arXiv:2602.08831v1 [math.DG] 9 Feb 2026

关于一类完备凯勒流形的 AN L^2-$\partial\overline{\partial}$-引理

RICCARDO PIOVANI

Abstract. 我们证明了一个涉及完备凯勒流形上光滑平方可积形式的 L^2-$\partial\overline{\partial}$-引理，前提是希尔伯特空间中 L^2-形式上的霍奇拉普拉斯算子的唯一自伴扩张，其谱在零附近存在间隙。此结果推广了紧凯勒流形上的经典 $\partial\overline{\partial}$-引理。

1. Introduction

在紧凯勒流形上，$\partial\overline{\partial}$-引理 [DGMS75，引理 5.11、5.15]指出，对于任意光滑复值 k-形式 $\alpha \in A^k_{\mathbb{C}}$，若其为 ∂-闭且 $\overline{\partial}$-闭，即，$\partial\alpha = \overline{\partial}\alpha = 0$，则下列条件等价：

(1) $\alpha = \partial\overline{\partial}\beta$，对于 $\beta \in A^{k-2}_{\mathbb{C}}$；(2) $\alpha = \partial\gamma$，对于 $\gamma \in A^{k-1}_{\mathbb{C}}$；(3) $\alpha = \overline{\partial}\zeta$，对于 $\zeta \in A^{k-1}_{\mathbb{C}}$；(4) $\alpha = \partial\eta + \overline{\partial}\theta$，对于 $\eta,\ \theta \in A^{k-1}_{\mathbb{C}}$；(5) $\alpha = d\lambda$，对于 $\lambda \in A^{k-1}_{\mathbb{C}}$，

其中外微分分解为 $d = \partial + \overline{\partial}$。上述陈述的有效性在紧致复流形之间的全纯双有理映射下保持不变 [DGMS75, 定理 5.22]，，并具有重要的上同调和拓扑意义 [DGMS75, 注 5.15]：所有复上同调空间（Aeppli、Bott-Chern、Dolbeault 上同调及其共轭）均同构，并且 k-德拉姆上同调群同构于所有 $(p,\ q)$-Dolbeault 上同调群的直和，其中 $p+q=k$。文献 [AT13] 证明了一个涉及德拉姆、Aeppli 和 Bott-Chern 上同调维数的 $\partial\overline{\partial}$-引理有效性的数值刻画。

本文的主要目的是将 $\partial\overline{\partial}$-引理推广为一个 L^2-$\partial\overline{\partial}$-引理，该引理涉及一类完备 Kähler 流形上的平方可积形式。现在我们介绍这一结果。给定一个厄米流形 $(M,\ g)$，记 d^*、∂^*、$\overline{\partial}^*$ 为微分算子 $d,\ \partial,\ \overline{\partial}$ 的 L^2-形式伴随算子，并记 $\Delta_D := DD^* + D^*D$ 对于 $D \in \{d,\ \partial,\ \overline{\partial}\}$ 为 Hodge、∂-和 Dolbeault 拉普拉斯算子；它们都是二阶形式自伴椭圆算子。众所周知，若度量完备，则所有这些二阶拉普拉斯算子本质自伴，也就是说，它们在光滑紧支撑形式上的限制，在希尔伯特空间 L^2-形式 $L^2\Lambda^\bullet_{\mathbb{C}} := \oplus_{k\in\mathbb{N}} L^2\Lambda^k_{\mathbb{C}}$ 上均有唯一的自伴扩张，即由范数有界、可能不连续的复值形式构成的空间。这些自伴算子均为非负，因此其谱包含于 $[0,+\infty)$。我们称这样的算子具有

2020 *Mathematics Subject Classification.* 53C55, 32Q15.*Key words and phrases.* 谱隙、闭像、Aeppli 拉普拉斯算子、Bott-Chern 拉普拉斯算子。

作者部分获得 INdAM 的 GNSAGA 资助。

谱隙 谱隙，如果其谱包含于 $\{0\} \cup [C, +\infty)$，其中某个 $C > 0$。这等价于该算子的像是闭的。

另一方面，如果厄米度量 g 是 K¨ahler 度量，即，其基本 2-形式是闭的，那么根据 K¨ahler 恒等式，上述二阶拉普拉斯算子除相差一个因子外彼此相同，即 $\Delta_d = 2\Delta_\partial = 2\Delta_{\bar\partial}$。因此，如果该度量同时是 K¨ahler 度量且完备，那么这些拉普拉斯算子的所有自伴扩张除相差一个因子外彼此相同。在引言中，我们将霍奇拉普拉斯算子的唯一自伴扩张记为 Δ。

除了谱离散的紧 K¨ahler 流形外，完整 K¨ahler 流形也有一些例子，其中 Δ 在整个形式代数$L^2\Lambda^\bullet_{\mathbb{C}}$ 上有谱隙；这些例子包括完整 K¨ahler d-有界流形 [Gro91, Theorem 1.4。A],其中，d-有界是指基本形式 ω 不仅闭，而且恰当 $\omega = d\eta$，并且 η 在逐点范数下有界。完整 K¨ahler d-有界流形的具体例子包括：截面曲率有统一负上界的完整单连通 K¨ahler 流形 [Gro91, 0.1.B][CY18, Le mma 3.2]，非紧型厄米对称空间 [Gro91, 0.1.C”] [Bal06, Proposition 8.6]，斯坦流形中的强多重次调和域 [Gro91, 0.3.A(b)] [Don94, Proposition 2.2]，带有伯格曼度量的 $\mathbb{C}^n$ 严格伪凸域 [Don94, Proposition 3.4]，$\mathbb{C}^n$中的有界齐性域[KO07, Theorem 1]。我们预计，这个 L^2-$\partial\bar\partial$-引理将有助于进一步研究上述几类完备 K¨ahler 流形。关于完备 K¨ahler d-有界流形的近期结果，参见 [PT19, BDET24, Hua25]。鉴于 L^2 不变量之间的不等式已在 [HP24, BP25]中得到证明，L^2-$\partial\bar\partial$-引理的概念对于紧复流形的正规覆盖也值得关注。

我们用记号 $L^2A^k_{\mathbb{C}}$ 表示光滑 L^2-形式 $L^2\Lambda^k_{\mathbb{C}} \cap A^k_{\mathbb{C}}$ 的空间。以下定理是本文的主要结果。

定理1.1 （参见定理 4.1）。设 (M, g) 是一完备的 ***K¨ahler*** 流形，其自伴拉普拉斯算子 Δ在 $L^2\Lambda^k_{\mathbb{C}}$中具有谱隙。给定一个满足 $\partial\alpha = \bar\partial\alpha = 0$ 的光滑L^2-形式 $\alpha \in L^2A^k_{\mathbb{C}}$，则以下条件等价：

(1) $\alpha = \partial\bar\partial\beta$，对 $\beta \in L^2A^{k-2}_{\mathbb{C}}$；
(2) $\alpha = \partial\gamma$，对 $\gamma \in L^2A^{k-1}_{\mathbb{C}}$；
(3) $\alpha = \partial\zeta$，对 $\zeta \in L^2A^{k-1}_{\mathbb{C}}$；
(4) $\alpha = \partial\eta + \bar\partial\theta$，对 $\eta, \theta \in L^2A^{k-1}_{\mathbb{C}}$；
(5) $\alpha = d\lambda$，对 $\lambda \in L^2A^{k-1}_{\mathbb{C}}$。

定理1.1的证明主要依赖于一些新算子的谱性质。这些自伴算子是在 [HP24] 中引入的，作为发展一般厄米流形和完备 K¨ahler 流形的 L^2-Hodge 理论的 Aeppli 与 Bott-Chern 版本的一部分。更确切地说，我们证明，若 Δ 具有谱隙，则四阶椭圆 Aeppli 与 Bott-Chern 拉普拉斯算子存在具有谱隙的自伴扩张，从而可以采用基于椭圆正则性的论证。由于这构成了证明的核心，我们现在将更详细地讨论这些 Aeppli 与 Bott–Chern 拉普拉斯算子。

给定一个紧厄米流形，对于 $D \in \{d, \partial, \bar\partial\}$，存在唯一的二阶 Hodge、$\partial$- 和 Dolbeault 拉普拉斯算子 $\Delta_D = DD^* + D^*D$ 的选取，使得根据经典 Hodge 理论，相应的核分别与 de Rham、∂- 和 Dolbeault 上同调同构。Aeppli 和 Bott-Chern 的情形略有不同：相关拉普拉斯算子有多种可能的选取。我们通过相关微分复形回顾 Aeppli 和 Bott-Chern 上同调的定义。记 (p, q)-形式空间为 $A^{p,q}$，因此 $A^k_{\mathbb{C}} = \oplus_{p+q=k}A^{p,q}$；记 L^2-(p, q)-形式的希尔伯特空间为 $L^2\Lambda^{p,q}$。对于任意

整数 (p,q) 的选取，我们考虑复形

$$\ldots \longrightarrow A^{p-1,q-2} \oplus A^{p-2,q-1} \xrightarrow{\overline{\partial}\oplus\partial} A^{p-1,q-1} \xrightarrow{\partial\overline{\partial}} A^{p,q} \xrightarrow{\partial+\overline{\partial}} A^{p+1,q} \oplus A^{p,q+1} \longrightarrow \ldots$$

其中，$\overline{\partial}\oplus\partial$ 作用于 $A^{p-1,\,q-2}\oplus A^{p-2,\,q-1}$，如同 $\overline{\partial}$ 作用于 $A^{p-1,\,q-2}$，再加上 ∂ 作用于 $A^{p-2,\,q-1}$。Aeppli 和 Bott-Chern 上同调空间定义如下：

$$H_A^{p-1,q-1} := \frac{\ker \partial\overline{\partial} \cap A^{p-1,q-1}}{\operatorname{im} \overline{\partial}\oplus\partial}, \qquad H_{BC}^{p,q} := \frac{\ker(\partial+\overline{\partial}) \cap A^{p,q}}{\operatorname{im} \partial\overline{\partial}}.$$

于是，“自然的”Aeppli 和 Bott-Chern 拉普拉斯算子定义如下：

$$\begin{aligned}\Delta_A &:= \overline{\partial}^*\partial^*\partial\overline{\partial} + (\overline{\partial}\oplus\partial)(\overline{\partial}\oplus\partial)^* = \overline{\partial}^*\partial^*\partial\overline{\partial} + \partial\partial^* + \overline{\partial\partial}^*,\\ \Delta_{BC} &:= \partial\overline{\partial\partial}^*\partial^* + (\partial+\overline{\partial})^*(\partial+\overline{\partial}) = \partial\overline{\partial\partial}^*\partial^* + \partial^*\partial + \overline{\partial}^*\overline{\partial}.\end{aligned}$$

这些算子的核与 Aeppli 和 Bott-Chern 上同调空间同构，但它们并非椭圆算子 [Sch07，命题 2.1]。首批其核被证明与 Aeppli 和 Bott-Chern 上同调同构的椭圆四阶算子由 [KS60] 定义如下：

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_A &:= \partial\overline{\partial\partial}^*\partial^* + \overline{\partial}^*\partial^*\partial\overline{\partial} + \partial\overline{\partial}^*\overline{\partial}\partial^* + \overline{\partial}\partial^*\partial\overline{\partial}^* + \partial\partial^* + \overline{\partial\partial}^*,\\ \tilde{\Delta}_{BC} &:= \partial\overline{\partial\partial}^*\partial^* + \overline{\partial}^*\partial^*\partial\overline{\partial} + \partial^*\overline{\partial\partial}^*\partial + \overline{\partial}^*\partial\partial^*\overline{\partial} + \partial^*\partial + \overline{\partial}^*\overline{\partial}.\end{aligned}$$

我们将这些算子称为 Kodaira-Spencer 拉普拉斯算子。另一组其核与 Aeppli 和 Bott-Chern 上同调同构的椭圆四阶算子由 [Var86] 定义如下：

$$\begin{aligned}\square_A &:= \overline{\partial}^*\partial^*\partial\overline{\partial} + ((\overline{\partial}\oplus\partial)(\overline{\partial}\oplus\partial)^*)^2 = \overline{\partial}^*\partial^*\partial\overline{\partial} + (\partial\partial^* + \overline{\partial\partial}^*)^2,\\ \square_{BC} &:= \partial\overline{\partial\partial}^*\partial^* + ((\partial+\overline{\partial})^*(\partial+\overline{\partial}))^2 = \partial\overline{\partial\partial}^*\partial^* + (\partial^*\partial + \overline{\partial}^*\overline{\partial})^2.\end{aligned}$$

我们将这些算子称为 Varouchas 拉普拉斯算子。

在 [HP24 的推论 8.12] 中，已证明在完备 K¨ahler 流形上，若 Δ在 $L^2\Lambda^\bullet_{\mathbb{C}}$中有谱隙，则 Δ_A 和 Δ_{BC}存在具有谱隙的自伴扩张。由于这些算子 Δ_A 且 Δ_{BC} 非椭圆，这不足以证明定理1.1。事实上，为了证明主要结果，我们利用椭圆型 Kodaira-Spencer 拉普拉斯算子的谱隙，这一点将在定理 3.1 中证明。我们还将在定理 3.5 中证明 Varouchas 拉普拉斯算子的谱隙。我们指出，对于像定理 1.1 这样直接推广经典 $\partial\partial$-引理的陈述，Δ 的谱隙假设至关重要。事实上，若没有谱隙，则 d、∂、∂和 $\partial\partial$ 的闭扩张的像都不是闭的。关于不假设谱隙的完备 K¨ahler 流形上的较弱陈述，参见定理 2.15（参见 [HP24 的推论 8.6]）。

本文组织如下。第2节介绍希尔伯特复形、自伴算子、谱隙、微分算子的最小与最大闭扩张、复流形上的微分复形、二阶和四阶复拉普拉斯算子的自伴扩张，以及完备 K¨ahler 流形上的 L^2Hodge 理论等预备知识。第3节证明椭圆 Aeppli 算子和 Bott-Chern 拉普拉斯算子的谱隙。在定理 3.2 中，我们还给出了算子 $\partial\partial$ 的闭扩张之像为闭集这一结论的新证明，该结论最初由 [HP24 的定理 8.10] 证明。最后，在第4节中，我们证明主要结果定理1.1。在注4.3中，我们还指出，当流形具有有界几何时，定理1.1可以得到改进。

2. Preliminaries

2.1.希尔伯特复形。 一个希尔伯特复形 由一列希尔伯特空间 H_i 以及线性算子 $D_i : \mathrm{H}_i \to \mathrm{H}_{i+1}$ 构成，这些算子是稠密定义的（D_i 定义在其定义域 $\mathrm{D}(D_i)$ 上，该定义域是 H_i 的稠密子空间），并且是闭的 （ D_i 的图在 $\mathrm{H}_i \times \mathrm{H}_{i+1}$ 中是闭的），其形式为

$$\mathcal{H}_0 \xrightarrow{D_0} \mathcal{H}_1 \xrightarrow{D_1} \dots \xrightarrow{D_{n-2}} \mathcal{H}_{n-1} \xrightarrow{D_{n-1}} \mathcal{H}_n$$

使得 $\operatorname{im} D_i \subseteq \ker D_{i+1}$。Hilbert 复形的概念由 Br¨uning 和 Lesch 在 [BL92]中进行了系统分析。对于任意希尔伯特复形，我们都可以关联到¯它的上同调 H_i 和约化上同调 $\bar{H}_i$

$$H_i := \frac{\ker D_i}{\operatorname{im} D_{i-1}}, \quad \bar{H}_i := \frac{\ker D_i}{\overline{\operatorname{im} D_{i-1}}}.$$

我们用 $P^t : \mathrm{H}_2 \to \mathrm{H}_1$ 表示任意稠密定义算子$P : \mathrm{H}_1 \to \mathrm{H}_2$, 的希尔伯特伴随，其定义关系为

$$\langle Px, y\rangle_2 = \langle x, P^t y\rangle_1 \qquad \forall x \in \mathcal{D}(P),\ \forall y \in \mathcal{D}(P^t),$$

定义域为

$$\mathcal{D}(P^t) := \{y \in \mathcal{H}_2 : \mathcal{H}_1 \ni x \mapsto \langle Px, y\rangle_2 \text{ is continuous}\},$$

其中 $\cdot,\cdot_i$ 是 H_i上的内积。回顾一下， P^t 总是闭的，因为其图满足 $\mathrm{Gr}(P^t) = \mathrm{Gr}(-P)^\perp$。此外，若 P也闭，则 $\mathrm{D}(P^t)^\perp = \{0\}$，因此 P^t 也稠密定义。在这种情况下

$$P^{tt} = P, \qquad \ker P^\perp = \overline{\operatorname{im} P^t}.$$

希尔伯特复形的一个基本性质如下。

引理2.1 ([BL92, 引理 2.1])。 给定一个希尔伯特复形 $D_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_{i+1}$，存在正交分解

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_i &= \ker D_i \cap \ker D_{i-1}^t \oplus \overline{\operatorname{im} D_{i-1}} \oplus \overline{\operatorname{im} D_i^t},\\
\ker D_i &= \ker D_i \cap \ker D_{i-1}^t \oplus \overline{\operatorname{im} D_{i-1}},\\
\ker D_{i-1}^t &= \ker D_i \cap \ker D_{i-1}^t \oplus \overline{\operatorname{im} D_i^t}.
\end{aligned}$$

引理2.1中的第二个分解给出了一个同构

$$\ker D_i \cap \ker D_{i-1}^t \simeq \bar{H}_i.$$

2.2. 自伴算子。 希尔伯特空间 H 上的线性算子 $P : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ 称为自伴，若 $P = P^t$, 且定义域相等。若算子 P 满足 $Px,\ x \geq 0$，对所有 $x \in \mathrm{D}(P)$ 均成立，则称其为非负。下面介绍非负自伴算子的两种标准构造。

定理 2.2 ([RS75，定理 X.25] 或 [Far75，定理 2.3])。 设 $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的闭稠密定义线性算子。那么，由 $(P^tP)x = P^t(Px)$ 定义的算子 P^tP 的定义域为

$$\mathcal{D}(P^tP) := \{x \in \mathcal{D}(P) \,|\, Px \in \mathcal{D}(P^t)\}$$

是非负且自伴的。

特别地，若 P 是自伴的，则我们可以定义非负自伴算子 P^2。

定理 2.3 ([Far75，定理 4。1])。设 $P,Q:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的非负自伴算子。假设 $\mathcal{D}(P)\cap\mathcal{D}(Q)$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密。则由 $(P+Q)x=Px+Qx$ 定义的算子 $P+Q$，其定义域为

$$\mathcal{D}(P+Q):=\mathcal{D}(P)\cap\mathcal{D}(Q)$$

是非负且自伴的。

注 2.4。给定一个希尔伯特复形 $D_i:\mathcal{H}_i\to\mathcal{H}_{i+1}$，由定理 *2.2* 可知，算子$D_i^tD_i$ 和 $D_{i-1}D_{i-1}^t$ 在$\mathcal{H}_i$上是非负且自伴的。此外，若$\mathcal{D}(D_i^tD_i)\cap\mathcal{D}(D_{i-1}D_{i-1}^t)$ 在$\mathcal{H}_i$中稠密，则由定理 *2.3* 可知，拉普拉斯算子 $\Delta_i:=D_i^tD_i+D_{i-1}D_{i-1}^t$ 在$\mathcal{H}_i$上是非负且自伴的。在我们的应用中，这一稠密性假设总是成立的。最后我们注意到

$$\ker\Delta_i=\ker D_i\cap\ker D_{i-1}^t.$$

注 2.5。 Δ_i 的自伴性也可通过 [Koh63，命题 2。3]，的方法得到，该方法不需要任何稠密性假设。不过，在第 *2.7* 小节中，我们也需要定理 *2.3*，因为它适用于范围更广的一类算子。

2.3. 闭像与谱隙。对于闭且稠密定义的算子，其像为闭集这一性质有几种众所周知的刻画。证明可参见例如， [HP24，引理 4。3]

引理 2.6。设 $P:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$ 是希尔伯特空间之间的闭且稠密定义的线性算子。以下条件等价:

a) $\operatorname{im}P$ *is closed;*
b) $\exists C>0$ *s.t.* $\|x\|_1\le C\|Px\|_2$ *for all* $x\in\mathcal{D}(P)\cap\overline{\operatorname{im}P^t}$*;*
c) $\operatorname{im}P^t$ *is closed;*
d) $\exists C>0$ *s.t.* $\|y\|_2\le C\|P^ty\|_1$ *for all* $y\in\mathcal{D}(P^t)\cap\overline{\operatorname{im}P}$.

若不存在有界线性算子 $B:\mathrm{H}\to\mathrm{H}$ 使得

1) $B(P-\lambda I)x=x$ for all $x\in\mathcal{D}(P)$,
2) $Bx\in\mathcal{D}(P)$ and $(P-\lambda I)Bx=x$ for all $x\in\mathcal{H}$;

换言之，若 $P-\lambda I$ 没有有界逆算子。根据 [RS75，定理 X，1]，自伴算子的谱是实轴的子集，而非负自伴算子的谱是非负实轴的子集。此外，若非负自伴算子 P 满足 $\inf(\sigma(P)/\{0\})=C>0$，或等价地，若 $\sigma(P)\subseteq\{0\}\cup[C,+\infty)$ 且 $C>0$，则称其具有谱隙。

我们回顾谱隙条件的如下刻画。为方便读者，我们给出一个证明。

引理 2.7. 设 P 是希尔伯特空间$\mathcal{H}$上的非负自伴算子。则下列条件等价:

a) P 具有谱隙；b) $\exists C>0\,\langle Px,x\rangle\ge C\langle x,x\rangle$ 对所有 $x\in\mathcal{D}(P)\cap(\ker P)^\perp$；c) $\operatorname{im}P$ 是闭的；d) P^2 具有谱隙。

证明。我们需要用到无界自伴算子的谱定理，相关记号沿用 [Gri09 第 A.5 节4]。记 $\{E_\lambda\}$ 为 P 的谱分解，对于 $x,\ y\in\mathrm{D}(P)$，我们计算得

$$\langle x,y\rangle=\int_{\sigma(P)}d(E_\lambda x,y),$$

$$\langle Px, y\rangle = \int_{\sigma(P)} \lambda d(E_\lambda x, y),$$
$$\langle Px, Py\rangle = \langle P^2 x, y\rangle = \int_{\sigma(P)} \lambda^2 d(E_\lambda x, y).$$

注意， $y \in \ker P$ 当且仅当

$$\int_{\sigma(P)\cap(0,+\infty)} d(E_\lambda x, y) = 0$$

对所有 $x \in \mathsf{D}(P)$，其中

$$\langle x, y\rangle = \int_{\sigma(P)\cap\{0\}} d(E_\lambda x, y).$$

特别地， $x \in (\ker P)^\perp$ 当且仅当

$$\langle x, y\rangle = \int_{\sigma(P)\setminus\{0\}} d(E_\lambda x, y)$$

对所有 $y \in \mathsf{D}(P)$。既然这一点已得到确立，所声称的等价关系便很容易验证。为证明 d) $\Longrightarrow$ a)，我们还要用到 [Gri09, Section A.5.4] 中的谱映射定理。□

最后，我们回顾希尔伯特复形的拉普拉斯算子满足谱隙条件的另一种刻画。

引理 2.8 ([HP24, 引理 4。9])。 给定一个希尔伯特复形 $D_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_{i+1}$，其拉普拉斯算子为 Δ_i，以下条件等价:

a) Δ_i *has a spectral gap;*
b) $\exists C_i > 0 \ : C_i\|x\|_i^2 \le \|D_{i-1}^t x\|_{i-1}^2 + \|D_i x\|_{i+1}^2$ *for all* $x \in \mathcal{D}(D_{i-1}^t) \cap \mathcal{D}(D_i) \cap (\ker \Delta_i)^\perp$*;*
c) $\operatorname{im} D_{i-1}$ *and* $\operatorname{im} D_i$ *are closed.*

2.4. 强扩张与弱扩张。 希尔伯特空间 $P : \mathsf{H}_1 \to \mathsf{H}_2$ 之间的线性算子的一种扩张是指线性算子 $P' : \mathsf{H}_1 \to \mathsf{H}_2$，满足 $\mathsf{D}(P) \subseteq \mathsf{D}(P')$，且 $Px = P'x$ 对每个 $x \in \mathsf{D}(P)$ 都成立；也就是说，$\mathsf{Gr}(P) \subseteq \mathsf{Gr}(P')$。我们用记号 $P \subseteq P'$ 表示这样的扩张。

设 (M, g) 是一个黎曼流形，(E_1, h_1) 和 (E_2, h_2) 是 M 上的厄米向量丛，并设 $P : \mathsf{C}^\infty(M, E_1) \to \mathsf{C}^\infty(M, E_2)$ 是一个微分算子。我们将 $P^* : \mathsf{C}^\infty(M, E_2) \to \mathsf{C}^\infty(M, E_1)$ 记为 P 的形式伴随算子。

记 $\mathsf{C}_0^\infty(M, E_j)$ 为 E_j 的紧支撑光滑截面空间，我们将 P 在紧支撑截面上的限制记作 $P_0 : \mathsf{C}_0^\infty(M, E_1) \to \mathsf{C}_0^\infty(M, E_2)$。这可以视为一个无界且稠密定义的线性算子 $P_0 : L^2(M, E_1) \to L^2(M, E_2)$，其定义域为 $\mathsf{C}_0^\infty(M, E_1)$。我们回顾 P_0 的两个典范闭扩张的构造。

强扩张 P_s （也称为最小闭扩张 P_{min}）通过对 P_0的图取闭包来定义。其定义域 $\mathsf{D}(P_s)$ 定义为

$$\{u \in L^2(M, E_1) \,|\, \exists \{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_0^\infty(M, E_1),\ \exists v \in L^2(M, E_2) \text{ s.t. } u_j \to u,\ Pu_j \to v\},$$

并且对 $u \in \mathsf{D}(P_s)$有 $P_s u := v$ 。由定义，强扩张是 P_0的最小闭扩张。

弱扩张 P_w （也称为最大闭扩张 P_{max}）定义为 P_0 的、以分布意义作用的最大扩张。其定义域 $\mathsf{D}(P_w)$ 定义为

$$\{u \in L^2(M, E_1) \,|\, \exists v \in L^2(M, E_2), \text{ s.t. } \langle v, w\rangle_2 = \langle u, P^* w\rangle_1,\ \forall w \in \mathcal{C}_0^\infty(M, E_2)\},$$

且对于 $u \in \mathsf{D}(P_w)$ 中的 $P_w u := v$ 。这里，$\cdot, \cdot_i$ 表示定义在 $L^2(M, E_i)$ 上的内积。注意，这等价于说， P_w 是将 P^* 限制在紧支撑光滑形式上的希尔伯特伴随，即，$((P^*)_0)^t = P_w$。此外，弱扩张是强扩张的扩张，也就是说 $P_s \subseteq P_w$，并且

每个以分布意义作用的 P_0 的闭扩张 P'（也就是说，满足 $(P_\prime)^t$ 是 $(P^*)_0$ 的扩张）都包含于最小闭扩张与最大闭扩张之间。

注2.9。由于可闭稠定算子及其闭包具有相同的伴随算子，由 [RS80, 定理 VIII。1], 可得 $((P^*)_s)^t = P_w$。这意味着

$$(P^*)_s = (P_w)^t, \quad (P^*)_w = (P_s)^t.$$

希尔伯特空间 H 上的线性算子 L :H $\to$ H 称为本质自伴，若它有唯一的自伴扩张。等价地， L 是本质自伴的，当且仅当其图的闭包定义了一个自伴算子 [RS80，第 256] 页。

Hermitian 向量丛 (E,h) 的截面之间的微分算子 $P : \mathsf{C}^\infty(M,E) \to \mathsf{C}^\infty(M,E)$ 称为形式自伴，若 $P = P^*$。

注2.10。若微分算子 P 形式自伴，则由注*2.9*可知， P_0 本质自伴，当且仅当 $P_s = P_w$。

我们给出强扩张与弱扩张的若干技术性熟知性质，这些性质将在后续各节中用到。为此，我们引入强扩张与弱扩张之间的序关系 $s \le w$ ，以及若 $a = s$ 时的记号$a' = w$ 和若 $a = w$时的记号 $a' = s$ 。

命题 2.11 ([HP24，第 5]节)。设 $P : \mathcal{C}^\infty(M,E_1) \to \mathcal{C}^\infty(M,E_2)$ 与$Q : \mathcal{C}^\infty(M,E_2) \to \mathcal{C}^\infty(M,E_3)$ 为厄米向量丛光滑截面之间的微分算子。则

（*1*）$\overline{\mathrm{im}\ P_0} = \overline{\mathrm{im}\ P_s}$；（*2*）$\mathrm{im}\,(QP)_s \subseteq \mathrm{im}\ Q_s$；（*3*）$\ker P_w \subseteq \ker(QP)_w$；（*4*）若 $QP = 0$，则对任意满足 $a \le b$ 的 $a, b \in \{s, w\}$，有 $\mathrm{im}\ P_a \subseteq \ker Q_b$；（*5*）若 $P_s \subseteq P' \subseteq P_w$，则当作用于 $\mathcal{C}^\infty(M,E_1) \cap D(P')$ 时，我们有 $P = P'$；（*6*）有等式 $D(P_w) \cap \mathcal{C}^\infty(M,E_1) = \{\alpha \in L^2(M,E_1) \cap \mathcal{C}^\infty(M,E_1) \mid P\alpha \in L^2(M,E_1)\}$，$\ker P_w \cap \mathcal{C}^\infty(M,E_1) = \{\alpha \in L^2(M,E_1) \cap \Gamma(M,E_1) \mid P\alpha = 0\}$。

2.5. **从微分复形到希尔伯特复形**。给定一个黎曼流形 (M, g)，考虑一些厄米向量丛 (E_i, h_i)，其中 $i = 1, 2, 3$，并考虑一个由微分算子构成的复形

$$\mathcal{C}^\infty(M,E_1) \xrightarrow{P} \mathcal{C}^\infty(M,E_2) \xrightarrow{Q} \mathcal{C}^\infty(M,E_3)$$

即， $Q \bigcirc P = 0$。由命题 2.11 的*(4)* 可知

$$L^2(M,E_1) \xrightarrow{P_a} L^2(M,E_2) \xrightarrow{Q_b} L^2(M,E_3)$$

对于任意满足 $a \le b$ 的强扩张与弱扩张 $a, b \in \{s, w\}$，它都是一个希尔伯特复形。

如果上述微分复形由两个以上的算子定义，例如$D_i : \mathsf{C}^\infty(M, E_i) \to \mathsf{C}^\infty(M, E_{i+1})$，那么对于满足 $a_i \le a_{i+1}$（对所有 i），$a_i \in \{s, w\}$，通过扩张 $(D_i)_{a_i} : L^2(M, E_i) \to L^2(M, E_{i+1})$ 可定义一个希尔伯特复形。

2.6. **复流形上的微分复形**。给定一个复流形M，我们回顾以下定义在复值微分形式上的自然复形，其定义关系为

$$d^2 = \partial^2 = \overline{\partial}^2 = \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0.$$

对于任意选取的整数 k, p, q，我们考虑

$$\ldots \longrightarrow A^{k-1}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{d} A^k_{\mathbb{C}} \xrightarrow{d} A^{k+1}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \ldots$$

$$\dots \longrightarrow A^{p-1,q} \xrightarrow{\partial} A^{p,q} \xrightarrow{\partial} A^{p+1,q} \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow A^{p,q-1} \xrightarrow{\overline{\partial}} A^{p,q} \xrightarrow{\overline{\partial}} A^{p,q+1} \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow A^{p-1,q-2} \oplus A^{p-2,q-1} \xrightarrow{\overline{\partial}\oplus\partial} A^{p-1,q-1} \xrightarrow{\partial\overline{\partial}} A^{p,q} \xrightarrow{\partial+\overline{\partial}} A^{p+1,q} \oplus A^{p,q+1} \longrightarrow \dots$$

其中 $\partial\overline{\oplus}\partial$ 在 $A^{p-1,\,q-2} \oplus A^{p-2,\,q-1}$ 上作用为 ∂ 在 $A^{p-1,\,q-2}$ 上的作用，加上 ∂ 在 $A^{p-2,\,q-1}$上的作用。根据第2.5小节，在 M上固定一个厄米度量后，该度量会在形式丛上诱导出自然的厄米度量，而前述每个复形都定义了一个希尔伯特复形。我们将引理2.1应用于这些希尔伯特复形，并结合注2.9，得到以下一般性结果。

定理2.12 ([HP24，第6节和定理7。4]). 给定一个厄米流形(M,g)，对于 $a,b\in\{s,w\}$ 且满足 $a\le b$，存在正交分解 L^2

$$\begin{aligned}
L^2\Lambda^k_{\mathbb{C}} &= \ker d_b \cap \ker d^*_{a'} \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{im} d_a} \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{im} d^*_{b'}},\\
L^2\Lambda^{p,q} &= \ker \partial_b \cap \ker \partial^*_{a'} \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{im} \partial_a} \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{im} \partial^*_{b'}},\\
L^2\Lambda^{p,q} &= \ker \overline{\partial}_b \cap \ker \overline{\partial}^*_{a'} \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{im} \overline{\partial}_a} \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{im} \overline{\partial}^*_{b'}},\\
L^2\Lambda^{p,q} &= \ker \partial\overline{\partial}_b \cap \ker(\overline{\partial}\oplus\partial)^*_{a'} \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{im}(\overline{\partial}\oplus\partial)_a} \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{im} \overline{\partial}^* \partial^*_{b'}},\\
L^2\Lambda^{p,q} &= \ker(\partial+\overline{\partial})_b \cap \ker \overline{\partial}^* \partial^*_{a'} \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{im} \partial\overline{\partial}_a} \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{im}(\partial+\overline{\partial})^*_{b'}}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
L^2\Lambda^k_{\mathbb{C}} \cap \ker d_b &= \ker d_b \cap \ker d^*_{a'} \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{im} d_a},\\
L^2\Lambda^{p,q} \cap \ker \partial_b &= \ker \partial_b \cap \ker \partial^*_{a'} \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{im} \partial_a},\\
L^2\Lambda^{p,q} \cap \ker \overline{\partial}_b &= \ker \overline{\partial}_b \cap \ker \overline{\partial}^*_{a'} \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{im} \overline{\partial}_a},\\
L^2\Lambda^{p,q} \cap \ker \partial\overline{\partial}_b &= \ker \partial\overline{\partial}_b \cap \ker(\overline{\partial}\oplus\partial)^*_{a'} \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{im}(\overline{\partial}\oplus\partial)_a},\\
L^2\Lambda^{p,q} \cap \ker(\partial+\overline{\partial})_b &= \ker(\partial+\overline{\partial})_b \cap \ker \overline{\partial}^* \partial^*_{a'} \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{im} \partial\overline{\partial}_a}.
\end{aligned}$$

我们在本小节末尾回顾一下 [HP24，第7.1] 小节中的结果：在 $L^2\Lambda^{p,q}$ 上有

$$(1)\qquad \ker(\partial+\overline{\partial})_w = \ker\partial_w \cap \ker\overline{\partial}_w, \qquad \overline{\operatorname{im}(\overline{\partial}\oplus\partial)_s} = \overline{\operatorname{im}\partial_s} + \overline{\operatorname{im}\overline{\partial}_s},$$

$$(2)\qquad \ker(\partial^*+\overline{\partial}^*)_w = \ker\partial^*_w \cap \ker\overline{\partial}^*_w, \qquad \overline{\operatorname{im}(\partial^*\oplus\overline{\partial}^*)_s} = \overline{\operatorname{im}\partial^*_s} + \overline{\operatorname{im}\overline{\partial}^*_s},$$

其中 $\partial^*\oplus\overline{\partial}^* = (\partial+\overline{\partial})^* : A^{p+1,q} \oplus A^{p,q+1} \to A^{p,q}$ 以及 $\partial^* + \overline{\partial}^* = (\partial\overline{\oplus}\partial)^* : A^{p,q} \to A^{p-1,q} \oplus A^{p,q-1}$。

2.7. 二阶和四阶复拉普拉斯算子的自伴扩张。 给定一个厄米流形（M,g），我们回顾 [HP24，第 6,7,8]节中复拉普拉斯算子的自伴扩张的构造。

Dolbeault 拉普拉斯算子的自伴扩张，正是由 Dolbeault 复形所产生的希尔伯特复形（参见注2.4和注2.9）对应的自然拉普拉斯算子：对于 $a,b\in\{s,w\}$，其中 $a\le b$

$$\Delta_{\overline{\partial},ab} := \overline{\partial}_a\overline{\partial}^*_{a'} + \overline{\partial}^*_{b'}\overline{\partial}_b : L^2\Lambda^{p,q} \to L^2\Lambda^{p,q}.$$

类似地，我们可以构造自伴扩张

$$\Delta_{\partial,ab} := \partial_a\partial^*_{a'} + \partial^*_{b'}\partial_b : L^2\Lambda^{p,q} \to L^2\Lambda^{p,q},$$
$$\Delta_{d,ab} := d_a d^*_{a'} + d^*_{b'}d_b : L^2\Lambda^k_{\mathbb{C}} \to L^2\Lambda^k_{\mathbb{C}},$$
$$\Delta_{A,ab} := (\overline{\partial}\oplus\partial)_a(\overline{\partial}\oplus\partial)^*_{a'} + \overline{\partial}^*\partial^*_{b'}\partial\overline{\partial}_b : L^2\Lambda^{p,q} \to L^2\Lambda^{p,q},$$
$$\Delta_{BC,ab} := \partial\overline{\partial}_a\overline{\partial}^*\partial^*_{a'} + (\partial+\overline{\partial})^*_{b'}(\partial+\overline{\partial})_b : L^2\Lambda^{p,q} \to L^2\Lambda^{p,q},$$

∂-和霍奇-德拉姆拉普拉斯算子，以及非椭圆自然 Aeppli 和 Bott-Chern 拉普拉斯算子。

椭圆 Aeppli 和 Bott-Chern 拉普拉斯算子的自伴扩张定义如下。我们首先定义 Varouchas 拉普拉斯算子[Var86]的扩张。对于 $\{a,\ b,\ c\} \in \{s,\ w\}$，当 $a \le b \le c$ 时，我们在 $L^2\Lambda^{p,\,q}$ 上定义以下自伴算子

$$\Box_{A,ab} := ((\overline{\partial}\oplus\partial)_a(\overline{\partial}\oplus\partial)^*_{a'})^2 + \overline{\partial}^*\partial^*_{b'}\partial\overline{\partial}_b,$$
$$\Box_{BC,bc} := \partial\overline{\partial}_b\overline{\partial}^*\partial^*_{b'} + ((\partial+\overline{\partial})^*_{c'}(\partial+\overline{\partial})_c)^2,$$

这些算子是非负且自伴的，其定义域通过反复应用定理 2.2 和 2.3 给出。它们是椭圆 Aeppli 和 Bott-Chern 拉普拉斯算子的自伴扩张 $(\Box_A)_0$，$(\Box_{BC})_0$。

接下来，我们定义 Kodaira-Spencer 拉普拉斯算子 [KS60] 的扩张。对于 $\{a, b, c\} \in \{s, w\}$ 且 $a \le b \le c$，我们在 $L^2\Lambda^{p,q}$ 上定义以下自伴算子

$$\tilde{\Delta}_{A,ab} := \overline{\partial}^*\partial^*_{b'}\partial\overline{\partial}_b + \partial\overline{\partial}_s\overline{\partial}^*\partial^*_w + \overline{\partial}\partial^*_s\partial\overline{\partial}^*_w + \partial\overline{\partial}^*_s\overline{\partial}\partial^*_w + (\overline{\partial}\oplus\partial)_a(\overline{\partial}\oplus\partial)^*_{a'},$$
$$\tilde{\Delta}_{BC,bc} := \partial\overline{\partial}_b\overline{\partial}^*\partial^*_{b'} + \overline{\partial}^*\partial^*_s\partial\overline{\partial}_w + \partial^*\overline{\partial}_s\overline{\partial}^*\partial_w + \overline{\partial}^*\partial_s\partial^*\overline{\partial}_w + (\partial+\overline{\partial})^*_{c'}(\partial+\overline{\partial})_c,$$

这些算子是非负且自伴的，其定义域由反复应用定理 2.2 和 2.3 给出。它们是椭圆 Aeppli˜ ˜ 和 Bott-Chern 拉普拉斯算子 $(\Delta_A)_0$,$(\Delta_{BC})_0$ 的自伴扩张。

简单的计算以及命题 2.11 中*(3)* 的应用，使我们能够描述上述算子的核：

$$\ker\Delta_{A,ab} = \ker\Box_{A,ab} = \ker\tilde{\Delta}_{A,ab} = \ker\partial\overline{\partial}_b \cap \ker(\partial^* + \overline{\partial}^*)_{a'},$$
$$\ker\Delta_{BC,bc} = \ker\Box_{BC,bc} = \ker\tilde{\Delta}_{BC,bc} = \ker\overline{\partial}^*\partial^*_{b'} \cap \ker(\partial+\overline{\partial})_c.$$

我们还需要定义椭圆 Aeppli 和 Bott-Chern 拉普拉斯算子 $(\Delta_A)_0$, $(\Delta_{BC})_0$ 中仅四阶部分的自伴扩张。对于 $b \in \{s, w\}$，我们定义

$$\tilde{\Delta}_{A,b,4} := \overline{\partial}^*\partial^*_{b'}\partial\overline{\partial}_b + \partial\overline{\partial}_s\overline{\partial}^*\partial^*_w + \overline{\partial}\partial^*_s\partial\overline{\partial}^*_w + \partial\overline{\partial}^*_s\overline{\partial}\partial^*_w,$$
$$\tilde{\Delta}_{BC,b,4} := \partial\overline{\partial}_b\overline{\partial}^*\partial^*_{b'} + \overline{\partial}^*\partial^*_s\partial\overline{\partial}_w + \partial^*\overline{\partial}_s\overline{\partial}^*\partial_w + \overline{\partial}^*\partial_s\partial^*\overline{\partial}_w,$$

它们是非负且自伴的，其定义域通过反复应用定理 2.2 和 2.3 给出。

2.8. 完备的 K¨ahler 度量。给定一个完备厄米流形 (M, g)，众所周知，对于一阶算子 $\delta = d, \partial, \overline{\partial}, \partial\oplus\overline{\partial}$ 及其形式伴随算子 $\delta_s = \delta_w$。当 $\delta = \partial$ 时，证明可参见 AV65，引理 4]；其他情形类似。在本文余下部分，在完备性假设下，我们将根据当时哪种写法更方便，记作 δ_s 或 δ_w。此外，$(d+d^*)_0$,$(\partial+\partial^*)_0$,$(\partial+\partial^*)_0$ 作为算子 $A^\bullet$, $_0{}^\bullet \to A^\bullet$,$_0{}^\bullet$ 的所有正整数次幂都是本质自伴的 [（Che73，第 3.B 节）]。例如，$\Delta_{\partial,sw}$ 是 $(\Delta_\partial)_0 = (\partial+\partial^*)_0^2$ 的唯一自伴扩张，而 $(\Delta_{\partial,sw})^2$（可通过定理 2.2 定义）是 $(\Delta_\partial)_0^2 = (\partial+\partial^*)_0^4$ 的唯一自伴扩张。

给定一个 K¨ahler 流形 $(M,\ g)$，由 K¨ahler 恒等式 $\partial\partial^* + \partial^*\partial = 0$，我们有

$$\Delta_{\overline{\partial}} = \Delta_{\partial} = \frac{1}{2}\Delta_d$$

and

$$\tilde{\Delta}_A = \Delta_{\overline{\partial}}\Delta_{\overline{\partial}} + \partial\partial^* + \overline{\partial\partial}^*,$$
$$\tilde{\Delta}_{BC} = \Delta_{\overline{\partial}}\Delta_{\overline{\partial}} + \partial^*\partial + \overline{\partial}^*\overline{\partial}.$$

因此，给定一个完备的 K¨ahler 流形（$M,\ g$），可得

$$\Delta_{\overline{\partial},sw} = \Delta_{\partial,sw} = \frac{1}{2}\Delta_{d,sw}$$

此外，对于任意 $b \in \{s,\ w\}$

$$\tilde{\Delta}_{A,b,4} = (\Delta_{\overline{\partial},sw})^2 = \tilde{\Delta}_{BC,b,4} \tag{3}$$

根据 $(\Delta_{\partial})^{\ 2}_{\ 0}$ 的本质自伴性。 −

作为上述讨论的结果，我们回顾如下：在完备的 K¨ahler 流形上，上述定义的拉普拉斯算子的所有核在 L^2 中均相同。

定理 2.13 （[HP24，定理 8。4]）。 给定一个完备的 *K¨ahler* 流形 （$M,\ g$），对于所有 $b \in \{s,\ w\}$，以下等式在 $L^2\Lambda^{p,\ q}$ 以及 $L^2\Lambda^k_{\mathbb{C}}$ 上成立

$$\begin{aligned}\ker d_w \cap \ker d_w^* &= \ker \partial_w \cap \ker \partial_w^* = \ker \overline{\partial}_w \cap \ker \overline{\partial}_w^* \\ &= \ker \partial\overline{\partial}_b \cap \ker \partial_w^* \cap \ker \overline{\partial}_w^* \\ &= \ker \overline{\partial}^* \partial_b^* \cap \ker \partial_w + \ker \overline{\partial}_w.\end{aligned}$$

直接推论如下

推论 2.14 ([HP24，推论 8。7])。 设完备的 *K¨ahler* 流形 (M, g)

$$\ker \partial\overline{\partial}_s = \ker \partial\overline{\partial}_w, \quad \overline{\operatorname{im}\ \partial\overline{\partial}_s} = \overline{\operatorname{im}\ \partial\overline{\partial}_w},$$
$$\ker \overline{\partial}^*\partial_s^* = \ker \overline{\partial}^*\partial_w^*, \quad \overline{\operatorname{im}\ \overline{\partial}^*\partial_s^*} = \overline{\operatorname{im}\ \overline{\partial}^*\partial_w^*}.$$

本节最后，我们给出[HP24，推论 8.6]的另一种表述和证明。证明主要结果定理 4.1 时也将采用类似策略。

定理 2.15。 设完备的 *K¨ahler* 流形 (M, g)，在空间 $L^2\Lambda^k_{\mathbb{C}}$和 $L^2\Lambda^{p,\ q}$ 中，以下等式成立

$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{im}\ \partial\overline{\partial}_s} &= \overline{\operatorname{im}\ \partial_s} \cap \ker \overline{\partial}_w = \overline{\operatorname{im}\ \overline{\partial}_s} \cap \ker \partial_w \\ &= (\overline{\operatorname{im}\ \partial_s} + \overline{\operatorname{im}\ \overline{\partial}_s}) \cap \ker \partial_w \cap \ker \overline{\partial}_w \\ &= \overline{\operatorname{im}\ d_s} \cap \ker \partial_w \cap \ker \overline{\partial}_w.\end{aligned}$$

证明。 考虑完备性这一假设，将定理2.12后半部分中的所有正交分解与空间 ker ∂_w∩ker ∂_w 取交。利用命题 2.11、定理 2.13 和推论 2.14，我们得到

$$\begin{aligned}L^2\Lambda^k_{\mathbb{C}} \cap \ker \partial_w \cap \ker \overline{\partial}_w &= \ker \overline{\partial}_w \cap \ker \overline{\partial}_w^* \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{im}\ d_s} \cap \ker \partial_w \cap \ker \overline{\partial}_w, \\ L^2\Lambda^{p,q} \cap \ker \partial_w \cap \ker \overline{\partial}_w &= \ker \overline{\partial}_w \cap \ker \overline{\partial}_w^* \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{im}\ \partial_s} \cap \ker \overline{\partial}_w, \\ &= \ker \overline{\partial}_w \cap \ker \overline{\partial}_w^* \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{im}\ \overline{\partial}_s} \cap \ker \partial_w, \\ &= \ker \overline{\partial}_w \cap \ker \overline{\partial}_w^* \overset{\perp}{\oplus} (\overline{\operatorname{im}\ \partial_s} + \overline{\operatorname{im}\ \overline{\partial}_s}) \cap \ker \partial_w \cap \ker \overline{\partial}_w, \\ &= \ker \overline{\partial}_w \cap \ker \overline{\partial}_w^* \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{im}\ \partial\overline{\partial}_s}.\end{aligned}$$

最后四个分解给出了 $L^2\Lambda^{p,\,q}$ 中陈述的前两行。当待分解的空间为$L^2\Lambda^k_{\mathbb{C}} \cap \ker \partial_w \cap \ker \partial_w$时，同样的分解也恒成立：对 $p+q=k$ 取直和即可得到这一点。$L^2\Lambda^k_{\mathbb{C}}$ 中所有所声称的等式都可立即推出。$L^2\Lambda^{p,\,q}$ 中剩下的等式可以很容易地手工验证。□

3. Spectral gap of the elliptic Aeppli and Bott-Chern Laplacians

在 [HP24 的推论 8.12] 中，已证明：在完备 K¨ahler 流形上，若 Dolbeault 拉普拉斯算子$\Delta_{\partial,sw}$ 的唯一自伴扩张具有谱隙，则自然定义的非椭圆 Aeppli 与 Bott-Chern 拉普拉斯算子$\Delta_{A,ab}$, $\Delta_{BC,ab}$的自伴扩张（其中 $a,b\in\{s,w\}$ 满足 $a\le b$）也具有谱隙。本节证明，椭圆 Aeppli 与 Bott-Chern 拉普拉斯算子的自然自伴扩张同样具有谱隙。对于 Kodaira-Spencer 拉普拉斯算子和 Varouchas 拉普拉斯算子，这一结论均成立。

我们先证明 Kodaira-Spencer 拉普拉斯算子的谱隙。由于我们已知 $\delta_s=\delta_w$ 一阶算子 $\delta=\partial+\overline{\partial}$、$\partial\oplus\overline{\partial}$ 及其形式伴随算子的谱隙，只需证明 $\Delta_{A,sb}$、$\Delta_{BC,bw}$在 $b\in\{s,w\}$ 上的谱隙。Varouchas 拉普拉斯算子也有同样的结论。

定理 3.1. 设 (M,g) 是一个完备的 *K¨ahler* 流形。若 $\Delta_{\partial,sw}$ 在 $L^2\Lambda^{p,q}$ 上有谱隙，则对于 $b\in\{s,w\}$，算子 $\tilde{\Delta}_{A,sb}$ 和 $\tilde{\Delta}_{BC,bw}$ 在 $L^2\Lambda^{p,q}$ 上有谱隙。

证明。由引理 2.7，既然 $\Delta_{\partial,sw}$ 在 $L^2\Lambda^{p,q}$ 上有谱隙，则 $(\Delta_{\partial,sw})^2$ 在 $L^2\Lambda^{p,q}$ 上有谱隙。由方程 (3)可知，$\tilde{\Delta}_{A,b,4}$ 和 $\tilde{\Delta}_{BC,b,4}$在 $L^2\Lambda^{p,q}$ 上有谱隙。我们现在着重讨论 $\tilde{\Delta}_{BC,b,4}$，并将关于$\tilde{\Delta}_{A,sb}$ 的讨论留待后续。由引理 2.7，存在一个常数 $C>0$ 使得

$$\|\partial\overline{\partial}_{b'}\psi\|^2+\|\overline{\partial}^*\partial^*_w\psi\|^2+\|\partial^*\overline{\partial}_w\psi\|^2+\|\overline{\partial}^*\partial_w\psi\|^2=\langle\psi,\tilde{\Delta}_{BC,b,4}\psi\rangle\ge C\langle\psi,\psi\rangle$$

对所有 $\psi\in \mathrm{D}(\tilde{\Delta}_{BC,b,4})\cap(\ker\tilde{\Delta}_{BC,b,4})^\perp\cap L^2\Lambda^{p,q}$。现在根据定理 2.13，$\ker\tilde{\Delta}_{BC,bw}=\ker\Delta_{\partial,sw}$；根据方程 (3)，$\ker\Delta_{\partial,sw}=\ker\Delta^2_{\partial,sw}=\ker\tilde{\Delta}_{BC,b,4}$；根据定义，$\mathrm{D}(\tilde{\Delta}_{BC,bw})\subseteq\mathrm{D}(\tilde{\Delta}_{BC,b,4})$，因此对所有 $\psi\in\mathrm{D}(\tilde{\Delta}_{BC,bw})\cap(\ker\tilde{\Delta}_{BC,bw})^\perp\cap L^2\Lambda^{p,q}$

$$\begin{aligned}\langle\psi,\tilde{\Delta}_{BC,bw}\psi\rangle&=\|\partial\overline{\partial}_{b'}\psi\|^2+\|\overline{\partial}^*\partial^*_w\psi\|^2+\|\partial^*\overline{\partial}_w\psi\|^2+\|\overline{\partial}^*\partial_w\psi\|^2+\|\partial_w\psi\|^2+\|\overline{\partial}_w\psi\|^2\\&\ge\|\partial\overline{\partial}_{b'}\psi\|^2+\|\overline{\partial}^*\partial^*_w\psi\|^2+\|\partial^*\overline{\partial}_w\psi\|^2+\|\overline{\partial}^*\partial_w\psi\|^2\ge C\langle\psi,\psi\rangle.\end{aligned}$$

因此，再次根据引理 2.7，$\tilde{\Delta}_{BC,\,bw}$ 在 $L^2\Lambda^{p,\,q}$中有谱隙。类似的论证也适用于$\tilde{\Delta}_{A,\,sb}$。□

现在我们使用定理 3.1，为 [HP24，定理 8.10] 给出另一种证明。

定理 3.2。设(M,g) 是一个完备的 *K¨ahler* 流形。若 $\Delta_{\partial,sw}$ 在 $L^2\Lambda^{p,q}$中具有谱隙，则对于 $b\in\{s,w\}$ 可得$\mathrm{im}\ \partial\overline{\partial}_b$ 和$\mathrm{im}\ \partial^*\partial^*_b$ 在$L^2\Lambda^{p,q}$中是闭的。

证明。根据定理 3.1，$\tilde{\Delta}_{BC,\,bw}$ 在 $L^2\Lambda^{p,\,q}$中有谱隙。由引理 2.7，这等价于$\Delta_{BC,\,bw}$的像的闭包。因此，我们可以正交分解

$$\begin{aligned}L^2\Lambda^{p,q}&=\ker\tilde{\Delta}_{BC,bw}\overset{\perp}{\oplus}\mathrm{im}\ \tilde{\Delta}_{BC,bw}\\&\subseteq\ker\tilde{\Delta}_{BC,bw}\overset{\perp}{\oplus}\left(\mathrm{im}\ \partial\overline{\partial}_b+\mathrm{im}\ \overline{\partial}^*\partial^*_s+\mathrm{im}\ \partial^*\overline{\partial}_s+\mathrm{im}\ \overline{\partial}^*\partial_s+\mathrm{im}\,(\partial^*\oplus\overline{\partial}^*)_s\right)\\&\subseteq\ker\tilde{\Delta}_{BC,bw}\overset{\perp}{\oplus}\mathrm{im}\ \partial\overline{\partial}_b\overset{\perp}{\oplus}(\mathrm{im}\ \partial^*_s+\mathrm{im}\ \overline{\partial}^*_s)\subseteq L^2\Lambda^{p,q}.\end{aligned}$$

~第一个包含关系由$\Delta_{BC,\,bw}$的定义得出，而第二个包含关系则由命题 2.11 的*(2)*以及以下事实得到

$$\operatorname{im}(\partial^* \oplus \overline{\partial}^*)_s \subseteq \overline{\operatorname{im}(\partial^* \oplus \overline{\partial}^*)_s} = \overline{\operatorname{im}\,\partial_s^*} + \overline{\operatorname{im}\,\overline{\partial}_s^*} = \operatorname{im}\,\partial_s^* + \operatorname{im}\,\overline{\partial}_s^*,$$

其中，第一个等式为方程 (2)，第二个等式则由引理 2.8 和 2.6 得出，并用到了$\Delta_{\partial,\,sw} = \Delta_{\partial,\,sw}$ 在 $L^2\Lambda^{p,\,q}$上的谱隙。上述分解的正交性很容易验证。由最后一行中 $L^2\Lambda^{p,\,q}$ 的分解的正交性，可得 $\operatorname{im}\partial\partial_b$ 的闭包。类似地，利用$\overline{\Delta}_{A,\,sb}$ 的谱隙，可得 $\operatorname{im}\,\partial^*\partial_b^*$ 在 $L^2\Lambda^{p,\,q}$中的闭包。□

定理 3.2、推论 2.14 和 [Bei16，命题 1.6]的直接推论如下。

推论 3.3 ([HP24，推论 8。13])。 设(M, g) 为一个完备的 *K¨ahler* 流形。若$\Delta_{\partial,\,sw}$ 在 $L^2\Lambda^{p,\,q}$上存在谱隙，则在 $L^2\Lambda^{p,\,q}$

$$\partial\overline{\partial}_s = \partial\overline{\partial}_w, \qquad\qquad \overline{\partial}^*\partial_s^* = \overline{\partial}^*\partial_w^*.$$

注 3.4。 我们稍作停顿，对推论 *3.3* 提出几点观察。据作者所知，现有用于证明微分算子的最小与最大闭扩张相等的所有判据，要么适用于一阶算子（例如，见 [AV65，引理 4] 或 [Che73，第 3.B 节]），要么适用于椭圆算子（例如，在有界几何流形上，见 [Che73，第 3.B 节]，或 [Shu90，推论 1。1]）。

因此，推论 *3.3* 与 [HP24，定理 7。6]——该定理给出了在有界几何流形上满足 $\partial\partial_s = \partial\partial_w$ 的判据——构成了文献中的一个例外，因为 $\partial\partial$ 是一个二阶算子且不是椭圆算子。

最后，鉴于一致曲率界，我们有理由认为，在有界几何流形上应有 $\partial\partial_s = \partial\partial_w$ 成立。另一方面，推论 *3.3* 对复结构提出了较强的假设，却不要求有界几何。

现在我们可以证明 Varouchas 拉普拉斯算子也存在谱隙。根据推论 3.3，只需证明 $\Box_{A,sw}$ and$\Box_{BC,sw}$ 存在谱隙。

定理 *3.5.* 设 (M, g) 是一个完备 *K¨ahler* 流形。若 $\Delta_{\partial,sw}$ 在 $L^2\Lambda^{p,q}$, $L^2\Lambda^{p-1,q}$ 和 $L^2\Lambda^{p,q-1}$中存在谱隙，则$\Box_{A,sw}$ 在 $L^2\Lambda^{p,q}$中存在谱隙。若 $\Delta_{\partial,sw}$ 在 $L^2\Lambda^{p,q}$, $L^2\Lambda^{p+1,q}$ 和 $L^2\Lambda^{p,q+1}$中存在谱隙，则 $\Box_{BC,sw}$ 在 $L^2\Lambda^{p,q}$中存在谱隙。

证明. 假设 $\Delta_{\partial,sw}$ 在 $L^2\Lambda^{p,q}$, $L^2\Lambda^{p+1,q}$ 和 $L^2\Lambda^{p,q+1}$中存在谱隙。由定理 3.2，$\operatorname{im}\,\partial\partial_s \subseteq L^2\Lambda^{p,q}$ 是闭的；由 [HP24, 定理 8.8] 和引理 2.6，$\operatorname{im}\,(\partial + \overline{\partial})_w \subseteq L^2\Lambda^{p+1,\,q} \oplus L^2\Lambda^{p,\,q+1}$ 是闭的。因此，根据引理 2.8，取 $D_{i-1} := \partial\partial_s$ 和 $D_i := (\partial + \overline{\partial})_w$，非椭圆拉普拉斯算子 $\Delta_{BC,sw}$ 存在谱隙（参见 [HP24, 推论 8.12]）。由引理 2.7，其平方 $\Delta^2_{BC,sw}$ 也存在谱隙。现在我们再次应用引理 2.8，但这次将希尔伯特复形的微分选为 $D_{i-1} := \partial\partial_s\partial^*\partial_w^*$和 $D_i := (\partial^* \oplus \partial^*)_s(\partial \mp \overline{\partial})_w$。由于

$$\Delta^2_{BC,sw} = (\partial\overline{\partial}_s\overline{\partial}^*\partial_w^*)^2 + ((\partial^* \oplus \overline{\partial}^*)_s(\partial + \overline{\partial})_w)^2,$$

由此可知，$\operatorname{im}\,\partial\partial_s\overline{\partial}^*\partial_w^*$ 和 $\operatorname{im}\,(\partial^*\oplus\partial^*)_s(\partial+\overline{\partial})_w$ 是闭的。我们再次应用引理 2.8，其中 $D_{i-1} := \partial\partial_s$ 和 $D_i := (\partial^* \oplus \partial^*)_s(\partial + \overline{\partial})_w$，最终得到 $\Delta_{\partial,\,sw}$ 的谱隙。

如果 $\Delta_{\partial,\,sw}$在 $L^2\Lambda^{p,\,q}$、 $L^2\Lambda^{p-1,\,q}$和 $L^2\Lambda^{p,\,q-1}$中具有谱隙，那么 $\operatorname{im}(\partial \oplus \overline{\partial})_s \subseteq L^2\Lambda^{p,\,q}$ 由 [HP24，定理 8.8]，可知是闭的，而 $\operatorname{im}\partial\partial_w \subseteq L^2\Lambda^{p+1,\,q+1}$ 由

定理 3.2 和引理 2.6 可知是闭的。接着，$\Box_{A,\,sw}$ 在 $L^2\Lambda^{p,\,q}$ 中的谱隙可类似于 Bott-Chern 情形得到。□

4. L^2-$\partial\overline{\partial}$-Lemma

椭圆 Aeppli 和 Bott-Chern 拉普拉斯算子的自伴扩张具有谱隙，由此可得一个适用于光滑 L^2-形式的 $\partial\partial$ 引理，从而改进了定理 2.15。

定理 4.1。设(M,g) 是一个完备的 *K¨ahler* 流形，使得 $\Delta_{\partial,sw}$ 在 $L^2\Lambda^k_{\mathbb{C}}$中具有谱隙。给定一个满足 $\partial\alpha=\partial\overline{\alpha}=0$ 的光滑 L^2-形式 $\alpha\in L^2A^k_{\mathbb{C}}$，则以下条件等价：

(1) $\alpha=\partial\overline{\partial}\beta$，对于 $\beta\in L^2A^{k-2}_{\mathbb{C}}$；*(2)* $\alpha=\partial\gamma$，对于 $\gamma\in L^2A^{k-1}_{\mathbb{C}}$；*(3)* $\alpha=\partial\zeta$，对于 $\zeta\in L^2A^{k-1}_{\mathbb{C}}$；*(4)* $\alpha=\partial\eta+\partial\theta$，对于 $\eta,\theta\in L^2A^{k-1}_{\mathbb{C}}$；*(5)* $\alpha=d\lambda$，对于 $\lambda\in L^2A^{k-1}_{\mathbb{C}}$。

证明。由于 $\Delta_{\partial,sw}=\Delta_{\overline{\partial},sw}=\frac{1}{2}\Delta_{d,sw}$ 在 $L^2\Lambda^k_{\mathbb{C}}$ 中存在谱隙，由定理 3.1 可知，$\tilde{\Delta}_{BC,sw}$ 和 $\tilde{\Delta}_{A,sw}$ 在 $L^2\Lambda^k_{\mathbb{C}}$ 中也存在谱隙。我们定义正交投影

$$P_{BC}:L^2\Lambda^k_{\mathbb{C}}\to\ker\tilde{\Delta}_{BC,sw}$$

以及格林算子

$$G_{BC}:\mathrm{im}\ \tilde{\Delta}_{BC,sw}\to\mathcal{D}(\tilde{\Delta}_{BC,sw})$$
$$\tilde{\Delta}_{BC,sw}\beta\mapsto\beta.$$

由于 $\mathrm{im}\Delta_{BC,sw}$ 是闭的，并回顾正交分解

$$L^2\Lambda^k_{\mathbb{C}}=\ker\tilde{\Delta}_{BC,sw}\oplus\mathrm{im}\ \tilde{\Delta}_{BC,sw},$$

我们只需令$G_{BC}=0$ 在 $\ker\tilde{\Delta}_{BC,sw}$上取值，即可将格林算子扩展到整个空间 $L^2\Lambda^k_{\mathbb{C}}$。任意给定形式 $\alpha\in L^2\Lambda^k_{\mathbb{C}}$，它可分解为

$$\alpha=P_{BC}\alpha+(id-P_{BC})\alpha,$$

其中 $(id-P_{BC})\alpha=\Delta_{BC,sw}\beta$。现在 $G_{BC}\alpha=\beta$，因此

$$\alpha=P_{BC}\alpha+\tilde{\Delta}_{BC,sw}G_{BC}\alpha.$$

特别地，若 α 光滑，因而 $\alpha\in L^2A^k_{\mathbb{C}}$，则由椭圆正则性（参见例如，[HP24，定理 2.1]）可知 $G_{BC}\alpha=\beta\in L^2A^k_{\mathbb{C}}\cap\mathrm{D}(\tilde{\Delta}_{BC,sw})$ 也光滑。特别地，由命题 2.11 的*(5)* 可得

$$\tilde{\Delta}_{BC,sw}G_{BC}\alpha=\tilde{\Delta}_{BC}G_{BC}\alpha.$$

对于 $\delta\in\{A,\partial,\overline{\partial},d\}$，类似算子 P_δ和 G_δ也同样成立。因此，若$\alpha\in L^2A^k_{\mathbb{C}}$，对于 $\delta\in\{A,BC\}$ 和 $\epsilon\in\{\partial,\overline{\partial},d\}$，我们可推出分解

$$\alpha=P_\delta\alpha+\tilde{\Delta}_\delta G_\delta\alpha=P_\epsilon\alpha+\Delta_\epsilon G_\epsilon\alpha,$$

其中光滑形式为 $G_\delta\alpha,G_\epsilon\alpha\in L^2A^k_{\mathbb{C}}$。回想定理 2.13，$\Delta_{\partial,sw}=\Delta_{\overline{\partial},sw}=\frac{1}{2}\Delta_{d,sw}$, $\tilde{\Delta}_{BC,sw}$和$\tilde{\Delta}_{A,sw}$ 的核相同，因此 $P_{BC}\alpha=0$ 当且仅当对所有 $\delta\in\{A,\partial,\overline{\partial},d\}$，$P_\delta=0$ 均成立。

现在假设 $\alpha\in L^2A^k_{\mathbb{C}}$ 满足 $\partial\alpha=\overline{\partial}\alpha=0$。我们知道 $\ker\partial_w\cap\ker\overline{\partial}_w\subseteq L^2A^k_{\mathbb{C}}$是 L^2-正交于

$$\mathrm{im}\ d^*_s,\qquad \mathrm{im}\ \partial^*_s,\qquad \mathrm{im}\ \overline{\partial}^*_s,\qquad \mathrm{im}\,(\partial^*\oplus\overline{\partial}^*)_s,\qquad \mathrm{im}\ \partial\overline{\partial}^*_s,$$

正如定理 2.15 的证明中那样。得益于此以及命题 2.11 的*(5)*，我们得到

$$\begin{aligned}
\alpha = \tilde{\Delta}_A G_A \alpha \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha = (\partial\partial^* + \cancel{\partial\partial}_*)G_A\alpha, \\
\alpha = \tilde{\Delta}_{BC} G_{BC} \alpha \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha = \partial\overline{\partial}\overline{\partial}^*\partial^* G_{BC}\alpha, \\
\alpha = \Delta_\partial G_\partial \alpha \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha = \partial\partial^* G_\partial \alpha, \\
\alpha = \Delta_{\overline{\partial}} G_{\overline{\partial}} \alpha \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha = \overline{\partial}\overline{\partial}^* G_{\overline{\partial}}\alpha, \\
\alpha = \Delta_d G_d \alpha \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha = dd^* G_d \alpha.
\end{aligned}$$

因此，只需令 $\beta := \partial^*\partial^* G_{BC}\alpha$, $\gamma := \partial^* G_\partial \alpha$, $\zeta := \partial^* G_{\overline{\partial}}\alpha$, $\eta := \overline{\partial}^* G_A \alpha$, $\theta := \partial^* G_A \alpha$, $\lambda := \overline{d}^* G_d \alpha$，它们属于 $L^2\Lambda^\bullet_{\mathbb{C}}$，因为每个格林算子的像都是相应拉普拉斯算子的定义域。证明至此完成。□

注 4.2。若在完备的 ***K¨ahler*** 流形 (M, g)上，$\Delta_{\partial,sw}$ 仅在 $L^2\Lambda^{p,q}$中具有谱隙，那么只要 $\alpha \in L^2A^{p,q}$ 且$k = p + q$，条件 ***(1)-(5)*** 就等价。对于任意由空间 $L^2\Lambda^{p,q}$ 构成且满足 $k = p + q$ 的直和，结论也成立。

注4.3。假设除定理 ***4.1*** 的条件外，流形 (M, g) 还具有有界几何，且椭圆型拉普拉斯算子 $\Delta_\partial = \Delta_{\overline{\partial}} = \frac{1}{2}\Delta_d$，$\Delta_{BC}$ 和 Δ_A 是$\mathcal{C}^\infty$-有界且一致椭圆的，其对应的微分形式丛具有有界几何（参见 [Shu90]）。此类流形的例子包括 ***K¨ahler*** 双曲流形的万有覆盖 [Gro91]。于是，根据 [Shu90, 命题 1。1]，上述算子的定义域与索伯列夫空间相同

$$\mathcal{D}(\Delta_{\overline{\partial},sw}) = \mathcal{D}(\Delta_{\partial,sw}) = \mathcal{D}(\Delta_{d,sw}) = W_2^2(M, \Lambda^\bullet_{\mathbb{C}})$$

and

$$\mathcal{D}(\tilde{\Delta}_{A,sw}) = \mathcal{D}(\tilde{\Delta}_{BC,sw}) = W_2^4(M, \Lambda^\bullet_{\mathbb{C}}),$$

索伯列夫空间的记号与 [Shu90] 中相同。因此，由于每个格林算子的像都是上述某个定义域，因而其像是一个索伯列夫空间，在定理 ***4.1*** 的陈述中，我们可以选取 $\beta \in W_2^2(M, \Lambda^{k-2}_{\mathbb{C}})$和 $\gamma, \zeta, \eta, \theta, \lambda \in W_2^1(M, \Lambda^{k-1}_{\mathbb{C}})$。特别地，$\partial\beta, \overline{\partial}\beta \in W_2^1(M, \Lambda^{k-1}_{\mathbb{C}}) \subseteq L^2\Lambda^{k-1}_{\mathbb{C}}$。

References

[AT13] D. Angella，A. Tomassini，关于 $\partial\overline{\partial}$ *Invent. Math.* -引 **192** 2013 71 81
理与 Bott-Chern上同调，（），-。[AV65] A. Andreotti，E. Vesentini，复流形上 Laplace-Beltrami方程的 Carleman估计，*Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **25** (1965)，81–130。[Bal06] W. Ballmann，*Lectures on Kähler manifolds*，数学与物理学 ESI 讲义，欧洲数学会（EMS），苏黎世，2006。[Bei16] F. Bei，关于不完备黎曼流形上的 L^2-Poincar´e 对偶：一种具有应用的通用构造，*J. Topol. Anal.* **8** (2016)，第1期，151–186。[BDET24] F. Bei，S. Diverio，P. Eyssidieux，S. Trapani，弱 K¨ahler 双曲流形与 Green–Griffiths–Lang猜想，*J. Reine Angew. Math.* **807** (2024)，257–297。[BP25] F. Bei，R. Piovani，L^2 Fr¨olicher 不等式，2025，arXiv:2507.19385。[BL92] J. Br¨uning，M. Lesch，希尔伯特复形，*J. Funct. Anal.* **108** (1992)，第1期，88–132。[CY18] B.-L. Chen，X. Yang，与负曲率黎曼流形同伦等价的紧致 K¨ahler 流形，*Math. Ann.* **370** (2018)，第3-4期，1477–1489。[Che73] P.R. Chernoff，双曲型方程生成元的幂的本质自伴性，*J. Funct. Anal.* **12** (1973)，401–414。[DGMS75] P. Deligne，P. Griffiths，J. Morgan，D. Sullivan，K¨ahler 流形的实同伦论，*Invent. Math.* **29** (1975)，第3期，245–274。[Don94] H. Donnelly，完备 K¨ahler 度量下伪凸域的上同调，*Michigan Math. J.* **41** (1994)，第3期，433–442。[Far75] W.G. Faris，*Self-adjoint operators*，数学讲义，第433卷，Springer-Verlag，柏林-纽约，1975，vii+115 页。

[Gri09] A. Grigor'yan, *Heat kernel and analysis on manifolds*, AMS/IP 高等数学研究第47卷。美国罗德岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS）；马萨诸塞州萨默维尔：国际出版社（ISBN 978-0-8218-4935-4/hbk）。xvii+482 页。（2009）。[Gro91] M. Gromov, K¨ahler 双曲性与 L_2-Hodge 理论, *J. Differential Geom.* **33**(1991), 263-292。[HP24] T. Holt, R. Piovani, L^2 Aeppli-Bott-Chern 希尔伯特复形, *J. Funct. Anal.* **287** (2024), 第9期, 文章编号110596, 共59页。[Hua25] C. Huang, 完备 d-有界 K¨ahler 流形上全纯典范形式的延拓, *Front. Math.* **20** (2025), 第5期, 1179–1194。[KO07] C. Kai, T. Ohsawa, 关于有界齐性域伯格曼度量的一则注记, *Nagoya Math. J.* **186** (2007), 157–163。[KS60] K. Kodaira, D.C. Spencer, 关于复解析结构的变形, III：复结构的稳定性定理, *Ann. of Math.* **71** (1960), 43-76。[Koh63] J.J. Kohn, 强伪凸流形上的调和积分。I, *Ann. Math.* (2) 78 (1963), 112-148。[PT19] R. Piovani, A. Tomassini, 斯坦流形上的 Bott–Chern 调和形式, *Proc. Amer.*, （）, -。*Math. Soc.* **147** 2019 1551 1564
[RS75] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness.* 1975 , 学术出版社, 纽约-伦敦, 。[RS80] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional Analysis.*, 第二版, 学术出版社, 纽约, 1972。[Sch07] M. Schweitzer, 关于 Bott-Chern 上同调, preprint 0709 3528 1, arXiv: 。2007
v。[Shu90] M.A. Shubin, 椭圆算子的弱布洛赫性质与权估计, *Sémin.Équations Dériv. Partielles* 1989-1990 (1990), 第5期, 共30页。[Var86] J. Varouchas, 紧致复解析流形某一类的上同调性质, P. Lelong、P. Dolbeault、H. Skoda 主编的分析研讨班, 1983/1984 年, 233-243, *Lecture Notes in Math.*, 1198, Springer, 柏林, 1986。

Dipartimento di Matematica "G. Peano", Università degli Studi di Torino,
Via CarloAlberto 10, 10123 Torino, Italy*Email address*: riccardo.piovani@unito.it