Joyce 结构的复苏

Iv´an Tulli

谢菲尔德大学数学与统计学院，Hounsfield 路，
谢菲尔德 S3 7RH，英国

arXiv:2602.08805v1 [math.DG] 9 Feb 2026

摘要

给定一个 Joyce 结构，我们证明，与之相关的 $\mathbb{C}^*$族非线性联络 $\mathcal{A}^\epsilon$可通过一个关于 ϵ 的形式规范变换$\hat{g}$ $\mathcal{A}^\epsilon$标准化，st 。我们证明，相应的无穷小规范变换 $\dot{g}=\log(\hat{g})$ 的博雷尔变换是收敛的，前提是 $\dot{g}$ 在 Joyce 结构的底空间上消失。这是证明此类 $\dot{g}$ 具有可复苏性的第一步。我们还利用$\hat{g}$ 为与该 Joyce 结构相关的复超凯勒结构构造形式扭子 Darboux 坐标，并证明这些形式扭子 Darboux 坐标的博雷尔变换也具有类似的收敛性。

目录

1 引言 **2**
1.1 论文结构.4 1.2 约定.4

2 预备知识 **4**
2.1 Ehresmann 联络.4 2.1.1 规范变换.5 2.1.2 相对联络.5 2.2 形式完备化与形式相对联络.6 2.2.1 形式规范变换.7 2.3 Joyce 结构.9 2.3.1 Joyce 结构的扭子空间.11

3 Joyce 结构的形式分类 12
3.1 平凡 Joyce 结构.12 3.2 形式规范变换至平凡 Joyce 结构.13 3.3 Joyce 结构的形式扭量坐标.16

4 迈向　重求和形式规范变换 1 **8**
4.1 形式无穷小规范变换的博雷尔变换.18 4.2 形式达布坐标的博雷尔变换.22 4.3 迈向无穷解析延拓.24

5 个例子 **25**
5.1 A1 箭图.26 5.1.1 在零截面上消失的无穷小规范变换 . . . . . 26 5.1.2 与黎曼–希尔伯特问题相关的无穷小规范变换 . . . . 27 5.2 A_2箭图.29 5.2.1 计算 $\dot{g}_2$.30

A 关于 $\dot{g}_2$ 的计算细节 **32**

1 引言

本文的主题受到两条相关研究脉络的启发：T. Bridgeland 关于 Donaldson-Thomas（DT）不变量和 Joyce 结构的研究 [Bri21, Bri25a], , 以及 M. Kontsevich 和 Y. Soibelman 将复苏级数与解析稳定性数据联系起来的研究 [KS22]。

T. Bridgeland [Bri21] 在三维 Calabi-Yau 范畴 $\mathfrak{X}$ 及其关联的稳定性条件空间$M = \mathrm{Stab}(\mathfrak{X})$ [Bri07]的 DT 不变量背景下引入了 Joyce 结构这一概念。猜想认为，它描述了切丛TM上的一种几何结构，其构造涉及求解一族由 DT 不变量确定的非线性黎曼–希尔伯特问题；该问题族由 TM 参数化 [Bri19]。在不同背景下，人们研究了 Joyce 结构的若干例子，包括可积系统和拓扑弦理论[Bri21,BM25, Bri25b,BM22,DM24,Moy25,AP21b,AP21a]。

尽管 Joyce 结构是在上述背景下引入的，但也可以在全纯辛流形（或更一般地，在全纯泊松流形 [Bri21]）上对其进行表述。粗略地说，全纯辛流形（M，Ω）上的 Joyce 结构由一族非线性联络 $\mathcal{A}^\epsilon$ 构成，这族联络定义在典范投影 $\pi\colon\ TM \to M$上，并由 $\epsilon \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ 参数化。该族联络 $\mathcal{A}^\epsilon$ 必须是平坦且辛的，并且具有如下形式

$$\mathcal{A}^\epsilon = h + \epsilon^{-1} v, \tag{1.1}$$

其中，$h\colon\ \pi^*(TM) \to T(TM)$ 是一个固定联络，而 $v\colon\ \pi^*(TM) \to \mathrm{Ker}(\pi_*)$ 是 $\pi^*(TM)$ 与垂直丛 $\mathrm{Ker}(\pi_*)$ 之间的典范识别。还有其他结构和条件，但我们暂且略去（更多详情请参见第 2.3 节）。

本文的目标之一是研究 Joyce 结构的形式分类，其中我们允许使用由 ϵ 中的形式级数给出的规范变换 $\hat{g}$。为了更清楚地说明 Joyce 结构的形式分类所指为何，我们先引入几个概念：

- 一方面，将联络族 $\mathcal{A}^\epsilon$ 视为定义在 $p\colon TM \times \mathbb{C} \to M \times \mathbb{C}$ 上、在 $\epsilon = 0$ 处有简单极点的一个相对联络$\mathcal{A}$，会比较方便；该联络在第一因子上由 π作用，在第二因子上则作用为恒等变换。相对于典范投影$M \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 而言，该联络是相对的，因为它不提升与 $\mathbb{C}$ 因子相切的任何向量。随后，可以将 $\widehat{\ }\mathbb{C}$ 因子替换为形式圆盘 $D = \mathrm{Spf}(\mathbb{C}[[\epsilon]])$，从而得到定义在$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }\widehat{p}\colon TM \times D \to M \times D$ 上的亚纯相对联络，其中我们将空间 $TM \times D$和 $M \times D$视为形式解析空间。$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$在这一设定下，我们将考虑 $\mathcal{G}$ 群：它由 $\widehat{p}\colon TM \times D \to M \times D$ 上在$\epsilon = 0$处延拓为恒等变换的规范变换构成，并作用于 $\widehat{p}$ 上的联络（更多详情请参见第 2.2 节）。

- 另一方面，我们引入一个附加结构于（M,Ω）上，该结构存在于所有 Joyce 结构中。这个附加结构是在 M 上的平坦无挠线性联络 ∇，使得 $\nabla\Omega = 0$。相对于这一附加结构，$\mathcal{A}^\epsilon$ 的表达式 (1.1) 可以改写为

$$\mathcal{A} = \mathcal{H} + \omega + \epsilon^{-1} v\,,$$

其中 $\mathcal{H}\colon\ \pi^*(TM) \to T(TM)$ 是由 ∇ 诱导的水平提升，而 $\omega\colon\ \pi^*(TM) \to \mathrm{Ker}(\pi_*)$ 是垂直差 $\omega := h - \mathcal{H}$。

$\widehat{\ }$在定理 3.4 中，我们证明总能找到一个形式规范变换 $\hat{g} \in \mathcal{G}$，将 $\mathcal{A}$ 规范化为标准形式

$$\mathcal{A}^{\mathrm{st}} = \mathcal{H} + \epsilon^{-1} v\,.$$

此外，如果要求 $\hat{g}$ 在零截面 $M \subset TM$ 上限制为恒等变换（或者等价地，无穷小规范变换 $\dot{g} = \log(\hat{g})$ 在 M 上消失），那么 $\hat{g}$ 是唯一的。

我们指出，这与 M. Kontsevich 和 Y. Soibelman [KS22, 第 5 节.3], 的工作密切相关。他们研究了一类称为几乎标准联络的非线性形式联络，并证明这类联络在形式上与一种称为标准联络的标准形式规范等价。不过，我们的方法不依赖代数环面上的代数向量场结构，只使用由 (1.1) 导出的相对联络，而非还可提升

沿 ϵ 方向的切向量的完整形式联络。

在 T. Bridgeland 和 I. Strachan [BS21], 随后的工作中，他们证明了 Joyce 结构编码了 $N = TM$ 上的复超 K¨ahler （$\mathbb{C}$-HK ）结构。这是通常超 K¨ahler 结构的全纯类比，其中所有张量（即度量和三个复结构）现在都关于来自 M 的 N 的复结构而全纯。由于 Joyce 结构关联着一个 $\mathbb{C}$-HK 结构，因此它也关联着一个扭子空间 $p : \mathcal{Z} \to \mathbb{P}^1$ （见 [Bri25a]）。事实上，当 Joyce 结构由与 DT 不变量相关的非线性黎曼-希尔伯特问题的解构造而成时，预期这些解的（对数）会下降为扭子空间 $\mathcal{Z}$ 上相对全纯辛形式 ϖ 的 $\mathcal{O}(2)$-扭曲族的达布坐标。在命题 3.8 中，我们利用将 $\mathcal{A}^{\mathrm{st}}$ 规范化到 $\mathcal{A}$ 的形式规范变换 $\hat{g}$，为 ϖ 构造形式扭子 Darboux 坐标。

现在考虑一个将 $\mathcal{A}^{\mathrm{st}}$ 规范化为 $\mathcal{A}$ 的形式规范变换 $\hat{g}$ ，并用 $\dot{g} = \log(\hat{g})$ 表示相应的无穷小规范变换。更确切地说， $\dot{g}$ 是一个形式级数

$$\dot{g} = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{g}_k \epsilon^k \tag{1.2}$$

其中 $\dot{g}_k$ 是关于 π 垂直的 TM 上的向量场： $TM \to M$（即 $\mathrm{Ker}(\pi_*) \to TM$ 的截面）。这项工作的另一个主要目的是展示迈向证明 $\dot{g}$ 是可复苏的的第一步。级数 $\dot{g}$ 是可复苏的，当且仅当：

- 博雷尔变换
$$\mathcal{B}[\dot{g}](\xi) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\dot{g}_k}{(k-1)!} \xi^{k-1} \tag{1.3}$$
在 $\xi = 0$ 的某个邻域内收敛。
- 其 存在某个闭离散子集 $S \subset \mathbb{C}$ ，使得 $\mathcal{B}[\dot{g}](\xi)$ 在以下范围内存在解析延拓 ξ alon $\mathbb{C} - S$ 中从 (1.3) 的收敛邻域出发的 g 条路径。

在关于 $\mathcal{B}[\dot{g}](\xi)$ 的解析延拓随 $\xi \to \infty$ 增长的温和假设下，可以考虑沿避开 S 的射线 $\rho = \mathbb{R}_{>0} e^{\mathrm{i}s}$ 对 $\dot{g}$ 进行博雷尔求和，它由拉普拉斯变换给出

$$\dot{g}_\rho(\epsilon) := \int_\rho e^{-\eta/\epsilon} \mathcal{B}[\dot{g}](\eta) \mathrm{d}\eta \,. \tag{1.4}$$

虽然 (1.2) 对 $\epsilon \neq 0$ 常常发散，但如果 $\dot{g}_\rho(\epsilon)$ 存在，则它是 $\mathbb{C}$ 的某个扇形区域中关于 ϵ 的解析函数，其当 $\epsilon \to 0$ 时的渐近展开再现 $\dot{g}$ （参见 [MS16]以了解有关重求和的更多信息）。

每当 $\dot{g}$ 是可复苏的，便可通过异体微积分关联所谓的斯托克斯自同构。当博雷尔和 $\dot{g}_\rho$ 对避开 S 的射线 ρ 存在时，斯托克斯自同构可解释为当我们使 ρ 穿过 S 的点时 $\dot{g}_\rho$ 的跳跃。在将重求和应用于拓扑弦理论和黎曼–希尔伯特问题中，斯托克斯自同构已被关联到 DT/BPS 不变量（例如参见 [GKPKM24, AMP24, ASTT22, BT25]）。鉴于 Joyce 结构与 DT 不变量的关系，研究 $\dot{g}$ 是否可复苏，以及若是，其斯托克斯自同构及其与上述黎曼–希尔伯特问题的关系，将是非常有趣的。

在定理 4.3 中，我们证明由定理 3.4 构造的 $\dot{g}$ 总是具有收敛的 $\mathcal{B}[\dot{g}]$，并给出了对于一般 $\dot{g}$ 规范化 $\mathcal{A}^{\mathrm{st}}$ 到 $\mathcal{A}$ 的 $\mathcal{B}[\dot{g}]$ 收敛的充要条件。在定理 4.5 中，我们对由 $\dot{g}$ 构造的形式扭子 Darboux 坐标证明了类似的结果。

虽然上一段的结果是证明 $\dot{g}$ 和形式扭子 Darboux 坐标具有可复苏性的第一步，但我们仍未能充分理解其博雷尔变换的解析延拓。我们在第 4.3 节中探讨了一种可能的研究方法，并计划在未来的工作中继续研究这一问题。

最后，我们介绍两个与 A1 和 A2 箭图的 DT 理论相关的例子。A1 的例子很简单，一切都可以显式完成；而我们将展示，

对于将 $\mathcal{A}$规范化到 $\mathcal{A}^{\mathrm{st}}$的形式规范变换，可能出现截然不同的情况。具体而言，我们将构造两个这样的形式规范变换：一个具有收敛的 $\dot{g}$ （因此其博雷尔变换是整函数），另一个具有发散的 $\dot{g}$。具有发散 $\dot{g}$ 的那个最终证明是可复苏的，其博雷尔变换的解析延拓具有预期的奇点结构和斯托克斯自同构，这些都与 A1 箭图的 DT 理论相关。最后，对于与 A2 箭图相关的 Joyce 结构，我们用显式代数函数计算了 $\dot{g}$的 ϵ-展开中的前两个向量场 $\dot{g}_1$ 和 $\dot{g}_2$ 。进而可利用这些结果计算 Darboux扭子坐标的展开，以及诸如 τ-函数等相关对象的展开。

1.1 论文结构

- 在第 2 节中，我们介绍论文主要结果所需的一些预备知识，包括对 Ehresmann 联络、规范变换、相对联络及其形式类比的简要概述。我们不需要形式解析空间的一般情形，因此第 2.2 节中关于形式解析空间及其间态射的讨论仅限于我们的简单情形。最后，我们概述 Joyce 结构及其扭子空间。

- 在第 3 节中，我们引入与带周期结构的全纯辛流形相关联的平凡 Joyce 结构，并在定理 3.4 中证明，任意 Joyce 结构都可以通过形式规范变换化为平凡 Joyce 结构。在命题 3.8 中，我们利用前述形式规范变换构造形式扭子 Darboux 坐标。

- 在第 4 节中，我们研究无穷小规范变换和形式扭子 Darboux 坐标的博雷尔变换。我们在定理 4.3 中证明，定理 3.4 中的无穷小规范变换的博雷尔变换在 $\xi = 0$ 的一个邻域内收敛；在命题 3.8 中，我们证明形式扭子 Darboux 坐标也有类似结果。

- 在第 5 节中，我们通过两个与 DT 理论相关的例子，说明前述结果的应用。这两个例子都与 A1 和 A2 箭图有关。

1.2 约定

除非另有说明，我们的所有对象和态射都将是全纯的。在用坐标表示张量时，我们将采用爱因斯坦求和约定。

致谢： 作者非常感谢 T. Bridgeland 进行的许多有益讨论。

2 预备知识

本节将回顾一些基本概念，包括埃雷斯曼意义下的联络（例如参见 [IKS93]）、Joyce 结构，以及我们将要使用的形式化框架。熟悉这些概念的读者可以快速浏览本节，以了解相关记号。

虽然本节介绍的许多概念适用于更一般的情形，但除非另有说明，我们讨论的所有对象和态射都是全纯的。

2.1 Ehresmann 联络

设定一个全纯满射浸没 $\pi\colon E \to B$。

定义 2.1。 π 上的 Ehresmann 联络： $E \to B$ 是一个向量丛映射 $\mathcal{A}\colon \pi^*(TB) \to TE$，满足 $\pi_* \circ \mathcal{A} = \mathrm{Id}_{\pi^*(TB)}$，其中 $\pi_*\colon TE \to \pi^*(TB)$ 是由 π诱导的前推，而 $\mathrm{Id}_{\pi^*(TB)}$是 $\pi^*(TB)$ 的恒等映射。

注 2.2. 下文中，我们将 Ehresmann 联络简称为联络；若$X \in \pi^*(TB)$，我们通常将 $\mathcal{A}$ 在 X 上的取值记作 $\mathcal{A}_X := \mathcal{A}(X)$。给定 B上的任意局部向量场 X ，我们有规范诱导的 $\pi^*(TB) \to E$的拉回截面 $\pi^* X$ 。将联络 $\mathcal{A}$ 作用于拉回截面时，我们将滥用记号，直接记作 $\mathcal{A}_X$，而不记作 $\mathcal{A}_{\pi^* X}$。

给定如前所述的 $\pi : E \to B$，我们有相应的垂直向量丛 $V_\pi \to E$，其在 $e \in E$ 上的纤维为 $V_\pi|_e := \mathrm{Ker}(\pi_*|_e) \subset T_eE$。若给定 $\pi: E \to B$上的任意联络 $\mathcal{A}$，则有如下分解

$$TE = \mathrm{Im}(\mathcal{A}) \oplus V_\pi$$

其中 $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$ 的像。特别地，$\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ 关于 π 是水平的，而 $\mathcal{A}$ 定义了 B 的切向量的水平提升。

定义 2.3. π 上的联络 $\mathcal{A} : E \to B$ 是平坦的，当且仅当水平分布 $\mathrm{Im}(\mathcal{A}) \subset TE$ 是对合的。也就是说

$$[\mathrm{Im}(\mathcal{A}), \mathrm{Im}(\mathcal{A})] \subset \mathrm{Im}(\mathcal{A}) .$$

给定联络 $\mathcal{A}$ 于 $\pi: E \to B$，一条光滑路径 $\gamma: [0,1] \to B$，以及一点 $e \in E_{\gamma(0)} := \pi^{-1}(\gamma(0))$，存在唯一一条路径 $\alpha : [0, \delta] \to E$，其中 $\delta > 0$ 使得 $\alpha(0) = e$，并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha(t) = \mathcal{A}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)\right) .$$

定义 2.4. 路径 α 称为相对于 $\mathcal{A}$ 的 γ 的水平提升，起点为 e。对于 $t \in [0, \delta]$，沿 γ 在时间 t 的 e 的平行移动由 $\alpha(t)$ 给出。

给定固定的 $\delta > 0$ 和 $t < \delta$，我们可以将定义在 $[0, t]$ 上的 γ 的所有水平提升汇集为纤维 $E_{\gamma(0)}$ 与 $E_{\gamma(t)}$ 的开子集之间的一个微分同胚。更具体地说，存在开子集 $U_0 \subset E_{\gamma(0)}$ 和 $U_t \subset E_{\gamma(t)}$，以及一个微分同胚 $\mathrm{PT}_t : U_0 \to U_t$，使得 $\mathrm{PT}_t(e) = \alpha(t)$，其中$\alpha$ 是 γ 的水平提升，且 $\alpha(0) = e$.

2.1.1 规范变换

我们现在回顾浸没背景下规范变换的概念，以及它们对联络的作用。

定义 2.5. 满射全纯浸没 $\pi : E \to B$ 上的规范变换是满足 $\pi \circ g = \pi$ 的双全纯同构 $g: E \to E$。

$\pi : E \to B$ 的规范变换构成一个群 $\mathcal{G}$，并如下右作用于 π 的联络 $\mathcal{A}$。给定 $(e, X) \in \pi^*(TB)$，我们将 $(\mathcal{A} \cdot g): \pi^*(TB) \to TE$定义为

$$(\mathcal{A} \cdot g)(e, X) = \mathrm{d}g^{-1}|_{g(e)}(\mathcal{A}(g(e), X)) . \tag{2.1}$$

映射 $\mathcal{A} \cdot g$ 关于 π_*满足如下性质:

$$\pi_* \circ (\mathcal{A} \cdot g)(e, X) = (e, \mathrm{d}\pi(\mathrm{d}g^{-1}|_{g(e)}(\mathcal{A}(g(e), X))) = (e, \mathrm{d}\pi|_{g(e)}(\mathcal{A}(g(e), X))) = (e, X) ,$$

因此 $\mathcal{A} \cdot g$是一个联络。此外，若我们有一条规范变换路径 g_t，满足 $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ 且 $g_0 = \mathrm{Id}_E$，则有由下式定义的相应无穷小规范变换 $\dot{g}$

$$\dot{g}_e := \left.\frac{\mathrm{d}g_t(e)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \in T_eE .$$

它是定义在 E 上的一个向量场，满足 $\mathrm{d}\pi(\dot{g}) = 0$（因为 $\pi \circ g_t = \pi$），因此 $\dot{g}$ 是 E上的垂直向量场。反过来，若从 E 上的垂直向量场 $\dot{g}$ 出发，并假设流 ϕ_t 对 E中的所有点都存在于一个统一的时间区间内，那么每个 $\phi_t : E \to E$ 都是一个规范变换。

2.1.2 相对联络

考虑两个满射全纯浸没 $\pi : E \to B$ 和 $q : B \to S$。此外，分别用 $V_q \to B$、 $V_\pi \to E$和 $V_{q\circ\pi} \to E$表示与 q、π和 $q \circ \pi$相关联的垂直丛。

定义 2.6。 相对于 $q : B \to S$的 $\pi : E \to B$上的相对联络是一个丛映射

$$\mathcal{A} : \pi^*V_q \to V_{q\circ\pi}$$

使得 $\pi_* \circ \mathcal{A} = \mathrm{Id}^{\pi^*V_q}$。

这意味着我们有如下分解

$$V_{q\circ\pi} = \mathrm{Im}(\mathcal{A}) \oplus V_\pi.$$

换言之， $\mathcal{A}$ 定义了 B 的切向量的水平提升，这些切向量相对于q： $B \to S$是垂直的；而这些提升相对于 $q\circ\pi$： $E \to S$是垂直的。注意，前面提到的 π： $E \to B$ 的规范变换群 $\mathcal{G}$，与之前一样，按照公式 (2.1) 从右侧作用于相对联络。与联络的平坦性（定义 2.3）类似，我们称相对联络 $\mathcal{A}$ 是平坦的，如果 $\mathrm{Im}(\mathcal{A}) \subset V_{q\circ\pi} \subset TE$ 是对合的。

我们只考虑以下简单情形中的相对联络。取

$$E = TM \times \mathbb{C}, \quad B = M \times \mathbb{C}, \quad S = \mathbb{C},$$

and 若 π： $TM \to M$ 是切丛的典范投影，我们考虑投影 ns

$$\begin{aligned} p &: E \to B, \quad p(X,\lambda) = (\pi(X),\lambda), \\ q &: B \to S, \quad q(b,\lambda) = \lambda. \end{aligned}$$

将相对联络 $\mathcal{A}$ 限制到 $TM \times \{\epsilon\}$ 上，我们得到一个丛映射

$$\mathcal{A}^\epsilon : \pi^* V_q|_{TM\times\{\epsilon\}} \to V_{q\circ\pi}|_{TM\times\{\epsilon\}}\,.$$

注意到 $p^*V_q|_{TM\times\{\epsilon\}} \cong \pi^*(TM)$和 $V_{q\circ\pi}|_{TM\times\{\epsilon\}} \cong T(TM)$，可知我们得到 π： $TM \to M$上的通常联络。因此，在这种情形下，相对联络的数据可以看作是以 $\mathbb{C}$为参数的 $TM \to M$ 上的联络族。

注 2.7. 请注意， $\mathcal{A}$ 在 p 上的相对联络 $TM \times \mathbb{C} \to M \times \mathbb{C}$ 的平坦性等价于如下条件：对于 M 上任意两个局部向量场 X， Y，我们有

$$[\mathcal{A}_X, \mathcal{A}_Y] = \mathcal{A}_{[X,Y]}\,. \tag{2.2}$$

特别地，如果 (Z^i) 是 M 上的局部坐标，那么只需验证

$$[\mathcal{A}_{\partial_{Z^i}}, \mathcal{A}_{\partial_{Zj}}] = 0\,, \quad i,j = 1,...,\dim_{\mathbb{C}}(M)\,. \tag{2.3}$$

2.2 形式完备化与形式相对联络

在上一节中，我们考虑了相对于投影 q： $M \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 的 p 上的相对联络 $\mathcal{A}$： $TM \times \mathbb{C} \to M \times \mathbb{C}$。接下来，我们需要将 $\mathbb{C}$ 因子替换为形式圆盘 $\wedge D$ =Spf($\mathbb{C}[[\epsilon]]$)，其中后者表示 $\mathbb{C}[[\epsilon]]$ 的形式谱。为此，我们需要用到形式解析空间理论中的一些简单概念 [GR84]。

给定复流形 $M \times \mathbb{C}$，通过考虑局部环化空间 $(M \times \mathbb{C},\ \mathcal{O}_{M\times\mathbb{C}})$，我们得到与之对应的解析空间，其中 $\mathcal{O}_{M\times\mathbb{C}}$ 是 $M \times \mathbb{C}$ 上的全纯函数层。我们^现在如下定义 $M \times D$

^**定义 2.8**。 $M \times D$ 是形式解析空间

$$M \times \widehat{D} := (M, \widehat{\mathcal{O}}_M)$$

通过沿着 $M\times\{0\}$对 $M\times\mathbb{C}$ 进行形式完备化得到。也就是说，给定 $\mathbb{C}$因子上的典范坐标ϵ，我们考虑理想层 $\mathcal{I} = (\epsilon) \subset \mathcal{O}_{M\times\mathbb{C}}$，并取逆极限

$$\widehat{\mathcal{O}}_M := \varprojlim \frac{\mathcal{O}_{M\times\mathbb{C}}}{\mathcal{I}^n}\,.$$

^ M 上的层 $\mathcal{O}_M$ 满足

$$\widehat{\mathcal{O}}_M(U) = \mathcal{O}_M(U) \otimes \mathbb{C}[[\epsilon]]\,, \quad U \subset M\,.$$

^ ^ ^从 $TM \times \mathbb{C}$到 $TM \times D = (TM, \mathcal{O}_{TM})$ 的情形同样适用，而 D只是形式^解析空间 $D = (\{0\}, \mathbb{C}[[\epsilon]])$。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$映射 $\widehat{p}\colon\ TM\times D\to M\times D$与 $\widehat{q}\colon\ M\times D\to D$现在是对应于 p 和 q 的形式解析空间之间的态射。形式解析空间 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }X\ =\ (X,\mathcal{O}_X)$ 与 $Y\ =\ (Y,\mathcal{O}_Y)$ 之间的态射 $\widehat{f}\ =\ (f,f^\sharp)\ =\widehat{X}\to\widehat{Y}$ 由底拓扑空间之间的连续映射 $f\colon\ X\to Y$, 以及拓扑局部环之间的层态射 $f^\sharp\colon\ \mathcal{O}_{\widehat{Y}}\to f_*\mathcal{O}_{\widehat{X}}$ 组成。在此情形下, $\widehat{p}$和 $\widehat{q}$ 由下述定义给出。

定义 2.9。 形式解析空间之间的态射 $\widehat{p}\colon TM\times\widehat{D}\to M\times\widehat{D}$由 $\widehat{p}=(\pi,\ p^\sharp)$ 给出，其中 $\pi\colon TM\to M$ 是典范投影，并且

$$p^\sharp:\widehat{\mathcal{O}}_M\to\pi_*\widehat{\mathcal{O}}_{TM},\quad p^\sharp\left(\sum_{k=0}^\infty f_k\epsilon^k\right)=\sum_{k=0}^\infty\pi^*(f_k)\epsilon^k\,. \tag{2.4}$$

类似地， $\widehat{q}$由投影 $q|_{M\times\{0\}}\colon\ M\to\{0\}$ 给出，而 $q^\sharp$ 由按 (2.4) 中的方式对 q 作拉回给出。

现在，我们定义相对于 $q\colon\ M\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$的、关于 $TM\times\mathbb{C}\to M\times\mathbb{C}$上的相对联络 $\mathcal{A}$ 的形式类比。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$**定义 2.10**。 相对于典范投影$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }\hat{}q\colon\ M\times D\to D$ 、定义在 $\widehat{p}\colon TM\times D\to M\times D$ 上的相对联络 $\mathcal{A}$由一个 $\mathbb{C}[[\epsilon]]$-线性丛映射给出

$$\mathcal{A}:\pi^*(TM)\otimes\mathbb{C}[[\epsilon]]\to T(TM)\otimes\mathbb{C}[[\epsilon]]$$

使得 $\pi_*\circ\mathcal{A}=\mathrm{Id}_{\pi^*(TM)\otimes\mathbb{C}[[\epsilon]]}$。

可以验证，如上的形式相对联络 $\mathcal{A}$由如下形式的形式表达式给出

$$\mathcal{A}=h+\sum_{k=1}^\infty\omega^{(k)}\epsilon^k\,,$$

其中 h和 $\omega^{(k)}$是联络 $h\colon\ \pi^*(TM)\to T(TM)$ 在 $\pi\colon\ TM\to M$ 上的 $\mathbb{C}[[\epsilon]]$-线性延拓，而 $\omega^{(k)}\colon\ \pi^*(TM)\to V_\pi$ 是丛映射。 $\mathcal{A}$确实相对于 $\hat{}q\colon\ M\times\widehat{D}\to\widehat{D}$，因为它不提升形式方向 ∂_ϵ上的任何向量，且所有提升的向量都沿着 TM。

与注 2.7 中一样， $\hat{}p$ 上相对联络 $\mathcal{A}$ 的平坦性等价于验证 (2.2) 或 (2.3)。

2.2.1 形式规范变换

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$我们希望考察 $\widehat{p}\colon\ TM\times D\to M\times D$ 的形式规范变换。我们将首先描述在 $\epsilon=0$ 处消失的无穷小规范变换。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$**定义 2.11**。 $\widehat{p}$ 的无穷小规范变换李代数: $TM\times D\to M\times D$在 $\epsilon=0$ 处消失的部分为

$$\mathrm{Lie}(\widehat{\mathcal{G}}):=\epsilon\cdot\Gamma(TM,V_\pi)[[\epsilon]]=\left\{\dot{g}=\sum_{k=1}^\infty\dot{g}_k\epsilon^k\ \middle|\ \dot{g}_k\in\Gamma(TM,V_\pi)\right\},$$

其中， $\Gamma(TM,V_\pi)$ 表示 $V_\pi\to TM$ 的截面（即 TM 上的向量场，相对于 $\pi\colon\ TM\to M$ 为垂直向量场）。

给定 $\dot{g}\in\mathrm{Lie}(\widehat{\mathcal{G}})$，指数映射 $e^{\dot{g}}$生成 $\widehat{p}$ 的规范变换: $TM\times\widehat{D}\to M\times\widehat{D}$延拓了 $TM\times\{0\}$ 的恒等映射。也就是说，我们有形式解析空间的态射 $\hat{}g=(\mathrm{Id}_{TM},e^{\dot{g}})\colon\ TM\times\widehat{D}\to TM\times\widehat{D}$，其中 $e^{\dot{g}}\colon\ \widehat{\mathcal{O}}_{TM}\to\widehat{\mathcal{O}}_{TM}$ 作用于函数 $f\in\hat{}\mathcal{O}_{TM}(U)\cong\mathcal{O}_{TM}(U)[[\epsilon]]$，其作用方式为

$$e^{\dot{g}}f=\sum_{n=0}^\infty\frac{\dot{g}^k}{k!}f\,. \tag{2.5}$$

注意，$\hat{}g$满足$\hat{}\pi\circ\hat{}g=\hat{}\pi$。事实上，对于形式为 $h=\sum_{k=0}^\infty(\pi^*h_k)\epsilon^k$的函数 $h\in\mathcal{O}_{TM}(\pi^{-1}(U))[[\epsilon]]$，我们有 $e^{\dot{g}}h=h$， 因此它固定了 $TM\times\widehat{D}$上所有来自底空间的函数。 $e^{\dot{g}}$应被视为通常的复流形之间的浸没情形下， $\dot{g}$ 的时间 1 流对函数 f 作用的形式类比。

注 2.12. 注意， $\dot{g}$ 在 $\epsilon = 0$ 处消失这一事实，保证了（2.5）作为关于 ϵ的形式级数是有意义的。换言之，将（2.5）按 ϵ的幂展开时， ϵ^k 的每个幂次项的系数都只会得到有限多个贡献。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$**定义 2.13.** 我们将 $\widehat{p}$ 在 $\epsilon = 0$ 处延拓为恒等映射的形式规范变换记为: $TM \times D \to M \times D$

$$\widehat{\mathcal{G}} = \{\widehat{g} = (\mathrm{Id}_{TM}, e^{\dot{g}}), \quad \dot{g} \in \mathrm{Lie}(\widehat{\mathcal{G}})\}\,.$$

$\widehat{\ }$集合 $\mathcal{G}$ 在 Baker-Campbell-Hausdorff（BCH）公式下构成一个群。

另一方面， $\dot{g}$ 也通过李导数 $\mathcal{L}_{\dot{g}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}_{\dot{g}_k}\epsilon^k$ 的指数映射，在 $\hat{}p$ 上的（相对）联络上生成一个作用。事实上，给定 $X = (V,\ W) \in \pi^*(TM)$，我们可以将 W 延拓为 M 的一个局部$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$向量场，并考虑 $\pi^*(TM)$ 的诱导拉回截面 X，使其满足 $X|_V = X$。然后我们定义 $(e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}}\mathcal{A})(X)$ 为

$$(e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}}\mathcal{A})(X) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{L}_{\dot{g}}^k(\mathcal{A}_{\widetilde{X}})}{k!}\bigg|_V \in T_V(TM) \otimes \mathbb{C}[[\epsilon]]\,. \tag{2.6}$$

注意，(2.6) 中的和作为关于 ϵ 的形式幂级数是有意义的，因为 $\dot{g}$ 没有 ϵ^0项。此外，容易验证 (2.6) 的右端不依赖于 W的延拓，并且 $\mathcal{L}_{\dot{g}}^k(\mathcal{A}_{\widetilde{X}})$ 总是相对于 $k \geq 1$垂直的。将 (2.6) 关于 $\mathbb{C}[[\epsilon]]$线性延拓后，我们得到一个 $\mathbb{C}[[\epsilon]]$-线性丛映射

$$e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}}\mathcal{A} : \pi^*(TM) \otimes \mathbb{C}[[\epsilon]] \to T(TM) \otimes \mathbb{C}[[\epsilon]]\,,$$

满足 $\pi_* \circ \mathcal{A} = \mathrm{Id}_{\pi^*(TM) \otimes \mathbb{C}[[\epsilon]]}$，因而得到一个相对于 $\hat{}q$的 $\hat{}p$上的联络。

$e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}}$ 在 $\mathcal{A}$ 上的作用，是形式类比于通常复流形之间的浸没情形下，由无穷小规范变换 $\dot{g}$ 的时间 1 流所给出的、规范变换在 $\mathcal{A}$ 上的作用。

为求完整，我们以证明下面的命题来结束本节；首次阅读时可以跳过。显然，在通常的满射浸没上的规范变换情形中，规范变换保持联络的平坦性；但对于形式规范变换的作用，同样结论是否成立，单从 (2.6) 可能并不明显。

引理 2.14。 如果相对于 $\hat{}q$ 的相对联络 $\mathcal{A}$在 $\widehat{p}$: $TM \times \widehat{D} \to M \times \widehat{D}$上是平坦的，那么 $e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}}\mathcal{A}$也是平坦的。

证明。 在 M 上选取局部坐标 (Z^i)，并令 $\mathcal{A}_i := \mathcal{A}_{\partial_{Z^i}}$。要证明 $e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}}\mathcal{A}$ 是平坦的，只需证明对于任意 i和 j

$$[e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}}\mathcal{A}_i, e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}}\mathcal{A}_j] = 0\,. \tag{2.7}$$

如果我们将 $B^k(\mathcal{A}_i) := \mathcal{L}_{\dot{g}}^k(\mathcal{A}_i)$ 记作，那么上述条件可以写成

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{1}{k!l!}[B^k(\mathcal{A}_i), B^l(\mathcal{A}_j)] = 0\,.$$

我们有

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{1}{k!l!}[B^k(\mathcal{A}_i), B^l(\mathcal{A}_j)] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k+l=m} \binom{m}{k}[B^k(\mathcal{A}_i), B^l(\mathcal{A}_j)] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}[B^k(\mathcal{A}_i), B^{m-k}(\mathcal{A}_j)]\,.$$

另一方面，利用雅可比恒等式，我们可以通过归纳法证明

$$[B^k(\mathcal{A}_i), B^{m-k}(\mathcal{A}_j)] = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l}(-1)^l B^{k-l}([\mathcal{A}_i, B^{m-k+l}(\mathcal{A}_j)])\,.$$

我们将证明，对于每个 m

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l}(-1)^l B^{k-l}([\mathcal{A}_i, B^{m-k+l}(\mathcal{A}_j)]) = 0\,.$$

令 $p=k-l$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(-1)^l B^{k-l}([\mathcal{A}_i,B^{m-k+l}(\mathcal{A}_j)])&=\sum_{p=0}^{m}\sum_{l=0}^{m-p}\binom{m}{l+p}\binom{l+p}{l}(-1)^l B^p([\mathcal{A}_i,B^{m-p}(\mathcal{A}_j)])\\&=\sum_{p=0}^{m}B^p([\mathcal{A}_i,B^{m-p}(\mathcal{A}_j)])\sum_{l=0}^{m-p}\binom{m}{l+p}\binom{l+p}{l}(-1)^l=\sum_{p=0}^{m}B^p([\mathcal{A}_i,B^{m-p}(\mathcal{A}_j)])\sum_{l=0}^{m-p}\binom{m}{p}\binom{m-p}{l}(-1)^l\\&=\sum_{p=0}^{m}B^p([\mathcal{A}_i,B^{m-p}(\mathcal{A}_j)])\binom{m}{p}\sum_{l=0}^{m-p}\binom{m-p}{l}(-1)^l.\end{aligned}\tag{2.8}$$

利用这一点

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\tag{2.9}$$

我们看到，当 $m\neq p$ 时，(2.8) 显然为 0；而在 $m=p$ 的情况下，由于 $\mathcal{A}$ 的平坦性，我们得到 0。因此，(2.7) 成立。 □

2.3 Joyce 结构

现在我们按照 [Bri25a] 简要回顾 Joyce 结构的概念。设 (M,Ω) 是一个全纯辛流形，且 $\pi\colon TM\to M$ 是典范投影。Ω 通过典范同一 $v\colon \pi^*TM\to V_\pi$ 在垂直丛 $V_\pi\to TM$ 上诱导出纤维辛结构 Ω^v。更具体地，若 $p_2\colon \pi^*TM\to TM$ 表示到第二个因子的投影，则有

$$\Omega^v:=(p_2\circ v^{-1})^*\Omega\,.\tag{2.10}$$

定义 2.15。若给定 $\pi\colon TM\to M$ 上的一个非线性联络 h，则称 h 关于 (M,Ω) 是辛的，如果 Ω^v 在平行移动下保持不变。也就是说，对于 M 上的任意路径 γ，相应的平行移动映射 $\mathrm{PT}_t\colon U_0\to U_t$ 在开子集 $U_0\subset E_{\gamma(0)}$ 与$U_t\subset E_{\gamma(t)}$ 之间满足

$$\mathrm{PT}_t^*(\Omega^v)=\Omega^v\,.$$

注意，这一定义良好，因为 $\mathrm{d}(\mathrm{PT}_t)$ 将垂直向量映射为垂直向量。

在 [Bri25a 的引理 2.3] 中，给出了一些简单的判据，用于检验联络是否为辛联络，而无需处理平行移动。

定义 2.16. 全纯辛流形 (M,Ω) 上的预 Joyce 结构是一个联络 h 在规范投影 $\pi\colon TM\to M$，使得对每个 $\epsilon\in\mathbb{C}-\{0\}$，该联络

$$\mathcal{A}^\epsilon:=h+\epsilon^{-1}v\tag{2.11}$$

是平坦且辛的。

注 2.17. • 为了纳入一些有趣的例子，应当弱化上述定义，并允许 h 为亚纯而非全纯 [Bri25a，注 2.5]。特别地，对某个有效因子 $D\subset TM$，我们应当有一个丛映射 $h\colon \pi^*(TM)\to T(TM)\otimes\mathcal{O}_{TM}(D)$，满足

$$(\pi_*\otimes\mathcal{O}_{TM}(D))\circ h=\mathrm{Id}_{\pi^*(TM)}\otimes s_D$$

其中 $s_D\colon \mathcal{O}_{TM}\to\mathcal{O}_{TM}(D)$是典范包含。尽管下文的一切均可推广到这一更一般的情形，为了简化记号，我们将一切都写成 h 全纯的形式。

- 注意，$\pi\colon TM\to M$ 上的联络族 $\mathcal{A}^\epsilon$ 在$TM\times\mathbb{C}\to M\times\mathbb{C}$上诱导一个相对联络，在 $\epsilon=0$ 处有一个留数为 v的简单极点。特别地，它还在形式丛$\hat{}\pi\colon TM\times D\to M\times D$ 上诱导一个具有相同极点结构的$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$联络，其中 D 是形式圆盘。

要获得完整 Joyce 结构，我们需要在预 Joyce 结构之上添加额外的对称性和结构，下面将对此进行描述。

定义 2.18。 M 上的周期结构是一个元组 (Γ, Z)，其中：

- $\Gamma \to M$是 $TM \to M$的满格丛。换言之，对于每个 $p \in M$， $\Gamma_p \subset T_pM$都是离散有限生成阿贝尔群，且 $\Gamma_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = T_pM$。
- 若 ∇ 是由 Γ确定的 M 上的平坦线性联络，则 Z 是 M上的全纯向量场，使得 $\nabla(Z) = \mathrm{Id}_{TM}$。

注意，相对于 $TM \to M$的局部 ∇-平坦标架，第二个条件意味着 Z 在该标架下的分量给出 M上的局部平坦坐标，因此 ∇ 无挠。

现在我们已经具备定义 Joyce 结构所需的所有要素。

定义 2.19。 复流形 M 上的 Joyce 结构，是 M上的一个预 Joyce 结构 $(\Omega\ h)$ 与一个周期结构 (Γ, Z)，并满足：

- (J1) $(2\pi\mathrm{i})^{-1}\Omega^{-1}$ 在对偶格丛 $\Gamma^* \subset T^*M$上取整数值，其中 Ω^{-1} 是对偶辛形式。
- (J2) h 在平移 $(2\pi\mathrm{i}) \cdot \Gamma \subset TM$下保持不变。
- (J3) 若 ∇ 是由 Γ 在 M 上诱导的平坦联络，且 E 表示 Z的 ∇-水平提升，则对于 M上的任意向量场 X

$$h([Z, X]) = [E, h(X)]\,. \tag{2.12}$$

- (J4) 则若h不变$TM \to TM$表示在 π的纤维 $TM \to M$上由 -1o作用的对合，在 ι的作用下。

注 2.20。 • 如引言中所述，Joyce 结构的概念源于 DT 理论。在这一背景下， M 扮演着三维 Calabi-Yau 范畴的稳定性条件空间的角色，并带有由电荷格和中心荷决定的自然周期结构（Γ， Z）。此外，Joyce 结构的全纯辛形式 Ω 对应于 Γ的欧拉形式的逆。满足性质（J1-4）的 h的附加结构，是由该三维 Calabi-Yau 范畴的 DT 不变量所编码的猜想性几何结构。

- 注意，条件（J1）意味着平坦无挠联络 ∇ 也满足 $\nabla\Omega = 0$，因此（M， Ω ∇）是一个平坦全纯辛流形。条件（J2）意味着 h （以及 $\mathcal{A}^\epsilon$）下降为（$\mathbb{C}^*$）^{n}-丛上的一个联络

$$\pi : TM/(2\pi\mathrm{i}) \cdot \Gamma \to M\,.$$

最后，条件 (J3) 和 (J4) 反映了 DT 不变量所满足的性质。

我们可以利用前述额外结构来细化 h 的形式，如下所述。我们将由 ∇ 在 π 上诱导的 Ehresmann 联络记为 $\mathcal{H}$： $TM \to M$。于是可以写成

$$h_X = \mathcal{H}_X + \omega_X \tag{2.13}$$

其中 ω： $\pi^*(TM) \to V_\pi$。另一方面，用 M 上的向量场来表示，$\mathcal{A}^\epsilon$ 的平坦性条件可写为

$$[\mathcal{A}^\epsilon_X, \mathcal{A}^\epsilon_Y] = \mathcal{A}^\epsilon_{[X,Y]}. \tag{2.14}$$

利用 (2.14) 以及 $\mathcal{A}^\epsilon$ 是辛的这一事实，可以证明（见 [Bri25a]），存在一个全纯函数 W： $TM \to \mathbb{C}$，使得对于 M 上的向量场 X

$$h_X = \mathcal{H}_X + \mathrm{Ham}^{\Omega^v}(v_X W)\,. \tag{2.15}$$

这里， $v_X W$ 表示 v_X 在 W 上的作用，而 Ham^{Ω^v} 表示相对于 Ω^v 的哈密顿向量场。函数 W 称为 Pleba´nski 函数；若要求在零截面上满足 $M \subset TM$，且对于 M 上的向量场 X

$$W|_M = v_X W|_M = 0\,. \tag{2.16}$$

用 W 表示的平坦性条件 (2.14) 可转化为关于 W 的一组偏微分方程，称为 Pleba´nski 第二天穹方程。最后， W 必须满足对应于 (J2)-(J4) 的若干对称性（见 [引理 3.7][Bri25a]）。

注记 2.21。考虑与 Joyce 结构相关的 $TM \times \mathbb{C} \to M \times \mathbb{C}$ 上的相对亚纯联络 $\mathcal{A}$。有一种自然的方法，可以通过如下定义，将 $\mathcal{A}$ 从 p 上的相对平坦联络扩展为完整的平坦亚纯联络

$$\mathcal{A}_{\epsilon\partial_\epsilon} = \epsilon\partial_\epsilon - \frac{1}{\epsilon} v_Z - \omega_Z \,, \tag{2.17}$$

其中 Z 是周期结构中的向量场。该延拓进而在 $\hat{}p$ 上诱导出一个亚纯平坦$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$联络：$TM \times D \to M \times D$，它属于 [KS22 第 5 节中定义的几乎标准联络这一类。2], 但符号约定略有不同。在 [KS22 第 5 节中，2], 几乎标准联络允许采用比 Joyce 结构更一般的形式。也就是说，它们可以展开为以下形式

$$\mathcal{A}_X = \mathcal{H}_X + \frac{1}{\epsilon} v_X + \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \omega_X^{(k)}, \quad X \in \pi^*(TM)$$
$$\mathcal{A}_{\epsilon\partial_\epsilon} = \epsilon\partial_\epsilon - \frac{1}{\epsilon} v_Z + \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k v^{(k)} \,,$$

其中 $\omega_X^{(k)}$和 $v^{(k)}$相对于 π： $TM \to M$是垂直的。

2.3.1 Joyce 结构的扭子空间

我们以简要介绍与 Joyce 结构相关的扭子空间作为预备知识的结尾，内容遵循 [Bri25a]。M 上的 Joyce 结构编码了 TM[BS21],[1] 上的复超Kähler（$\mathbb{C}$-HK）几何，而后者可以由一个扭子空间 $\mathcal{Z}$来编码。$\mathbb{C}$-HK 结构是通常的超Kähler（HK）结构的全纯类比，其中 HK 结构的通常张量被相对于底层复结构的全纯张量所取代。更具体地说：

定义 2.22。复流形 N上的 $\mathbb{C}$-HK 结构是一个元组 (g, I, J, K)，满足：

- g是 Sym$^2(T^*N) \to N$的非退化全纯截面。
- I、 J、 K是 End$(TN) \to N$的全纯截面，满足虚四元数关系：$I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$。

- 对于 $R \in \{I, J, K\}$ 和 $X, Y \in TN$，有 $g(RX, RY) = g(X, Y)$，且 $\nabla(R) = 0$，其中 ∇是与 g相关联的 Levi-Civita 联络。

给定 $\mathbb{C}$-HK 结构 (N, g, I, J, K)，在复流形 N上可关联得到全纯辛形式

$$\Omega_R(-,-) := g(R-,-), \quad R \in \{I, J, K\}$$

它们是通常 HK 结构中 K¨ahler 形式的类比。

对于一个 Joyce 结构（M，Ω Γ， Z， h），其在 $N = TM$ 上关联的 $\mathbb{C}$-HK 结构可用（Ω h）来描述。特别地，任意预 Joyce 结构都关联一个 $\mathbb{C}$-HK 结构，而对应于 Joyce 结构的预 Joyce 结构则具有一些额外对称性。张量（I， J， K）由下式确定

$$I \circ h = i \cdot h, \quad J \circ h = -v, \quad K \circ h = i \cdot v$$
$$I \circ v = -i \cdot v, \quad J \circ v = h, \quad K \circ v = i \cdot h$$

而 g 则由下式确定

$$g(h_X, v_Y) = \frac{1}{2}\Omega(X, Y), \quad g(h_X, h_Y) = g(v_X, v_Y) = 0 \,.$$

现在我们简要说明如何构造与 Joyce 结构相关联的扭子空间 $\mathcal{Z}$。记 $N = TM$，并固定 $[\epsilon_0 : \epsilon_1] \in \mathbb{P}^1$，考虑由 N 上的分布

$$H([\epsilon_0 : \epsilon_1]) = \mathrm{Im}(\epsilon_0 v + \epsilon_1 h) \subset TN \,.$$

[1]或者更准确地说，若 h 是亚纯的，则为 TM 的一个开子集。

记投影到第一因子的映射为 $\pi_1\colon N\times\mathbb{P}^1\to N$，并令 $[\epsilon_0:\epsilon_1]$ 变化，我们得到 $\pi_1^*(TN)\to N\times\mathbb{P}^1$ 的一个子丛 H。将其与典范包含 $\pi_1^*(TN)\subset T(N\times\mathbb{P}^1)$ 复合，便得到 $N\times\mathbb{P}^1$ 上的一个分布 H。平坦性 $\mathcal{A}^\epsilon$ 蕴含该分布是对合的，因此生成一个叶状结构。扭子空间 $\mathcal{Z}$ 即为此叶状结构的叶空间，因此带有一个商映射 $q\colon TM\times\mathbb{P}^1\to\mathcal{Z}$。此外，投影到第二因子的映射 $\pi_2\colon N\times\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$ 诱导出一个投影 $p\colon\mathcal{Z}\to\mathbb{P}^1$，满足 $p\circ q=\pi_2$。定义 $\mathcal{Z}$ 为叶空间时可能出现的一些技术问题将不予考虑，并假设 $\mathcal{Z}$ 是一个复流形（见 [Bri25a，注 4.1]）。这不会造成问题，因为关于 $\mathcal{Z}$ 的所有陈述都可以转化为关于 $TM\times\mathbb{P}^1$ 上对象的精确陈述。例如，$\mathcal{Z}$ 上的一个全纯函数将由 $TM\times\mathbb{P}^1$ 上满足 $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}f)=H$ 的全纯函数来描述。

扭子空间 $\mathcal{Z}$ 带有一种额外结构，用于编码与 Joyce 结构相关联的 $\mathbb{C}$-HK 结构。这种额外结构是相对于 $p\colon\mathcal{Z}\to\mathbb{P}^1$ 的一族 (2)-扭曲全纯辛形式 $\mathcal{O}$。换言之，一个全纯截面

$$\varpi\in\Gamma(\mathcal{Z},\Lambda^2V_p^*\otimes p^*(\mathcal{O}(2))),\tag{2.18}$$

在纤维 $\mathcal{Z}_\epsilon:=p^{-1}(\epsilon)$ 上的限制是一个全纯辛形式。

定义 2.23。我们称元组 $(p\colon\mathcal{Z}\to\mathbb{P}^1,\ \varpi)$ 为与 Joyce 结构 $(M,\ \Omega\ \Gamma,\ Z,\ h)$ 相关联的扭子空间。

注 2.24。与通常的超K¨ahler 流形的扭子空间不同，$\mathbb{C}$-HK 结构的扭子空间并不自带一个反全纯对合 $\tau\colon\mathcal{Z}\to\mathcal{Z}$，该对合覆盖 $\mathbb{P}^1$ 上的对跖映射。

借助投影 $q\colon N\times\mathbb{P}^1\to\mathcal{Z}$，可以根据与 $\mathbb{C}$-HK 结构相关联的三个全纯辛形式 Ω_I、Ω_J 和 Ω_K，轻松描述 $q^*\varpi$。事实上，利用 $\mathbb{P}^1$ 上的仿射坐标 $\epsilon=\epsilon_1/\epsilon_0$，我们可以写成

$$q^*\varpi=\big((\Omega_J+\mathrm{i}\Omega_K)+2\mathrm{i}\epsilon\Omega_I+\epsilon^2(\Omega_J-\mathrm{i}\Omega_K)\big)\otimes\partial_\epsilon\,.\tag{2.19}$$

$\mathcal{O}(2)$-扭曲2-形式 $q^*\varpi$ 由如下条件刻画：对每个固定的 ϵ，它是一个闭2-形式，且满足

$$\mathrm{Ker}(q^*\varpi|_{TM\times\{\epsilon\}})=\mathrm{Im}(\mathcal{A}^\epsilon)\quad\text{for}\quad\epsilon\in\mathbb{C}^*,\quad(q^*\varpi)(v_X,v_Y)=\Omega(X,Y)\epsilon^2\otimes\partial_\epsilon\,.$$

3 Joyce 结构的形式分类

考虑 M上的一个 Joyce 结构，它在 $\pi\colon TM\to M$上带有联络族 $\mathcal{A}^\epsilon$。正如我们在上一节中所见$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，这诱导了 $\widehat{p}\colon TM\times D\to M\times D$上的一个形式相对联络 $\mathcal{A}$，

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ 相对于 $\widehat{q}\colon M\times D\to D$。遵循 [KS22第 5 节中的若干想法，3]，我们证明$\backsim\mathcal{A}$ 可通过第2.2节引入的形式规范群 $\mathcal{G}$ 的作用规范为标准形式。随后我们利用这一结果给出该 Joyce 结构的形式扭量空间的坐标。

考虑到关于亚纯 Joyce 结构的注记2.17，为使本节及后续各节中的某些结果适用，必须假设该亚纯 Joyce 结构沿零截面 $M\subset TM$没有极点。这一条件似乎在亚纯 Joyce 结构的若干情形中成立 [BM25, BM22]。

3.1 平凡 Joyce 结构

设给定一个全纯辛流形 $(M,\ \Omega)$，其上带有周期结构 $(\Gamma,\ Z)$，并满足定义 2.19 中的整性条件 (J1)。

命题 3.1. 给定如前所述的 $(M,\ \Omega)$ 和 $(\Gamma,\ Z)$，我们可以通过取以下对象，在 M 上定义一个 Joyce 结构

$$h=\mathcal{H},$$

where $\mathcal{H}$ 是 Γ导出的线性联络 ∇ 在 π 上的联络：$TM\to M$。

证明。 由于 $(M,\Omega\ \nabla)$ 是平坦全纯辛流形（回顾注 2.20），我们可以在 M 上选取关于 ∇平坦的全纯达布坐标 (Z^i)。考虑 TM上的诱导坐标 (Z^i,θ^i)。相对于这些坐标，我们有

$$\mathcal{H}_{\partial_{Z^i}}=\partial_{Z^i},\quad v_{\partial_{Z^i}}=\partial_{\theta^i}\,.$$

由此很容易验证

$$[\mathcal{A}^\epsilon_{\partial_{Z^i}},\mathcal{A}^\epsilon_{\partial_{Z^j}}]=0,$$

由此可得 $\mathcal{A}^\epsilon$ 的平坦性。另一方面，若在上述坐标中有

$$\Omega=\Omega_{ij}\mathrm{d}Z^i\wedge\mathrm{d}Z^j,\quad \Omega_{ij}\in\mathbb{C}$$

则利用 (2.10) 很容易验证

$$\Omega^v=\Omega_{ij}\mathrm{d}\theta^i\wedge\mathrm{d}\theta^j\,.$$

根据 [Bri25a，引理 2.3], ，要验证平坦联络 $\mathcal{A}^\epsilon$ 是辛的，只需证明 $\Omega^\epsilon\in\Omega^2(TM)$ 是 Ω^v 的满足 $\mathrm{Ker}(\Omega^\epsilon)=\mathrm{Im}(\mathcal{A}^\epsilon)$ 的唯一延拓，且为闭形式。在之前的坐标中，Ω^ϵ 可明确写为[2]

$$\Omega^\epsilon=\epsilon^{-2}\Omega_{ij}\mathrm{d}Z^i\wedge\mathrm{d}Z^j-2\epsilon^{-1}\Omega_{ij}\mathrm{d}\theta^i\wedge\mathrm{d}Z^j+\Omega_{ij}\mathrm{d}\theta^i\wedge\mathrm{d}\theta^j\,. \tag{3.1}$$

由于系数 Ω_{ij} 为常数，立即可得 $\mathrm{d}\Omega^\epsilon=0$ ，进而可知 $\mathcal{A}^\epsilon$ 是辛的。

最后，条件 (J1) 由假设成立，而 $(J2-4)$ 根据 $\mathcal{H}$ 的定义显然成立。由此我们得出，$(M$、$\Omega)$ 和 $(\Gamma,\ Z)$ 连同 $h=\mathcal{H}$ 在 M上定义了一个 Joyce 结构。 □

命题 3.1 中构造的 Joyce 结构可以看作与 $(M,\ \Omega\ \Gamma,\ Z)$ 相关联的平凡 Joyce 结构。事实上，与 (2.15) 对照可知，这个 Joyce 结构对应于将 $W=0$ 取为全局 Pleba´nski 函数。类似地，从 DT 理论的角度来看，它可以视为对应于所有 DT 不变量均为 0 的情形。

定义 3.2. 命题 3.1 中构造的、与具有周期结构 $(\Gamma,\ Z)$ 的全纯辛流形 $(M,\ \Omega)$ 相关联的 Joyce 结构，称为 M 上的平凡 Joyce 结构。

注 3.3. • 在 [KS22 第 5 节1], 中也有一个类似的概念，他们称之为与平凡稳定性数据相关联的标准联络。

- 注意，命题 3.1 的证明更一般地表明，对于任意平坦全纯辛流形 $(M,\ \Omega\ \nabla)$，我们都可以通过取 $h=\mathcal{H}$ 来定义一个预 Joyce 结构，其中 $\mathcal{H}$ 是由 ∇ 诱导的 Ehresmann 联络。

3.2 通过形式规范变换规范化为平凡 Joyce 结构

假设我们给定了 M 上的一个 Joyce 结构，它对应于数据 $(M,\ \Omega\ \Gamma,\ Z,\ h)$。使用第 2.2 节中的记号，相关的 $\mathbb{C}^*$ 参数族平坦辛联络

$$\mathcal{A}^\epsilon=h+\frac{1}{\epsilon}v$$

在 p 上诱导出亚纯相对联络 $\mathcal{A}:\ TM\times\mathbb{C}\to M\times\mathbb{C}$；通过形式化 $\mathbb{C}$-$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$方向，则在 $\hat{}p$ 上诱导出亚纯相对联络 $\mathcal{A}:\ TM\times D\to M\times D$。另一方面，根据第 3.1 节，我们有与 $(M,\ \Omega\ \Gamma,\ Z)$ 相关联的平凡 Joyce 结构，其 $\mathbb{C}^*$ 参数族平坦辛联络为

$$\mathcal{A}^{\mathrm{st},\epsilon}:=\mathcal{H}+\frac{1}{\epsilon}v\,.$$

与之前一样，我们得到 $\hat{}p$ 上的亚纯相对联络 $\mathcal{A}^{\mathrm{st}}:\ TM\times\widehat{D}\to M\times\widehat{D}$。

$\widehat{\ }$如第 2.2 节所述，我们有一个由 $\hat{}p$ 的形式规范变换构成的群 $\mathcal{G}$ ，以及它在联络上的相应作用（回顾 (2.6)）。遵循 [KS22, 第 5 节.3] 中的一些思路，我们将$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$证明可以找到一个形式规范变换 $\hat{}g\in\mathcal{G}$ ，它由 $\mathrm{Lie}(\mathcal{G})$ 给出，使得

$$e^{\mathcal{L}_{\hat{g}}}\mathcal{A}^{\mathrm{st}}=\mathcal{A}\,. \tag{3.2}$$

[2]这是 $\epsilon^{-2}q^*\varpi$ 的 2-形式因子，其中 $q^*\varpi$ 在（2.19）中给出。

定理 3.4。给定 M 上的一个 Joyce 结构，存在唯一的 $\dot{g} \in$ 李代数($\mathcal{G}$)，满足方程（3.2）且使得 $\dot{g}|_M = 0$。

证明。我们为 M 选取局部坐标 (Z^i)，并考虑 TM 上的诱导坐标 ($Z^i,\ \theta^i$)。记 $\mathcal{A}_i := \mathcal{A}_{\partial_{Z^i}}$ 和 $v_i := v_{\partial_{Z^i}}$。我们将通过保证 (3.2) 关于 ϵ 逐阶成立来构造 $\dot{g}$。对于 $\dot{g}_1 \in \Gamma(TM,\ V_\pi)$，我们有方程

$$e^{\mathcal{L}_{\epsilon\dot{g}_1}}\mathcal{A}_i^{\mathrm{st}} = \mathcal{A}_i^{\mathrm{st}} + [\dot{g}_1, v_i] + \mathcal{O}(\epsilon)\,,$$

其中 $\mathcal{O}(\epsilon)$ 表示阶数为 ϵ 或更高阶的项。如果 $\omega_i := \mathcal{A}_i - \mathcal{A}_i^{\mathrm{st}}$，那么我们希望找到 $\dot{g}_1$，使得

$$[\dot{g}_1, v_i] = \omega_i, \quad i = 1, ..., \dim_{\mathbb{C}}(M)\,. \tag{3.3}$$

若将 $\dot{g}_1 = \dot{g}_1^k \partial_{\theta^k}$ 和 $\omega_i = \omega_i^k \partial_{\theta^k}$ 写成分量形式，再利用 $v_i = \partial_{\theta^i}$，方程 (3.3) 可化为

$$-\partial_{\theta^i}\dot{g}_1^k \partial_{\theta^k} = \omega_i^k \partial_{\theta^k}\,. \tag{3.4}$$

Joyce 结构的平坦性意味着

$$[\omega_i, v_j] + [v_i, \omega_j] = 0 \implies \partial_{\theta^j}\omega_i^k = \partial_{\theta^i}\omega_j^k\,.$$

因此，可沿 π 的纤维对路径积分（取向量值）来求得 (3.4) 的一个解：$TM \to M$

$$\dot{g}_1(Z,\theta) = -\int_{\gamma_{(Z,\theta)}} \omega_i(Z,\varphi)\mathrm{d}\varphi^i \tag{3.5}$$

其中$\gamma_{(Z,\theta)}$是从$(Z,0)$到(Z,θ)的一条路径。该解在 Z 中显然是全纯的，并且与纤维中路径的形变无关。由构造可知，它在零截面上为零，并且显然 $\dot{g}_1$ 是具有此性质的唯一解。

由引理2.14，我们现在得到平坦联络

$$\mathcal{A}_i^{(1)} := e^{\mathcal{L}_{\epsilon\dot{g}_1}}\mathcal{A}_i^{\mathrm{st}} = \mathcal{A}_i + \epsilon\omega_i^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,,$$

其中 $\omega_i^{(1)}$ 是相对于 π的垂直向量场：$TM \to M$。$\mathcal{A}$与 $\mathcal{A}^{(1)}$的平坦性意味着

$$[v_j, \omega_i^{(1)}] = [v_i, \omega_j^{(1)}] \implies \partial_{\theta^j}\omega_i^{(1)} = \partial_{\theta^i}\omega_j^{(1)}\,. \tag{3.6}$$

我们现在希望找到 $\dot{g}_2 \in \Gamma(TM, V_\pi)$，使得

$$e^{\mathcal{L}_{\epsilon^2\dot{g}_2}}\mathcal{A}_i^{(1)} = \mathcal{A}_i + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,.$$

由于

$$\mathcal{A}_i^{(2)} := e^{\mathcal{L}_{\epsilon^2\dot{g}_2}}\mathcal{A}_i^{(1)} = \mathcal{A}_i + \epsilon\omega_i^{(1)} + \epsilon[\dot{g}_2, v_i] + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

我们希望找到 $\dot{g}_2$，使其满足该方程组

$$[v_i, \dot{g}_2] = \omega_i^{(1)}, \quad i = 1, ..., \dim_{\mathbb{C}}(M).$$

和之前一样，方程 (3.6) 表明，我们可以通过纤维方向路径积分求解 $\dot{g}_2$。按照 (3.5) 中的做法选择积分路径，即可使它在零截面上消失；具有这些性质的 $\dot{g}_2$ 仍然是唯一的。

一般而言，假设我们有如下平坦联络

$$\mathcal{A}_i^{(k)} = \mathcal{A}_i + \epsilon^k\omega_i^{(k)} + \mathcal{O}(\epsilon^{k+1})\,.$$

其中 $\omega_i^{(k)}$ 是一个垂直向量场。$\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}^{(k)}$ 的平坦性意味着

$$[v_j, \omega_i^{(k)}] = [v_i, \omega_j^{(k)}] \implies \partial_{\theta^j}\omega_i^{(k)} = \partial_{\theta^i}\omega_j^{(k)}\,,$$

而

$$e^{\mathcal{L}_{\epsilon^{k+1}\dot{g}_{k+1}}}\mathcal{A}_i^{(k)} = \mathcal{A}_i + \epsilon^k\omega_i^{(k)} + \epsilon^k[\dot{g}_{k+1}, v_i] + \mathcal{O}(\epsilon^{k+1})\,.$$

因此，我们希望找到满足以下条件的 $\dot{g}_{k+1}$

$$[v_i, \dot{g}_{k+1}] = \omega_i^{(k)}, \quad i = 1, 2..., \dim_{\mathbb{C}}(M)\,,$$

并且我们可以像之前一样求解，通过路径积分得到 $\dot{g}_{k+1}$

$$\dot{g}_{k+1}(Z, \theta) = \int_{\gamma(Z,\theta)} \omega_i^{(k)}(Z, \varphi) \mathrm{d}\varphi^i \tag{3.7}$$

在零截面上消失，并且 $\dot{g}_{k+1}$ 是满足这一性质的唯一解。

虽然我们是在 M上的局部坐标（Z^i）中工作（以及在 TM上的诱导坐标（Z^i, θ^i）中），但我们可以利用局部 $\dot{g}_k$ 的唯一性，将它们拼接成一个全局 $\dot{g}_k$。

依次应用之前所有的规范变换，我们得到

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty} e^{\mathcal{L}_{\epsilon^k \dot{g}_k}}\right) \mathcal{A}^{\mathrm{st}} = \mathcal{A}\,,$$

其中，每个新因子都作用于前一个因子作用结果的左侧。下面是理解上述方程的方式：对于方程两边 ϵ^k 的任意截断，在应用足够多个规范变换的乘积后，等式都成立。此外，注意到对于任意 $n > 0$，通过 Baker-Campbell-Hausdorff（BCH）公式得到的 $k \leq n$ 的 ϵ^k 阶项，在取足够多个乘积后都会稳定，因此可以将无穷乘积解释为一个规范变换。也就是说，我们可以写成

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty} e^{\mathcal{L}_{\epsilon^k \dot{g}_k}}\right) = e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}}$$

其中，在 $\dot{g}$ 的 ε 展开中， ϵ^k 项是通过对各乘积依次应用 BCH 公式，直到 ϵ^k 项稳定而得到的。

所得的 $\dot{g}$ 在 π 的零截面上消失这一事实： $TM \to M$ ，源于在零截面上消失的垂直向量场对于线性组合和李括号运算封闭，再结合 BCH 公式。

□

注 3.5. 请注意，尽管边界条件 $\dot{g}|_M = 0$ 很自然，但人们或许会感兴趣于一种 $\dot{g}$ 规范化 $\mathcal{A}^{\mathrm{st}}$ ，使其满足 $\mathcal{A}$ ，但不在零截面上消失。我们将在第 5 节的例子中看到这样的实例。

$\widehat{\ }$ 显式写出任何满足 (3.2) 的 $\dot{g} \in$ 李代数($\mathcal{G}$) 必须满足的方程，并按 ϵ 逐阶展开，是很有用的。我们使用定理 3.4 证明中的记号，在下面的命题中汇总这些方程。

命题 3.6。 考虑 $\dot{g} = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k \dot{g}_k \in$ 李代数($\widehat{\mathcal{G}}$)。那么 $\dot{g}$ 满足 (3.2) 当且仅当，相对于 M上的平坦达布坐标 (Z^i)

$$[\dot{g}_1, v_i] = \omega_i, \quad i = 1, 2, ..., \dim_{\mathbb{C}}(M) \tag{3.8}$$

并且对每个 $l > 0$，以下方程对 $i = 1$，2，.....，$\dim_{\mathbb{C}}(M)$成立

$$0 = \sum_{r=1}^{l+1} \frac{1}{r!} \sum_{k_1+...+k_r=l+1} [\dot{g}_{k_1}, ..., [\dot{g}_{k_r}, v_i]...] + \sum_{r=1}^{l} \frac{1}{r!} \sum_{k_1+...+k_r=l} [\dot{g}_{k_1}, ..., [\dot{g}_{k_r}, \partial_{Z^i}], ...] \tag{3.9}$$

证明。 只需将 (3.2) 展开为关于 ϵ的形式级数，并收集具有相同 ϵ次幂的项，再结合以下事实即可：对于 ∇-平坦坐标， $\mathcal{H}_{\partial_{Z^i}} = \partial_{Z^i}$ 。 □

例如，对于 $l =$ 1,2，方程 (3.9) 可化简为

$$\begin{aligned}
&[\dot{g}_2, v_i] + [\dot{g}_1, \partial_{Z^i}] + \frac{1}{2}[\dot{g}_1, [\dot{g}_1, v_i]] = 0, \\
&[\dot{g}_3, v_i] + [\dot{g}_2, \partial_{Z^i}] + \frac{1}{2}\left([\dot{g}_1, [\dot{g}_2, v_i]] + [\dot{g}_2, [\dot{g}_1, v_i]] + [\dot{g}_1, [\dot{g}_1, \partial_{Z^i}]]\right) + \frac{1}{6}[\dot{g}_1, [\dot{g}_1, [\dot{g}_1, v_i]]] = 0\,.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

注记 3.7。 将 $\mathcal{A}^\epsilon$ 用 Plebańnski 函数 W 表示，如 (2.15) 所示，可见 (3.8) 可以写成

$$-[v_i, \dot{g}_1] = \mathrm{Ham}^{\Omega^v}(v_i W)\,.$$

选取 M 上的达布坐标 (Z^i) 以及 TM 上的诱导坐标 (Z^i, θ^i)，我们可以将前面的方程写为

$$-\partial_{\theta^i}(\dot{g}_1^k)\partial_{\theta^k} = \Omega^{jk}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^i\partial\theta^j}\partial_{\theta^k}$$

其中 Ω^{ij} 是 Ω^{-1} 的系数。因此，自然地取

$$\dot{g}_1 = -\mathrm{Ham}^{\Omega^v}(W)\,. \tag{3.11}$$

若选取 Plebańnski 函数 W 使其满足 (2.16)，则所得的 $\dot{g}_1$ 满足 $\dot{g}_1|_M = 0$。由此以及 (3.9) 中的方程可知， W 可用于确定所有后续的 $\dot{g}_k$；若要求 $\dot{g}_k|_M = 0$，则这些解是唯一的。

3.3 Joyce 结构的形式扭子坐标

回顾第 2.3.1 节，我们有一个与 M 上的 Joyce 结构相关联的扭子空间 $(p:\mathcal{Z}\to\mathbb{P}^1, \varpi)$。由于 ϖ 限制在每个纤维 $\mathcal{Z}_\epsilon = p^{-1}(\epsilon)$ 上都是全纯辛形式，因此自然会提出这样的问题：寻找 $\mathcal{Z}$ 上的全纯函数，使其限制在 $\varpi^\epsilon := \varpi|_{\mathcal{Z}_\epsilon}$ 上时为达布坐标。

若 $n = \dim_{\mathbb{C}}(M)$，则 $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{Z}) = n+1$ 且 $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{Z}_\epsilon) = n$。因此，我们希望寻找 $\mathcal{Z}$ 上的 n 函数，使其限制为 ϖ^ϵ 的达布坐标。

对于第 3.1 节中的平凡 Joyce 结构，对此存在自然的候选。事实上，若 (Z^i) 是 $U\subset M$ 上的 ∇-平坦达布坐标，而 (Z^i,θ^i) 是 $\pi^{-1}(U)\subset TM$ 上的诱导坐标，则我们可以在 $\pi^{-1}(U)\times\mathbb{C}^*\subset TM\times\mathbb{P}^1$ 上定义如下函数[3]：

$$x^{i,\mathrm{st}} := \theta^i - \frac{Z^i}{\epsilon},\quad i = 1,..,n\,. \tag{3.12}$$

这些函数满足

$$\mathcal{A}^{\mathrm{st}}_{\partial_{Zj}}(x^{i,\mathrm{st}}) = 0,\quad i,j = 1,...,n\,. \tag{3.13}$$

从而下降到扭子空间 $\mathcal{Z}^{\mathrm{st}}$。此外，一个简单的计算表明（见 (3.1) 及脚注），对于固定的 $\epsilon\in\mathbb{C}^*$

$$q^*\varpi^{\mathrm{st}}|_{TM\times\{\epsilon\}} = \epsilon^2\Omega_{ij}\mathrm{d}x^{i,\mathrm{st}}\wedge\mathrm{d}x^{j,\mathrm{st}} \tag{3.14}$$

其中 $\Omega_{ij}\in\mathbb{C}$ 是 Ω 在坐标 (Z^i) 中的系数。因此，函数 $x^{i,\mathrm{st}}$ 下降为 $\varpi^{\mathrm{st},\epsilon}$ 的达布坐标。

现在固定一个 Joyce 结构 $(M,\ \Omega\ \Gamma,\ Z,\ h)$ 及其对应的联络族 $\mathcal{A}^\epsilon$，并考虑平凡 Joyce 结构 $(M,\ \Omega\ \Gamma,\ Z,\ \mathcal{H})$ 及其联络族 $\mathcal{A}^{\mathrm{st},\ \epsilon}$。我们考虑相应的形式相对联络 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}^{\mathrm{st}}$ 在 $\hat{}p$：
$TM\times\widehat{D}\to M\times\widehat{D}$ 上，以及任意满足下列条件的 $\dot{g}\in$李代数$(\widehat{\mathcal{G}})$

$$e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}}\mathcal{A}^{\mathrm{st}} = \mathcal{A}\,.$$

我们还固定坐标 $(Z^i,\ \theta^i)$，它们与之前一样定义在 $\pi^{-1}(U)\subset TM$ 上。

命题 3.8. 在前述假设下，定义 $x^i\in\epsilon^{-1}\cdot\mathcal{O}_{TM}(\pi^{-1}(U))[[\epsilon]]$ 如下

$$x^i := e^{\dot{g}}x^{i,\mathrm{st}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\dot{g}^k(x^{i,\mathrm{st}})}{k!}\,.$$

则 x^i 满足

$$\mathcal{A}_{\partial_{Zj}}(x^i) = 0\quad\text{for}\quad i,j = 1,...,n.$$

[3]为了得到一个用 $\mathcal{O}_{TM}[[\epsilon]]$ 表示而非 $\epsilon^{-1}\cdot\mathcal{O}_{TM}[[\epsilon]]$ 的表达式，自然也可以将 $x^{i,\mathrm{st}}$ 定义为 $x^{i,\mathrm{st}} = \epsilon\theta^i - Z^i$。

证明。令 $\mathcal{A}_j := \mathcal{A}_{\partial_{Z^j}}$。为简化记号，将 B 算子 $B(\mathcal{A}_j^{\mathrm{st}}) = [\dot{g}, \mathcal{A}_j^{\mathrm{st}}]$ 记为 B。于是

$$\mathcal{A} = e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}} \mathcal{A}_j^{\mathrm{st}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k(\mathcal{A}_j^{\mathrm{st}})}{k!} .$$

通过归纳法很容易验证

$$B^k(\mathcal{A}_j^{\mathrm{st}}) = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} \dot{g}^{k-l} \mathcal{A}_j^{\mathrm{st}} \dot{g}^l .$$

将 $e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}} \mathcal{A}_j^{\mathrm{st}}(e^{\dot{g}} x^{i,\ \mathrm{st}})$ 中具有相同因子 $\dot{g}^{p_1} \mathcal{A}_j^{\mathrm{st}} \dot{g}^{p_2}$ 的项合并，可得

$$\left(\sum_{k=p_1}^{p_1+p_2} \frac{1}{k!} \frac{(-1)^{k-p_1}}{(p_2+p_1-k)!} \binom{k}{k-p_1} \right) \dot{g}^{p_1} \mathcal{A}_j^{\mathrm{st}} \dot{g}^{p_2} x^{i,\mathrm{st}} ,$$

这可以改写为

$$\frac{1}{p_1! p_2!} \left(\sum_{k=0}^{p_2} (-1)^k \binom{p_2}{k} \right) \dot{g}_1^{p_1} \mathcal{A}_j^{\mathrm{st}} \dot{g}_2^{p_2} x^{i,\mathrm{st}} .$$

在情　形 $p_2 = 0$ 下，上式因 $\mathcal{A}_j^{\mathrm{st}} x_i^{\mathrm{st}} = 0$ 而消失；而对于 $p_2 > 0$ 的情形，我们使用

$$\sum_{k=0}^{p_2} (-1)^k \binom{p_2}{k} = 0$$

这可由令 $a = 1, b = -1$ in 得出

$$(a+b)^{p_2} = \sum_{k=0}^{p_2} \binom{p_2}{k} a^{p_2-k} b^k .$$

于是便得到所需结果。 □

虽然我们不会详细讨论形式扭子空间的概念，但上一命题的结果可用于得出若干与此概念相关的陈述，以下注记对此作了总结。

注记 3.9. • 陈述 $\mathcal{A}(x^i) = 0$ 可解释为：函数 $\epsilon \cdot x^i \in \mathcal{O}_{TM}(\pi^{-1}(U))[[\epsilon]]$ 下降为形式扭量空间 $\widehat{\mathcal{Z}}$ 上的函数；该空间是通过沿着位于 $\epsilon = 0$ 上方的纤维 $\mathcal{Z}_0$ 对 $\mathcal{Z}$ 作形式完备化而得到的。

• 将 (3.14) 视为 $\Omega^2(TM)[[\epsilon]]$ 中的一个表达式，我们有

$$e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}} (\epsilon^2 \Omega_{ij} \mathrm{d}x^{i,\mathrm{st}} \wedge \mathrm{d}x^{j,\mathrm{st}}) = \epsilon^2 \Omega_{ij} \mathrm{d}(e^{\dot{g}} x^{i,\mathrm{st}}) \wedge \mathrm{d}(e^{\dot{g}} x^{j,\mathrm{st}}) = \epsilon^2 \Omega_{ij} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j , \tag{3.15}$$

其中，外微分对形式变量 ϵ 的作用平凡。由构造可知，(3.15)$\widehat{\ }$ 右侧显然是闭的，并且在 $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ 上消失，因此下降到 $\mathcal{Z}$。于是我们可以将 x^i 视为形式扭子 Darboux 坐标。

• 利用 (3.11)，不难验证，在 (Z^i, θ^i) 坐标中

$$\Omega_{ij} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = \Omega_{ij} \mathrm{d}x^{i,\mathrm{st}} \wedge \mathrm{d}x^{j,\mathrm{st}} + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^i \partial \theta^j} \mathrm{d}\theta^i \wedge \mathrm{d}Z^j + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^j \partial Z^i} \mathrm{d}Z^i \wedge \mathrm{d}Z^j + \mathcal{O}(\epsilon) , \tag{3.16}$$

其中 $\mathcal{O}(\epsilon)$ 是 ϵ 阶或更高阶的项。利用 W 满足的 Pleba´nski 第二天球方程，可以验证，忽略 $\mathcal{O}(\epsilon)$ 项后，(3.16) 重现了 [Bri25a 中方程 (24-26)] 给出的辛形式扭量族 ϖ （经 q 拉回）。作者不确定一般情况下 $\mathcal{O}(\epsilon)$ 项是否会逐阶消失。在第 5 节的 A1 例子中，ϵ 中所有高阶项都会消失。

最后，我们给出 x^i 在 $\dot{g}$ 可以写成哈密顿形式的情况下的一个显式公式。

推论 3.10。 在与前一个命题相同的设定下，假设存在一个函数 $W \in \mathcal{O}_{TM}[[\epsilon]]$

$$\widehat{W} = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k W_k$$

使得

$$\dot{g} = \mathrm{Ham}^{\Omega^v}(\widehat{W}).$$

于是我们得到公式

$$x^i = \theta^i - \epsilon^{-1} z^i + \eta^{pi} \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k \sum_{r=1}^{k} \frac{1}{r!} \sum_{l_1+\ldots+l_r=k} \{W_{l_1}, \{W_{l_2}, ..., \{W_{l_{r-1}}, \frac{\partial W_{l_r}}{\partial \theta^p}\}...\} \tag{3.17}$$

其中， $-W_1 = W$ 是 Pleba´nski 函数，泊松括号是相对于 Ω^v取的；对于 $r = 1$ 的情形，不存在泊松括号，只有项 $\frac{\partial W_k}{\partial \theta^p}$。

证明。 公式 (3.17) 可通过将 $e^{\dot{g}} x^{i,\mathrm{st}}$按 ϵ逐阶展开，并利用 $x^i = e^{\dot{g}} x^{i,\mathrm{st}}$这一事实轻易得出；而 $W_1 = -W$这一事实则由 (3.11) 得出。 □

4 迈向形式规范变换的重求和

本节将初步探讨如何证明：将平凡 Joyce 结构规范化为给定 Joyce 结构 (3.2) 的无穷小形式规范变换 $\dot{g} \in$Lie($\mathcal{G}$) 是可复苏的。我们的主要结果表明，博雷尔变换

$$\mathcal{B}[\dot{g}](\xi) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\dot{g}_k}{(k-1)!} \xi^{k-1} \tag{4.1}$$

在 $\xi = 0$ 的某个邻域内收敛，且关于参数 $p \in TM$ 局部一致。我们还证明了一个类似的结果，涉及第 3.3 节中的形式扭子 Darboux 坐标的博雷尔变换。剩下的一步需要证明 $\mathcal{B}[\dot{g}](\xi)$ 存在“无穷解析延拓”，这要困难得多，因此我们留待未来研究。这里的“无穷解析延拓”是指，我们必须证明存在某个闭离散子集 $S \subset \mathbb{C}$，使得 $\mathcal{B}[\dot{g}](\xi)$ 能沿着从 (4.1) 的收敛邻域出发、位于 $\mathbb{C} - S$ 中的路径，在 ξ 中作解析延拓。

正如引言中所述，证明 $\dot{g}$ 是可复苏的，将使我们能够研究 $\dot{g}$ 的斯托克斯自同构（预计它们与 DT 不变量有关），以及 $\dot{g}$ 的博雷尔求和（如果存在的话）。此外，我们还可以研究与 $\dot{g}$ 相关的对象是否可复苏，例如第 3.3 节中的形式扭子 Darboux 坐标，以及相应的形式 τ-函数[Bri24]。

4.1 形式无穷小规范变换的博雷尔变换

在本节中，我们固定一个 Joyce 结构 $(M, \Omega, \Gamma, Z, h)$，其配备相对联络 $\mathcal{A}$，定义在 $\hat{p}: TM \times D \to M \times D$ 上，并考虑一个满足下式的无穷小规范变换 $\dot{g} \in$Lie($\mathcal{G}$)

$$e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}} \mathcal{A}^{\mathrm{st}} = \mathcal{A}.$$

例如，我们可以取定理 3.4 中的 $\dot{g}$。回忆一下，根据定义， $\dot{g} \in$Lie($\mathcal{G}$) 是一个形式级数

$$\dot{g} = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{g}_k \epsilon^k$$

其中 $\dot{g}_k$ 是与典范投影$\pi: TM \to M$相关的垂直丛 $V_\pi \to TM$ 的截面。其博雷尔变换由 (4.1) 定义，我们的目标是证明 (4.1) 在 $\xi = 0$的一个邻域内收敛，且关于参数 $p \in TM$局部一致收敛。

对于 $p = (p^i)$，我们将 $B_r(p) := \prod_{i=1}^n D(p^i, r)$ 记为 $\mathbb{C}^n$ 中的多圆盘，其中每个 $D(p^i, r) \subset \mathbb{C}$ 都是以 $p^i \in \mathbb{C}$ 为中心、半径为 r 的圆盘。有时我们会将 $B_r(p)$ 简记为 B_r。

引理 4.1。 考虑两个半径为 $0<r<R$ 的同心多圆盘 $B_r \subset B_R \subset \mathbb{C}^n$ 。此外，考虑在 B_R 的某个邻域 U 上全纯的 $k \geq 2$ 个向量场 $V_i = V_i^j \partial_{Z^j}$，其中 $i = 1$、.....、k，并定义

$$||V_i||_K := \max_j(\sup_{z\in K}|V_i^j(z)|)\,. \tag{4.2}$$

对于 $K \subset U.$，那么

$$||\,[V_1,[V_2,...,[V_{k-1},V_k],...]\,||_{B_r} \leq \left(\frac{2n(k-1)}{R-r}\right)^{k-1}\prod_{i=1}^{k}||V_i||_{B_R}\,. \tag{4.3}$$

证明。 首先固定 $t \in (0,R)$ 和 $\rho \in (0, R-t]$。对于 $k=2$ 和 B_t，取以 B_R 为中心、半径为 t 的球，则对任意 $z \in B_t$， $[V_1,V_2] = [V_1,V_2]^j\partial_{Z^j}$ 的各分量满足以下估计

$$|\,[V_1,V_2]^j(z)\,| \leq \sum_{l=1}^{n}|V_1^l(z)||\partial_{Z^l}V_2^j(z)| + |V_2^l(z)||\partial_{Z^l}V_1^j(z)|\,.$$

对含导数的项应用柯西估计，可得

$$|\,[V_1,V_2]^j(z)\,| \leq \sum_{l=1}^{n}\left(||V_1||_{B_{t+\rho}}\frac{||V_2||_{B_{t+\rho}}}{\rho} + ||V_2||_{B_{t+\rho}}\frac{||V_1||_{B_{t+\rho}}}{\rho}\right) = \frac{2n}{\rho}||V_1||_{B_{t+\rho}}||V_2||_{B_{t+\rho}}\,,$$

由此可知

$$|||[V_1,V_2]|||_{B_t} \leq \frac{2n}{\rho}||V_1||_{B_{t+\rho}}||V_2||_{B_{t+\rho}}\,. \tag{4.4}$$

现在通过对适当选取的 t 和 ρ 依次使用 (4.4)，来证明 (4.3)。注意，若取 $t=r$ 和 $R=t+\rho$，则 (4.4) 已经给出了 $k=2$ 的情形。令 $\rho = \frac{R-r}{k-1}$，并令 $t_j = r+\rho j$ 满足 $j = 0$，1，.....，$k-1$，使得 $t_0 = r$ 和 $t_{k-1} = R$。通过反复应用 (4.4)，并选取 t 和 $t+\rho$ 为相邻的 t_j，我们得到

$$|||[V_1,[V_2,...,[V_{k-1},V_k],...]|||_{B_{t_0}} \leq \frac{2n}{\rho}||V_1||_{B_{t_1}}\cdot|||[V_2,...,[V_{k-1},V_k],...]|||_{B_{t_1}} \leq \left(\frac{2n}{\rho}\right)^{k-1}\prod_{i=1}^{k}||V_i||_{B_{t_{k-1}}}$$

由此即可得出结论。 □

现在，我们可以将前述引理与 (3.9) 结合起来，得到我们所需的主要估计。

推论 4.2. 假设我们在某个坐标图 $U \subset TM$ 上局部工作，并考虑前述引理中的 $B_r \subset B_R \subset U$。对于 $l \geq 1$， $\dot{g} = \sum_{k=1}^{\infty}\dot{g}_k\epsilon^k$ 的系数 $\dot{g}_k$ 满足

$$||\,[v_i,\dot{g}_{l+1}]\,||_{B_r} \leq \sum_{p=2}^{l+1}\frac{1}{p!}\left(\frac{2np}{R-r}\right)^p\sum_{k_1+...+k_p=l+1}\prod_{j=1}^{p}||\dot{g}_{k_j}||_{B_R} + \sum_{p=1}^{l}\frac{1}{p!}\left(\frac{2np}{R-r}\right)^p\sum_{k_1+...+k_p=l}\prod_{j=1}^{p}||\dot{g}_{k_j}||_{B_R}$$

对所有 $i=1$，.....，n 均成立。

证明。 首先，可以从 (3.9) 的第一个求和项中分离出 $[v_i,\dot{g}_{l+1}]$ 项，并将其移到等式另一侧。由前述引理以及 $||v_i||_{B_R} = ||\partial_{\theta^i}||_{B_R} = ||\partial_{Z^i}||_{B_R} = 1$ 这一事实，所需的不等式便可立即得出。

□

定理 4.3。 博雷尔变换 $\mathcal{B}[\dot{g}](\xi)$ 在 $\xi = 0$ 的一个邻域内收敛，且关于 $p \in TM$ 局部一致收敛，当且仅当将 $B[\dot{g}][\xi]$ 限制在零截面 $M \subset TM$ 上时也满足同样的性质。特别地，定理 3.4 中构造的 $\dot{g}$ 的博雷尔变换在 $\xi = 0$ 的一个邻域内收敛，且关于 $p \in TM$ 局部一致收敛。

证明。我们首先考虑 $\dot{g}$ 是由定理 3.4 构造的情形，此时 $\dot{g}|_M = 0$。此外，取 $p \in M \subset TM$，它是 p 的一个坐标邻域 $U \subset TM$，其坐标为 (Z^i, θ^i)，由底空间 M 上的坐标 (Z^i) 诱导；再取一个多圆盘 $B_r(p) \subset U$。我们将证明，$\mathcal{B}[\dot{g}]$ 在 $\xi = 0$ 的一个邻域内收敛，并且关于 $(Z^i, \theta^i) \in B_r$ 一致收敛；最后说明如何将证明推广到定理陈述中的更一般情形。

给定一个多圆盘 $B_R(p) \subset U$满足 $r < R$，在整个证明过程中我们将使用记号 $a_k = || \dot{g}_k ||_{B_r}$，$A_k = || \overline{\dot{g}_k} ||_{B_R}$ 和 $C = \frac{2n}{R-r}$。为了证明所需结论，只需证明

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \xi^k \tag{4.5}$$

当 ξ 足够小时收敛。由于 $[v_i, \dot{g}_{l+1}] = \partial_{\theta^i}(\dot{g}^k_{l+1})\partial_{\theta^k}$ 且 $\dot{g}_{l+1}$ 在零截面上消失，我们可以通过沿垂直方向的路径积分，根据其垂直导数来估计 $\dot{g}_{l+1}(z)$。具体而言，可以写成

$$\dot{g}_{l+1}(Z, \theta) = \int_{\gamma(Z,\theta)} \partial_{\theta^i} \dot{g}(Z, \varphi) \mathrm{d}\varphi^i \tag{4.6}$$

其中 $\gamma(Z, \theta)$ 是一条从 $(Z, 0)$ 到 (Z, θ) 的直线路径，进而得到

$$a_{l+1} = ||g_{l+1}||_{B_r} \leq r \cdot n \cdot \max\{|| [v_i, g_{l+1}] ||_{B_r}\}_{i=1}^n .$$

将此不等式与推论 4.2 中的不等式结合，可得

$$a_{l+1} \leq r \cdot n \left(\sum_{p=2}^{l+1} \frac{1}{p!} C^p p^p \sum_{k_1+\ldots+k_p=l+1} \prod_{i=1}^{p} A_{k_i} + \sum_{p=1}^{l} \frac{1}{p!} C^p p^p \sum_{k_1+\ldots+k_p=l} \prod_{i=1}^{p} A_{k_i} \right) . \tag{4.7}$$

取 $y_1 > A_1$，并定义 y_{l+1}：对于 $l \geq 1$，将不等式 (4.7) 右端中的所有 A_{k_i} 替换为 y_{k_i}。注意，由于出现的 y_{k_i} 都满足 $k_i < l + 1$，因此此定义是有意义的。于是，对所有 $k \geq 1$，都有 $a_k < y_k$。因此，要证明 (4.5) 在 $\xi = 0$ 的某个邻域内收敛，只需证明

$$C(\xi) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k!} \xi^k = \sum_{k \geq 1} c_k \xi^{k-1}$$

在 $\xi = 0$ 的某个邻域内收敛。接下来我们需要以下组合引理。

引理 4.4。设 p 是一个正整数。若 $k_i \geq 1$ 对于 $i = 1, \ldots\ldots, p$ 是满足 $k_1 + \ldots + k_p = m$ 的整数，则

$$p! \leq \frac{m!}{k_1! \ldots k_p!} .$$

证明。先考虑两个整数 $a, b \geq 1$。通过直接计算容易看出 $(a+b-1)! \geq a!b!$。依次应用这一结果，我们得到

$$k_1! \ldots k_p! \leq (k_1 + \ldots + k_p - p + 1)! = (m - p + 1)! .$$

于是我们得到所需的不等式

$$\frac{m!}{k_1! \ldots k_p!} \geq \frac{m!}{(m-p+1)!} = m(m-1)\ldots(m-p+2) \geq p(p-1)\ldots 2 = p! .$$

□

将引理应用于 $m = l + 1$ 和 $m = l$的情形，并用 $[\xi^k]C(\xi)^p$ 表示

ξ^k 在 $C(\xi)^p$中的系数，可得以下结果

$$\begin{aligned}\frac{y_{l+1}}{(l+1)!} &= r\cdot n\left(\sum_{p=2}^{l+1}\frac{(Cp)^p}{(l+1)!p!}\sum_{k_1+\ldots+k_p=l+1} y_{k_1}\cdot\ldots\cdot y_{k_p}+\frac{1}{(l+1)}\sum_{p=1}^{l}\frac{(Cp)^p}{l!p!}\sum_{k_1+\ldots+k_p=l} y_{k_1}\cdot\ldots\cdot y_{k_p}\right)\\ &\le r\cdot n\left(\sum_{p=2}^{l+1}\frac{(Cp)^p}{(p!)^2}\sum_{k_1+\ldots+k_p=l+1}\frac{y_{k_1}\cdot\ldots\cdot y_{k_p}}{k_1!\ldots k_p!}+\frac{1}{(l+1)}\sum_{p=1}^{l}\frac{(Cp)^p}{(p!)^2}\sum_{k_1+\ldots+k_p=l}\frac{y_{k_1}\cdot\ldots\cdot y_{k_p}}{k_1!\ldots k_p!}\right)\\ &\le r\cdot n\left(\sum_{p=2}^{l+1}\frac{(Cp)^p}{(p!)^2}[\xi^{l+1}]C(\xi)^p+\frac{1}{(l+1)}\sum_{p=1}^{l}\frac{(Cp)^p}{(p!)^2}[\xi^{l}]C(\xi)^p\right).\end{aligned} \tag{4.8}$$

我们可以通过对所有 $l\ge 1$ 作如下表示，将 (4.8) 编码为

$$C(\xi)-y_1\xi \le r\cdot n\sum_{l\ge 1}\xi^{l+1}\left(\sum_{p=2}^{l+1}\frac{(Cp)^p}{(p!)^2}[\xi^{l+1}]C(\xi)^p+\frac{1}{(l+1)}\sum_{p=1}^{l}\frac{(Cp)^p}{(p!)^2}[\xi^{l}]C(\xi)^p\right), \tag{4.9}$$

其中 $\le$ 表示 $\mathbb{R}[[\xi]]$ 中的偏序：对于所有 $k\ge 0$，左侧 ξ^k 的系数都小于右侧 ξ^k 的系数。注意，由于 $C(\xi)$ 没有常数项，对于 $p>k$，我们有 $[\xi^k]C(\xi)^p=0$。因此，我们可以将 (4.9) 中 p 的求和范围扩展至无穷，而不改变任何内容。交换求和次序后，可将上式改写为

$$C(\xi)-y_1\xi \le \sum_{p=2}^{\infty}\beta_p C(\xi)^p+\int_0^{\xi}\sum_{p=1}^{\infty}\beta_p C(\zeta)^p\mathrm{d}\zeta\,,\quad \beta_p = rn\frac{(Cp)^p}{(p!)^2}\,. \tag{4.10}$$

利用对 ξ 求导会保持 $\mathbb{R}[[\xi]]$上的偏序 $\le$ 这一性质，对 (4.10) 求导并重新整理后可得

$$C'(\xi)(1-\sum_{p\ge 2}p\beta_p C(\xi)^{p-1})\le y_1+\sum_{p\ge 1}\beta_p C(\xi)^p\,.$$

为简化表达式，我们引入记号 $\Phi_1(u):=\sum_{p\ge 2}p\beta_p u^{p-1}$ 和 $\Phi_2(u):=\sum_{p\ge 1}\beta_p u^p$，于是

$$C'(\xi)(1-\Phi_1(C(\xi))\le y_1+\Phi_2(C(\xi))\,.$$

注意，由于 $(1-\Phi_1(C(\xi)))|_{\xi=0}=1$，形式级数 $(1-\Phi_1(C(\xi)))$ 在 $\mathbb{R}[[\xi]].$ 中可逆。此外，$1-\Phi_1(C(\xi))^{-1}$ 是一个系数为正的形式级数，因为它由形式级数 $\sum_{k=0}^{\infty}(\Phi_1(C(\xi)))^k$ 给出，而 $\Phi_1(C(\xi))$ 的系数为正。由于系数为正的形式级数的乘积仍保持形式级数的序关系，因此我们得到

$$C'(\xi)\le(1-\Phi_1(C(\xi))^{-1}(y_1+\Phi_2(C(\xi)))\,. \tag{4.11}$$

现在需要注意的重要一点是，形式级数 $\Phi_1(u)$ 和 $\Phi_2(u)$ 都收敛。事实上，它们的收敛半径均为无穷大。由斯特林近似可知：当 $p\to\infty$

$$(\beta_p)^{1/p}=(r\cdot n)^{1/p}\frac{Cp}{p!^{2/p}}\sim\frac{Ce^2}{(2\pi p)^{1/p}p}\to 0\,, \tag{4.12}$$

这表明 $\Phi_2(u)$ 的收敛半径为无穷大，因此 $\Phi_1(u)=\Phi_2'(u)-1$ 也如此。由此可知，该级数

$$G(u):=(1-\Phi_1(u))^{-1}(y_1+\Phi_2(u))=\sum_{m\ge 0}g_m u^m\,.$$

具有正的收敛半径，并且对于所有 m，$g_m\ge 0$，因为它是两个系数为正的形式级数的乘积。

现在考虑这个形式常微分方程

$$f'(\xi)=G(f(\xi)),\quad f(\xi)=0\,,\quad f(\xi)=\sum_{k\ge 1}f_k\xi^k\,.$$

f_k 的系数由递推关系唯一确定

$$f_1 = g_0, \quad f_n = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n-1} g_m \sum_{k_1+\ldots+k_m=n-1} f_{k_1}\cdot\ldots\cdot f_{k_m}\,. \tag{4.13}$$

特别要注意，所有系数均为非负数。由于 $G(u)$ 是解析的，形式级数$f(\xi)$ 实际上在 $\xi = 0$ 的某个邻域内收敛，因为在$\xi = 0$ 附近存在唯一一个在 $\xi = 0$处取值为零的解析解，而该解析解展开的系数必须满足 (4.13)。

我们断言 $C(\xi) \le f(\xi)$。首先，注意到由 (4.11) 可得

$$C'(0) = c_1 \le [\xi^0]G(C(\xi)) = g_0, \quad f_1 = f'(0) = G(0) = g_0$$

因此 $c_1 \le f_1$. 另一方面，再次由 (4.11) 可得

$$2c_2 = [\xi]C'(\xi) \le [\xi]G(C(\xi)) = g_1c_1 \le g_1f_1 = [\xi]G(f(\xi)) = [\xi]f'(\xi) = 2f_2 \implies c_2 \le f_2\,.$$

现在假设我们已用归纳法证明该结果对 N 以内的情形成立。那么由 (4.11) 可得

$$\begin{aligned}(N+1)c_{N+1} = [\xi^N]C'(\xi) \le [\xi^N]G(C(\xi)) &= \sum_{m=1}^{N} g_m \sum_{k_1+\ldots+k_m=N} c_{k_1}\cdot\ldots\cdot c_{k_m} \\ &\le \sum_{m=1}^{N} g_m \sum_{k_1+\ldots+k_m=N} f_{k_1}\cdot\ldots\cdot f_{k_m} = [\xi^N]G(f(\xi)) = [\xi^N]f'(\xi) = (N+1)f_{N+1}\end{aligned}$$

因此 $c_{N+1} \le f_{N+1}$.由此可得 $C(\xi) \le f(\xi)$，并且由于 $f(\xi)$ 在$\xi = 0$的某个邻域内收敛， $C(\xi)$ 也必定在 $\xi = 0$ 的某个邻域内收敛。这说明 $\mathcal{B}[\dot{g}](\xi)$ 在 $\xi = 0$ 的某个邻域内收敛，且关于 $(Z^i,\ \theta^i) \in B_r(p)$ 一致收敛。

为了证明定理更一般的表述，考虑与之前相同的 $\dot{g}$ 和 $\dot{g}|_M = 0$，但现在假设 $p \in TM$ 是任意一点，不必位于零截面上。用纤维 $T_{\pi(p)}M$上的一条路径连接 p 和 $\pi(p) \in M \subset TM$，并用有限个多圆盘覆盖该路径。证明中主要的变化在于：在多圆盘上工作时使用 (4.6)，会多出一个边界项。我们可以使用归纳法，并以前面的证明作为基本情形，证明这些边界项会产生收敛表达式。于是，同样的论证也适用于 $\dot{g}$在 $M \subset TM$上不一定为零的情形，前提是我们假设博雷尔变换限制在零截面上时收敛。

□

4.2 形式达布坐标的博雷尔变换

在第 4.1 节中，我们证明了对于底空间为 M、配有相对联络 $\mathcal{A}$ 的 Joyce 结构，以及任意满足 $e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}}\mathcal{A}^{\mathrm{st}} = \mathcal{A}$ 的 $\dot{g} \in \mathrm{Lie}(\widehat{\mathcal{G}})$，只要 $\dot{g}|_M$具有收敛的博雷尔变换， $\dot{g}$就具有收敛的博雷尔变换。特别地，对于定理 3.4 中构造的满足 $\dot{g}|_M = 0$ 的 $\dot{g}$，其博雷尔变换自动收敛。

另一方面，在第 3.3 节中，我们通过设定 $\dot{g}$，为形式扭量空间构造了形式达布坐标

$$x^i = e^{\dot{g}}(x^{i,\mathrm{st}}), \quad x^{i,\mathrm{st}} = \theta^i - Z^i/\epsilon,$$

其中 (Z^i) 是某个邻域 $U \subset M$ 上 Ω 的平坦达布坐标，而 $(Z^i,\ \theta^i)$ 是 $\pi^{-1}(U) \subset TM$ 上的诱导坐标。由于 $x^i - x^{i,\mathrm{st}} \in \epsilon\cdot\mathcal{O}_{TM}(\pi^{-1}(U))[[\epsilon]]$，且我们有定理 4.3，因此自然会问 $x^i - x^{i,\mathrm{st}}$ 的博雷尔变换是否在 $\xi = 0$ 的某个邻域内收敛。

定理 4.5。设 $x^i,\ x^{i,\mathrm{st}} \in \epsilon^{-1}\cdot\mathcal{O}_{TM}(\pi^{-1}(U))[[\epsilon]]$ 如第 3.3 节所述，并设 $\dot{g}$ 如定理 3.4 所述。则 $\mathcal{B}[x^i - x^{i,\mathrm{st}}](\xi)$ 在 ξ 中 $\xi = 0$ 的某个邻域内收敛，并且关于 $p \in B_r \subset TM$ 一致，其中 B_r 是以零截面 $M \subset TM$ 为中心的多圆盘。

证明。注意，由于 $\dot{g}$ 的系数是垂直向量场，我们可以写成

$$x^i = e^{\dot{g}}(x^{i,\mathrm{st}}) = x^{i,\mathrm{st}} + (e^{\dot{g}} - 1)(\theta^i)\,,$$

其中 $(e^{\dot{g}}-1)(\theta^i)\in\epsilon\cdot\mathcal{O}_{TM}(\pi^{-1}(U))[[\epsilon]]$。因此，只需证明

$$\mathcal{B}[(e^{\dot{g}}-1)(\theta^i)]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathcal{B}[\dot{g}^k(\theta^i)]}{k!}$$

在 $p\in B_r$ 中一致收敛于 $\xi=0$ 的一个邻域，其中 B_r 是以零截面 $M\subset TM$ 为中心的多圆盘。为处理作用于 θ^i 上的若干个 $\dot{g}$ 的博雷尔变换，注意到博雷尔变换将乘积映为卷积。具体而言，若 A 和 B 是以 ϵ 的级数形式给出的两个微分算子，则

$$\mathcal{B}[AB](\xi)=\int_0^{\xi}\mathcal{B}[A](\eta)\mathcal{B}[B](\xi-\eta)\mathrm{d}\eta=(\mathcal{B}[A]*\mathcal{B}[B])(\xi)\,. \tag{4.14}$$

就 ξ 中的展开而言，卷积乘积 $*$ 满足

$$\frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}*\frac{\xi^{l-1}}{(l-1)!}=\frac{\xi^{k+l-1}}{(k+l-1)!}\,.$$

于是我们可以写成

$$\mathcal{B}[(e^{\dot{g}}-1)(\theta^i)]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathcal{B}[\dot{g}]^{*k}(\theta^i)}{k!}\,.$$

现在令 $p\in M\subset TM$。由定理 4.3 可知，我们可以取充分小的 $0<R$，使得 $\mathcal{B}[\dot{g}](\xi)$ 对于 $|\xi|<R$ 收敛，并且在 $(Z^i,\theta^i)\in B_R(p)\subset\pi^{-1}(U)\subset TM$ 上一致。下文中，我们对在 $K\subset TM\times\mathbb{C}$ 的某个邻域上全纯的向量场 $V=V^j(Z^i,\theta^i,\xi)\partial_{\theta^j}$ 和函数 $f(Z^i,\theta^i,\xi)$ 使用以下记号：

$$||f||_K=\sup_{(Z^i,\theta^i,\xi)\in K}|f(Z^i,\theta^i,\xi)|,\quad ||V||_K=\max_{j=1,\dots,n}\sup_{(Z^i,\theta^i,\xi)\in K}|V^j(Z^i,\theta^i,\xi)|\,.$$

特别地，通过适当缩小 R 并记 $B_R:=B_R(p)\times\{\xi\in\mathbb{C}\mid|\xi|<R\}$，我们有

$$M_R:=||\mathcal{B}[\dot{g}]||_{\widetilde{B}_R}<\infty\,.$$

现在我们证明以下引理，它将是我们的主要估计。

引理 4.6。对于满足 $r+(k-1)\rho_k\le R$ 的 $k\ge 2$、$0<r<R$ 和 $\rho_k>0$，我们有

$$||\mathcal{B}[\dot{g}]^{*k}(\theta^i)||_{\widetilde{B}_r}\le M^k_{r+(k-1)\rho_k}\left(\frac{nR}{\rho_k}\right)^{k-1}\,. \tag{4.15}$$

证明。我们用归纳法证明这一点。对于 $k=2$，利用 (4.14) 和参数化 $\eta=t$，我们有

$$|\mathcal{B}[\dot{g}]^{*2}(\xi)(\theta^i)|\le\int_0^1|\mathcal{B}[\dot{g}](t\xi)\mathcal{B}[\dot{g}]((1-t)\xi)(\theta^i)|\cdot|\xi|\mathrm{d}t$$

利用 $\mathcal{B}[\dot{g}](\theta^i)=\mathcal{B}[\dot{g}]^j\partial_{\theta^j}(\theta^i)=\mathcal{B}[\dot{g}]^i$，并按照引理 4.1 的证明使用柯西估计，我们得到

$$\int_0^1|\mathcal{B}[\dot{g}](t\xi)\mathcal{B}[\dot{g}]((1-t)\xi)(\theta^i)|\cdot|\xi|\mathrm{d}t\le||\mathcal{B}[\dot{g}]||_{\widetilde{B}_{r+\rho_2}}\cdot||\mathcal{B}[\dot{g}]^i||_{\widetilde{B}_{r+\rho_2}}\cdot\frac{nR}{\rho_2}\le M^2_{r+\rho_2}\cdot\frac{nR}{\rho_2}\,.$$

因此，情形 $k=2$ 成立。

现在假设结论对 $l\ge 2$ 成立，并证明它对 $l+1$ 也成立。由于 ρ_{l+1} 的选取满足 $r+l\rho_{l+1}\le R$，因此特别有 $r+\rho_{l+1}\le R$。运用与前面相同的论证，我们得到

$$||\mathcal{B}[\dot{g}]^{*l+1}(\theta^i)||_{\widetilde{B}_r}\le M_{r+\rho_{l+1}}\cdot||\mathcal{B}[\dot{g}]^{*l}(\theta^i)||_{\widetilde{B}_{r+\rho_{l+1}}}\frac{nR}{\rho_{l+1}}\,.$$

另一方面，我们有 $(r+\rho_{l+1})+(l-1)\rho_{l+1}\le R$，因此对 $||\mathcal{B}[\dot{g}]^{*l}(\theta^i)||_{\widetilde{B}_{r+\rho_{l+1}}}$ 应用归纳假设，我们得到

$$||\mathcal{B}[\dot{g}]^{*l+1}(\theta^i)||_{\widetilde{B}_r}\le M_{r+\rho_{l+1}}M^l_{r+\rho_{l+1}+(l-1)\rho_{l+1}}\left(\frac{nR}{\rho_{l+1}}\right)^l\le M^{l+1}_{r+l\rho_{l+1}}\left(\frac{nR}{\rho_{l+1}}\right)^l\,,$$

由此即得我们所要的结论。 □

利用前述引理中的估计 (4.15)，结合 $\rho_k = \frac{R-r}{k-1}$，我们得到对所有 $k \geq 2$

$$||\mathcal{B}[\dot{g}]^{*k}(\theta^i)||_{\widetilde{B}_r} \leq M_R^k \left(\frac{nR(k-1)}{R-r}\right)^{k-1} .$$

因此，我们可以写成

$$||\mathcal{B}[e^{\dot{g}} - 1](\theta^i)||_{\widetilde{B}_r} \leq M_R + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{M_R^k}{k!} \left(\frac{nR(k-1)}{R-r}\right)^{k-1}$$

利用商判别法可知，只要满足以下条件，上述级数就收敛：

$$M_R \frac{nRe}{R-r} < 1 . \tag{4.16}$$

由于 $\mathcal{B}[\dot{g}]|_M = 0$，通过令 R 足够小，我们可以使 M_R 任意小，因此可以选取 R，使得 (4.16) 成立。这表明 $\mathcal{B}[e^{\dot{g}} - 1](\theta^i)$ 在 $(Z^i, \theta^i, \xi) \in \widetilde{B}_r = B_r(p) \times \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi| < r\}$ 上一致收敛。

□

注 4.7. 注意，在上述证明中，我们仅使用了假设 $\dot{g}|_M = 0$，来说明通过选取足够小的 R，可以使 M_R 足够小，从而使 (4.16) 成立，并确保~博雷尔变换收敛。对于更一般的多圆盘 $B_R = B_R(p) \times \{|\xi| < R\}$，其中 p 不一定位于零截面上，注意到

$$M_R = ||\mathcal{B}[\dot{g}]||_{\widetilde{B}_R} \leq ||\dot{g}_1||_{\widetilde{B}_R} + ||\mathcal{B}[\dot{g}] - \dot{g}_1||_{\widetilde{B}_R} . \tag{4.17}$$

只需令 $|\xi|$ 足够小，就可以使 (4.17) 中的第二项任意小。另一方面，虽然 $\dot{g}_1$ 与 ξ 无关，但利用 $\dot{g}_1 = -\text{Ham}^{\Omega^v}(W)$ 以及这一事实（见 [Bri25a，方程 (45)]

$$W(\lambda Z^i, \theta^i) = \lambda^{-1} W(Z^i, \theta^i)$$

这表明，只要选取多圆盘 $B_R(p)$ 的中心 p，使得 $\pi(p) \in M$趋向 M 的某个无穷端，就可以使 $||\dot{g}_1||_{B_R}$ 变小。

4.3 迈向无穷解析延拓

本节对如何研究 $\dot{g}$ 的博雷尔变换的无穷解析延拓性质，并由此证明 $\dot{g}$ 是可复苏的，提出一些看法。本节内容大多是推测性的，我们不声称所提出的路径是证明这一点的最优方法。

研究 $\mathcal{B}[\dot{g}](\xi)$ 关于 ξ 的解析延拓性质，一种自然的方法是先找出 ξ 上由 $\mathcal{B}[\dot{g}](\xi)$ 满足的微分方程。随后可以尝试通过压缩映射方法证明解的唯一性和存在性，并根据微分方程的结构研究解的奇点。进而可以结合这两点，确立 $\mathcal{B}[\dot{g}](\xi)$ 的无穷解析延拓性质。例如，参见近期应用了这一方法的 [AMNO25]；该工作可能与例子中介绍的 A2-箭图 Joyce 结构有关。

为了得出 $\mathcal{B}[\dot{g}](\xi)$ 在 ξ 中满足的微分方程，我们首先找出 $\dot{g}$ 在 ϵ 中满足的形式微分方程，然后对其进行博雷尔变换。

在本小节中，我们固定一个 Joyce 结构（M，Ω，Γ，Z，h），其对应的平坦亚-~相对联络为 $\mathcal{A}$，定义在 $\hat{p}$ 上：$TM \times D \to M \times D$。我们进一步假设存在满足 $e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}} \mathcal{A}^{\text{st}} = \mathcal{A}$ 且满足齐次性条件的 $\dot{g} \in$ 李代数$(\mathcal{G})$

$$[E, \dot{g}_k] = -k\dot{g}_k , \tag{4.18}$$

其中 $E = \mathcal{H}_Z$。此类解的一个例子是定理 3.4 中构造的解。要证明这个 $\dot{g}$满足齐次性条件，注意到由于 Plebańnski 函数 W满足 $EW = -W$（见 [Bri25a，引理 3.7]），且局部有 $\dot{g}_1 = -\text{Ham}^{\Omega^v}(W)$（见注 3.11），因此我们自动得到 $[E, \dot{g}_1] = -\dot{g}_1$。方程 (3.9) 随即推出

$$[v_i, [E, \dot{g}_k]] = -k[v_i, \dot{g}_k],$$

因此，沿纤维积分，并利用 $[E,\dot{g}_k]$ 和 $\dot{g}_k$ 在零截面 $M\subset TM$上均为零，可得到所需的齐次性条件 (4.18)。注意，任何满足条件 (4.18) 的 $\dot{g}$ 也满足

$$[\epsilon\partial_\epsilon + E, \dot{g}] = 0\,. \tag{4.19}$$

另一方面，如注 2.17 中所述，我们可以通过定义，将 $\mathcal{A}$ 扩展为$\hat{}p$ 上的完整亚纯平坦联络联络

$$\mathcal{A}_{\epsilon\partial_\epsilon} = \epsilon\partial_\epsilon - \frac{1}{\epsilon}v_Z - \omega_Z\,.$$

利用对 M上的所有向量场均有 $e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}}\mathcal{A}^{\mathrm{st}}_X = \mathcal{A}_X$这一事实、齐次性条件 (4.19)，并记$\mathcal{A}^{\mathrm{st}}_{\epsilon\partial_\epsilon} = \epsilon\partial_\epsilon - \frac{1}{\epsilon}v_Z$，我们得到

$$e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}}(\mathcal{A}^{\mathrm{st}}_{\epsilon\partial_\epsilon}) = e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}}(\epsilon\partial_\epsilon + E - \mathcal{A}^{\mathrm{st}}_Z) = \epsilon\partial_\epsilon + E - \mathcal{A}_Z = \mathcal{A}_{\epsilon\partial_\epsilon}\,.$$

因此，$\dot{g}$满足这样的条件：对于扩展后的 $\mathcal{A}^{\mathrm{st}}$和 $\mathcal{A}$，$e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}}\mathcal{A}^{\mathrm{st}} = \mathcal{A}$成立。

我们可以将条件 $e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}}\mathcal{A}^{\mathrm{st}}_{\epsilon\partial_\epsilon} = \mathcal{A}_{\epsilon\partial_\epsilon}$改写为

$$\sum_{k\geq 1}\frac{\mathcal{L}^k_{\dot{g}}}{k!}(\epsilon\partial_\epsilon - \frac{1}{\epsilon}v_Z) = -\omega_Z\,,$$

这又可以写成

$$\epsilon\sum_{k\geq 1}\frac{\mathcal{L}^{k-1}_{\dot{g}}}{k!}(\partial_\epsilon\dot{g}) + \frac{1}{\epsilon}\sum_{k\geq 1}\frac{\mathcal{L}^k_{\dot{g}}(v_Z)}{k!} - \omega_Z = 0\,. \tag{4.20}$$

我们可以通过将 (4.20) 乘以形式级数，在形式上求出 $\sum_{k\geq 1}\frac{\mathcal{L}^{k-1}_{\dot{g}}}{k}$ 的逆!

$$\psi_{\dot{g}} := \frac{\mathcal{L}_{\dot{g}}}{e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}}-1} = \sum_{k\geq 0}\frac{B_k}{k!}\mathcal{L}^k_{\dot{g}}$$

其中 B_k 为伯努利数。我们得到关于 $\dot{g}$ 的如下形式微分方程，其中变量为 ϵ

$$\epsilon\partial_\epsilon\dot{g} + \frac{1}{\epsilon}\mathcal{L}_{\dot{g}}(v_Z) - \psi_{\dot{g}}(\omega_Z) = 0\,. \tag{4.21}$$

对 (4.21) 应用博雷尔变换，我们可以利用以下公式得到关于 $\mathcal{B}[\dot{g}](\xi)$ 的 ξ 中的一个微分方程

$$\mathcal{B}[\epsilon\partial_\epsilon A] = \mathcal{B}[A] + \xi\partial_\xi\mathcal{B}[A],\quad \mathcal{B}[AB] = \mathcal{B}[A]*\mathcal{B}[B],\quad A,B\in\mathbb{C}[[\epsilon]]$$

其中 $*$ 表示满足以下条件的卷积乘积

$$\frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} * \frac{\xi^{l-1}}{(l-1)!} = \frac{\xi^{k+l-1}}{(k+l-1)!}\,.$$

原则上，研究所得微分方程的解及其奇点结构，可能有助于阐明 $\mathcal{B}[\dot{g}]$的解析延拓问题，但所得方程似乎相当复杂。例如，很难对项 $\psi_{\dot{g}}(\omega_Z)$ 的博雷尔变换作出整体意义上的理解。我们希望在未来的工作中处理其中一些问题。

5 例子

本节给出两个与 $\mathsf{A_1}$ 和 A2 箭图的 DT 理论相关的例子。$\mathsf{A_1}$ 情形相当简单，一切都可以显式完成。对于这个例子，我们将构造两个无穷小规范变换，把 $\mathcal{A}^{\mathrm{st}}$ 规范化为 $\mathcal{A}$，它们的可复苏行为截然不同。对于 $\mathsf{A_2}$ 情形，我们讨论 Joyce 结构，并显式计算将 $\mathcal{A}^{\mathrm{st}}$规范化为 $\mathcal{A}$的前两项 $\dot{g}_1$ 和 $\dot{g}_2$，$\dot{g}$ 可用于计算扭量 Darboux 坐标和 τ 函数的近似值[BM22、Bri24]。我们指出，A2-箭图 Joyce 结构与 Painlev´e I 方程的等单值变形流有关。最后，我们注意到，通过通常将多个 $\mathsf{A_1}$ 情形叠加，$\mathsf{A_1}$ 情形很容易推广到 DT 不变量有限且非耦合的情形。

5.1 A1 箭图

ˇ我们取带有全局坐标 $(z,\ \check{z})$ 的 $M=\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$，使得 TM 带有诱导的全局坐标 $(z,\ \check{z},\ \theta,\ \theta)$。$M$ 带有全纯辛形式

$$\Omega=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\check{z}\,.$$

周期结构（$\Gamma,\ Z$）由平凡格丛 $\Gamma\subset TM$ 给出，其中 $\Gamma|_p=$张成 $\mathbb{Z}(\partial_z|_p,\ \partial_{\check{z}}|_p)$，向量场为 $Z=z\partial_z+\check{z}\partial_{\check{z}}$。特别地，$(z,\ \check{z})$ 是 Ω 的平坦 Darboux 坐标，所对应的线性平坦联络为 ∇，由 Γ 确定。联络 $h\colon\pi^*(TM)\to T(TM)$ 在 TM 的全局坐标（$z,\ \check{z},\ \theta,\ \check{\theta}$）下由下式给出

$$h_{\partial_z}=\partial_z+\frac{\theta}{2\pi\mathrm{i}z}\partial_{\check{\theta}},\quad h_{\partial_{\check{z}}}=\partial_{\check{z}}\,.$$

于是，$\mathbb{C}^*$ 族平坦辛联络 $\mathcal{A}^\epsilon$ 由下式给出

$$\mathcal{A}^\epsilon_{\partial_z}=\partial_z+\frac{1}{\epsilon}\partial_\theta+\frac{\theta}{2\pi\mathrm{i}z}\partial_{\check{\theta}},\quad \mathcal{A}^\epsilon_{\partial_{\check{z}}}=\partial_{\check{z}}+\frac{1}{\epsilon}\partial_{\check{\theta}}\,. \tag{5.1}$$

容易验证，上述（$M,\ \Omega\ \Gamma,\ Z,\ h$）满足 Joyce 结构的所有性质，除了纤维方向的周期性（参见定义 2.19 的 (J2)）。不过，定理3.4、4.3和4.5的证明中从未用到这一性质，因此我们的结果仍然适用。关于如何从与 A1 箭图的 DT 不变量相关联的黎曼–希尔伯特问题的解得到这一预 Joyce 结构，详见 [Bri21, Bri19]。

对于这个简单情形，存在一个满足以下唯一性条件的整体 Pleba ´nski 函数: (2.16)

$$W=-\frac{\theta^3}{6(2\pi\mathrm{i})^2z}\,. \tag{5.2}$$

事实上，我们有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ham}^{\Omega^v}(v_{\partial_z}W)=\mathrm{Ham}^{\Omega^v}(\partial_\theta W)=\Omega^{z\check{z}}\partial_\theta^2W\partial_{\check{\theta}}=(-2\pi\mathrm{i})\cdot\left(-\frac{\theta}{(2\pi\mathrm{i})^2z}\right)\partial_{\check{\theta}}=\frac{\theta}{2\pi\mathrm{i}z}\partial_{\check{\theta}}\\&\mathrm{Ham}^{\Omega^v}(v_{\partial_{\check{z}}}W)=\mathrm{Ham}^{\Omega^v}(\partial_{\check{\theta}}W)=0\,.\end{aligned}$$

^现在我们将描述两个满足以下条件的无穷小规范变换 $\dot{g}\in$李代数（$\mathcal{G}$）：

$$e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}}\mathcal{A}^{\mathrm{st}}=\mathcal{A}.$$

第一个是定理 3.4 中给出的、满足 $\dot{g}|_M=0$ 的变换，而第二个将与 [Bri19] 中针对 DT 不变量所表述的黎曼–希尔伯特问题的解相关。

5.1.1 在零截面上消失的无穷小规范变换

让我们首先 从定理 3.4 中显式构造 $\dot{g}$。若记 $(Z^1,\ Z^2,\ \theta^1,\ \theta^2)=(z,\ \check{z},\ \theta,\ \check{\theta})$，则 b y 命题 在命题 3.6 中，我们希望求解

$$[\dot{g}_1,\partial_{\theta^i}]=\mathrm{Ham}^{\Omega^v}(\partial_{\theta^i}W),\quad i=1,2, \tag{5.3}$$

且对于每个 $l>0$ 和 $i=1,\ 2$

$$0=\sum_{r=1}^{l+1}\frac{1}{r!}\sum_{k_1+\ldots+k_r=l+1}[\dot{g}_{k_1},\ldots,[\dot{g}_{k_r},\partial_{\theta^i}]\ldots]+\sum_{r=1}^{l}\frac{1}{r!}\sum_{k_1+\ldots+k_r=l}[\dot{g}_{k_1},\ldots,[\dot{g}_{k_r},\partial_{Z^i}],\ldots]\,, \tag{5.4}$$

而 a 同时确保边界条件 $\dot{g}|_M=0$。我们寻求一个形式为 m

$$\dot{g}=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(z,\theta)\epsilon^k\partial_{\hat{\theta}}\,, \tag{5.5}$$

其中 $a_k(z,\theta)$ 是 (z,θ) 的复值函数。不难验证，由于 W，且 (5.5) 中 $\dot{g}$ 的系数仅取决于 (z,θ)，这种形式自动满足 $i=2$ 的 (5.3) 和 (5.4)。此外，$i=1$ 的方程 (5.3) 和 (5.4) 化简为

$$\partial_\theta a_1 = -\Omega^{z\check{z}}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2} = 2\pi\mathrm{i}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}, \quad \partial_\theta a_{k+1} = -\partial_z a_k \quad \text{for} \quad k>0\,. \tag{5.6}$$

容易验证，满足 $a_k(z,0)=0$ 的 (5.6) 的一个解为

$$a_k(z,\theta) = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{(k-1)!\theta^{k+1}}{(k+1)!z^k}\,.$$

由此得到的无穷小规范变换

$$\dot{g} = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)!\theta^{k+1}}{(k+1)!z^k}\epsilon^k\right)\partial_{\hat{\theta}} \tag{5.7}$$

显然在 $TM\to M$ 的零截面上消失，因此描述了定理 3.4 中的唯一解。注意，无穷级数实际上在 $|\epsilon\theta/z|<1$ 处收敛，并具有如下解析延拓：

$$\dot{g} = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\theta+\frac{z-\epsilon\theta}{\epsilon}\log\left(1-\frac{\epsilon\theta}{z}\right)\right)\partial_{\hat{\theta}}\,.$$

(5.7) 收敛这一事实意味着，博雷尔变换 $\mathcal{B}[\dot{g}]$ 的收敛半径为无穷大，因此没有有趣的奇点。

注意，在这种情况下，形式达布坐标在 $TM\times\mathbb{C}^*$ 上由下式给出

$$x^1 = e^{\dot{g}}x^{1,\mathrm{st}} = x^{1,\mathrm{st}} = \theta - \frac{z}{\epsilon}, \quad x^2 = e^{\dot{g}}x^{2,\mathrm{st}} = \check{\theta} - \frac{\check{z}}{\epsilon} - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\theta+\frac{z-\epsilon\theta}{\epsilon}\log\left(1-\frac{\epsilon\theta}{z}\right)\right)$$

对于固定的 $\epsilon\in\mathbb{C}^*$，我们有

$$\Omega_{z\check{z}}\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}\epsilon^2}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\check{z} - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}\epsilon}\left(\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\check{z}+\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\check{\theta}\right) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\check{\theta} - \frac{\theta}{(2\pi\mathrm{i})^2 z}\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}z\,. \tag{5.8}$$

特别地，由 (5.8) 和 [Bri25a 的方程 (24-26)] 可知，若 $q\colon\ TM\times\mathbb{P}^1\to\mathcal{Z}$ 是到扭子空间的投影，而 ϖ 是 $\mathcal{O}(2)$-扭曲相对辛形式，定义在 $\mathcal{Z}$ 上，那么

$$q^*\varpi|_{TM\times\{\epsilon\}} = \epsilon^2\Omega_{z\check{z}}\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\otimes\partial_\epsilon\,. \tag{5.9}$$

由命题 3.8 和 (5.9) 可得，x^1 和 x^2 下降为ϖ的扭量 Darboux 坐标。值得注意的是，这些是真正的解析坐标，而非形式达布坐标，因为 $\dot{g}$收敛。

注 5.1. 注意，$(\epsilon x^1,\ \epsilon x^2)$也下降为扭量 Darboux 坐标，并且在 $\epsilon=0$附近有定义。这与通过求解关联于 DT 不变量 [Bri19], 的黎曼–希尔伯特问题得到的扭子坐标形成对比：后者通常仅对 ϵ 在 $\mathbb{C}^*$中的某个扇形区域内有定义。

5.1.2 与黎曼–希尔伯特问题相关的无穷小规范变换 m

现在，我们构造另一个与 [Bri19] 中研究的黎曼–希尔伯特问题相关的 $\dot{g}$。为此，我们首先对全局 Plebaˊnski 函数 (5.2) 作修改，加入一个关于 θ 的线性项。我们取

$$\widetilde{W} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{6z}B_3\left(\frac{\pi\mathrm{i}-\theta}{2\pi\mathrm{i}}\right) = -\frac{\theta^3}{6(2\pi\mathrm{i})^2 z} + \frac{\theta}{24z} = W + \frac{\theta}{24z} \tag{5.10}$$

其中 $B_n(w)$ 表示第 n 个伯努利多项式。尽管此时加入 $\frac{\theta}{24z}$ 似乎有些随意，但值得注意的是

$$\partial_\theta\widetilde{W}|_M = \partial_z S, \quad \text{where} \quad S(z)=\log(z^{1/24})$$

并与 [BM25，方程 (21) 和 (22)] 进行比较。请注意

$$\mathrm{Ham}^{\Omega^v}(v_X\widetilde{W}) = \mathrm{Ham}^{\Omega^v}(v_X W)$$

$\widetilde{}$ $\widetilde{}$因此，我们可以将 W 用作 A1前Joyce结构的另一个 Pleba ́ński 函数，但 W 不满足 (2.16)。

和之前一样，我们将求出满足 (5.3) 和 (5.4) 的 $\dot{g}$ ，但现在 $\dot{g}|_M \neq 0$。我们证明，一个解为

$$\dot{g} = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k \mathrm{Ham}^{\Omega^v}(W_k(z,\theta)), \quad W_k = \left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{z}\right)^k B_{k+2}\left(\frac{\pi\mathrm{i}-\theta}{2\pi\mathrm{i}}\right)\frac{(-1)^k(k-1)!}{(k+2)!} \quad \text{for} \quad k \geq 1\,, \tag{5.11}$$

其中

$$\mathrm{Ham}^{\Omega^v}(W_k(z,\theta)) = -2\pi\mathrm{i}\frac{\partial W_k(z,\theta)}{\partial\theta}\partial_{\tilde{\theta}}\,. \tag{5.12}$$

As b ˇ此外， $\dot{g}$ 与 (ˇz， θ) 变量无关，这意味着我们只需检验 k

$$\partial_\theta \tilde{a}_1 = -\Omega^{z\hat{z}}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2} = 2\pi\mathrm{i}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}, \quad \partial_\theta\tilde{a}_{k+1} = -\partial_z\tilde{a}_k \quad \text{for} \quad k>0\,. \tag{5.13}$$

其中

$$\tilde{a}_k(z,\theta) := -2\pi\mathrm{i}\frac{\partial W_k(z,\theta)}{\partial\theta}\,.$$

$\tilde{a}_1$的方程由 $W_1 = -\widetilde{W}$这一事实以及 $\partial_\theta^2 W = \partial_{\theta^2}^2\widetilde{W}$这一事实推出，而 (5.13) 中的其他方程则由关系推出

$$B'_{n+1}(w) = (n+1)B_n(w)\,. \tag{5.14}$$

The 来自命题 3.6 的 $\dot{g}$ 所需方程于是成立。注意，这个 $\dot{g}$ 满足 $\dot{g}|_M \neq 0$。

利用 (5.14)，并将 (5.12) 代入 (5.11)，可以明确写出

$$\dot{g} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi\mathrm{i}\epsilon}{z}\right)^k B_{k+1}\left(\frac{\pi\mathrm{i}-\theta}{2\pi\mathrm{i}}\right)\frac{(-1)^k}{(k+1)k}\right)\partial_{\tilde{\theta}}\,. \tag{5.15}$$

注意，与 (5.7) 相比，形式级数 (5.15) 是发散的，这是因为伯努利多项式关于 k呈阶乘级发散。博雷尔变换

$$\mathcal{B}[\dot{g}](\xi) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{z}\right)^k B_{k+1}\left(\frac{\pi\mathrm{i}-\theta}{2\pi\mathrm{i}}\right)\frac{(-1)^k}{(k+1)!}\xi^{k-1}\right)\partial_{\tilde{\theta}}$$

在 ξ 中的收敛半径等于 $|z|$，利用伯努利多项式的生成函数可知，它可以解析延拓为

$$\mathcal{B}[\dot{g}](\xi) = \frac{1}{\xi}\left(\frac{z}{2\pi\mathrm{i}\xi} + \frac{\theta}{2\pi\mathrm{i}} + \frac{\exp(\xi(\pi i+\theta)/z)}{1-\exp(2\pi i\xi/z)}\right)\partial_{\tilde{\theta}}, \tag{5.16}$$

其在 nz 处有简单极点，且满足 $n\in\mathbb{Z}-\{0\}$。极点的位置以及 $\mathcal{B}[\dot{g}]$ 的解析延拓 (5.16) 表明， $\dot{g}$ 是可复苏的。

注 5.2. • $\mathcal{B}[\dot{g}](\xi)$ 的收敛半径与 θ 无关，这一事实反映了定理 4.3 的陈述：在该定理中， $\mathcal{B}[\dot{g}]$ 的收敛性取决于 $\mathcal{B}[\dot{g}]|_M$的收敛性。

- 可以验证，与可复苏的 $\dot{g}$ 相关的斯托克斯自同构由以下表达式给出

$$\begin{aligned} &\log(1+e^{\theta-z/\epsilon}), \quad \text{along} \quad \mathbb{R}_{>0}\cdot z \\ &-\log(1+e^{z/\epsilon-\theta}), \quad \text{along} \quad \mathbb{R}_{>0}\cdot(-z)\,. \end{aligned} \tag{5.17}$$

这些重现了经过适当选择二次精细化后， [Bri19], 中讨论的 A1 箭图 DT 不变量的黎曼–希尔伯特问题中跳跃的对数。

We 现在使用 $\dot{g}$ 来计算第 3.3 节中的形式扭子 Darboux 坐标。我们得到

$$x^1 = e^{\dot{g}} x^{1,\mathrm{st}} = \theta - \frac{z}{\epsilon}, \quad x^2 = e^{\dot{g}} x^{2,\mathrm{st}} = \check{\theta} - \frac{\check{z}}{\epsilon} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi \mathrm{i}\epsilon}{z} \right)^k B_{k+1} \left(\frac{\pi \mathrm{i} - \theta}{2\pi \mathrm{i}} \right) \frac{(-1)^k}{(k+1)k} \right) . \tag{5.18}$$

式（5.18）中的公式与 $\epsilon \to 0$ 时，和 A1 箭图的 DT 不变量相关联的黎曼–希尔伯特问题的解的对数的渐近展开一致（参见 [Bri21，第 8.2]节）。由于 $x^2 - x^{2,\,\mathrm{st}}$ 是 $\dot{g}$的 $\partial_{\check{\theta}}$ 分量，根据前面的论证可知，$x^2 - x^{2,\,\mathrm{st}}$ 是可复苏的，且其相关的斯托克斯自同构正是（5.17）中预期的那些。

最后请注意，尽管 x^2 的表达式是 ϵ 中的一个形式表达式，含有无穷多个非平凡项，但组合 $\Omega_{z\check{z}}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$ 仍满足（5.8），其中对 ϵ^k阶且带有 $k \geq 1$ 的所有贡献均为零。

我们在下面的命题中总结本小节的所有论述。

命题5.3。 对于 A1前Joyce结构，由（5.15）给出的 $\dot{g} \in \mathrm{Lie}(\widehat{\mathcal{G}})$ 满足 $e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}} \mathcal{A}^{\mathrm{st}} = \mathcal{A}$且是可复苏的。相应的形式达布坐标 $x^i = e^{\dot{g}} x^{i,\,\mathrm{st}}$满足： $x^i - x^{i,\,\mathrm{st}}$是可复苏的，并且斯托克斯自同构与和 A1 箭图的 DT 不变量相关联的黎曼–希尔伯特问题的跳跃的对数一致。

5.2 A_2箭图

我们先来描述 Joyce 结构的元组 $(M, \Omega, \Gamma, Z, h)$。更多详情请参见 [BM22]和 [Bri25a，第 9]节。

Joyce 结构的底空间 M 定义如下：

$$M = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 \mid 4a^3 + 27b^2 \neq 0\} .$$

M中的一个点应理解为在 $\mathbb{P}^1$ 上定义一个二次微分 $(x^3 + ax + b)(\mathrm{d}x)^2$，它具有单零点，并在 $x = \infty$ 处有一个 7 阶极点。为了定义 $\Gamma \to M$，首先考虑与 M 上的二次微分相关联的仿射椭圆曲线：

$$\Sigma^0(a,b) = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x^3 + ax + b\} . \tag{5.19}$$

对应的射影椭圆曲线记为 $\Sigma(a,\ b) \subset \mathbb{P}^2$。丛 $\Gamma \to M$ 的纤维为第一同调群 $\Gamma|_{(a,b)} = H_1(\Sigma(a,\ b)\ \mathbb{Z})$，它具有自然的平坦结构。选取具有交 pairing $\gamma_1 \cdot \gamma_2 = 1$ 的平坦标架 γ_1、γ_2 后，我们可以在 M 上定义坐标 $(z_1,\ z_2)$：

$$z^i = \int_{\gamma_i} y \mathrm{d}x .$$

坐标 (z^1, z^2) 相对于由 Γ 诱导的平坦结构是平坦的，而向量场 Z由下式给出

$$Z = z^1 \partial_{z^1} + z^2 \partial_{z^2} .$$

M 上的辛结构 Ω 由下式给出

$$\Omega = -\mathrm{d}z^1 \wedge \mathrm{d}z^2 = 2\pi \mathrm{i} \cdot \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b . \tag{5.20}$$

最后， h 是最有趣的部分，它是利用 Painlev´e I 方程的等单值变形流构造的。为了用 Pleba´nski 函数的代数表达式对其进行明确描述，我们考虑 TM上的若干坐标。

一方面，我们在 TM 上有由 (z^1, z^2) 诱导出的自然诱导坐标 $(z^1, z^2, \theta^1, \theta^2)$，其中 Joyce 结构对于某个 Pleba´nski 函数 W 具有通常的形式。另一方面，为了描述 W，最好引入坐标 (a, b, q, r)。$(z^1, z^2, \theta^1, \theta^2)$ 与 (a, b, q, r) 之间的关系如下。首先，我们引入 $\Sigma(a, b)$ 的周期 ω_i 和拟周期 η_i，定义为

$$\eta_i = -\frac{\partial z^i}{\partial a}, \quad \omega_i = \frac{\partial z^i}{\partial b}.$$

注意，它们满足关系 $\omega_2\eta_1-\omega_1\eta_2=2\pi\mathrm{i}$。接下来，如果 $(q,\ p)\in\Sigma^0(a,\ b)$（因此 $p^2=q^3+aq+b$），我们定义

$$\theta_a:=-\frac{1}{4}\int_{(q,-p)}^{(q,p)}\frac{\mathrm{d}x}{y},\quad \theta_b:=\frac{1}{4}\int_{(q,-p)}^{(q,p)}\frac{x\mathrm{d}x}{y}-r$$

其中积分沿着 $\Sigma^0(a,\ b)$ 中在对合 $(x,\ y)\to(x,\ -y)$ 下不变的一条路径进行。$(\theta^1,\ \theta^2)$ 与 $(a,\ b,\ q,\ r)$ 之间的关系由下式给出

$$\theta^i=-\eta_i\theta_a+\omega_i\theta_b\,.$$

在坐标 $(a,\ b,\ q,\ r)$ 中，Pleba´nski 函数由下式给出

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}W(a,b,q,r)=-\frac{2ap^2+3pr(3b-2aq)+(6aq^2-9bq+4a^2)r^2-2apr^3}{4p\Delta},\quad \Delta=4a^3+27b^2 \tag{5.21}$$

但请注意，此 W 不满足归一化条件 (2.16)。为便于后续参考，我们记录由 $(z^1,\ z^2,\ \theta^1,\ \theta^2)$ 和 $(a,\ b,\ q,\ r)$ 诱导的 TM 上坐标向量场之间的关系。它们由下式给出

$$\begin{aligned}\partial_{z^1}&=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\omega_2\partial_a+\eta_2\partial_b\right),\quad \partial_{z^2}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\omega_1\partial_a+\eta_1\partial_b\right)\\ \partial_{\theta^1}&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\omega_2\left(2p\partial_q+q\partial_r\right)+\eta_2\partial_r\right),\quad \partial_{\theta^2}=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\omega_1\left(2p\partial_q+q\partial_r\right)+\eta_1\partial_r\right)\end{aligned} \tag{5.22}$$

另一方面，$(a,\ b,\ q,\ r)$ 与 $(a,\ b,\ \theta_a,\ \theta_b)$ 之间的关系由下式给出

$$\partial_{\theta_a}=-2p\partial_q-q\partial_r,\quad \partial_{\theta_b}=-\partial_r\,. \tag{5.23}$$

and

$$\partial_q=-\frac{1}{2p}\partial_{\theta_a}+\frac{q}{2p}\partial_{\theta_b}\,. \tag{5.24}$$

5.2.1 计算 $\dot{g}_2$

回顾注记 3.7，若要针对 $\dot{g}=\sum_{k=1}^{\infty}\dot{g}_k\epsilon^k$ 求解命题3.9中的方程，我们可以取 $\dot{g}_1=-\mathrm{Ham}^{\Omega^v}(W)$，其中 W 在 A_2 情形下由 (5.21) 给出。现在我们将明确计算 W_2，从而得到 $g_2=\mathrm{Ham}^{\Omega^v}(W_2)$。

假设我们选取 ∇-平坦达布坐标 $(Z^1,\ Z^2)$，定义在 M 上（不一定与之前给出的 $(z^1,\ z^2)$ 相同），其中

$$\Omega=\Omega_{ij}\mathrm{d}Z^i\wedge\mathrm{d}Z^j$$

对于某个常矩阵 Ω_{ij}。相对于 TM 上的诱导坐标 $(Z^i,\ \theta^i)$，我们希望求解的方程为（回忆 (3.10)）

$$[\partial_{\theta^i},\dot{g}_2]=[\dot{g}_1,\partial_{Z^i}]+\frac{1}{2}[\dot{g}_1,[\dot{g}_1,\partial_{\theta^i}]]. \tag{5.25}$$

现在假设 W^i 是 M 上的达布坐标，但不是 ∇-平坦的。也就是说，我们仍然可以写成

$$\Omega=\widetilde{\Omega}_{ij}\mathrm{d}W^i\wedge\mathrm{d}W^j$$

对于某个其他的常矩阵 $\widetilde{\Omega}_{ij}$，但 $\nabla(\mathrm{d}W^i)\neq 0$。在 TM 上的诱导坐标 $(W^i,\ \phi^i)$ 中，方程 (5.25) 现在改写为

$$[\partial_{\phi^i},\dot{g}_2]=[\dot{g}_1,\mathcal{H}_{\partial_{W^i}}]+\frac{1}{2}[\dot{g}_1,[\dot{g}_1,\partial_{\phi^i}]], \tag{5.26}$$

其中现在 $\mathcal{H}_{\partial_{W^i}}\neq\partial_{W^i}$。事实上，虽然 Z^i 是 $\mathcal{H}$ 的平坦坐标，因此 $\mathcal{H}_{\partial_{Z^i}}=\partial_{Z^i}$，但 W^i 不是平坦坐标，反而有

$$\mathcal{H}_{\partial_{W^i}}=\partial_{W^i}+f_i^q(W,\phi)\partial_{\phi^q}\,. \tag{5.27}$$

在坐标 $(W^1,\ W^2,\ \phi^1,\ \phi^2)=(a,\ b,\ \theta_a,\ \theta_b)$ 中，函数 $f(W,\ \phi)$ 可以通过与 [BM22 第 4 节2], 类似的计算求得，我们发现

$$\mathcal{H}_{\partial_{W^i}}=\partial_{W^i}+\widetilde{\Omega}^{jq}C_{ijk}(w)\phi^k\partial_{\phi^q} \tag{5.28}$$

其中 $\widetilde{\Omega}^{ij}$ 是 $\widetilde{\Omega}_{ij}$ 的逆矩阵，而 $C_{ijk}(W)$ 是[BM22 方程（66）] 中给出的三次多项式的系数

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}C(W,\phi)=\frac{1}{6}C_{ijk}(W)\phi^i\phi^j\phi^k=\frac{1}{4\Delta}\left(ab\theta_a^3-2a^2\theta_a^2\theta_b-9b\theta_a\theta_b^2+2a\theta_b^3\right). \tag{5.29}$$

取辛形式 (5.20) 和 (5.29)，并将指标重命名为 $(1,2)=(a,b)$，我们得到

$$\widetilde{\Omega}^{ab}=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}},\quad \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}C_{aaa}=\frac{3ab}{2\Delta},\quad \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}C_{aab}=-\frac{a^2}{\Delta},\quad \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}C_{abb}=-\frac{9b}{2\Delta},\quad \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}C_{bbb}=\frac{3a}{\Delta} \tag{5.30}$$

这里用到了 C_{ijk} 是完全对称的。

现在我们已经具备了所有要素，可以代入方程 (5.26)，求出满足 (5.25) 的 W_2，使得 $\dot{g}_2=\mathrm{Ham}^{\Omega^v}(W_2)$ 成立。在此之前，我们先简要说明用于求出 W_2 的试探形式为何如此选取。

回顾定义 2.19 中的 (J4)，其中考虑对合 $\iota\colon\ TM\to TM$通过在 π 的纤维 $TM\to M$ 上作用 -1。将该对合提升到 $\iota\colon\ TM\times\mathbb{C}\to TM\times\mathbb{C}$有两种自然方式，即在 $\mathbb{C}$ 因子上作用 ±1。选择 $\iota(X,\epsilon)=(-X,-\epsilon)$ 会使 Joyce 结构的相对联络 $\mathcal{A}$ 保持不变，因此我们采用 -1 这种选择。由方程 $e^{\mathcal{L}_{\dot{g}}}\mathcal{A}^{\mathrm{st}}=\mathcal{A}$ 容易看出，$\dot{g}$ 必须在 ι 作用下保持不变，因此 ϵ 展开中的分量满足：$\dot{g}_{2n}$ 在该对合作用下保持不变，而 $\dot{g}_{2n+1}$ 为奇。

另一方面, 注意，在 (a,b,q,r) 坐标下，(5.21) 中 W 的公式具有如下形式 m

$$W=\sum_{k=0}^{3}W_k(a,b,q)r^k$$

因此，假设它具有类似的形式是很自然的

$$W_2=\sum_{k=0}^{m}W_{2,k}(a,b,q)r^k$$

对合 $\iota(z^1,z^2,\theta^1,\theta^2)=(z^1,z^2,-\theta^1,-\theta^2)$ 对应于 [BM22，注记 3.5]

$$(a,b,q,p,r)\to(a,b,q,-p,-r),\quad \text{where}\quad p^2=q^3+aq+b\,,$$

因此，如果我们寻找一个在 ι 下保持不变的 W_2（使得 $\dot{g}_2$ 保持不变），那么$W_{2,k}$ 在 k 为偶数时保持不变，在 k 为奇数时则变号。有鉴于此，我们现在证明：

命题 5.4. 存在一个在对合 ι 下保持不变的 W_2，使得

$$\dot{g}_2=\mathrm{Ham}^{\Omega^v}(W_2)$$

满足（5.26）。在坐标 (a,b,q,r) 下，它的形式为

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}W_2(a,b,q,r)=\sum_{k=0}^{4}W_{2,i}(a,b,q)r^k \tag{5.31}$$

其中

$$\begin{aligned}
W_{2,0}&=\frac{27abq^2}{4\Delta^2}+\frac{11q}{32\Delta}-\frac{3a^3q}{\Delta^2}\\
W_{2,1}&=\frac{a}{8\Delta p}-\frac{27abp}{\Delta^2}\\
W_{2,2}&=\frac{1}{16\Delta p^2}\left(-3aq+\frac{9b}{2}\right)+\frac{3\cdot27abq}{2\Delta^2}+\frac{3\cdot27(2a^3-11b^2)}{32\Delta^2}\\
W_{2,3}&=\frac{1}{12\Delta p^3}\left(\frac{3aq^2}{2}-\frac{9bq}{4}+a^2\right)+\frac{1}{\Delta^2 p}\left(-27abq^2+\left(-\frac{13\Delta}{16}+\frac{81b^2}{2}\right)q-18a^2b\right)\\
W_{2,4}&=\frac{3^4ab}{2^4\Delta^2}-\frac{3a}{2^4\Delta p^2}
\end{aligned} \tag{5.32}$$

证明。 由于出现了冗长且复杂的表达式，证明的细节留在附录 A 中。

□

注 5.5. • 注意，(5.32) 与 (5.31) 表明， W_2 是 (a,b,q,r) 的代数函数，Pleba´nski 函数 W 亦是如此。

• 可以利用 $\dot{g}_1 = -\mathrm{Ham}_{\Omega^v}(W)$ 与 $\dot{g}_2 = \mathrm{Ham}_{\Omega^v}(W_2)$ 计算 A2 箭图之 Joyce 结构的形式扭量坐标 (x^1, x^2) 直至 ϵ^2 阶的展开。检验它们是否在 $\epsilon \to 0$ 时给出由 [BM22] 中相关黎曼–希尔伯特问题的解所得到的解析扭量坐标的渐近近似，将是有意义的。

• 在 [Bri24 的第 8.3] 节中提到，与 A2 箭图的 Joyce 结构相关联的 τ-函数的某种限制与 Painlev´e I τ-函数一致。在 [Bri24 的方程 8.4]中，Joyce 结构 τ-函数的公式借助 1-形式 $x^1\mathrm{d}x^2$ 给出，其中外微分并不对 ϵ求导。因此，可以利用此前x^i 直至 ϵ^2 阶的展开来计算 τ-函数的展开。

A 关于 $\dot{g}_2$ 的计算细节

在本附录中，我们证明命题 5.4。在整个计算过程中，我们大量使用 (5.23)、(5.24) 和 (5.30)，并在坐标 (a, b, θ_a, θ_b) 与 (a, b, q, r) 之间来回切换。

利用 $\dot{g}_1 = -\mathrm{Ham}^{\Omega^v}(W)$，假设 $\dot{g}_2$ 具有哈密顿形式 $\dot{g}_2 = \mathrm{Ham}^{\Omega^v}(W_2)$，并使用 (5.28) 以及 ($W^1$, W^2, ϕ^1, ϕ^2) $=(a, b, \theta_a, \theta_b)$，我们可以将 (5.25) 在 $\partial_{W^2} = \partial_b$ 和 $\partial_{\phi^2} = \partial_{\theta_b}$ 上的取值改写如下

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\frac{\partial^2 W_2}{\partial\theta_b^2}\frac{\partial}{\partial\theta_a} - \frac{\partial^2 W_2}{\partial\theta_a\partial\theta_b}\frac{\partial}{\partial\theta_b}\right)\\
&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial b\partial\theta_b}\frac{\partial}{\partial\theta_a} - \frac{\partial^2 W}{\partial b\partial\theta_a}\frac{\partial}{\partial\theta_b}\right)\\
&\quad+\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta_a}C_{bbb} - \frac{\partial W}{\partial\theta_b}C_{bba} + C_{bbk}\theta^k\frac{\partial^2 W}{\partial\theta_a\partial\theta_b} - C_{bak}\theta^k\frac{\partial^2 W}{\partial\theta_b^2}\right)\frac{\partial}{\partial\theta_a}\\
&\quad+\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\left(-\frac{\partial W}{\partial\theta_a}C_{abb} + \frac{\partial W}{\partial\theta_b}C_{aab} + C_{abk}\theta^k\frac{\partial^2 W}{\partial\theta_a\partial\theta_b} - C_{bbk}\theta^k\frac{\partial^2 W}{\partial\theta_a^2}\right)\frac{\partial}{\partial\theta_b}\\
&\quad-\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta_b}\frac{\partial^3 W}{\partial\theta_a\partial\theta_b^2} - \frac{\partial W}{\partial\theta_a}\frac{\partial^3 W}{\partial\theta_b^3}\right)\frac{\partial}{\partial\theta_a}\\
&\quad-\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta_a}\frac{\partial^3 W}{\partial\theta_a\partial\theta_b^2} - \frac{\partial W}{\partial\theta_b}\frac{\partial^3 W}{\partial\theta_a^2\partial\theta_b} + \frac{\partial^2 W}{\partial\theta_a^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta_b^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial\theta_a\partial\theta_b}\right)^2\right)\frac{\partial}{\partial\theta_b}
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

考察 (A.1) 中的 ∂_{θ_a} 分量，我们得到

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\partial^2 W_2}{\partial\theta_b^2} =&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\partial^2 W}{\partial b\partial\theta_b} + \frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta_a}C_{bbb} - \frac{\partial W}{\partial\theta_b}C_{bba} + C_{bbk}\theta^k\frac{\partial^2 W}{\partial\theta_a\partial\theta_b} - C_{bak}\theta^k\frac{\partial^2 W}{\partial\theta_b^2}\right)\\
&-\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta_b}\frac{\partial^3 W}{\partial\theta_a\partial\theta_b^2} - \frac{\partial W}{\partial\theta_a}\frac{\partial^3 W}{\partial\theta_b^3}\right).
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

对 (A.2) 关于 θ_b 再求两次导数，我们得到

$$
\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\partial^4 W_2}{\partial\theta_b^4} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\partial^4 W}{\partial b\partial\theta_b^3} + \frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\left(-3\frac{\partial^3 W}{\partial\theta_b^3}C_{bba} + 3\frac{\partial^3 W}{\partial\theta_b^2\partial\theta_a}C_{bbb}\right). \tag{A.3}
$$

因此，将 (5.30) 代入 (A.3)，我们需要求解

$$
\frac{\partial^4 W_2}{\partial\theta_b^4} = \frac{\partial^4 W}{\partial b\partial\theta_b^3} + \left(\frac{27b}{2\Delta}\frac{\partial^3 W}{\partial\theta_b^3} + \frac{9a}{\Delta}\frac{\partial^3 W}{\partial\theta_b^2\partial\theta_a}\right). \tag{A.4}
$$

利用　　试探形式 (5.31)（注意，r 的最高次幂为 4）和 (5.23)，我们发现 (A.4) 化简为　　o

$$24W_{2,4} = -3\partial_b \frac{a}{\Delta} - \frac{3\cdot 27ab}{2\Delta^2} - \frac{9a}{2\Delta p^2} = \frac{9\cdot 27ab}{2\Delta^2} - \frac{9a}{2\Delta p^2}$$

因此

$$W_{2,4} = \frac{3^4 ab}{2^4\Delta^2} - \frac{3a}{2^4\Delta p^2}\,.$$

现在对 (A.2) 中的 θ_b 和 θ_a 求导，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\partial^4 W_2}{\partial\theta_a\partial\theta_b^3} =& \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\partial^4 W}{\partial b\partial\theta_a\partial\theta_b^2} + \frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\left(2\frac{\partial^3 W}{\partial\theta_a^2\partial\theta_b}C_{bbb} - \frac{\partial^3 W}{\partial\theta_a\partial\theta_b^2}C_{bba} - \frac{\partial^3 W}{\partial\theta_b^3}C_{baa} + C_{bbk}\theta^k\frac{\partial^2 W}{\partial\theta_a^2\partial\theta_b^2}\right)\\ &- \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\left(\left(\frac{\partial^3 W}{\partial\theta_a\partial\theta_b^2}\right)^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial\theta_b^2}\frac{\partial^4 W}{\partial\theta_a^2\partial\theta_b^2} - \frac{\partial^3 W}{\partial\theta_a^2\partial\theta_b}\frac{\partial^3 W}{\partial\theta_b^3}\right).\end{aligned} \tag{A.5}$$

利用 (5.23) 以及我们之前得到的 $W_{2,\,4}$，我们得到关于 $W_{2,\,3}$ 的微分方程，其唯一解为 oddunder ι，即

$$W_{2,3} = \frac{1}{12\Delta p^3}\left(\frac{3aq^2}{2} - \frac{9bq}{4} + a^2\right) + \frac{1}{\Delta^2 p}\left(-27abq^2 + \left(-\frac{13\Delta}{16} + \frac{81b^2}{2}\right)q - 18a^2 b\right).$$

按照与之前相同的方式，对 (A.2) 求两次导数，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\partial^4 W_2}{\partial\theta_a^2\partial\theta_b^2} =\\ &\quad\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\partial^4 W}{\partial b\partial\theta_a^2\partial\theta_b} + \frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\left(\frac{\partial^3 W}{\partial\theta_a^3}C_{bbb} + \frac{\partial^3 W}{\partial\theta_a^2\partial\theta_b}C_{abb} + C_{bbk}\theta^k\frac{\partial^4 W}{\partial\theta_a^3\partial\theta_b} - 2\frac{\partial^3 W}{\partial\theta_a\partial\theta_b^2}C_{baa} - C_{bak}\theta^k\frac{\partial^2 W}{\partial\theta_a^2\partial\theta_b^2}\right)\\ &\quad- \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\left(\frac{\partial^3 W}{\partial\theta_a^2\partial\theta_b}\frac{\partial^3 W}{\partial\theta_a\partial\theta_b^2} + 2\frac{\partial^2 W}{\partial\theta_a\partial\theta_b}\frac{\partial^4 W}{\partial\theta_a^2\partial\theta_b^2} + \frac{\partial W}{\partial\theta_b}\frac{\partial^5 W}{\partial\theta_a^3\partial\theta_b^2} - \frac{\partial^3 W}{\partial\theta_a^3}\frac{\partial^3 W}{\partial\theta_b^3}\right).\end{aligned} \tag{A.6}$$

Usin利用 (5.23) 以及我们之前得到的 $W_{2,\,3}$ 和 $W_{2,\,4}$，我们可以将其化简为微分方程　　on

$$(2p\partial_q)^2(2W_{2,2}) = 2p\partial_q\left(-\frac{1}{2\Delta p^3}\left(\frac{27b}{4}q^2 + 3a^2 q + \frac{27ab}{4}\right) + \frac{3a}{2\Delta p} + \frac{6\cdot 27abp}{\Delta^2}\right). \tag{A.7}$$

利用 t hat $2p\partial_q W_{2,2}$ 在对合下为奇，我们可以将 (A.7) 积分一次，得到唯一解　　n

$$(2p\partial_q)(2W_{2,2}) = -\frac{1}{2\Delta p^3}\left(\frac{27b}{4}q^2 + 3a^2 q + \frac{27ab}{4}\right) + \frac{3a}{2\Delta p} + \frac{6\cdot 27abp}{\Delta^2}$$

为了继续积分，我们利用

$$2p\partial_q\left(\frac{\alpha q^2 + \beta q + \gamma}{p^2}\right) = \frac{(4a\alpha - 6\gamma)q^2 + (6\alpha b + 4a\beta)q + (6b\beta - 2\gamma a)}{p^3} - \frac{2\alpha q + 4\beta}{p}\,,$$

并发现

$$W_{2,2} = \frac{1}{16\Delta p^2}\left(-3aq + \frac{9b}{2}\right) + \frac{3\cdot 27abq}{2\Delta^2} + c(a,b)\,,$$

对于某个仅依赖于 (a,b) 的未知函数 $c(a,b)$。

继续进行计算，为了求出 $W_{2,\,1}$ 我们现在考虑 (A.1) 的 ∂_{θ_b} 分量，并求两次 θ_a 导数，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 W_2}{\partial\theta_a^3\partial\theta_b} =& \frac{\partial^4 W}{\partial b\partial\theta_a^3} - \left(-3C_{abb}\frac{\partial^3 W}{\partial\theta_a^3} + 3C_{aab}\frac{\partial^3 W}{\partial\theta_a^2\partial\theta_b} + C_{abk}\theta^k\frac{\partial^4 W}{\partial\theta_a^3\partial\theta_b} - C_{bbk}\theta^k\frac{\partial^4 W}{\partial\theta_a^4}\right)\\ &+ \frac{1}{2}\left(3\frac{\partial^3 W}{\partial\theta_a^3}\frac{\partial^3 W}{\partial\theta_a\partial\theta_b^2} + 3\frac{\partial^2 W}{\partial\theta_a^2}\frac{\partial^4 W}{\partial\theta_a^2\partial\theta_b^2} + \frac{\partial W}{\partial\theta_a}\frac{\partial^5 W}{\partial\theta_a^3\partial\theta_b^2} - 3\left(\frac{\partial^3 W}{\partial\theta_a^2\partial\theta_b}\right)^2\right)\\ &+ \frac{1}{2}\left(-4\frac{\partial^2 W}{\partial\theta_a\partial\theta_b}\frac{\partial^4 W}{\partial\theta_a^3\partial\theta_b} - \frac{\partial W}{\partial\theta_b}\frac{\partial^5 W}{\partial\theta_a^4\partial\theta_b} + \frac{\partial^4 W}{\partial\theta_a^4}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta_b^2}\right)\end{aligned} \tag{A.8}$$

如果我们选择[4]

$$c(a,b)=\frac{3\cdot 27(2a^3-11b^2)}{32\Delta^2} \tag{A.9}$$

并使用前面的 (5.23)、$W_{2,\,4}$、 $W_{2,\,3}$ 和$W_{2,\,2}$，随后可将 (A.8) 化简为微分方程

$$(2p\partial_q)^3W_{2,1}=2p\partial_q\left(\frac{1}{4\Delta p^3}(-3a^2q^2-9abq+a^3)+\frac{3aq}{4\Delta p}-\frac{12\cdot 27abpq}{\Delta^2}\right). \tag{A.10}$$

利用 $(2p\partial_q)^2W_{2,\,1}$ 在该对合下为奇函数这一性质，我们可以积分一次，求得唯一的奇解

$$\begin{aligned}(2p\partial_q)^2W_{2,1}&=\frac{1}{4\Delta p^3}(-3a^2q^2-9abq+a^3)+\frac{3aq}{4\Delta p}-\frac{12\cdot 27abpq}{\Delta^2}\\&=2p\partial_q\left(-\frac{3aq^2+a^2}{8\Delta p^2}-\frac{3\cdot 27abq^2}{\Delta^2}\right).\end{aligned}$$

因此，再积分一次可得，对于某个函数 $d(a,\ b)$，它是 $(a,\ b)$ 的函数

$$2p\partial_qW_{2,1}=-\frac{3aq^2+a^2}{8\Delta p^2}-\frac{3\cdot 27abq^2}{\Delta^2}+d(a,b)\,.$$

我们令 $d(a,\ b)\ =-27a^2b/\Delta^2$，于是再次利用 $W_{2,\,1}$ 在 ι 下为奇函数这一性质，可以积分得到

$$W_{2,1}=\frac{a}{8\Delta p}-\frac{27abp}{\Delta^2}\,.$$

对于最后一部分，我们从以下方程开始

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\partial^2W_2}{\partial\theta_a^2}=&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\partial^2W}{\partial a\partial\theta_a}+\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\left(-C_{aaa}\frac{\partial W}{\partial\theta_b}+C_{aab}\frac{\partial W}{\partial\theta_a}+C_{abk}\theta^k\frac{\partial^2W}{\partial\theta_a^2}-C_{aak}\theta^k\frac{\partial^2W}{\partial\theta_a\partial\theta_b}\right)\\&+\frac{1}{2(2\pi\mathrm{i})^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta_a}\frac{\partial^3W}{\partial\theta_a^2\partial\theta_b}-\frac{\partial W}{\partial\theta_b}\frac{\partial^3W}{\partial\theta_a^3}\right)\end{aligned} \tag{A.11}$$

该方程由 (5.25) 在 $\partial_{W^1}=\partial_a$、 $\partial_{\phi^1}=\partial_{\theta_a}$ 上求值所得的 ∂_{θ_b} 分量得到。虽然我们不详述推导过程，但要指出，由 ∂_{θ_a} 分量得到的关于 $\frac{\partial^2W_2}{\partial\theta_a\partial\theta_b}$ 的方程，与由 (A.~~1~~) ~~的~~ ∂_{θ_b} 分量得到的方程相容，这是因为 W 在 $(Z^1,\ Z^2,\ \theta^1,\ \theta^2)$ 坐标下满足 Pleba´nski 第二天球方程。

对 (A.11) 求两次导数，在 θ_a 中可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\partial^2W_2}{\partial\theta_a^4}=&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\partial^2W}{\partial a\partial\theta_a^3}+\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\left(-3C_{aaa}\frac{\partial^3W}{\partial\theta_a^2\partial\theta_b}+3C_{aab}\frac{\partial^2W}{\partial\theta_a^3}+C_{abk}\theta^k\frac{\partial^4W}{\partial\theta_a^4}-C_{aak}\theta^k\frac{\partial^4W}{\partial\theta_a^3\partial\theta_b}\right)\\&+\frac{1}{2(2\pi\mathrm{i})^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta_a}\frac{\partial^5W}{\partial\theta_a^4\partial\theta_b}-\frac{\partial W}{\partial\theta_b}\frac{\partial^5W}{\partial\theta_a^5}+2\frac{\partial^2W}{\partial\theta_a^2}\frac{\partial^4W}{\partial\theta_a^3\partial\theta_b}-2\frac{\partial^2W}{\partial\theta_a\partial\theta_b}\frac{\partial^4W}{\partial\theta_a^4}\right).\end{aligned} \tag{A.12}$$

利用 (5.23) 和前面的结果，可以将所得方程改写为

$$(2p\partial_q)^4W_{2,0}=2p\partial_q\left(\frac{162a^2bp}{\Delta^2}+\frac{30\cdot 27abq^2p}{\Delta^2}+\frac{-3\cdot 13\cdot 4a^3+3\cdot 27\cdot 11b^2}{4\Delta^2}qp\right). \tag{A.13}$$

利用 $(2p\partial_q^3)W_{2,0}$ 的奇性，可以对 (A.13) 唯一积分，得到

$$(2p\partial_q)^3W_{2,0}=\frac{162a^2bp}{\Delta^2}+\frac{30\cdot 27abq^2p}{\Delta^2}+\frac{-3\cdot 13\cdot 4a^3+3\cdot 27\cdot 11b^2}{4\Delta^2}qp$$

进一步积分可得

$$(2p\partial_q)^2W_{2,0}=2p\partial_q\left(\frac{27abqp}{\Delta^2}\right)-\frac{2\cdot 27ab^2}{\Delta^2}+\frac{-3\cdot 13\cdot 4a^3+3\cdot 27\cdot 11b^2}{16\Delta^2}q^2+e(a,b) \tag{A.14}$$

[4]作出这一选择，是为了方便对所得方程进行积分。

对于某个函数 $e(a,b)$。我们选择

$$e(a,b) = \frac{2\cdot 27ab^2}{\Delta^2} + \frac{-13\cdot 4a^4 + 27\cdot 11ab^2}{16\Delta^2}$$

因此

$$(2p\partial_q)^2 W_{2,0} = 2p\partial_q\left(\frac{27abqp}{\Delta^2} + \frac{-13\cdot 4a^3 + 27\cdot 11b^2}{16\Delta^2}p\right) \tag{A.15}$$

利用 $2p\partial_q W_{2,0}$ 在 ι 下为奇函数这一事实，我们可以将 (A.15) 唯一地积分为

$$(2p\partial_q) W_{2,0} = \frac{27abqp}{\Delta^2} + \frac{-13\cdot 4a^3 + 27\cdot 11b^2}{16\Delta^2}p\,. \tag{A.16}$$

最后，后者可以积分为（相差一个关于 (a,b) 的函数）

$$W_{2,0} = \frac{27abq^2}{4\Delta^2} + \frac{11q}{32\Delta} - \frac{3a^3q}{\Delta^2}$$

因此，将所有结果合并起来，我们得到 (5.32)。

参考文献

[AMNO25] Mohamad Alameddine、Olivier Marchal、Nikita Nikolaev 和 Nicolas Orantin。变形 Painlev´e I 方程的三重渐近解的重求和。arXiv: 2503.12290，2025年。[AMP24] Sergey Alexandrov、Marcos Mari˜no 和 Boris Pioline。精细拓扑弦与对偶配分函数的重求和。《对称性、可积性与几何：方法与应用》，2024年8月。[AP21a] Sergei Alexandrov 和 Boris Pioline。解消合并锥的共形热力学贝特拟设。《亨利·庞加莱年刊》，23(6):1909–1949，2021年11月。[AP21b] Sergei Alexandrov 和 Boris Pioline。天界度量、BPS 指数与扭量。《数学物理学快报》，111(5)，2021年9月。[ASTT22] Murad Alim、Arpan Saha、J¨org Teschner 和 Iv´an Tulli。非微扰拓扑弦理论的数学结构：从 GW 到 DT 不变量。《数学物理通讯》，399(2):1039–1101，2022年11月。[BM22] Tom Bridgeland 和 Davide Masoero。论变形三次振子的单值化。《数学年刊》，385(1–2):193–258，2022年1月。[BM25] Tom Bridgeland 和 Fabrizio Del Monte。Joyce 结构与 Painlev´e 方程的极点。arXiv: 2505.03429，2025年。[Bri07] Tom Bridgeland。三角范畴上的稳定性条件。《数学年刊》，166(2):317–345，2007年。[Bri19] T. Bridgeland。Donaldson–Thomas 理论中的黎曼–希尔伯特问题。《数学创刊》，216，2019年。[Bri21] Tom Bridgeland。由 Donaldson–Thomas 不变量产生的几何。《可积性、量子化与几何 II：量子理论与代数几何》，103.2:1–66，2021年。[Bri24] Tom Bridgeland。由 Joyce 结构产生的 τ 函数。《对称性、可积性与几何：方法与应用》，2024年12月。[Bri25a] Tom Bridgeland。Joyce 结构及其扭子空间。《数学进展》，462:110089，2025年。[Bri25b] Tom Bridgeland。二次微分空间上的 Joyce 结构。《几何与拓扑》，29(5):2695–2731，2025年。[BS21] Tom Bridgeland 和 Ian A. B. Strachan。由 Donaldson–Thomas 不变量定义的复超凯勒结构。《数学物理学快报》，111(2)，2021年4月。

[BT25] Tom Bridgeland 和 Iv´an Tulli。椭圆 Calabi–Yau 三维簇的重求和与黎曼–希尔伯特问题。《数学物理通讯》，406(6)，2025年5月。[DM24] Maciej Dunajski 和 Timothy Moy。天界度量、超拉格朗日结构与 Joyce 结构。《伦敦数学会杂志》，110(5):e13009，2024年。[GKPKM24] Jie Gu、Amir-Kian Kashani-Poor、Albrecht Klemm 和 Marcos Marino。紧致 Calabi–Yau 三维簇上的非微扰拓扑弦理论。《*SciPost* 物理》，16(3):079，2024年。[GR84] Hans Grauert 和 Reinhold Remmert。《相干解析层》，第265卷，《数学科学基础丛书》。施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约，1984年。[IKS93] P.W. Michor、I. Kol´ar 和 J. Slov´ak。《微分几何中的自然运算》。1993年。[KS22] Maxim Kontsevich 和 Yan Soibelman。墙穿越公式中的解析性与重求和。《数学物理学快报》，112:32，2022年。[Moy25] Timothy Moy。球面二次微分产生的 Joyce 结构。*arXiv:2509.05275*，2025年。[MS16] Claude Mitschi 和 David Sauzin。《发散级数、可求和性与重求和 I：单值化与重求和》，第2153卷，《数学讲义》。施普林格出版社，2016年。