虽然确定高阶 Bieri-Strebel 群的良定义树对仍是一个尚未解决的问题，但我们能够确定一些不适用基于细分多项式的树对表示的情形。

定理 4.1。 细分多项式为 $ax^{2n} + bx^n - 1$ 的 *Bieri-Strebel* 群不可能具有良定义的树对表示。

我们从以下例子开始证明。

例 4.2。 对于所有 $0 < p \in \mathbb{Z}[\beta]$，其中 β 是一个n次多项式的根，是否可以写成：

$$p = b_0 + b_1\beta + ... + b_{n_1}\beta^{n-1}$$

其中 $b_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 对所有 i?

下面的反例可作为 Winstone 定理（[Win], 定理 2.3.3）的反例。

反例。 考虑多项式 $x^4 + x^2 - 1$，其根为 $\sqrt{\tau}$。我们将取 $p = 1 - \sqrt{\tau}$。我们使用该根的倒数，取$\beta = \sqrt{\tau}^{-1}$，这意味着 $p = 1 - \beta^{-1}$，并且由于我们有 $\beta^4 - \beta^2 - 1 = 0$，我们可以说 $\beta^{-1} = \beta^3 - \beta$，因此 $p = 1 - \beta^3 + \beta$。

我们可以通过将 p 的系数写成向量 $\underline{p}$，来表示把 $\beta^3 = \beta^{-1} - \beta$ 代入 p 的作用，并将该代入表示为基于多项式$x^4 - x^2 - 1$的矩阵 A，改写为 $\beta^4 = \beta^2 + 1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \underline{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

为了简化后面的一段，我们将计算

$$A\underline{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

如果可以将 p 表示为仅含 β 的幂的正系数的形式，那么就存在这样的 N，使得 $A^N p$ 只有正项。我们将用构造出的例子说明情况并非如此。首先，我们将计算

$$A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

这里我们希望强调矩阵的结构：每行和每列中交替出现的元素为空。我们将考虑这种形式的一般矩阵，并将其乘以 A：

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ e & 0 & f & 0 \\ 0 & g & 0 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ c+d & 0 & c & 0 \\ 0 & e & 0 & f \\ g+h & 0 & g & 0 \end{pmatrix}$$

它具有类似的交替模式，但所有非零元素现在都为零，而所有零元素现在都为非零。再次将该矩阵乘以 A，得到。

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ c+d & 0 & c & 0 \\ 0 & e & 0 & f \\ g+h & 0 & g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a & 0 \\ 0 & c+d & 0 & c \\ e+f & 0 & e & 0 \\ 0 & g+h & 0 & g \end{pmatrix}$$

它与A^4具有相同的结构。因此，我们可以看到，对于$N \geqslant 2$，A^{2N} 将与A^4 具有相同的结构；而A^{2N+1} 对于所有$N \geqslant 2$也将与A^5, 具有相同的结构。现在我们可以证明，这两种结构都无法产生一个向量$A^N p$，使得该向量的所有分量均为非负数。我们可以将$A\underline{p}$ 用作向量来简化问题，由此可以清楚地看出：

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ e & 0 & f & 0 \\ 0 & g & 0 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -d \\ f \\ -h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & e & 0 & f \\ g & 0 & h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ d \\ -f \\ h \end{pmatrix}$$

由于A 是一个非负矩阵，因此对于所有N，A^N 中的所有分量都将是非负数，因此当$N \geqslant 5$时，$A^N p$ 总会包含两个负数。□

不难看出，这个反例的交替性质可推广到任何形如 $ax^4 + bx^2 - 1$ 的多项式，因为所得多项式 A 将只是

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此我们有

$$A^4 = \begin{pmatrix} a+b^2 & 0 & b & 0 \\ 0 & a+b^2 & 0 & b \\ ab & 0 & a & 0 \\ 0 & ab & 0 & a \end{pmatrix}$$

它与反例中的A^4 具有相同的结构。因此，交替模式会不断重复。于是我们可以构造一个p ，使得$A^N p$始终为负数。

不那么显而易见的是，这种模式可推广到任意$a_n x^n + \ldots + a_1 x - 1$，条件是 $\{i_1, \ldots, i_k\}$ 中a^{i_j} 非零的那些$i_1, \ldots, i_k\}$ 所构成的集合并非互素。在这种情况下，A^N 与$A^N + k$具有相同的结构，其中$k =$ 是$(i_1, \ldots, i_k)$的最大公因数。不过，这可以通过初等矩阵乘法看出。

下一步是证明以下结论：

引理 4.3. 对于任意以 β 为根的二次细分多项式 $ax^2 + bx - 1$，$\sqrt{\beta}$ 不属于 $\mathbb{Z}[\beta]$。

证明。 根据定义， $\mathbb{Z}[\beta]$ 的元素具有$c_0 + c_1\beta + c_2\beta^2 + \ldots$. 的形式。然而，由于 β 是二次多项式$ax^2 + bx - 1$的根，我们可以写出$\beta^2 = \frac{1}{a} - \frac{b}{a}\beta$。因此，任何含有 β^2 或更高次幂的项都可以替换，从而可以将 $\mathbb{Z}$ 中的任意元素表示为$c + d\beta$ 的形式。

现在，假设 $\sqrt{\beta} \in \mathbb{Z}[\beta]$。那么我们可以写成 $\sqrt{\beta} = c + d\beta$。根据平方根的性质，我们可以写成

$$\begin{aligned} (c+d\beta)(c+d\beta) &= \beta \\ c^2 + 2cd\beta + d^2\beta^2 &= \beta \\ c^2 + 2cd\beta + d^2\left(\frac{1}{a} - \frac{b}{a}\beta\right) &= \beta \\ c^2 + \frac{d^2}{a} + \left(2cd - \frac{d^2 b}{a}\right)\beta &= \beta \end{aligned} \tag{8}$$

由于 β 是无理数，我们知道这个方程成立的唯一可能是等式两边的常数项相等，且 β 系数也相等。这样我们便得到以下联立方程

$$c^2 + \frac{d^2}{a} = 0$$
$$2cd - \frac{d^2 b}{a} = 1 \tag{9}$$

根据第一个方程，c^2 和 d^2 是实数集 $\mathbb{Z}$ 中数的平方，因此必为正；根据细分多项式的定义，a 也是正数（由于这里的细分多项式是二次的，$a \neq 0$，因此该方程定义良好）。因此，和式中的两项都必须非负，所以只有在 $c = d = 0$ 时，该式才能成立。然而，在第二个方程中令 $c = d = 0$，方程便化简为 $0 = 1$。这样便产生了矛盾，因此我们的假设 $\sqrt{\beta} \in \mathbb{Z}$ 必定不成立。□

我们还可以补充以下简短推论：

推论 4.4。对于任意作为二次细分多项式 $ax^2 + bx - 1$ 的根的 β，$n \in \mathbb{N}$，$\sqrt[2n]{\beta}$ 不属于 $\mathbb{Z}[\beta]$。

证明。$\mathbb{Z}[\beta]$ 在乘法下封闭，因此如果 $\sqrt[2n]{\beta}$ 属于 $\mathbb{Z}[\beta]$，那么这将意味着 $(\sqrt[2n]{\beta})^n = \sqrt{\beta}$ 属于 $\mathbb{Z}[\beta]$，而根据 4.3，我们知道这并不成立。□

考虑由非互素幂细分多项式 $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}(\mathrm{x}) = \mathrm{a}_n \mathrm{x}^{kn} + \mathrm{a}_{n-1}\mathrm{x}^{k(n-1)} + \ldots + \mathrm{a}_1 \mathrm{x}^k - 1$形成的树对表示，其中 $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$。根据 3.2，我们预期该树对表示中的叉节点有 a_n 条长度为 k_n 的分支、a_{n-1} 条长度为 $\mathrm{k}(\mathrm{n}-1)$ 的分支，依此类推。现在考虑多项式 $\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}(\sqrt[\mathrm{k}]{\mathrm{x}}) = \mathrm{a}_n \mathrm{x}^n + \mathrm{a}_{n-1}\mathrm{x}^{n-1} + \ldots + \mathrm{a}_1 \mathrm{x} - 1$。该多项式的树对表示中的叉节点将有 a_n条长度为 n 的分支、a_{n-1} 条长度为 $\mathrm{n}-1$ 的分支，依此类推。由此，我们可以考虑从 $\mathrm{P}(\mathrm{x})$ 的叉节点集到 $\mathrm{P}(\sqrt[\mathrm{k}]{\mathrm{x}})$ 的叉节点集的映射 i；该映射将每个叉节点映射到一个由各分支长度除以 k 得到的叉节点。我们可以通过确定每个叉节点所具有的分支集合的所有可能不同排列，来确定 $\mathrm{P}(\mathrm{x})$ 的树枝节点集中可能的叉节点数量；这些分支包括 a_n 条长度为 kn 的分支、a_{n-1} 条长度为 k_{n-1} 的分支，依此类推。同理，$\mathrm{P}(\sqrt[\mathrm{k}]{\mathrm{x}})$ 的可能叉节点集由 a_n 个长度为 n 的叉节点、$\mathrm{a}_n - 1$ 条长度为 $\mathrm{n}-1$ 的分支等的所有可能排列决定。因此，为 $\mathrm{P}(\mathrm{x})$ 排列的分支集合包含与为 $\mathrm{P}(\sqrt[k]{\mathrm{x}})$ 排列的分支集合相同数量的子集 $\mathrm{S}[\mathrm{P}_1]_i$，其中的分支长度相同；并且这些子集可以按如下方式排列：$|\mathrm{S}[\mathrm{P}_1]_i| = |\mathrm{S}[\mathrm{P}_2]_i|$，对所有 i 均成立。因此，$\mathrm{P}(\mathrm{x})$ 叉节点上的分支可能排列数量，与.....的可能排列数量相同

$P(\sqrt[k]{x})$，因此该映射是满射；如果 $P(x)$ 中的两个叉节点映射到 $P(\sqrt[k]{x})$ 中的同一个叉节点，那么它们必定具有相同的分支排列，因此是同一个叉节点，所以该映射也是单射。

现在，我们通过将 i^* 分别应用于树对中的每个叉节点，并保留叉节点之间的邻接关系，从而在$P(x)$的树对表示中诱导出一个映射。树中从根到每个叶节点的路径可以分解为各叉节点的分支；若i^* 应用于树对时仅将映射i 应用到树中的每个叉节点，那么每个叶节点的深度将从n映射为$n\ k$。

我们考察 Bieri-Strebel 群中树对图内从树根到任意叶节点的路径，其中$P(x)$ 是细分多项式。此路径中的每条分支长度均为$k\ *b$，其中 $1 \leqslant b \leqslant n$。因此，整条路径可表示为 $\Sigma_{i=1}^{m} k\ *b_i$，其中m 是路径中的分支数。将$i*$ 应用于该树对后，路径中的每条分支都将从长度为$k\ *b_i$ 的分支映射为长度为b_i的分支。因此，这条路径的长度就是$\Sigma_{i=1}^{m} b_i$。由于每个b_i 都是自然数，因此$\Sigma_{i=1}^{m} b_i$也是自然数；于是从根到叶节点的路径长度是自然数，每个叶节点的深度也必定是自然数。

现在考虑 i^* 在 $\mathrm{P}(\sqrt[\mathrm{k}]{\mathrm{x}})$ 的树对图空间中，某个树对 $[\mathrm{T}_1,\mathrm{T}_2]$ 的原像。$[\mathrm{T}_1,\mathrm{T}_2]$ 中第 i 个叶节点的深度为 d_i，因此，在 i 下，$[\mathrm{T}_1,\mathrm{T}_2]$ 的原像中的任意树对 $[\mathrm{T}_1',\mathrm{T}_2']$，其第 i 个叶节点的深度都必须为 $\mathrm{k}\ *\mathrm{d}_i$。树对之间的等价关系（尤其是叉形关系）规定，如果两个树对按相同顺序具有相同的叶节点深度，那么它们属于同一个等价类。因此，映射 i^* 必须将等价类映射到等价类，且不能将两个不同的等价类映射到同一个等价类。考虑映射 i_*（它将每个叶节点的深度乘以 k），即可看出该映射是满射。显然，$\mathrm{i}^*\mathrm{i}_*$ 是 $\mathrm{P}(\sqrt[\mathrm{k}]{\mathrm{x}})$ 的树对表示上的恒等映射，所以，对于 $\mathrm{P}(\sqrt[\mathrm{k}]{\mathrm{x}})$ 的树对表示中的每个 $[\mathrm{T},\mathrm{T}]$，必定存在 $\mathrm{P}(\mathrm{x})$ 的树对表示中的一个树对 $[\mathrm{T}',\mathrm{T}']$，使得 $\mathrm{i}_*([\mathrm{T},\mathrm{T}]) = [\mathrm{T}',\mathrm{T}']$，$\mathrm{i}^*([\mathrm{T}',\mathrm{T}']) = [\mathrm{T},\mathrm{T}]$，因此 i^* 是满射。

我们还可以看出，i^* 关于树对合成是一个同态。我们可以通过同时在$P(x)$和$P(\sqrt[k]{x})$中进行树对合成来验证这一点。在$P(x)$中操作时，每当我们添加一个叉形c，就会在$P(\sqrt[k]{x})$中相同的叶节点上添加$i(c)$。因此，i^* 是$P(x)$ 和$P(\sqrt[k]{x})$的树对表示中等价类之间的一个同构。这引出了下面的引理：

引理 4.5. 将 β 视为 $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x - 1$的唯一正根，并将$\sqrt[k]{\beta}$ 视为 $P(x^k) = a_n x^{kn} + ... + a_1 x^k - 1$的根。假设基于 $P(x)$ 的树对表示是F^β的一个定义良好的树对表示。或者$F^{\sqrt[k]{\beta}} \cong F^\beta$，或者基于 $P(x^k)$ 的树对不是$F^{\sqrt[k]{\beta}}$的一个定义良好的树对表示。

定理 *4.1* 的证明。为了证明 4.1，我们希望构造一个已知属于 **F 群**$\sqrt[2n]{\beta}$ 但不可能属于**F 群**β的元素。我们将构造一个属于 **F 群**$\sqrt{\beta}$的元素，并根据与定理 4.4 证明类似的论证，它也必定属于 **F 群** $\sqrt[2n]{\beta}$ 。

我们首先构造一个已知不可能属于 **F 群**β的分割对。根据 4.3，我们知道，如果一个分割对包含 $\sqrt{\beta}$ 作为非平凡断点，那么该分割对就不可能是 **F 群**β的元素。由此看来，最简单的做法是在第一个划分中仅设 $\sqrt{\beta}$ 为断点，再在第二个划分中仅设 $1 - \sqrt{\beta}$ 为断点。问题在于，由此得到的映射会将长度为$\sqrt{\beta}$ 的区间映射到长度为 $1 - \sqrt{\beta}$的区间。这就要求 $\frac{1-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}}$属于 $\langle\sqrt{\beta}\rangle$，而这很难证明。我们将改为构造一个仅具有 $\langle\beta\rangle$ 中斜率的分割对。由于 $\langle\beta\rangle \subseteq \langle\sqrt{\beta}\rangle$，我们便能保证该分割对属于 **F 群**$\sqrt{\beta}$。

我们按以下方式构造分割对。首先，取两份区间的副本，并令 $\sqrt{\beta}$ 为唯一的断点。接下来，我们以不同方式细分每个划分中长度为 $\sqrt{\beta}$ 的区间。每个区间现在将被划分为长度为 $\beta^2 * \sqrt{\beta}$ 的a 个区间和长度为$\beta * \sqrt{\beta}$的b 个区间，其中 β 是$ax^2 + bx - 1$的根，这意味着

$$\begin{aligned} a\beta^2 + b\beta &= 1 \\ a\beta^2 * \sqrt{\beta} + b\beta * \sqrt{\beta} &= \sqrt{\beta} \end{aligned} \tag{10}$$

划分中子区间的排列顺序是任意的，但有两点例外。首先，长度为 $1 - \sqrt{\beta}$ 的唯一一个区间必须是每个划分中的第 i 个区间，其中某个 i 满足此条件；其次，这些划分不能完全相同。

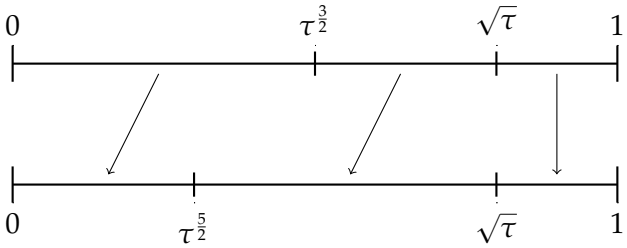

图 10。$\mathbf{F}_{\sqrt{\tau}}$ 中的一个分割对例子，其中断点 $\sqrt{\tau}$ 不属于 $\mathbf{F}_{\tau}$。从左到右，此映射的斜率为 τ、τ^{-1} 和 1

如例 10 所示，以这种方式构造的映射的梯度属于 $\langle\sqrt{\beta}\rangle$（事实上，它们属于 $\langle\beta\rangle$），但由于它们以 $\sqrt{\beta}$ 为断点，这些映射属于 $\mathbf{F}_{\sqrt{\beta}}$，却不属于 $\mathbf{F}_{\beta}$。因此，我们可以得出结论：$\mathbf{F}_{\beta}$ 与 $\mathbf{F}_{\sqrt{\beta}}$ 不是同一个群，所以根据 4.5，基于 $P(x^2)$ 的树对表示并不是 $\mathbf{F}_{\sqrt{\beta}}$ 的良定义树对表示。类似地，这个元素属于 $\mathbf{F}_{\sqrt[2n]{\beta}}$，因此 $P(x^{2n})$ 不是 $\mathbf{F}_{\sqrt[2n]{\beta}}$ 的良定义树对表示。

最后，我们需要排除存在另一种树对表示的可能性。为此，我们依赖 4.2 节中的例子。通过这个例子（及其推广），我们已经证明，可以在 $\mathbf{F}_{\sqrt{\beta}}$ 的划分中构造一个区间，其长度无法通过重复细分（即矩阵 A 所表示的乘法替换）表示为 $a_4\beta^{k+4} + a_3\beta k + 3 + a_2\beta^{k+2} + a_1\beta^{k+1}$ 的形式。然而，若要构造一棵树来表示这一划分，这样的区间就必须以这种形式表示。因此，这些区间无法作为树对表示的一部分来表示。由此我们证明，关联多项式为 $ax^4 + bx^2 - 1$ 的 Bieri-Strebel 群无法拥有定义良好的树对表示。结合 4.4 节的结果，即得到了 4.1 节的证明。

□

虽然要将其完整推广似乎颇具挑战，但我们想提出关于非互素幂多项式的这一猜想：

猜想 4.6. 关联细分多项式为 $a_n x^{kn} + a_{n-1}x^{k(n-1)} + \ldots + a_1 x^k - 1$，$k > 1$ 且并非所有 $a_i = 0$ 都满足……的 *Bieri-Strebel* 群不具有定义良好的树对表示。

参考文献

[BC10] José Burillo 和 Sean Cleary. “高维 Thompson 群的度量性质”。载于：《太平洋数学杂志》248.1（2010），第 49–62 页。DOI：10.2140/pjm.2010.248.49。网址：https://msp.org/pjm/2010/248-1/p04.xhtml.[BGK10] Robert Bieri、Ross Geoghegan 和 Dessislava Kochloukova. “Thompson 群 F 的 Sigma 不变量”。英文版。载于：《群、几何与动力学》4.2（2010），第 263–273 页。ISSN：1661-7207.[BNR21] Jose Burillo、Brita Nucinkis 和 Lawrence Reeves. “一个无理斜率汤普森群”。载于：《数学出版物》65.2（2021），第 809–839 页。网址：https://ddd.uab.cat/record/248605.（访问日期：07.06.2022）。[Bri04] Brin. “高维 Thompson 群”。英文版。载于：《*Geometriae dedicata*》108.1（2004），第 163–。ISSN：0046-5755.[Bro87] Kenneth S. Brown. “群的有限性性质”。载于：《纯粹与应用代数杂志》44.1（1987），第 45–75 页。ISSN：0022-4049。DOI：https://doi.org/10.1016/0022-4049(87)90015-6。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022404987900156.[BS16] Robert Bieri 和 Ralph Strebel. 关于实直线上分段线性同胚的群。英文版。2016.[Bura] José Burillo. *Thompson 群 F 入门*。网址：https://web.mat.upc.edu/pep.burillo/F%20book.pdf（访问日期：05/23/2024）。[Burb] José Burillo. *Lodha-Moore 群*。网址：https://web.mat.upc.edu/pep.burillo/L-M%20notes.pdf（访问日期：01/20/2026）。[CFP96] James W Cannon、William J Floyd 和 Walter R Parry. “Richard Thompson 群导论”。载于：《数学教学》42（1996），第 215–256 页。[Cle00] Sean Cleary. “ $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$中的正则剖分”。载于：《伊利诺伊数学杂志》44.3（2000），第 453–464 页。[Cle95] Sean Cleary. “具有无理斜率的分段线性同胚群”。英文版。载于：《落基山数学杂志》25.3（1995），第 935–955 页。ISSN：0035-7596.[Far03] Daniel S. Farley. “图表群的有限性与 CAT(0) 性质”。英文版。载于：《*Topology*（牛津）》42.5（2003），第 1065–1082 页。ISSN：0040-9383。

[Koc12] Dessislava H Kochloukova. “关于广义 R. Thompson F 型群的 Σ^2 不变量”。英文。发表于：《代数学杂志》371 (2012)，第 430–456 页。ISSN：0021-8693。[MNSR24] Lewis Molyneux、Brita Nucinkis 和 Yuri Santos Rego。“黄金均值Thompson群的 Sigma 不变量”。发表于：《纽约数学杂志》30 (2024)，第 532–549 页。[Ste92] Melanie Stein。“分段线性同胚群”。英文。发表于：《美国数学会汇刊》332.2 (1992)，第 477–514 页。ISSN：0002-9947。[SZ] Robert Spahn 和 Matthew C. B. Zaremsky。*Stein*群的 *BNSR* 不变量。网址：https://arxiv.org/pdf/2012.05000.pdf。（访问日期：01.02.2022）。[Tan23] Owen Tanner。“将 Stein群作为拓扑满群来研究”。英文。发表于：(2023)。[Win] Nicholas Winstone。具有无理斜率的 *Bieri-Strebel* 群。网址：https://pure.royalholloway.ac.uk/ws/portalfiles/portal/45198839/2017hollowaynwphd.pdf。（访问日期：11.04.2023）。[Wla11] Claire Wladis。“Thompson 群在 Thompson-Stein群中是扭曲的”。发表于：《太平洋数学杂志》250 (2011年4月)。DOI：10.2140/pjm.2011.250.473。[WZ15] Stefan Witzel 和 Matthew C. B Zaremsky。“通过 Morse理论研究 Thompson 群*F* 群的 Σ不变量”。英文。发表于：(2015)。[Zar17] Matthew Curtis Burkholder Zaremsky。“关于广义Thompson群和Houghton群的 Σ不变量”。英文。发表于：《国际数学研究通知》2017.19 (2017)，第 5861–5896 页。ISSN：1073-7928。[Zar19] MatthewC. B Zaremsky。“简述 Thompson 群*F* 群为何属于 F 型∞”。英文。发表于：(2019)。

伦敦大学皇家霍洛威学院，数学系，McCrea大楼，TW20 0EX，Egham，英国