arXiv:2602.08850v1 [math.DG] 9 Feb 2026

自由边界平均曲率流的古代解

THEODORA BOURNI 和 GIADA FRANZ

Abstract. 我们为具有凸边界的流形中的自由边界平均曲率流古老解建立了刚性结果。具体而言，我们证明，任何莫尔斯指标为 I 的自由边界极小超曲面都存在一个以其为起点的 I 参数古老解族。此外，在所有反向指数收敛至该极小超曲面的古老解中，这些解穷尽了全部可能性。我们还围绕一个不稳定自由边界极小超曲面构造了光滑的自由边界平均凸叶状结构，从而能够更详细地描述反向指数收敛至该极小超曲面的平均凸古老解。

1. Introduction

莫尔斯理论通过分析定义在空间上的可微函数，为研究空间的拓扑提供了强有力的框架。值得注意的是，其许多核心思想可以推广到无限维情形，尽管在这些情形中的应用需要更加精细的分析。该方向的奠基性贡献包括 [Sma61,Pal63,Cha93,AM01]。近来，莫尔斯理论方法在几何变分问题的研究中发挥了重要作用，尤其是对固定环境流形中子流形的面积泛函的研究；例如参见 [Tro77,Pit81,Whi91,MN14,CG25].

本文聚焦于限制在光滑子流形上的面积泛函的莫尔斯理论。该泛函的梯度流就是平均曲率流，在解析上可描述为黎曼环境流形 (M, g) 中由 Σ_t 构成的一参数子流形族，其演化满足

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \vec{H}(X,t)\,, \quad X \in \Sigma_t\,,$$

其中，$\vec{H}(X,t)$ 表示 Σ_t 在 X处的平均曲率向量。这种流在物理学中自然地作为表面张力驱动的演化过程模型出现，例如金属退火过程中晶界的演化 [Mul56]。从数学角度来看，Brakke 最先运用几何测度论对平均曲率流进行了系统研究 [Bra78] ，随后 Huisken [Hui84] 通过较为经典的偏微分方程方法展开研究。此后，该领域发展成为一个十分活跃的研究方向。

本文关注存在边界时超曲面的平均曲率流情形。平均曲率流自然的诺伊曼边值问题，即自由边界问题，规定演化中的超曲面边界受限于一固定的障碍超曲面上运动，并与其正交相交。Huisken[Hui89] 在非参数化情形下提出了这一问题，随后 Stahl [Sta96a、Sta96b], 对其作了进一步发展，之后还有[Fre10、Whe14、Ede16、HL23、LZ23]。

在自由边界平均曲率流中，自由边界极小超曲面发挥着基础性作用，它们是该流方程的平稳解。近年来，由于出现了一些令人瞩目的新存在性结果，例如 [FS16、FS26、KKMS24]，这些对象受到了广泛关注。近期发现的大多数例子都是面积泛函的不稳定临界点。因此，类比经典莫尔斯理论，人们预期会存在从这些自由边界极小超曲面出发的流线。更确切地说，人们预期存在平均曲率流的古代解，即过去所有时刻都存在、且在反向演化时收敛到不稳定自由边界极小超曲面的解。

莫尔斯理论考量也表明，向后收敛到 Σ 的古代解空间的维数等于 Σ的莫尔斯指标，也就是负方向的维数

，其中这些负方向是面积泛函在 Σ处的二阶负方向。我们的第一个主要结果使这一启发式说法变得精确，非正式地概括如下。

定理 A（参见 定理 4.4 和 5.4， 推论 5.6）。 设 Σ 是某个黎曼流形中的自由边界极小超曲面，其莫尔斯指标为 I，该流形为 $(M,\ g)$，且具有凸边界。则存在一个 I参数族的古老自由边界平均曲率流，它们从 Σ发出。此外，任何衰减到 Σ足够快的古老解都属于这一族。

尽管根据经典莫尔斯理论可以推测会出现这种行为，但自由边界平均曲率流古代解的分析绝非易事，而且由于边界的存在与问题的无限维性质相互作用，以及临界点可能出现退化，这一领域长期以来鲜有探索。除近期针对一维凸解以及高维高度对称情形的分类结果外 [BL23，BL25，BBC 25],据我们所知，古代解尚未得到系统研究。本研究构成了首个针对自由边界平均曲率流一般高维古代解的分类理论。

在无边界情形下，Choi–Mantoulidis 已获得类似的分类结果[CM22] ，并由 Choi–Huang–Lee 推广到了非紧致情形 [CHL25]。此前已知，在各种情形下，非线性抛物型偏微分方程也有这类结果（例如参见 [Lun95]）。我们的结果受到这些论文的启发，尤其是 [CM22]。然而，与无边界情形相比，自由边界的存在带来了显著的分析难题，尤其是因为边界条件不会产生线性边界项。相应的抛物型偏微分方程变得复杂得多，相关的稳定性算子需要进行细致得多的分析，而且由于内部几何与边界行为之间的相互作用，线性化过程也复杂得多。

我们还要指出，沿自由边界极小超曲面的第一特征函数（或任意特征函数）对其进行变形，并不能保持边界处的正交条件。“正确的”变形远非显而易见，需要更细致的处理。我们借助隐函数定理实现这一点，并证明确实可以在保持边界处正交的同时进行一阶变形。事实上，我们构造了围绕不稳定自由边界极小超曲面的光滑自由边界平均凸叶状分解。随后，我们利用这一叶状分解，以另一种方式构造平均凸古代解，并给出更为详尽的几何描述。

定理 B（参见定理 6.7和推论 5.6）。 设 Σ 是黎曼流形（$M,\ g$）中的一条不稳定自由边界极小超曲面，且该流形具有凸边界。则存在一个从 Σ出发的平均凸古老解，它以由第一特征值决定的速率指数级快速收敛。此外，若 Σ 非退化，则在收敛到 Σ 的 $C^{1,\ \alpha}$-拓扑的平均凸古老解中，除时间平移外，该解是唯一的。

1.1. **更多文献**。 如上所述，从（自由边界）极小超曲面的莫尔斯理论视角出发时，自然会出现古老解；它们也为变分问题提供指引（例如参见 [CL24，第 1 节。1] 其中讨论了与极大极小理论相关的问题）。从历史上看，最初研究古老解是因为它们在奇点形成分析中发挥着核心作用 [Ham94], ；此外，由于其强刚性和对称性，它们本身也具有内在的几何意义（例如参见 [BLT22] 及其中的参考文献）。

在无边界情形下，凸情形中的分类结果已相当丰富。在一致凸性、有界偏心率、I 型曲率衰减或有界等周比等假设下，唯一的紧致凸古老解是收缩球面 [HS15]；另见[DHS10、HH16、Lan17]。当环境空间为球面时，唯一的测地凸古老解是收缩半球面 [BL16、HS15]。

然而，在欧几里得空间中，收缩球面并不是唯一的紧致凸古老解。存在一些解族，它们在 $t \to 0$ 时收缩为圆点，但在 $t \to -\infty$ [ADS19、HH16、Whi03] 时则变得越来越偏心。这些解穷尽了所有非塌缩的紧致凸古老解，或者等价地说，穷尽了整体的 [ADS20、BLL23、BN24]。在塌缩情形下，已知一个

唯一的旋转对称例子 [BLT21], ，而在不作对称性假设的情况下，仅在二维中就已经出现了丰富的例子族 [BLT22]。

在凸情形之外，分类会困难得多。在 $t \to -\infty$ 时满足强衰减假设的情况下，古老解向后收敛到极小超曲面，这从另一个角度引出了对从极小超曲面出发的古老解进行分类的问题。

1.2. **未来方向**。 对于定理 A 的唯一性陈述（参见定理 5.4），我们要求古老解可以表示为自由边界极小超曲面上的图。此外，我们假设该图具有较小的抛物型 $C^{1,\alpha}$-范数，并且在 C^0-范数下次线性收敛到零。当底层极小超曲面非退化时，可以去掉次线性衰减假设。我们猜想，在平均凸情形下也可以去掉次线性衰减假设；也就是说，对任意给定的不稳定（自由边界）极小超曲面，都存在一个在 $C^{1,\alpha}$ 下收敛到它的唯一古老解。

一个自然的进一步问题是，在固定的环境流形中，不假设解在向后演化时收敛到极小超曲面，如何对古老解进行分类。在这一背景下，一个有趣的问题是：能否构造出向后极限为奇异对象的解，尤其是在平均凸情形下。同样，也可以研究具有无界面积的古老解是否可能是平均凸的。在一种极端情形下，构造出能够“填满”环境流形的古老解将十分有趣。

1.3. **论文结构**。 在第 2 节中，我们回顾基本定义并设定记号。在第 3 节中，我们为自由边界极小超曲面上的图推导若干椭圆估计和抛物估计。在第 4 节中，我们通过谨慎应用不动点定理，证明存在一个以自由边界极小超曲面为起点的 I参数古老解族。在第 5 节中，我们利用 Merle–Zaag 的常微分方程引理证明所构造的古老解族的唯一性 [MZ98], ，该引理经 [CM22]改编。最后，在第 6 节中，我们利用通过隐函数定理构造的屏障，给出一个不同且更具几何意味的证明，来证明平均凸古老解的存在性。

致谢。我们感谢 Kyeongsu Choi 和 Christos Mantoulidis，感谢他们澄清了其论文 [CM22], 中的若干问题，尤其是指出了在引理 3.9的证明中使用“吸收引理”以及 Schauder 估计。我们还感谢 Lucas Ambrozio 指引我们参阅他的论文 [Amb15]。

T. B. 获得了美国国家科学基金会项目 DMS-2405007 的资助，G. F. 获得了美国国家科学基金会项目 DMS- 2405361 的资助。此外，本研究的部分工作是在作者驻留于西蒙斯·劳弗数学科学研究所（原 MSRI）期间完成的，驻留时间为 2024 年秋季学期，资助来自美国国家科学基金会项目 DMS-1928930。

2. Definitions and notation

本文考虑一个带边界的紧致黎曼流形 $(M^{m+1}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 。我们将 η 记为 ∂M的外向单位余法向量，使得 $\partial M \subset M$的第二基本形式由 $\mathrm{II}^{\partial M}(X,Y) = -\langle \nabla_X Y, \eta\rangle$给出。我们假设 M具有凸边界，即 $\mathrm{II}^{\partial M} > 0$。注意，例如当 M 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的单位球（因而 ∂M 是单位球面）时，$\mathrm{II}^{\partial M} > 0$ 。

我们还考虑一个适当嵌入、光滑、双侧的超曲面 $\Sigma^m \subset M$，并假设它在 M 中具有自由边界，即 Σ 与 ∂M 正交相交（或者等价地， η 与 $\partial\Sigma$ 的外向单位余法向量场重合，见图 1 ）。我们用 ν 表示 Σ 上选取的一个全局单位法向量场，用 $A(X,Y) = (\nabla_X Y)^\perp$ 表示 $\Sigma \subset M$ 的第二基本形式，并用 $\vec{\ }$ 表示 $H_\Sigma = \operatorname{tr} A$ ，即其平均曲率。注意， H_Σ 指向面积“减小”的方向。此外，令 $H_\Sigma = -\langle \vec{H}_\Sigma, \nu\rangle$ 表示相对于所选单位法向量 ν 的标量平均曲率。回顾一下，若 Σ 具有自由边界且 $H_\Sigma = 0$，则它是自由边界极小曲面。

2.1. **雅可比算子**。我们将 Q 定义为与雅可比算子 $J_\Sigma = \Delta + q$ 相关联的对称双线性型，其中采用记号 $q = \mathrm{Ric}^M(\nu, \nu) + |A|^2$，即[(1)]

$$Q(u,v) = \int_\Sigma (\nabla u \cdot \nabla v - quv) - \int_{\partial\Sigma} \mathrm{I\!I}^{\partial M}(\nu,\nu)uv\,, \quad \forall u, v \in W^{1,2}(\Sigma)\,. \tag{2.1}$$

回顾一下，若 Σ 是一个自由边界极小超曲面，则 $Q(u,u)$ 与由向量场 $u\nu$ 生成的变分所对应的面积泛函的二次变分一致。

我们将 $\lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots \to +\infty$ 记为椭圆问题的离散谱

$$\begin{cases} -J_\Sigma \varphi = \lambda \varphi & \text{on } \Sigma \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \mathrm{I\!I}^{\partial M}(\nu,\nu)\varphi & \text{on } \partial\Sigma\,, \end{cases} \tag{2.2}$$

选取相应的特征函数 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$，它们构成 $L^2(\Sigma)$ 的正交归一基。Σ 的指标 $\mathrm{ind}(\Sigma)$ 是 Σ 上的雅可比算子的负特征值（按重数计）个数，而 Σ 的零度 $\mathrm{nul}(\Sigma)$ 是零作为雅可比算子特征值的重数。

注意，雅可比算子的特征函数 φ_k 满足

$$Q(\varphi_k, \varphi_k) = \int_\Sigma -J_\Sigma \varphi_k \varphi_k + \int_{\partial\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta} - \mathrm{I\!I}^{\partial M}(\nu,\nu)\varphi_k \right) \varphi_k = \lambda_k\,.$$

此外，让我们回顾第一特征值 λ_1 的变分刻画：

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W^{1,2}(\Sigma)} \frac{\int_\Sigma (|\nabla u|^2 - qu^2) - \int_{\partial\Sigma} \mathrm{I\!I}^{\partial M}(\nu,\nu)u^2}{\int_\Sigma u^2} = \inf_{u \in W^{1,2}(\Sigma)} \frac{Q(u,u)}{\int_\Sigma u^2}\,. \tag{2.3}$$

2.2. **加权范数**。我们使用以下范数记号。对于任意函数

$$f\colon \Sigma \times (-\infty, 0] \to \mathbb{R}\,,$$

我们将其抛物型 L^1-范数定义为

$$\|f\|_{L^1(\Sigma\times(-\infty,0])} = \int_{-\infty}^0 \|f(\cdot,t)\|_{L^1(\Sigma)}\,,$$

其抛物型 $C^{k,\alpha}$-范数（其中 $\alpha \in (0,1)$）定义为

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))} = \sum_{i+2j\le k} \sup_{\Sigma\times(t-1,t)} |\partial_x^i \partial_t^j f| + \sum_{i+2j=k} [\partial_x^i \partial_t^j f]_{C^\alpha(\Sigma\times(t-1,t))}\,,$$

其中

$$[f]_{C^\alpha(\Sigma\times(t-1,t))} = \sup_{\substack{(x_i,t_i)\in\Sigma\times(t-1,t) \\ (x_1,t_1)\neq(x_2,t_2)}} \frac{|f(x_1,t_1) - f(x_2,t_2)|}{d(x_1,x_2)^\alpha + |t_1 - t_2|^{\frac{\alpha}{2}}}\,.$$

此外，对于 $\lambda \le 0$，我们定义以下加权 L^2-范数

$$\|f\|_{L^{2,\lambda}(\Sigma\times(-\infty,0])} = \sup_{t\le 0}\{e^{\lambda t}\|f(\cdot,t)\|_{L^2(\Sigma)}\}\,,$$

以及加权 H¨older 范数

$$\|f\|_{C^{k,\alpha,\lambda}(\Sigma\times(-\infty,0])} = \sup_{t\le 0}\{e^{\lambda t}\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}\}\,.$$

注 2.1. 注意，有些其他论文使用下标“P”表示抛物型范数，即 $C^{k,\alpha}_P$ 而非 $C^{k,\alpha}$（例如参见 [CM22]）。这里我们省略下标以简化记号，但会注明定义域，以明确该范数是抛物型范数还是固定时间切片上的范数。此外，注意加权范数 $L^{2,\lambda}$ 和 $C^{k,\alpha,\lambda}$ 始终指抛物型范数。因此，如果我们不注明范数 $L^{2,\lambda}$ 和 $C^{k,\alpha,\lambda}$ 的定义域，就表示 $L^{2,\lambda}(\Sigma\times(-\infty,0])$ 和 $C^{k,\alpha,\lambda}(\Sigma\times(-\infty,0])$。

(1)在本文中，我们省略积分测度：对于在 Σ 和 $\partial\Sigma$ 上的积分，分别省略 $d\mathscr{H}^m$ 和 $d\mathscr{H}^{m-1}$；对于实数轴上的积分，则省略 dt（或 ds）。

3. Graphs over a free boundary minimal hypersurface

3.1. 利用局部参数化的图。 令 $\bar\nu$ 为向量场 ν （ Σ的单位法向量的选取）在整个 M 上的一个延拓，使得 $\bar\nu$ 与 ∂M 相切，并令 ψ_Σ 为从 Σ出发的 ν的流，即对所有 $x\in\Sigma$， $\psi_\Sigma(x,0)=x$ 。注意，

$$\psi_\Sigma\colon \Sigma\times(-r_0,r_0)\to M$$

对于某个 $r_0>0$， $\Sigma\times$ 是 Σ 在 M 中的管状邻域与 $\Sigma\times(-r_0,\ r_0)$ 之间的微分同胚，因此它为该邻域提供了一个叶状结构。使用变量记法 $\psi_\Sigma(x,\ s)$，我们有$\frac{d}{ds}\psi_\Sigma=\bar\nu$。值得注意的是， $\bar\nu$不一定是叶 $\psi_\Sigma(\Sigma,\ s)$ 的法向量。不过，由于它是叶 $s=0$ 的法向量，我们有

$$\langle\nabla_{e_i}\psi_\Sigma,\bar\nu\rangle=\int_0^s\frac{d}{d\bar s}\langle\nabla_{e_i}\psi_\Sigma,\bar\nu\rangle=s\langle e_i,\nabla_\nu\bar\nu\rangle+\int_0^s\frac{d^2}{d\bar s^2}\langle\nabla_{e_i}\psi_\Sigma,\bar\nu\rangle(s-\bar s)\,, \tag{3.1}$$

w这里， $\{e_i\}$, $i=1,\ \ldots\ldots,\ m$ 是 Σ 切空间的一个正交标准标架。类似地 y,

$$\begin{aligned}\langle\nabla_{e_i}\psi_\Sigma,\nabla_{e_j}\psi_\Sigma\rangle-\langle e_i,e_j\rangle&=\int_0^s\frac{d}{d\bar s}\langle\nabla_{e_i}\psi_\Sigma,\nabla_{e_j}\psi_\Sigma\rangle\\&=-2\langle A(e_i,e_j),\nu\rangle s+\int_0^s\frac{d^2}{d\bar s^2}\langle\nabla_{e_i}\psi_\Sigma,\nabla_{e_j}\psi_\Sigma\rangle(s-\bar s)\,,\end{aligned} \tag{3.2}$$

特别要注意，以下两者 $|\langle\nabla_{e_i}\psi_\Sigma,\ \bar\nu\rangle|$ 以及 $|\langle\nabla_{e_i}\psi_\Sigma,\ \nabla_{e_j}\psi_\Sigma\rangle-\langle e_i,\ e_j\rangle|$ 在 $\Sigma\times(-r_0,\ r_0)$ 上均由 $C|s|$控制，其中 $C>0$ 是一个常数，其取值取决于[(2)] $\|\bar\nu\|_{C^1(\Sigma\times(-r_0,\ r_0))}$ 和 $\|\psi_\Sigma\|_{C^1(\Sigma\times(-r_0,\ r_0))}$。

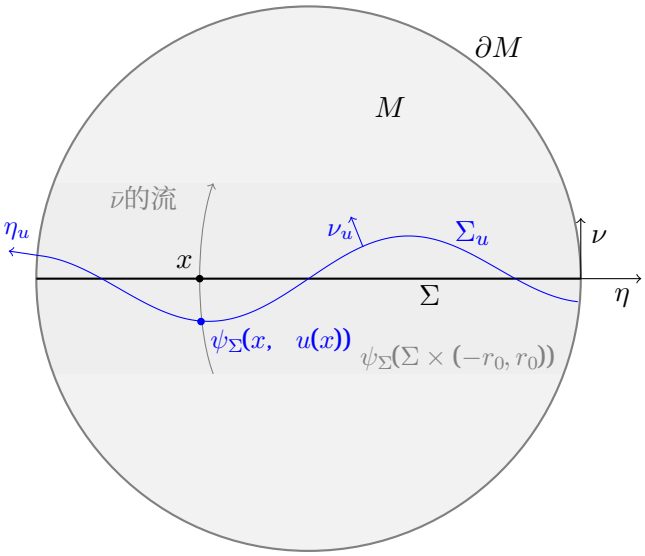

Figure 1. 符号表示示意图。

现在考虑一个光滑函数 $u\colon\Sigma\to\mathbb{R}$ ，满足$\|u\|_{C^0(\Sigma)}<r_0$，以及由 u 的图定义的超曲面 $\Sigma_u\subset M$，其定义方式为 ψ_Σ。换言之， Σ_u 定义为函数 $F\colon\Sigma\to M$ 的像，该函数由下式给出

$$F(x)\coloneqq\psi_\Sigma(x,u(x))\,.$$

于是，对于上述的 e_i ， Σ_u 的切空间的一组基为

$$F_i\coloneqq\nabla_{e_i}\psi_\Sigma+u_i\bar\nu\,,\quad i=1,\ldots,m\,, \tag{3.3}$$

度量为 $g_{ij}=\langle F_i,F_j\rangle$，单位法向量 ν_u 由下式给出

$$\nu_u=\frac{\bar\nu-w_ig^{ij}F_j}{\sqrt{1-g^{ij}w_iw_j}}\,,\quad\text{where } w_i\coloneqq\langle F_i,\bar\nu\rangle\quad\Longrightarrow\quad\langle\nu_u,\bar\nu\rangle=\sqrt{1-g^{ij}w_iw_j}\,. \tag{3.4}$$

(2)注意， $\nabla_{\partial_s}\nabla_{e_i}\psi_\Sigma=\nabla_{\partial_s}\frac{\partial}{\partial x_i}\psi_\Sigma=\nabla_{e_i}\frac{\partial}{\partial s}\psi_\Sigma=\nabla_{e_i}\bar\nu$。

注意，由（3.1）可知，

$$w_i = u_i + u\langle e_i, \nabla_\nu \bar{\nu}\rangle + \int_0^u \frac{d^2}{ds^2}\langle \nabla_{e_i}\psi_\Sigma, \bar{\nu}\rangle(u-s)\,. \tag{3.5}$$

此外，由（3.2）和（3.3），

$$\begin{aligned} g_{ij} - g^\Sigma_{ij} &= u_i u_j + \int_0^u \frac{d}{ds}\langle \nabla_{e_i}\psi_\Sigma, \nabla_{e_j}\psi_\Sigma\rangle + u_i\int_0^u \frac{d}{ds}\langle \nabla_{e_i}\psi_\Sigma, \bar{\nu}\rangle + u_j\int_0^u \frac{d}{ds}\langle \nabla_{e_j}\psi_\Sigma, \bar{\nu}\rangle \\ &= u_i u_j - 2\langle A(e_i,e_j),\nu\rangle u + \int_0^u \frac{d^2}{ds^2}\langle \nabla_{e_i}\psi_\Sigma, \nabla_{e_j}\psi_\Sigma\rangle(u-s) + \\ &\quad + u_i\int_0^u \frac{d}{ds}\langle \nabla_{e_i}\psi_\Sigma, \bar{\nu}\rangle + u_j\int_0^u \frac{d}{ds}\langle \nabla_{e_j}\psi_\Sigma, \bar{\nu}\rangle\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

特别地，$|w_i - u_i| \le C|u|$ 和$|g_{ij} - g^\Sigma_{ij}| \le C\|u\|_{C^1}$，其中 $C>0$ 是一个依赖于Σ和 $\bar{\nu}$的常数。

平均曲率$H_u g^{ij}\langle \nabla^2_{e_i,\, e_j}F,\ \nu_u\rangle$ 关于 Σ_u 的线性化由 $J_\Sigma u$ 给出，而接触角 $\langle \nu_u,\ \eta\rangle$ 的线性化由 $-\frac{\partial u}{\partial \eta} + \mathrm{II}^{\partial M}(\nu,\nu)u$给出（例如参见 [Amb15]）。更准确地说，在下文中（见(3.9)），我们需要$\langle \nu_u^{H_u},\ \nu\rangle$的线性化，它也等于 J_Σ，因为 $\langle \nu_u,\ \bar{\nu}\rangle$ 的线性化为1（由(3.4)结合~~(3.5)~~、(3.6)可得）。这便引出了以下定义。

定义 3.1。给定 $u\colon \Sigma \to \mathbb{R}$，其中$\|u\|_{C^0(\Sigma)} < r_0$，我们将函数 $E(u)\colon \Sigma \to \mathbb{R}$和$\epsilon(u)\colon \partial\Sigma \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\begin{cases} \dfrac{H_u}{\langle \nu_u, \bar{\nu}\rangle} = J_\Sigma u + E(u) & \text{on } \Sigma \\[2ex] \langle \nu_u, \eta\rangle = -\frac{\partial u}{\partial \eta} + \mathrm{II}^{\partial M}(\nu,\nu)u + \epsilon(u) & \text{on } \partial\Sigma\,. \end{cases} \tag{3.7}$$

我们需要以下关于误差项 E 和 ϵ的估计。注意，在更一般的情形下，关于 E 的估计见 [Sim83a] (另见 [CM22])；而在$M = \Sigma\times\mathbb{R}$ 的情形下，其精确表达式见 [CHL25]。因此，我们在此着重研究边界误差项 ϵ，并在下文的式 (3.8) 中给出其精确表达式。

命题 3.2。对于任意光滑函数 $u\colon \Sigma\to\mathbb{R}$，满足$\|u\|_{C^1(\Sigma)} < r_0$，且对于 E 和 ϵ 如 (3.7)所示，以下估计成立。

$$\begin{aligned} &\|E(u)\|_{C^0(\Sigma)} \le C\|u\|_{C^1(\Sigma)}\|u\|_{C^2(\Sigma)}\,, && \|E(u)\|_{C^\alpha(\Sigma)} \le C\|u\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma)}\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)}\,, \\ &\|\epsilon(u)\|_{C^0(\partial\Sigma)} \le C\|u\|^2_{C^1(\Sigma)}\,, && \|\epsilon(u)\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Sigma)} \le C\|u\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma)}\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)}\,, \\ &\|E(u)\|_{L^2(\Sigma)} \le C\|u\|_{C^2(\Sigma)}\|u\|_{W^{1,2}(\Sigma)}\,, && \|\epsilon(u)\|_{L^2(\partial\Sigma)} \le C\|u\|_{C^2(\Sigma)}\|u\|_{W^{1,2}(\Sigma)}\,, \end{aligned}$$

其中 $C>0$ 是一个依赖于 Σ、M 和 r_0的常数。

注 3.3。用于界定 u 的 C^2-范数的常数 r_0 可以替换为任意其他常数，只要我们假设$\|u\|_{C^0(\Sigma)} < r_0$（这样 $\psi_\Sigma(x,u(x))$ 才有定义）。为简化行文，我们选择用 r_0 界定 C^2-范数。

为了证明前面的命题，我们使用下面的一般引理。

引理 *3.4.* 设 $\tilde{\sigma}\colon \Sigma\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times m}\to\mathbb{R}$ 是一个 C^3-函数。假设 $\tilde{\sigma}(x,0,0,0) = 0, \frac{d}{ds}|_{s=0}\tilde{\sigma}(x,sa,sb,sc) = 0$ 对所有 $(a,b,c)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times m}$ 都成立，并且 $\tilde{\sigma}$ 关于变量 c 是线性的，也就是说$\tilde{\sigma}(x,a,b,c) = \tilde{\sigma}_1(x,a,b)\cdot c + \tilde{\sigma}_2(x,a,b)$，其中 $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2\colon \Sigma\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 是两个函数。

对于每个满足 $u\colon \Sigma\to\mathbb{R}$ 且$\|u\|_{C^1(\Sigma)} < r_0$ 的函数，定义 $\sigma(u) := \tilde{\sigma}(x,u,\nabla u,\nabla^2 u)$，则有

$$\|\sigma(u)\|_{C^0(\Sigma)} \le C\|u\|_{C^1(\Sigma)}\|u\|_{C^2(\Sigma)} \quad \textit{and} \quad \|\sigma(u)\|_{C^\alpha(\Sigma)} \le C\|u\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma)}\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)}\,,$$

其中 $C>0$ 是一个依赖于 $\tilde{\sigma}$ 和 r_0的常数。

证明。 记 $q(u) \coloneqq (u,\ \nabla u,\ \nabla^2 u)$，使得 $\sigma(u) = \tilde{\sigma}(q(u))$（这里省略了对变量 x的依赖）。定义 $f(s) = sq(u)$，其中 $s \in [0,1]$，根据假设，我们有 $(\tilde{\sigma} \circ f)(0) = 0$且 $(\tilde{\sigma} \circ f)'(0) = 0$。因此，我们得到

$$\sigma(u) = (\tilde{\sigma} \circ f)(1) = \int_0^1 (1-s)(\tilde{\sigma} \circ f)''(s) = \int_0^1 (1-s)\nabla^2 \tilde{\sigma}(q(su))[q(u), q(u)]\,,$$

其中，海森矩阵 $\nabla^2\tilde{\sigma}$是相对于变量 $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m^2}$计算的。利用 $\nabla^2\tilde{\sigma}(q(su))[q(u)\ q(u)]$是关于 $\nabla^2 u$的线性函数（这是因为$\tilde{\sigma}$ 关于 c呈线性），可得

$$\|\sigma(u)\|_{C^0(\Sigma)} \le C\|u\|_{C^1(\Sigma)}\|u\|_{C^2(\Sigma)}\,,$$

其中 是一个依赖于 $\tilde{\sigma}$ 和 r_0的常数。

类似地，利用 $\|f \cdot g\|_{C^\alpha} \le \|f\|_{C^0}\|g\|_{C^\alpha} + \|f\|_{C^\alpha}\|g\|_{C^0} \le 2\|f\|_{C^\alpha}\|g\|_{C^\alpha}$，我们有

$$\|\sigma(u)\|_{C^\alpha(\Sigma)} \le \|\nabla^2\tilde{\sigma}(q(su))[q(u), q(u)]\|_{C^\alpha(\Sigma)} \le C\|u\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma)}\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)}\,. \qquad \square$$

命题 3.2 的证明。注意，关于 E 的估计与 [Sim83a]中推导的完全相同，并在 [CM22、CHL25]中使用。获得这些估计的一种方法是注意到，根据[CHL25 中 E 的公式，（2.15）],，我们可以将 $E(u)$ 写成 $= \tilde{E}(x, u, \nabla u, \nabla^2 u)$，其中 $\tilde{E}$是一个函数： $\Sigma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times m} \to \mathbb{R}$，满足引理 3.4 的假设（见 [CHL25，引理 4.1]）。因此，这些估计由该引理得出。故此处我们将重点放在 ϵ上，并对其进行显式计算。

令 η_u 为 $\partial\Sigma_u$的外向单位余法向量。那么，

$$\eta = \frac{\eta_u - \langle \eta_u, \bar{\nu}\rangle\bar{\nu}}{|\eta_u - \langle \eta_u, \bar{\nu}\rangle\bar{\nu}|} = \frac{\eta_u - \langle \eta_u, \bar{\nu}\rangle\bar{\nu}}{\sqrt{1 - \langle \eta_u, \bar{\nu}\rangle^2}}\,.$$

现在，令 p 为 $\partial\Sigma$ 中的一点，并在 p附近为 Σ 选取法坐标，使得 $e_m(p) = \eta(p)$，且 $\{e_\alpha(p)\}_{\alpha=1,\dots,m-1}$是 p处 $T_p\partial\Sigma$ 的正交归一基。注意， $F_1(x)\dots, F_{m-1}(x)$是 $T_{F(x)}\partial\Sigma_u$的一组（不一定正交归一的）基。因此，在这样的点 p处，我们有

$$\eta_u = \frac{F_m - g^{\alpha\beta}g_{m\beta}F_\alpha}{|F_m - g^{\alpha\beta}g_{m\beta}F_\alpha|} = \frac{F_m - g^{\alpha\beta}g_{m\beta}F_\alpha}{\sqrt{g_{mm} - g^{\alpha\beta}g_{m\alpha}g_{m\beta}}}\,,$$

其中 $(g^{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,\dots,m-1}$ 是 $(g_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,\dots,m-1}$的度量逆。注意，我们使用指标 α, β，其取值为 $1, \dots, m-1$；以及指标 i, j，其取值为 $1, \dots, m$。

因此，利用 $\langle \eta_u, \nu_u\rangle = 0$，我们有

$$\begin{aligned}\langle \nu_u, \eta\rangle &= \frac{-\langle \eta_u, \bar{\nu}\rangle\langle \nu_u, \bar{\nu}\rangle}{\sqrt{1 - \langle \eta_u, \bar{\nu}\rangle^2}} \\ &= -(w_m - g^{\alpha\beta}g_{m\beta}w_\alpha)\left(\frac{1 - g^{ij}w_iw_j}{g_{mm} - g^{\alpha\beta}g_{m\alpha}g_{m\beta} - (w_m - g^{\alpha\beta}g_{m\beta}w_\alpha)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\,.\end{aligned}$$

这意味着（在该点 p处）

$$\epsilon(u) = \frac{\partial u}{\partial \eta} - \mathrm{I\!I}^{\partial M}(\nu, \nu)u - (w_m - g^{\alpha\beta}g_{m\beta}w_\alpha)\left(\frac{1 - g^{ij}w_iw_j}{g_{mm} - g^{\alpha\beta}g_{m\alpha}g_{m\beta} - (w_m - g^{\alpha\beta}g_{m\beta}w_\alpha)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\,. \tag{3.8}$$

现在，根据（3.5），并利用 $e_m = \eta$ 在 p处，我们有

$$\begin{aligned}w_m &= u_m + u\langle e_m, \nabla_\nu\bar{\nu}\rangle + \int_0^u \frac{d^2}{ds^2}\langle \nabla_{e_m}\psi_\Sigma, \bar{\nu}\rangle(u-s) = \frac{\partial u}{\partial \eta} - \mathrm{I\!I}^{\partial M}(\nu, \nu) + \int_0^u \frac{d^2}{ds^2}\langle \nabla_{e_m}\psi_\Sigma, \bar{\nu}\rangle(u-s) \\ &= \frac{\partial u}{\partial \eta} - \mathrm{I\!I}^{\partial M}(\nu, \nu) + O(\|u\|^2_{C^0(\Sigma)})\,.\end{aligned}$$

特别地，再利用 (3.5) 与 (3.6) 中的 $w_i = O(\|u\|_{C^1(\Sigma)})$ 和 $g_{ij} = \delta_{ij} + O(\|u\|_{C^1(\Sigma)})$，我们有 $\|\epsilon(u)\|_{C^0(\partial\Sigma)} \le C\|u\|^2_{C^1(\Sigma)}$。此外，利用 (3.8)，可见 ϵ 的微分可以写成依赖于 u、∇u、$\nabla^2 u$ 的函数，即 $\nabla\epsilon = \tilde{\sigma}(x, u, \nabla u, \nabla^2 u)$，其中 $\tilde{\sigma}$ 满足

的假设引理 3.4，作为定义在 $\partial\Sigma$ 而非 Σ 上的函数（不过请注意，∇u、$\nabla^2 u$ 是在 Σ 上计算并仅限制到 $\partial\Sigma$）。这意味着关于 ϵ 的范数的所有其余所需估计。

最后，让我们证明关于 L^2-范数的 $E(u)$ 和 $\epsilon(u)$ 的估计。注意，引理 3.4 的证明表明，估计 $\|E(u)\|_{C^0(\Sigma)} \leq C\|u\|_{C^1(\Sigma)}\|u\|_{C^2(\Sigma)}$ 和 $\|\epsilon(u)\|_{C^0(\partial\Sigma)} \leq C\|u\|^2_{C^1(\Sigma)}$ 逐点成立，也就是说，对每个$x \in \Sigma$，都有 $|E(u)| \leq C(|u| + |\nabla u|)(|u| + |\nabla u| + |\nabla^2 u|)$；对每个 $x \in \partial\Sigma$，都有 $|\epsilon(u)| \leq C(|u| + |\nabla u|)^2$。因此，我们得到所需的不等式：

$$\|E(u)\|_{L^2(\Sigma)} \leq C\|(|u| + |\nabla u|)(|u| + |\nabla u| + |\nabla^2 u|)\|_{L^2(\Sigma)} \leq C\|u\|_{C^2(\Sigma)}\|u\|_{W^{1,2}(\Sigma)}\,,$$

并且，利用迹不等式，

$$\begin{aligned}\|\epsilon(u)\|_{L^2(\partial\Sigma)} &\leq C\|(|u| + |\nabla u|)^2\|_{L^2(\partial\Sigma)} \leq C\|(|u| + |\nabla u|)^2\|_{W^{1,2}(\Sigma)}\\ &\leq C\left(\|(|u| + |\nabla u|)^2\|_{L^2(\Sigma)} + \|\nabla(|u| + |\nabla u|)^2\|_{L^2(\Sigma)}\right) \leq C\|u\|_{C^2(\Sigma)}\|u\|_{W^{1,2}(\Sigma)}\,.\end{aligned}$$ □

3.2. 面积递减图的反向庞加莱´不等式。我们需要以下反向庞加莱不等式：对于函数 u，其图的面积小于底超曲面的面积。

命题 *3.5*（参见 [*ADS19*，引理 *4.7*], [*BC19*，命题 *2.3*]）。设 $\Sigma \subset M$ 为自由边界极小超曲面。存在 $\varepsilon > 0$ 使得下述结果成立。设 $u\colon\ \Sigma \to \mathbb{R}$ 为满足 $\|u\|_{C^1(\Sigma)} \leq \varepsilon$ 的光滑函数，并设 $\Sigma_u \subset M$ 为如第 *3.1* 节中经由 ψ_Σ 在 Σ 上的 u 的图。若 $\mathscr{H}^2(\Sigma_u) \leq \mathscr{H}^2(\Sigma)$，则

$$\int_\Sigma |\nabla u|^2 \leq C\int_\Sigma |u|^2,$$

对某个依赖于 M、Σ 和 ε的常数 $C > 0$。

证明。由（3.6）可知

$$\begin{aligned}g_{ij} - g^\Sigma_{ij} &= u_i u_j - 2\langle A(e_i, e_j), \nu\rangle u + \int_0^u \frac{d^2}{ds^2}\langle \nabla_{e_i}\psi_\Sigma, \nabla_{e_j}\psi_\Sigma\rangle(u - s) +\\ &\quad + u_i\int_0^u \frac{d}{ds}\langle \nabla_{e_i}\psi_\Sigma, \bar\nu\rangle + u_j\int_0^u \frac{d}{ds}\langle \nabla_{e_j}\psi_\Sigma, \bar\nu\rangle\\ &= u_i u_j - 2\langle A(e_i, e_j), \nu\rangle u + u_i a_j(u) + u_j a_i(u) + b_{ij}(u)\,,\end{aligned}$$

其中 a_i, b_{ij} 是依赖于 u 的光滑函数，使得 $|a_i(u)| \leq C|u|$, $b_{ij}(u) \leq Cu^2$。因此，我们得到（另见 [Sim83b，第 2 章，第 6]节）

$$\sqrt{\det g_{ij}} = \sqrt{\det g^\Sigma_{ij}}\left[1 + Hu + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \langle \nabla u, \vec a(u)\rangle + b(u) + (Hu)^2 - |A|^2u^2\right] + O(|u|^3_{C^1})\,,$$

其中 $\vec a(u) = ((g^\Sigma)^{ij}a_i(u))_j$ 且 $b(u) = \frac{1}{2}(g^\Sigma)^{ij}b_{ij}(u)$。由于 Σ 是极小超曲面，因此我们有

$$\sqrt{\det g_{ij}} = \sqrt{\det g^\Sigma_{ij}}\left[1 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \langle \nabla u, \vec a(u)\rangle + b(u) - |A|^2u^2\right] + O(|u|^3_{C^1})\,.$$

因此，我们得到

$$\mathscr{H}^2(\Sigma_u) = \mathscr{H}^2(\Sigma) + \int_\Sigma\left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \langle \nabla u, \vec a(u)\rangle + b(u) - |A|^2u^2\right] + O(\|u\|^3_{W^{1,2}(\Sigma)})\,.$$

利用 $\mathscr{H}^2(\Sigma_u) \leq \mathscr{H}^2(\Sigma)$，我们由此得到

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Sigma)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Sigma)}\|u\|_{L^2} + C\|u\|^2_{L^2(\Sigma)} + O(\|u\|^3_{W^{1,2}(\Sigma)})\,,$$

即 若 $\|u\|_{C^1(\Sigma)} \leq \varepsilon$ 足够小，则可推出所需的反向 Poincar´e 不等式。 □

3.3. 图形平均曲率流。 设 $u\colon \Sigma\times(T_0,T)\to\mathbb{R}$ 是定义在 Σ 上的随时间变化的函数，并考虑由 $u(\cdot,t)$ 在 ψ_Σ 上的图像所定义的相关超曲面族 Σ_t。换言之， Σ_t 是函数 $F(\cdot,t)\colon \Sigma\to M$ 的像，其定义为

$$F(x,t)\coloneqq\psi_\Sigma(x,u(x,t))\,.$$

于是，超曲面族 Σ_t 以如下速度运动

$$\frac{d}{dt}F=u_t\,\overline{\nu}\,.$$

特别地，法向速度为 $u_t\langle\nu_u,\ \nu\rangle$。因此，当且仅当满足以下条件时，该超曲面族按图形平均曲率流演化

$$\begin{cases} u_t=\dfrac{H_u}{\langle\nu_u,\overline{\nu}\rangle} & \text{on } \Sigma\\ \langle\nu_u,\eta\rangle=0 & \text{on } \partial\Sigma\,. \end{cases}\tag{3.9}$$

利用（3.7）中的平均曲率线性化和诺伊曼条件，我们推知，图形平均曲率流等价于方程

$$\begin{cases} u_t-J_\Sigma u=E(u) & \text{on } \Sigma\\ \frac{\partial u}{\partial\eta}-\mathrm{I\!I}^{\partial M}(\nu,\nu)u=\epsilon(u) & \text{on } \partial\Sigma\,. \end{cases}\tag{3.10}$$

首先，先陈述我们稍后需要的线性抛物型方程的Schauder 估计（3.10），例如参见 [Sim97], [Bad98，定理 1], 和 [GT01，定理 6。30]（椭圆情形）。

定理 3.6 （抛物型 Schauder 估计）。 设 $w\colon \Sigma\times(T_0,T)\to\mathbb{R}$ 是方程的解 n

$$\begin{cases} w_t-J_\Sigma w=f(x,t) & on\ \Sigma\\ \frac{\partial w}{\partial\eta}-\mathrm{I\!I}^{\partial M}(\nu,\nu)w=g(x,t) & on\ \partial\Sigma\,, \end{cases}$$

在区间 $t\in（T_0,T）$ 内。于是，对所有 $t\in（T_0+2,T）$，

$$\|w\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}\le C(\|w\|_{L^2(\Sigma\times(t-2,t))}+\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Sigma\times(t-2,t))}+\|g\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Sigma\times(t-2,t))})\,,$$

其中 $C>0$ 是一个仅依赖于 Σ 和 M的常数。

此外，为了研究问题（3.10），我们需要以下关于抛物型范数 E 和 ϵ的估计。

命题 *3.7.* 对于任意依赖于时间的函数 $u,v\colon \Sigma\times(T_0,T)\to\mathbb{R}$，若 $\|u(\cdot,t)\|_{C^1(\Sigma)}<r_0$对所有 $t\in(T_0,T)$成立，则对于每个 $t\in(T_0+1,T)$，由 *(3.7)* 定义的 E和 ϵ满足以下估计：

$$\begin{aligned}
\|E(u)\|_{C^{0,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}&\le C\|u\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}\\
\|E(u)-E(v)\|_{C^{0,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}&\le C\|u-v\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}(\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}+\|v\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))})\\
\|\epsilon(u)\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Sigma\times(t-1,t))}&\le C\|u\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}\\
\|\epsilon(u)-\epsilon(v)\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Sigma\times(t-1,t))}&\le C\|u-v\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}(\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}+\|v\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))})\,,
\end{aligned}$$

其中 $C>0$ 是一个仅依赖于 Σ、 M 和 r_0的常数。

证明。如命题 3.2 的证明中所述，根据公式 [CHL25、(2.15)] 和 (3.8)，分别针对 E和 ϵ，我们有：$E(u)$ 和 $\epsilon(u)$ 均可写为 $\tilde{\sigma}(x,u,\nabla u,\nabla^2u)$，其中 $\tilde{\sigma}\colon \Sigma\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times m}\to\mathbb{R}$；在 ϵ 的情形下，将其限制在 $\partial\Sigma$ 上，而这满足引理 3.4 的假设。因此，该命题可由以下一般结果推出。□

引理 *3.8.* 设 $\tilde{\sigma}\colon \Sigma\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times m}\to\mathbb{R}$ 是一个 C^3-函数。假设对于所有 $(a,b,c)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times m}$，$\tilde{\sigma}(x,0,0,0)=0,\frac{d}{ds}|_{s=0}\tilde{\sigma}(x,sa,sb,sc)=0$，并且 $\tilde{\sigma}$ 关于变量 c 是线性的，即对于两个函数 $\tilde{\sigma}_1,\tilde{\sigma}_2$：$\Sigma\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$，有$\tilde{\sigma}(x,a,b,c)=\tilde{\sigma}_1(x,a,b)\cdot c+\tilde{\sigma}_2(x,a,b)$。

对于每个函数 $u\colon\ \Sigma\to\mathbb{R}$，定义 $\sigma(u)\colon=\tilde{\sigma}(x,u,\nabla u,\nabla^2 u)$。那么，对于定义在 Σ 上的每一对时间依赖函数 $u,v\colon\ \Sigma\times(T_0,T)\to\mathbb{R}$，只要对所有 $t\in(T_0,T)$，$\|u(\cdot,t)\|_{C^1(\Sigma)}<r_0$，就有：

$$\|\sigma(u)\|_{C^{0,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}\leq C\|u\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}$$

$$\|\sigma(u)-\sigma(v)\|_{C^{0,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}\leq C(\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}+\|v\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))})\|u-v\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))},$$

其中，$C>0$ 是一个依赖于 $\tilde{\sigma}$ 和 r_0的常数。

证明。记 $q(u):=(u,\nabla u,\nabla^2 u)$，使得 $\sigma(u)=\tilde{\sigma}(q(u))$（这里省略了对变量 x的依赖）。

设 $u,v\colon\ \Sigma\times(T_0,T)\to\mathbb{R}$是定义在 Σ上的时间依赖函数。令$(x_1,t_1),(x_2,t_2)\in\Sigma\times(t-1,t)$，并定义 $f_i(s)=(1-s)q(u(t_i))(x_i)+sq(v(t_i))(x_i)$，其中 $i=1,2$；该函数在点(x_i,t_i)处于 $s\in[0,1]$时，在 u 与 v之间进行插值。于是，我们有

$$\begin{aligned}(\sigma(u(t_1))(x_1)-\sigma(v(t_1))(x_1))-(\sigma(u(t_2))(x_2)-\sigma(v(t_2))(x_2))=\\ =\tilde{\sigma}(f_1(1))-\tilde{\sigma}(f_1(0))-\tilde{\sigma}(f_2(1))+\tilde{\sigma}(f_2(0))\\ =\int_0^1\nabla\tilde{\sigma}(f_1(s))\left[f_1'(s)\right]-\int_0^1\nabla\tilde{\sigma}(f_2(s))\left[f_2'(s)\right]\\ =\int_0^1\nabla\tilde{\sigma}(f_1(s))\left[f_1'(s)-f_2'(s)\right]-\int_0^1(\nabla\tilde{\sigma}(f_2(s))-\nabla\tilde{\sigma}(f_1(s)))\left[f_2'(s)\right].\end{aligned}$$

现在，注意到

$$|f_1'(s)-f_2'(s)|=|q((u-v)(t_1))(x_1)-q((u-v)(t_2))(x_2)|\leq\|u-v\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}(|x_1-x_2|^\alpha+|t_1-t_2|^{\alpha/2}),$$

while

$$\begin{aligned}|f_1(s)-f_2(s)|&\leq|q((u)(t_1))(x_1)-q((u)(t_2))(x_2)|+|q((v)(t_1))(x_1)-q((v)(t_2))(x_2)|\\&\leq(\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}+\|v\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))})(|x_1-x_2|^\alpha+|t_1-t_2|^{\alpha/2}).\end{aligned}$$

此外，注意到 $|\nabla\tilde{\sigma}(f_1(s))|\leq C|f_1(s)|$，其中 C 依赖于 $\tilde{\sigma}$ 和 r_0，因为 $\nabla\tilde{\sigma}(0)=0$ 且 $\tilde{\sigma}$ 关于 c是线性的。因此，我们得到

$$\begin{aligned}&|(\sigma(u(t_1))(x_1)-\sigma(v(t_1))(x_2))-(\sigma(u(t_1))(x_1)-\sigma(v(t_1))(x_2))|\leq\\&\leq C\left(\sup_{s\in[0,1]}|f_1(s)|\sup_{s\in[0,1]}|f_1'(s)-f_2'(s)|+\sup_{s\in[0,1]}|f_1(s)-f_2(s)|\sup_{s\in[0,1]}|f_2'(s)|\right)\\&\leq C(\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}+\|v\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))})\|u-v\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}(|x_1-x_2|^\alpha+|t_1-t_2|^{\alpha/2}).\end{aligned}$$

这意味着

$$\|\sigma(u)-\sigma(v)\|_{C^{0,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}\leq C(\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}+\|v\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))})\|u-v\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}.$$

最后，我们来估计 $\|\sigma(u)\|_{C^{0,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}$。定义 $f_i(s)=sq(u(t_i))(x_i)$，其中 $i=1$、2满足 $f_1'=q(u(t_1))(x_1)$、$f_2'=q(u(t_2))(x_2)$，并且 $|f_1'-f_2'|$与 $|f_1-f_2|$均以$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}(|x_1-x_2|^\alpha+|t_1-t_2|^{\alpha/2})$为界。于是我们有

$$\begin{aligned}\sigma(u(t_1))(x_1)-\sigma(u(t_2))(x_2)&=\tilde{\sigma}(f_1(1))-\tilde{\sigma}(f_2(1))\\&=\int_0^1(1-s)\nabla^2\tilde{\sigma}(f_1(s))[f_1',f_1']-\int_0^1(1-s)\nabla^2\tilde{\sigma}(f_2(s))[f_2',f_2']\\&=\int_0^1(1-s)\nabla^2\tilde{\sigma}(f_1(s))[f_1'-f_2',f_1']+\int_0^1(1-s)\nabla^2\tilde{\sigma}(f_1(s))[f_2',f_1'-f_2']+\\&\quad+\int_0^1(1-s)\left\{\nabla^2\tilde{\sigma}(f_1(s))-\nabla^2\tilde{\sigma}(f_2(s))\right\}[f_2',f_2'].\end{aligned}$$

再次利用 $\nabla^2 u$ 关于 $\nabla^2 u$是线性函数，与前面类似，我们可以将右端估计为

$$C\|u\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}(|x_1-x_2|^\alpha+|t_1-t_2|^{\alpha/2}),$$

其中 C 取决于 $\tilde{\sigma}$ 和 r_0，由此得到所需的估计。 □

定理 3.6 中的抛物型 Schauder 估计 与命题 3.7相结合，给出了图形平均曲率流解的以下估计，这些估计将在下文中发挥重要作用。

引理 3.9。 设 $u\colon \Sigma\times(T_0,T)\to\mathbb{R}$ 是图形平均曲率流(3.10) 的一个解，且对所有 $t\in(T_0,T)$，都有$\|u(\cdot,t)\|_{C^1(\Sigma)}<r_0$，那么对任意 $t\in(T_0+2,T)$

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))}\le C(\|u\|_{L^2(\Sigma\times(t-2,t))}+\|u\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma\times(t-2,t))}\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-2,t))}), \tag{3.11}$$

其中 C 仅取决于 Σ、 M 和 r_0。

此外，存在一个 $\varepsilon>0$，它仅取决于 Σ和 M，使得若$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma\times(T-R,T))}<\varepsilon$对某个 $T-R\ge T_0$成立，则

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(T-R/2,T))}\le C\|u\|_{L^2(\Sigma\times(T-R,T))}, \tag{3.12}$$

其中 $C>0$ 仅取决于 Σ 和 M。

证明。首先注意到（3.11）直接由抛物型 Schauder 估计以及在 E 和 ϵ 上给出的估计可得，见 命题 3.7。此外，Schauder 估计的缩放版本表明，对任意 $\rho>0$，均有 $t-\rho\ge T-R$，

$$\|u\|^{(\rho/2)}_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-\rho/2,t))}\le C(\|u\|_{L^2(\Sigma\times(t-\rho,t))}+\|u\|^{(\rho)}_{C^{1,\alpha}(\Sigma\times(t-\rho,t))}\|u\|^{(\rho)}_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-\rho,t))}),$$

其中 C 与 ρ 无关，并且这里的 $\|\cdot\|^{(\rho)}$ 指尺度不变范数，即

$$\begin{aligned}\|u\|^{(\rho)}_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-\rho,t))}:=\|u\|_{C^0(\Sigma\times(t-\rho,t))}+\rho\|\nabla u\|_{C^0(\Sigma\times(t-\rho,t))}+\rho^2\||\nabla^2u|+|u_t|\|_{C^0(\Sigma\times(t-\rho,t))}+\\+\rho^{2+\alpha}[\nabla^2u]_{C^\alpha(\Sigma\times(t-\rho,t))}+\rho^{2+\alpha}[u_t]_{C^{\alpha/2}(\Sigma\times(t-\rho,t))}\end{aligned}$$

缩放后的 $C^{1,\alpha}$-范数的定义类似。

第二部分由一个一般性引理推得。该引理表明，右侧的 $C^{2,\alpha}$-范数可以吸收到左侧，即使它定义在更大的时间区间上，只要乘以一个足够小的系数即可。这个抽象的“吸收引理”见于 Leon Simon 尚未发表的某些偏微分方程笔记中；此处我们给出一个针对本文目的定制的版本。定义量

$$S(t,\rho):=[u]_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-\rho,t))}=[\nabla^2u]_{C^\alpha(\Sigma\times(t-\rho,t))}+[u_t]_{C^{\alpha/2}(\Sigma\times(t-\rho,t))}.$$

由下列插值不等式:

$$\|u\|^{(\rho)}_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-\rho,t))}\le C\left(\rho^{2+\alpha}[u]_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-\rho,t))}+\|u\|_{L^2(\Sigma\times(t-\rho,t))}\right),$$

结合 Schauder估计以及关于 $C^{1,\alpha}$-范数的假设，我们得到

$$\rho^{2+\alpha}S(t,\rho/2)\le C(\|u\|_{L^2(\Sigma\times(T-R,T))}+\varepsilon\rho^{2+\alpha}S(t,\rho)) \tag{3.13}$$

对于所有满足 $T-R\le t-\rho<t<T$ 的 t， ρ。令

$$Q:=\sup_{(t-\rho,t)\subset(T-R,T)}\rho^{2+\alpha}S(t,\rho/2).$$

于是，将不等式（3.13）中的 ρ 替换为 $\rho/2$，可得

$$(\rho/2)^{2+\alpha}S(t,\rho/4)\le C(\|u\|_{L^2(\Sigma\times(T-R,T))}+\varepsilon Q) \tag{3.14}$$

对于所有满足 $T-R\le t-\rho<t<T$ 的 t， ρ。

取任意区间 $(t-\rho/2,t)\subset(T-R,T)$，并将其写为并集 $(t-\rho/2,t)=(t_2-\rho/4,t_2)\cup(t_1-\rho/4,t_1)\cup(t-\rho/4,t)$，其中 $t_1=t-\rho/8$, $t_2=t-\rho/4$。于是，根据 S 的定义可知，它是次可加的，即

$$S(t,\rho/2)\le S(t,\rho/4)+S(t_1,\rho/4)+S(t_2,\rho/4).$$

这与 (3.14) 一起推出

$$\rho^{2+\alpha} S(t,\rho/2) \leq C(\|u\|_{L^2(\Sigma\times(T-R,T))} + \varepsilon Q)$$

由 t,ρ 的任意性，我们得到

$$Q \leq C(\|u\|_{L^2(\Sigma\times(T-R,T))} + \varepsilon Q)\,,$$

当 ε 足够小时，由此可得$Q \leq \|u\|_{L^2(\Sigma\times(T-R,T))}$的界。再次应用插值不等式，证明即告完成。□

注 3.10. 应用H¨older插值不等式

$$[f]_\alpha \leq [f]_\beta^{\alpha/\beta} \|f\|_\infty^{1-\alpha/\beta}\,, \quad \text{for } \beta > \alpha\,,$$

我们得到

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma\times(T-R,T))} \leq \|u\|^{\frac{\alpha}{\beta}}_{C^{1,\beta}(\Sigma\times(T-R,T))} \|u\|^{1-\frac{\alpha}{\beta}}_{C^1(\Sigma\times(T-R,T))} + \|u\|_{C^1(\Sigma\times(T-R,T))}\,.$$

因此，若不假设 $C^{1,\alpha}$ 范数很小，而假设如下，则引理 3.9 的结论(3.12)仍然成立

$$\sup \|u(\cdot,t)\|_{C^1(\Sigma)} < \varepsilon\,,\ \forall t \in (T-R,T)$$

并且$\|u\|_{C^{1,\ \beta}(\Sigma\times(T-R,\ T))}$在某个 $\beta > \alpha$下有界，且 ε充分小。

4. Constructing a family of solutions

本节中，我们构造一个 I参数族的古老解，这些解从极小超曲面 Σ出发，其中 I =ind(Σ)。

设 $\varphi := \sum_{k=1}^I a_k \varphi_k e^{-\lambda_k t}$。我们证明，可以对 φ 进行扰动，从而构造出一个图形平均曲率流解，并且可以控制扰动 u，使其阶为 $o(e^{-\lambda t})$，其中 $\lambda =$ 最大值$\{\lambda_k :\ \ a_k \neq 0\}$。注意， φ 满足 $\varphi_t = J_\Sigma \varphi$，且边界条件为 $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \mathrm{II}(\eta,\ \eta)\varphi = 0$。因此，为使 $\varphi + u$满足图形平均曲率流方程（3.10），函数 u 必须满足

$$\begin{cases} u_t - J_\Sigma u = E(u+\varphi) & \text{on } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} - \mathrm{II}^{\partial M}(\nu,\nu)u = \epsilon(u+\varphi) & \text{on } \partial\Sigma\,, \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 E 和 ϵ 与（3.7）中的相同。我们通过应用压缩映射定理证明这样的解存在。为了得到一个 I 参数族，我们必须确保对于不同的 φ，构造出的解彼此不同。为此，我们在初始条件下求解（4.1）：在时刻 $t=0$， u与所有的 φ_k正交，对每个 $k \in \{1,\dots,I\}$均如此。为了证明可以应用压缩映射得到问题（4.1）的解，我们首先需要对相应线性问题的解得到良好的估计，如下所示。

引理 4.1。 设 $f\colon \Sigma\times(-\infty,\ 0] \to \mathbb{R}$ 和 $g\colon \partial\Sigma\times(-\infty,\ 0] \to \mathbb{R}$ 是光滑函数，假设 $\|f\|_{L^{2,\ \lambda}} + \|g\|_{L^{2,\ \lambda}} < \infty$，其中 $\lambda < 0$ 不是 (2.2)的特征值。那么，存在唯一解 $w\colon \Sigma\times(-\infty,\ 0] \to \mathbb{R}$ 满足

$$\begin{cases} w_t - J_\Sigma w = f(x,t) & on\ \Sigma \\ b(w) = g(x,t) & on\ \partial\Sigma\,, \end{cases}$$

其中 $b(w) := \frac{\partial w}{\partial \eta} - \mathrm{II}^{\partial M}(\nu,\ \nu)w$，其满足

$$\int_\Sigma w(x,0)\varphi_j(x) = 0\,, \quad for\ all\ j\ such\ that\ \lambda_j < \lambda\,,$$

并且有估计

$$\|w\|_{C^{2,\alpha,\lambda}(\Sigma\times(-\infty,0])} \leq C\left(\|f\|_{C^{0,\alpha,\lambda}(\Sigma\times(-\infty,0])} + \|g\|_{C^{1,\alpha,\lambda}(\partial\Sigma\times(-\infty,0])}\right)\,,$$

其中 $C > 0$ 是一个仅取决于 Σ 和 M的常数。

证明。 我们证明，该解可以表示为两个不同问题的解之和。第一个问题是具有给定边界条件的抛物型齐次问题，我们将在命题 4.2中求解。第二个问题是具有齐次边界条件的抛物型问题，我们将在命题 4.3中求解。

命题 4.2。 当 $\lambda < \lambda_1$ 足够小时，问题

$$\begin{cases} u_t - J_\Sigma u - \bar{\lambda} u = 0 & on\ \Sigma \\ b(u) = g(x,t) & on\ \partial\Sigma\,, \end{cases} \tag{4.2}$$

有一个唯一解 $u \in C^{2,\alpha}(\Sigma \times (-\infty, 0])$。此外，该解满足估计 s

$$\|u(\cdot,t)\|_{C^0(\Sigma)} \le C\|g(\cdot,t)\|_{C^0(\Sigma)} \tag{4.3}$$

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,\ t))} \le C\|g\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma\times(t-2,\ t))}\,, \tag{4.4}$$

对所有 $t < 0$，其中常数 $C > 0$ 仅取决于 λ、 M 和 Σ。

断言的证明。 首先，我们证明，假设存在一个解，那么它满足所述估计。注意，根据Schauder 估计，定理 3.6，解满足

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))} \le C(\|u\|_{C^0(\Sigma\times(t-2,t))} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Sigma\times(t-2,t))}).$$

因此，第一个断言（4.3）推出第二个断言（4.4）。我们通过使用第一特征函数 C^0进行比较论证，得到 u 的 φ_1 -估计；我们知道该特征函数严格为正。采用记号 J_Σ， $q = |A|^2 + \mathrm{Ric}(\nu,\nu)$，对于任意 $\delta \in \mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta_\Sigma)\left(\frac{u}{\varphi_1+\delta}\right) &= \frac{u_t - J_\Sigma u}{\varphi_1+\delta} + \frac{uJ_\Sigma\varphi_1}{(\varphi_1+\delta)^2} + \frac{qu}{\varphi_1+\delta} - \frac{uq\varphi_1}{(\varphi_1+\delta)^2} + 2\nabla\left(\frac{u}{\varphi_1+\delta}\right)\cdot\frac{\nabla\varphi_1}{\varphi_1+\delta} \\ &= \frac{\bar{\lambda}u}{\varphi_1+\delta} + \frac{-\lambda_1 u\varphi_1}{(\varphi_1+\delta)^2} + \frac{qu\delta}{(\varphi_1+\delta)^2} + 2\nabla\left(\frac{u}{\varphi_1+\delta}\right)\cdot\frac{\nabla\varphi_1}{\varphi_1+\delta} \\ &= \frac{(\bar{\lambda}-\lambda_1)u\varphi_1 + \delta u(\bar{\lambda}+q)}{(\varphi_1+\delta)^2} + 2\nabla\left(\frac{u}{\varphi_1+\delta}\right)\cdot\frac{\nabla\varphi_1}{\varphi_1+\delta}\,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

而在边界上，我们有

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{u}{\varphi_1+\delta}\right) = \frac{\mathrm{II}^{\partial M}(\nu,\nu)u + g}{\varphi_1+\delta} - \frac{u\,\mathrm{II}^{\partial M}(\nu,\nu)\varphi_1}{(\varphi_1+\delta)^2} = \frac{\mathrm{II}^{\partial M}(\nu,\nu)u\delta + g(\varphi_1+\delta)}{(\varphi_1+\delta)^2}\,. \tag{4.6}$$

注意 $\varphi_1 > 0$，因此常数 h_Σ =最大值$_\Sigma\,\varphi_1$/最小值$_\Sigma\,\varphi_1$ 为正且有限。首先考虑$\delta = -\delta$最小值$\,\varphi_1$, $\delta \in (0,1)$。那么，若 $u/(\varphi_1+\delta)$ 在边界点处取得最大值，则由（4.6），在该点[3]

$$u \le \frac{g(\varphi_1+\delta)}{-\delta\,\mathrm{II}^{\partial M}(\nu,\nu)} \le \frac{|g|\max_\Sigma\varphi_1}{\bar{\delta}\min_\Sigma\varphi_1\,\mathrm{II}^{\partial M}(\nu,\nu)} \le |g|\frac{h_\Sigma}{\bar{\delta}\,\mathrm{II}^{\partial M}(\nu,\nu)}\,. \tag{4.7}$$

此外，根据（4.5），如果，它不可能具有正的内部最大值

$$(\bar{\lambda}-\lambda_1)\varphi_1 + \delta(\bar{\lambda}+q) < 0\,.$$

由于

$$(\bar{\lambda}-\lambda_1)\varphi_1 + \delta(\bar{\lambda}+q) \le (\bar{\lambda}-\lambda_1)\min_\Sigma\varphi_1 - \bar{\delta}\min_\Sigma\varphi_1(\bar{\lambda}+q) = \min_\Sigma\varphi_1(\bar{\lambda}-\lambda_1-\bar{\delta}(q+\bar{\lambda}))\,,$$

如果选择 $\bar{\delta} = {}_{-\lambda+}^{\lambda_1-\bar{\lambda}}$ 最大值$_\Sigma|q|$，则可确保这一点。估计式（4.7）现在意味着

$$u \le \frac{C(-\bar{\lambda}+1)}{\lambda_1-\bar{\lambda}}|g|\,,$$

其中， C 是一个仅取决于 M 和 Σ的常数。

[3] 观察明这里我们使用了 M 的边界沿 ν 具有正曲率这一事实，即 $\mathrm{II}^{\partial M}(\nu,\ \nu) >$ 0.

我们可以类似地通过选取 $\delta = \delta$ 最小值 φ_1 来证明一个下界，其中 $\delta \in (0, 1)$。那么，如果 $u/(\varphi_1 + \delta)$ 的最小值出现在某个边界点，由（4.6）可知该点处

$$u \geq \frac{g(\varphi_1 + \delta)}{\delta \, \mathrm{I\!I}^{\partial M}(\nu, \nu)} \geq -\frac{|g|(h_\Sigma + \bar{\delta})}{\bar{\delta} \, \mathrm{I\!I}^{\partial M}(\nu, \nu)} \,. \tag{4.8}$$

此外，由（4.5），若.....则它不能具有负的内部极小值

$$(\bar{\lambda} - \lambda_1)\varphi_1 + \delta(\bar{\lambda} + q) < 0 \,.$$

若我们选取 $\delta = {}^{\lambda_1 - \lambda}\, \max_\Sigma |q|$，即可保证这一点。估计（4.8）现在蕴含

$$u \geq -C \frac{|g|}{\lambda_1 - \bar{\lambda}} \,,$$

其中 C 是一个仅依赖于 M 和 Σ 的常数，由此我们证明了（4.3）。

最后，我们利用关于线性抛物型方程变分存在性的一个定理，证明弱意义下的解确实存在。利用算子 Q，如同（2.1）中那样，我们令

$$Q_{\bar{\lambda}}(u, v) = Q(u, v) - \int_\Sigma \bar{\lambda} u v$$

并注意到（4.2）的一个解应当满足

$$Q_{\bar{\lambda}}(u, v) + \int_\Sigma u_t v = \int_{\partial\Sigma} g v \,.$$

那么，只要 $Q_{\bar{\lambda}}$ 有界且具有强制性，已知 [LM72，第 3 章，定理 4。1], 对于任意给定的 $t_0 < 0$，存在唯一解（在分布意义下） u: $\Sigma \times [t_0, 0] \to \mathbb{R}$ 满足 $u(\cdot, t_0) = 0$。我们已导出的先验估计关于 t_0 是一致的，因此可以提取一个极限。对于一个序列 $t_0 = t_0^i \to -\infty$，该极限给出了所需的解。

因此，剩下要证明的是，$Q_{\bar{\lambda}}$ 确实有界且具有强制性，即

$$Q_{\bar{\lambda}}(u, v) \leq C \|u\|_{W^{1,2}(\Sigma)} \|v\|_{W^{1,2}(\Sigma)} \quad \text{and} \quad Q_{\bar{\lambda}}(u, u) \geq C^{-1} \|u\|^2_{W^{1,2}(\Sigma)} \,, \quad \text{for some } C > 0 \,.$$

利用霍尔德不等式和迹定理，可立即得到有界性：

$$\|u\|_{L^2(\partial\Sigma)} \leq C \|u\|_{W^{1,2}(\Sigma)} \,.$$

为证明强制性，我们使用一个更精细的迹估计：对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 C_ε 使得[4]

$$\|u\|^2_{L^2(\partial\Sigma)} \leq \varepsilon \|\nabla u\|^2_{L^2(\Sigma)} + C_\varepsilon \|u\|^2_{L^2(\Sigma)} \,. \tag{4.9}$$

注意，由（2.3）可得

$$Q_{\bar{\lambda}}(u, u) \geq (\lambda_1 - \bar{\lambda}) \|u\|_{L^2(\Sigma)} \,.$$

此外，令 $q_0 = \max_\Sigma q$，并利用迹定理，取 $\varepsilon = (2 \max\{\mathrm{II}^{\partial M}\})^{-1} > 0$，我们还有

$$Q_{\bar{\lambda}}(u, u) \geq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Sigma)} - (q_0 + \bar{\lambda}) \|u\|^2_{L^2(\Sigma)} - \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Sigma)} - C_0 \|u\|^2_{L^2(\Sigma)} \,,$$

其中 C_0 仅依赖于 Σ 和 M。将这两个估计相加，我们得到

$$2Q_{\bar{\lambda}}(u, u) \geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Sigma)} + (-q_0 + \lambda_1 - C_0 - 2\bar{\lambda}) \|u\|^2_{L^2(\Sigma)} \tag{4.10}$$

并且，选取足够小的 λ，使得 $-q_0 + \lambda_1 - C_0 - 2\lambda > 0$，我们便得到强制性。 □

接下来，我们求解一个带有齐次边界条件的抛物型问题。

(4)这一改进的迹不等式容易由迹定理的证明得出，见 [Eva10，第 5.5 节，定理 1]，方法是使用带权的杨氏不等式 ε（参见 [Eva10，§B.2 (d)]），以代替标准杨氏不等式（参见 [Eva10，§B.2 (c)]），用于方程 (1) 中。

命题 4.3。 给定 $f\colon\ \Sigma\times(-\infty,0]\to\mathbb{R}$和 $u\colon\ \Sigma\to\mathbb{R}$，使得$\|u\|_{L^2(\Sigma)}+\|f\|_{L^{2,\ \lambda}}<\infty$，且 $\lambda<0$不是特征值，则该问题存在唯一解

$$\begin{cases} v_t - J_\Sigma v = f & on\ \Sigma \\ b(v) = 0 & on\ \partial\Sigma\,, \end{cases}$$

对所有 $v(\cdot,t)\in L^2(\Sigma)\ \ t\in(-\infty,0]$，且

$$\int_\Sigma v(x,0)\varphi_j(x) = -\int_\Sigma u(x)\varphi_j(x)\,,\quad for\ all\ j\ such\ that\ \lambda_j<\lambda\,.$$

此外，该解满足

$$\|v\|_{L^{2,\lambda}(\Sigma\times(-\infty,0])}\le C(\|u\|_{L^2(\Sigma)}+\|f\|_{L^{2,\lambda}(\Sigma\times(-\infty,0])}) \tag{4.11}$$

其中常数 $C>0$ 仅取决于 M 和 Σ。

命题证明。 注意到，这样的解应满足

$$\int_\Sigma \partial_t v\varphi+\int_\Sigma -J_\Sigma v\varphi=\int_\Sigma\partial_t v\varphi+\int_\Sigma\nabla v\cdot\nabla\varphi-\int_\Sigma quv-\int_{\partial\Sigma}\mathrm{I\!I}^{\partial M}(\nu,\nu)v\varphi=\int_\Sigma f\varphi$$

因此，形式上，该解由下式给出

$$v(x,t)=\sum_{j=1}^\infty v_j(t)\varphi_j(x)\,,$$

with

$$v_j(t)=\begin{cases} e^{-2\lambda_j t}a_j-\int_t^0 e^{\lambda_j(s-t)}f_j(s) & \text{for } j \text{ such that } \lambda_j<\lambda \\ \int_{-\infty}^t e^{\lambda_j(s-t)}f_j(s) & \text{otherwise}\,, \end{cases}$$

其中

$$f_j(s)=\begin{cases} \lambda_j a_j e^{-2\lambda_j s}+\int_\Sigma f(x,s)\varphi_j(x) & \text{for } j \text{ such that } \lambda_j<\lambda \\ \int_\Sigma f(x,s)\varphi_j(x) & \text{otherwise}\,, \end{cases}$$

and

$$a_j=\begin{cases} -\int u(x)\varphi_j(x) & \text{for } j \text{ such that } \lambda_j<\lambda \\ 0 & \text{otherwise}\,. \end{cases}$$

注意，形式上，

$$\begin{aligned} v_t(x,t)&=\sum_{j=0}^\infty v_j'(t)\varphi_j(x)=\sum_{j=0}^\infty f_j(t)\varphi_j(x)-\sum_{j:\ \lambda_j<\lambda}\lambda_j e^{-2\lambda_j t}a_j\varphi_j-\sum_{j=0}^\infty\lambda_j v_j\varphi_j \\ &=f+\sum_{j=0}^\infty v_j J_\Sigma\varphi_j=f+J_\Sigma v\,. \end{aligned}$$

现在我们想证明上述无穷级数是良定义的。选取 $\delta>0$，使得 $\lambda+2\delta<0$，且 $(-2\delta+\lambda,\ \lambda+2\delta)$ 不包含任何特征值。对于所有满足 $\lambda_j<\lambda$ 的 j，利用 $\lambda_j-\lambda+\delta<0$，我们估计

$$\begin{aligned} |v_j-e^{-2\lambda_j t}a_j|^2&\le\left(\int_t^0 e^{2(\lambda_j-\lambda+\delta)(s-t)}\right)\left(\int_t^0 e^{2(\lambda-\delta)(s-t)}|f_j(s)|^2\right) \\ &\le\frac{1}{2(\lambda-\delta-\lambda_j)}\int_t^0 e^{2(\lambda-\delta)(s-t)}|f_j(s)|^2\,, \end{aligned}$$

对于满足 $\lambda_j>\lambda$ 的 j，利用 $\lambda_j-\lambda-\delta>0$，我们估计得

$$\begin{aligned} |v_j|^2&\le\left(\int_{-\infty}^t e^{2(\lambda_j-\lambda-\delta)(s-t)}\right)\left(\int_{-\infty}^t e^{2(\lambda+\delta)(s-t)}|f_j(s)|^2\right) \\ &\le\frac{1}{2(\lambda_j-\lambda-\delta)}\int_{-\infty}^t e^{2(\lambda+\delta)(s-t)}|f_j(s)|^2\,. \end{aligned}$$

因此，由于根据帕塞瓦尔公式

$$\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(s)|^2 \le 2\|f(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Sigma)} + 2\sum_{j:\,\lambda_j<\lambda}\lambda_j^2 a_j^2 e^{-4\lambda_j s} \le 2\|f(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Sigma)} + 2\lambda^2\|u\|^2_{L^2(\Sigma)}e^{-4\lambda s}\,,$$

我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} v_j^2 &\le 2\|u\|^2_{L^2(\Sigma)}e^{-4\lambda t} + \frac{2}{\delta}\int_t^0 e^{2(\lambda-\delta)(s-t)}\left(\|f(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Sigma)} + \lambda_1^2\|u(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Sigma)}e^{-4\lambda s}\right) + \\ &\quad + \frac{2}{\delta}\int_{-\infty}^t e^{2(\lambda+\delta)(s-t)}\|f(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Sigma)} \\ &\le 2\|u\|^2_{L^2(\Sigma)}e^{-4\lambda t} + \frac{2}{\delta}\|f\|^2_{L^{2,\lambda}}e^{-2\lambda t} + \frac{\lambda_1^2}{-(\lambda+\delta)\delta}\|u\|^2_{L^2(\Sigma)}e^{-2\lambda t} < \infty\,.\end{aligned}$$

这证明了 $v(x,\ t)$ 定义良好，并且是所需问题的一个解。最后，再次利用帕塞瓦尔公式，我们有

$$\|v(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Sigma)} \le C\|u\|^2_{L^2(\Sigma)}e^{-4\lambda t} + C\|f\|^2_{L^{2,\lambda}}e^{-2\lambda t},$$

其中 C 仅取决于 Σ，这意味着（4.11）。 □

现在，给定满足引理 4.1 假设的 f、g，其中 $\|f\|_{L^{2,\ \lambda}} + \|g\|_{L^{2,\ \lambda}} < \infty$，我们令 u 为命题 4.2 中问题（4.2）的解，其中 $\lambda < 2\lambda_1$ 固定，并取给定的 g。于是，根据命题 4.2，我们有 u 满足（4.3）和（4.4），其中 C 仅取决于 Σ 和 M。我们还令 v 为命题 4.3 中给出的唯一解，其中 $u = u(\cdot,0)$（使用前述的 u），并将 f 替换为 $\bar{}\, f - \lambda u$。也就是说

$$\begin{cases} v_t - J_\Sigma v = f - \bar{\lambda}u & \text{on } \Sigma \\ b(v) = 0 & \text{on } \partial\Sigma\,, \end{cases}$$

并且它满足以下估计

$$\|v\|_{L^{2,\lambda}} \le C\|u(\cdot,0)\|_{L^2(\Sigma)} + \|f - \bar{\lambda}u\|_{L^{2,\lambda}} \le C(\|f\|_{L^{2,\lambda}} + \|g\|_{L^{2,\lambda}(\partial\Sigma\times(-\infty,0])})\,, \tag{4.12}$$

其中在最后一个不等式中，我们使用了（4.3），且 C 仅依赖于 M 和 Σ。现在考虑$w = u + v$，其中 u 和 v 如上所述。于是

$$\begin{cases} w_t - J_\Sigma w = \bar{\lambda}u + f - \bar{\lambda}u = f & \text{on } \Sigma \\ b(w) = g & \text{on } \partial\Sigma \end{cases}$$

and

$$\int_\Sigma w(x,0)\varphi_j(x) = 0\,, \quad \text{for all } j \text{ such that } \lambda_j < \lambda\,.$$

此外，由（4.3）和（4.12）可得

$$\|w\|_{L^{2,\lambda}} \le \|u\|_{L^{2,\lambda}} + \|v\|_{L^{2,\lambda}} \le C(\|f\|_{L^{2,\lambda}} + \|g\|_{L^{2,\lambda}(\partial\Sigma\times(-\infty,0])})\,.$$

最后，由抛物型 Schauder 估计和 定理 3.6，w 满足

$$\|w\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))} \le C\left(\|w\|_{L^2(\Sigma\times(t-2,t))} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Sigma\times(t-2,t))} + \|g\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Sigma\times(t-2,t))}\right)$$

并乘以 $e^{\lambda t}$ 后，我们得到

$$\begin{aligned}\|w\|_{C^{2,\alpha,\lambda}(\Sigma\times(-\infty,0])} &\le C\left(\|w\|_{L^{2,\lambda}(\Sigma\times(-\infty,0])} + \|f\|_{C^{0,\alpha,\lambda}(\Sigma\times(-\infty,0])} + \|g\|_{C^{1,\alpha,\lambda}(\partial\Sigma\times(-\infty,0])}\right) \\ &\le C\left(\|f\|_{C^{0,\alpha,\lambda}(\Sigma\times(-\infty,0])} + \|g\|_{C^{1,\alpha,\lambda}(\partial\Sigma\times(-\infty,0])}\right)\,,\end{aligned}$$

这就是引理所需的估计。通过考察两个可能解之差，该估计还可推出解的唯一性。□

现在我们已经具备了所有要素，可以证明存在方程（4.1）的解。

定理 4.4. 设 $\varphi = \sum_{k=1}^{I} a_k \varphi_k e^{-\lambda_k t}$，并设 $\lambda \in (\lambda_I, 0)$ 和 $\alpha \in (0, 1)$。存在 $\varepsilon > 0$，它依赖于 λ 和 α，使得若 $|a| := \left(\sum_{k=1}^{I} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$，则存在唯一的 $C^{2,\alpha}$- 函数 $u\colon \Sigma \times (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$，满足方程 *(4.1)*（或者等价地，$\varphi + u$ 满足图形平均曲率流方程 *(3.10)*），并且满足

$$\|u\|_{C^{2,\alpha,\lambda}(\Sigma\times(-\infty,0])} < \varepsilon$$

and

$$\int_\Sigma u(x,0)\varphi_k(x) = a_k\,, \quad \textit{for all } k = 1, \dots, I\,.$$

备注 4.5。 注意，加权 H¨older 范数的界意味着解 u 会迅速指数衰减至零。

备注 4.6。 这里指出，如果 J 是满足 $a_J \neq 0$的最大指标，那么对于任意满足 $\lambda \in (\lambda_J, 0)$ 的 $\lambda < 0$，如定理 4.4 中的解可以构造出来，并满足

$$\|u\|_{C^{2,\alpha,\lambda}(\Sigma\times(-\infty,0])} < \infty$$

and

$$\int_\Sigma u(x,0)\varphi_k(x) = a_k\,, \quad \text{for all } k \text{ such that } \lambda_k \le \lambda_J\,.$$

证明。 对于给定的 λ 和 α，以及 $\varepsilon > 0$，我们考虑函数空间

$$\mathcal{C}_\varepsilon = \{u\colon \Sigma \times (-\infty, 0] \to \mathbb{R} \ : \ \|u\|_{C^{2,\alpha,\lambda}} < \varepsilon\}$$

对于 $u \in \mathcal{C}_\varepsilon$，我们定义 $S(u) = v$ 为一个满足以下条件的解

$$\begin{cases} v_t - J_\Sigma(v) = E(u+\varphi) & \text{on } \Sigma \\ b(v) = \epsilon(u+\varphi) & \text{on } \partial\Sigma\,. \end{cases}$$

注意，由 命题 3.7，

$$\|E(u+\varphi)\|_{C^{0,\alpha,\lambda}} + \|\epsilon(u+\varphi)\|_{C^{1,\alpha,\lambda}(\partial\Sigma\times(-\infty,0])} \le C\|u+\varphi\|^2_{C^{2,\alpha,\lambda}} \le C(\|u\|^2_{C^{2,\alpha,\lambda}} + |a|^2)\,,$$

因此，由引理 4.1，存在唯一解 $S(u) = v$ 满足

$$\|S(u)\|_{C^{2,\alpha,\lambda}} \le C(\|u\|^2_{C^{2,\alpha,\lambda}} + |a|^2)$$

and

$$\int_\Sigma S(u)(x,0)\varphi_j(x) = 0\,, \quad \text{for all } j \text{ such that } \lambda_j < \lambda\,.$$

因此，通过选取足够小的 ε，我们得到，对于 $|a| < \varepsilon$, $S(u) \in \mathcal{C}_\varepsilon$，因此 S 将 $\mathcal{C}_\varepsilon$ 映射到自身。

命题 3.7 也可用于证明 S 是一个压缩映射。为此，注意若$u_1, u_2 \in \mathcal{C}_\varepsilon$，则由引理 4.1

$$\begin{aligned}\|S(u_1) - S(u_2)\|_{C^{2,\alpha,\lambda}} \le C\big(&\|E(u_1+\varphi) - E(u_2+\varphi)\|_{C^{0,\alpha,\lambda}} + \\ &+ \|\epsilon(u_1+\varphi) - \epsilon(u_2+\varphi)\|_{C^{1,\alpha,\lambda}(\partial\Sigma\times(-\infty,0])}\big)\end{aligned}$$

并利用命题 3.7，右侧有如下界

$C\|u_1 - u_2\|_{C^{2,\ \alpha,\ \lambda}}(\|u_1+\varphi\|_{C^{2,\ \alpha,\ \lambda}} + \|u_2+\varphi\|_{C^{2,\ \alpha,\ \lambda}}) \le C\|u_1 - u_2\|_{C^{2,\ \alpha,\ \lambda}}(\|u_1\|_{C^{2,\ \alpha,\ \lambda}} + \|u_2\|_{C^{2,\ \alpha,\ \lambda}} + |a|)$。因此，选取足够小的 ε，我们有

$$\|S(u_1) - S(u_2)\|_{C^{2,\alpha,\lambda}} \le \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|_{C^{2,\alpha,\lambda}}\,.$$

因此， S 在 C_ε中是一个压缩映射。这就完成了证明，压缩映射定理也保证了解的唯一性。□

5. Rigidity of the constructed solutions

考虑到 $L^2(\Sigma)$-正交归一基 $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ 由雅可比算子（2.2）的特征函数构成，且如第 2.1 节所示，我们可以将任意函数 $u \in L^2(\Sigma)$写成

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi_k, u\rangle \varphi_k \,,$$

其中要注意，无穷级数被理解为在 $L^2(\Sigma)$ 中收敛。因此，即使所有的φ_k都满足边界条件 $b(\varphi_k) = \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta} - \mathrm{II}^{\partial M}(\nu, \nu)\varphi_k = 0$，也不能由此推出$u$同样满足该条件。我们使用记号

$$\Phi^+, \Phi^-, \Phi^0$$

分别表示雅可比算子的正、负和零特征空间的闭包。注意，Φ^- 和 Φ^0 是有限维的。稍微滥用一下记号，我们用相同的符号表示相应的线性投影。

定义 5.1。设 $u\colon \Sigma \times (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ 是一个函数，且对所有 $t \in (-\infty, 0]$，均有 $u(\cdot, t) \in L^2(\Sigma)$。我们将 u^+，u^-，u^0 定义为 u 在相应特征空间上的投影，其中投影定义在每个 t-切片上，即

$$u^+(\cdot,t) := \Phi^+(u(\cdot,t))\,, \quad u^-(\cdot,t) := \Phi^-(u(\cdot,t))\,, \quad u^0(\cdot,t) := \Phi^0(u(\cdot,t))\,.$$

注意，u^- 与 u^0 均为有限和

$$u^- = \sum_{k\,:\,\varphi_k \in \Phi^-} \langle \varphi_k, u\rangle_{L^2(\Sigma)} \varphi_k\,, \quad u^0 = \sum_{k\,:\,\varphi_k \in \Phi^0} \langle \varphi_k, u\rangle_{L^2(\Sigma)} \varphi_k\,.$$

由于 u^+ 不能写成有限和，我们通常改用更方便的表达式

$$u^+ = u - u^- - u^0\,.$$

接下来我们证明，如果 u 满足线性方程，则其投影如定义 5.1 所述，满足适当定义的类似方程。

引理 5.2. 设 $u\colon \Sigma \times (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ 是

$$\begin{cases} u_t - J_\Sigma u = f & on\ \Sigma \\ b(u) = g & on\ \partial\Sigma\,, \end{cases}$$

对于给定的 $f\colon \Sigma \times (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ 以及 $g\colon \partial\Sigma \times (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$。则 u,$U := \Phi(u)$的三个投影中的任意一个，其中 $\Phi = \Phi^+, \Phi^-$ 或 Φ^0，如定义 *5.1*所定义的那样，满足

$$Q(U,\varphi) + \int_\Sigma U_t \varphi = \int_\Sigma f\Phi(\varphi) + \int_{\partial\Sigma} g\Phi(\varphi)\,, \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Sigma)\,, \tag{5.1}$$

其中 Q 如(2.1)所示。

证明。利用双线性型 Q, u 满足

$$Q(u,\varphi) + \int_\Sigma u_t \varphi = \int_\Sigma f\varphi + \int_{\partial\Sigma} g\varphi\,. \tag{5.2}$$

首先注意，投影 $u^\pm$ 和 u^0具有与 u相同的正则性。这是因为 Φ^-, Φ^0是有限维的，且 $u^+ = u - u^- - u^0$，如 定义 5.1中所述。因此，式（5.1）中的各项都有明确的定义。

首先考虑 $\Phi = \Phi^-$ 或 Φ^0。在这种情况下，$U = \Phi(u)$是特征函数的有限线性组合，因而在边界上满足 $b(U) = 0$。因此，

$$Q(U,\varphi) = \int_\Sigma -J_\Sigma U\varphi = \int_\Sigma -J_\Sigma \varphi U = \begin{cases} \int_\Sigma -J_\Sigma \varphi u = Q(u,\varphi) & \text{if } \varphi \in \Phi \\ 0 & \text{if } \varphi \in \Phi^\perp\,. \end{cases}$$

此外

$$\int_\Sigma \varphi U_t = \begin{cases} \int_\Sigma \varphi u_t & \text{if } \varphi \in \Phi \\ 0 & \text{if } \varphi \in \Phi^\perp \end{cases}.$$

这些结果与（5.2）共同证明了5.1）对 $U \in \Phi^- \cup \Phi^0$成立。

为了证明最后一种情形，我们写作 $u^+ = u - u^0 - u^-$，并计算

$$Q(u^+, \varphi) = Q(u - u^0 - u^-, \varphi) = Q(u, \varphi) - Q(u^0, \varphi) - Q(u^-, \varphi),$$

根据前一种情形，若 $\varphi \in \Phi^+$，则 $Q(u^0, \varphi) = Q(u^-, \varphi) = 0$。若 $\varphi \in (\Phi^+)^\perp = \Phi^0 + \Phi^-$，则得到

$$Q(u^0, \varphi) + Q(u^-, \varphi) = Q(u, \Phi^0(\varphi)) + Q(u, \Phi^-(\varphi)) = Q(u, \varphi).$$

特别地，我们得到

$$Q(u^+, \varphi) = Q(u, \Phi(\varphi)).$$

此外，再次利用前一种情形，

$$\int_\Sigma u_t^+ \varphi = \int_\Sigma (u - u^0 - u^-)_t \varphi = \begin{cases} \int \varphi u_t & \text{if } \varphi \in \Phi^+ \\ 0 & \text{if } \varphi \in (\Phi^+)^\perp \end{cases}.$$

根据（5.2），这就完成了最后一种情形 $U = u^+ \in \Phi^+$ 下（5.1）的证明。 □

引理 5.2 中给出的投影演化方程 使我们能够估计它们的 L^2-范数的演化。这与 [ADS19，引理 5.5] 类似，只是此处将其推广到了双线性算子 Q。

引理 5.3. 设 $u\colon \Sigma \times (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ 是自由边界平均曲率流 (3.10)的一个解。存在常数 $\varepsilon > 0$ 和 $C > 0$，它们仅依赖于 Σ 和 M，使得若

$$\|u(\cdot, t)\|_{C^1(\Sigma)} < \varepsilon \quad \forall t \le 0, \tag{5.3}$$

则 L^2 范数下 u 的投影（见 定义 5.1）满足：

$$\begin{aligned} \frac{d\|u^+(\cdot,t)\|_{L^2(\Sigma)}}{dt} &\le -\lambda^+ \|u^+(\cdot,t)\|_{L^2(\Sigma)} + C\|u(\cdot,t)\|_{C^2(\Sigma)}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Sigma)}, \\ \frac{d\|u^-(\cdot,t)\|_{L^2(\Sigma)}}{dt} &\ge -\lambda_I \|u^-(\cdot,t)\|_{L^2(\Sigma)} - C\|u(\cdot,t)\|_{C^2(\Sigma)}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Sigma)}, \\ \left|\frac{d}{dt}\|u^0(\cdot,t)\|_{L^2(\Sigma)}\right| &\le C\|u(\cdot,t)\|_{C^2(\Sigma)}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Sigma)}, \end{aligned}$$

w其中 λ^+ 是最小正特征值，λ_I 是最大负特征值 .

证明。 设 $U\colon \Sigma \times (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ 表示任意一个投影，如 定义 5.1所示。于是，利用引理 5.2，

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|U(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Sigma)} = -Q(U,U) + \int_\Sigma E(u)U + \int_{\partial\Sigma} \epsilon(u)U. \tag{5.4}$$

右侧的最后两个积分，对于任意时间切片 t，利用柯西–施瓦茨不等式和命题 3.2，可将其绝对值估计为

$$\|E(u)\|_{L^2(\Sigma)}\|U\|_{L^2(\Sigma)} + \|\epsilon(u)\|_{L^2(\partial\Sigma)}\|U\|_{L^2(\partial\Sigma)} \le C\|u\|_{C^2(\Sigma)}\|u\|^2_{W^{1,2}(\Sigma)}. \tag{5.5}$$

这些假设使我们可以使用 命题 3.5，从而得到

$$\|u(\cdot,t)\|_{W^{1,2}(\Sigma)} \le C\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Sigma)} \quad \forall t < 0. \tag{5.6}$$

因此，式（5.5）与式（5.6）结合可得

$$\left|\int_\Sigma E(u)U + \int_{\partial\Sigma} \epsilon(u)U\right| \le C\|u(\cdot,t)\|_{C^2(\Sigma)}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Sigma)}$$

最后，注意到 $Q(U, U) \ge \lambda^+\|U\|^2_{L^2}$当 $U \in \Phi^+$，$Q(U, U) \le \lambda_I\|U\|^2_{L^2}$当 $U \in \Phi^-$，以及 $Q(U, U) = 0$当 $U \in \Phi^0$。将这些估计代入（5.4）即可完成证明。 □

接下来我们证明，任何源自 Σ 的古老解都是定理 4.4中构造出的解，前提是收敛速度足够快。

定理 5.4. 设 $u\colon \Sigma\times(-\infty,0]\to\mathbb{R}$ 是自由边界平均曲率流 (3.10)的一个光滑解。存在常数 $\varepsilon>0$，仅依赖于 Σ 和 M，使得若

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma\times(-\infty,0])}<\varepsilon\,, \tag{5.7}$$

and

$$\liminf_{t\to-\infty}|t|\|u(\cdot,t)\|_{C^0(\Sigma)}=0\,, \tag{5.8}$$

那么，可能经过时间平移后，u 与 定理 *4.4* 中构造的某个解重合。

注 5.5. 请注意，在无边界的情形下，类似的唯一性结果可见于 [CM22，定理 4。1]事实上，鉴于我们此前在自由边界情形下的结果，本定理的证明思路类似。注意，[CM22，定理 4。1] 中的假设有所不同，但事实证明比我们的假设更强。事实上，假设 [CM22，(4.1)、(4.2)]:

$$\|u\|_{C^{1,\alpha'}(\Sigma\times(-\infty,0])}<\infty\quad\text{and}\quad\|u(\cdot,t)\|_{C^1(\Sigma)}<\varepsilon\quad\forall t\le 0\,,$$

imply (5.7)，对于 $\alpha<\alpha'$，由 注 3.10 得出。此外，假设 [CM22，(4.3)]:

$$\|u\|_{L^1(\Sigma\times(-\infty,0])}<\infty$$

由此可得（5.8），这要归功于引理 3.9 （3.12）（事实上，注意到由于 Σ 是紧致的，L^1-范数与 L^2-范数可比，且 $\|u\|_{C^0(\Sigma)}\le 1$）。

证明。 鉴于我们此前在自由边界情形下得到的所有结果，本定理的证明现在可按 [CM22，定理 41] 的步骤进行。因此，我们仅在此给出证明概要，并指出边界情形所需的调整。在整个证明过程中，$C>0$ 表示一个仅依赖于 Σ 和 M 的常数。

由于 u 满足假设，我们可以调用 引理 3.9 中给出的抛物型 Schauder 估计推论，从而推出

$$f(t):=\|u(\cdot,t)\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)}\le C\varepsilon\,. \tag{5.9}$$

首先，我们声称可以应用常微分方程引理 [CM22，引理 B1]（这是 [MZ98，引理 A1] 的一个改进版本），从而推出

$$\|u^+(\cdot,t)\|_{L^2(\Sigma)}+\|u^0(\cdot,t)\|_{L^2(\Sigma)}\le Cf(t)\|u^-(\cdot,t)\|_{L^2(\Sigma)}\,. \tag{5.10}$$

注意到，由于它们在引理 5.3 中给出的演化方程、$f(t)$ 足够小，以及由假设 (5.8) 可得 $\liminf_{s\to-\infty}y(s)=0$，量 $x=\|u^0(\cdot,t)\|_{L^2(\Sigma)}$、$y=\|u^+(\cdot,t)\|_{L^2(\Sigma)}$ 和 $z=\|u^-(\cdot,t)\|_{L^2(\Sigma)}$ 满足 [CM22，引理 B.1]，的假设。随后，[CM22，引理 B.1] 将给出（5.10），前提是我们排除这种情况：

$$y+z\le Cf(t)x\,. \tag{5.11}$$

事实上，（5.11）结合引理 3.9将推出

$$f(t)\le C\|u\|_{L^2(\Sigma\times(t-1,t))}\le C\|u^0\|_{L^2(\Sigma\times(t-1,t))}\le\max_{s\in(t-1,t)}\|u^0(\cdot,s)\|_{L^2(\Sigma)}\,. \tag{5.12}$$

利用 x 在引理 5.3中给出的演化方程，可得 $V(t):=$最大值$_{s\in(t-1,t)}\|u^0(\cdot,\ s)\|_{L^2(\Sigma)}$满足 $V'\le CV^2$。积分后可知 $V(t)\ge C|t|^{-1}$ 对每个 $t\in(-\infty,\ 0]$ 充分小时都成立，这与假设（5.8）矛盾。因此，（5.10）成立。

接下来，我们可以原样应用 [CM22、断言 4.5、4.6 以及（4.19）]，证明过程无需改动。注意，在 $f(t)$中使用的 [CM22中的断言 4.6] 的可积性可由 [CM22中的断言 4.5]推出。[(5)] 因此，我们得到存在 $J\in\{1,\dots,I\}$ 使得

$$f(t)\le Ce^{-\lambda_J t}\quad\forall t<0\,,$$

(5)在 [CM22]，中，$f(t)$ 的可积性可由假设$\|u\|_{L^1(\Sigma)}<\infty$ 更直接地推出。

并且，定义 $u^\tau(\cdot,\ t) := u(\cdot,\ t-\tau)$，其中 $\tau > 0$，我们有

$$\limsup_{\tau\to\infty} e^{-\lambda_J \tau}\|\Phi^-(u^\tau)(\cdot,0)\|_{L^2(\Sigma)} > 0\,.$$

令 $a_k := \langle u^\tau(\cdot,\ 0)\ \varphi_k(\cdot)\rangle_{L^2(\Sigma)}$ 对于 $k = 1, \ldots\ldots, I$ 并设 $\varphi^\tau := \sum_{k=1}^I a_k\varphi_k e^{-\lambda_k t}$。我们要证明，当 τ 充分大时，$u^\tau - \varphi^\tau$ 就是我们在 定理 4.4 中构造的解，其中 $\varphi = \varphi^\tau$。首先，注意到

$$|a| = \left(\sum_{k=1}^I a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \|u^\tau(\cdot,0)\|_{L^2(\Sigma)} = \|u(\cdot,-\tau)\|_{L^2(\Sigma)} \le Ce^{\lambda_J\tau}\,.$$

此外，根据 L^2-估计（见 [CM22，命题 4.7]，）以及 Schauder 估计定理 3.6，我们有

$$\|u^\tau - \varphi^\tau\|_{C^{2,\alpha},\lambda} \le Ce^{2\lambda_J\tau}, \quad \text{for some } \lambda \in (\lambda_I, 0)\,.$$

因此，我们可以选取 τ 充分小，使得 $|a| < \varepsilon$ 且 $\|u^\tau - \varphi^\tau\|_{C^{2,\ \alpha,\ \lambda}} < \varepsilon$，对于 ε如 定理 4.4所述，这表明 $u^\tau - \varphi^\tau$ 与在定理 4.4中构造的唯一解一致。□

推论 5.6. 若 Σ 是非退化的，则定理 *5.4*无需假设(5.8) .

证明。 这直接由定理 5.4的证明得出。事实上，假设 (5.8) 在那里仅用于在使用 [CM22，引理 B 时排除 (1]。然而，如果 Σ 上的雅可比算子的核为空，则 $x = 0$ 显然成立，因此非平凡解不可能出现 (5.11)。□

注 5.7。 按照 [CM22，引理 49]中的论证，上述推论中的非退化性假设可弱化为可积性。在这种情况下，结论中必须允许 Σ 收敛到邻近的极小超曲面，但结果仍然成立。事实上，假设无法进一步弱化，因为存在一些平均凸古老解，它们在向后收敛到退化极小超曲面时，收敛速度慢于指数速度。

6. Constructing mean-convex ancient solutions

本节将展示一种不同于 Σ第 4 节所介绍的一般方法，用以构造从极小超曲面 Σ出发的自由边界平均曲率流的平均凸古老解。对于平均凸解，可以采用一种更具几何意义的构造方法：先通过沿第一特征值扰动极小超曲面来构造次解与上解。这里需要指出，沿第一特征值扰动极小超曲面并不像在闭情形下那么直接，因为要保持正交条件并非易事。受 [Amb15，命题 10]（另见 [MN13，命题 5。1], [Maz22，第 4 节。5]）的启发，我们通过巧妙运用隐函数定理实现了这一点，从而证明可以用自由边界平均凸超曲面将 Σ 的一个邻域叶状分解（即这些超曲面的平均曲率向量指向远离 Σ的方向）。

事实上，我们将在下述命题 6.1中证明一个更一般的版本。我们假设 Σ是实数域 M中的一个适当嵌入的光滑自由边界超曲面，但不一定是极小的。在该命题中，我们考虑第 ν 节和 ψ_Σ 第3.1 节中定义的量。具体而言，ν 是一个向量场，在 M中延拓了 Σ的一个单位法向量选取，并满足 $\bar{\mu}$ 与 ∂M 相切，且 ψ_Σ 是经过ν 并在零时刻经过 Σ 的流。

命题 6.1. 设 Σ 是实数域 M 中一个适当嵌入的光滑自由边界超曲面，并固定 $k = 1, \ldots\ldots, ind(\Sigma)$。那么，对于每个 $\rho \in (\lambda_I, 0)$ 和 $\delta > 0$，存在 $T \in \mathbb{R}$ 和一个 $C^{2,\alpha}$-函数 $u\colon \Sigma \times (-\infty, T) \to \mathbb{R}$，满足 $\|u(\cdot,t)\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)} < \delta$，对所有 $t \in (-\infty, T)$ 均成立，并满足以下性质。考虑函数

$$w(x,t) = \varphi_k e^{-\lambda_k t} + u(x,t)\,,$$

其中回顾一下,在 φ_k 处是对应于特征值 λ_k的特征函数。然后，超曲面

$$\Sigma_t = \Sigma_{w(\cdot,t)} := \{\psi_\Sigma(x, w(x,t)) \ :\ x \in \Sigma\} \tag{6.1}$$

是平均曲率为 H_w 的自由边界，满足

$$\frac{H_w - H_\Sigma}{\langle \nu_w, \bar{\nu}\rangle} = -\lambda_k \varphi_k e^{-\lambda_k t} - \rho u\,, \tag{6.2}$$

其中， ν_w 是指向 Σ_t上方的法向量。此外，

$$|u(x,t)| \le Ce^{-2\lambda_k t}\,, \quad |u_t(x,t)| \le Ce^{-2\lambda_k t}\,. \tag{6.3}$$

特别地，当 $t \to -\infty$时， Σ_t 以指数速度收敛到 Σ 。

注记 6.2。 注意，我们只考虑负特征值，因为这样一来，当 $t \to -\infty$时， $\varphi_k e^{-\lambda_k t}$会收敛到 0。

这个命题的思路是：如果 Σ 是极小的，我们期望存在一个古老平均曲率流，使得它在 Σ上的图在一阶近似下，对于 $t \in (-\infty, T)$，表现为 $\varphi_k e^{-\lambda_k t}$，且其平均曲率在一阶近似下为 $-\lambda_k \varphi_k e^{-\lambda_k t}$。我们的命题并未直接给出这个古老解，但它在一阶近似中加入了修正项 u ，以满足边界处的正交条件。事实上，请注意，先验上 $\varphi_k e^{-\lambda_k t}$ 在 Σ 上的图不一定与 M的边界正交。

注记 6.3。 假设 Σ 是一个不稳定的自由边界极小超曲面。注意，对所有 φ_k， $k > 1$都会变号，而 $\varphi_1 > 0$。因此，正如 [HK25第 2 节2], 中所观察到的， $\varphi_1 e^{-\lambda_1 t}$的图在 Σ的一个邻域内构成平均凸叶状分解。不过，如上文所述，这不一定是自由边界。在 命题 6.1中，我们找到了一个低阶修正项，使超曲面 Σ_t构成光滑的自由边界平均凸叶状分解，覆盖 Σ的一个邻域。

注记 6.4。 在 w 中构造的函数 命题 6.1满足

$$\|w(\cdot,t)\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)} \le Ce^{-\lambda_k t} \quad \forall t \in (-\infty, T)\,.$$

事实上，由于 $J_\Sigma(w) + E(w) = -\lambda_k \varphi_k e^{-\lambda_k t} - \rho u$，椭圆 Schauder 估计结合命题 3.7可得

$$\begin{aligned}
\|w\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)} &\le C(\|w\|_{C^0(\Sigma)} + \|E(w) + \lambda_k \varphi_k e^{-\lambda_k t} + \rho u\|_{C^{0,\alpha}(\Sigma)} + \|\epsilon(w)\|_{C^{1,\alpha}(\partial\Sigma)}) \\
&\le C(\|w\|_{C^0(\Sigma)} + \|w\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma)}\|w\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)} + e^{-\lambda_k t} + \rho\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Sigma)}) \\
&\le C(e^{-\lambda_k t} + (\|w\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma)} + \rho)\|w\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)})\,.
\end{aligned}$$

此外，回忆一下 $\|w\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)} \le Ce^{-\lambda_k t} + \|u\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)} < Ce^{-\lambda_k t} + \delta$。因此，当 $\delta > 0$和 $\rho > 0$充分小时，且时间 $t \in (-\infty, T)$充分小时，我们可以将左端的项 $(\|w\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma)} + \rho)\|w\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)}$ 吸收，并得到所需结论。

证明。 注意到 $\rho \in (\lambda_I, 0)$不是 Σ上雅可比算子的特征值，即下述问题不存在非平凡解

$$\begin{cases} -J_\Sigma v = \rho v & \text{on } \Sigma \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = \mathrm{II}^{\partial M}(\nu,\nu)v & \text{on } \partial\Sigma\,. \end{cases}$$

现在，采用变量替换 $\tau = e^{-\lambda_k t}$ 并寻找定义在$(-\delta, \delta)$中的 τ （对某个 $\delta > 0$）是方便的。然后，我们定义

$$h_{\varphi_k\tau+u}(x,\tau) := -\lambda_k \varphi_k \tau \langle \nu_{\varphi_k\tau+u}, \bar{\nu}\rangle\,,$$

以及映射 Φ: $(-\delta, \delta) \times (B(0, \delta) \subset C^{2,\alpha}(\Sigma)) \to C^{0,\alpha}(\Sigma) \times C^{1,\alpha}(\partial\Sigma)$为

$$\Phi(\tau,u) = (H_{\varphi_k\tau+u} - H_\Sigma - h_{\varphi_k\tau+u} + \rho u\langle \nu_{\varphi_k\tau+u}, \bar{\nu}\rangle, \langle \nu_{\varphi_k\tau+u}, \eta_{\varphi_k\tau+u}\rangle)\,.$$

回顾 $\nu_{\varphi_k\tau+sv}$ 与 $\bar{\nu}$ 在 $\tau = 0$ 和 $s = 0$时重合，且 $\frac{d}{ds}|_{s=0}\langle \nu_{sv}, \bar{\nu}\rangle = 0$ （参见 第 3.1 节）。因此，根据 [Amb15，命题 17] （另见其中命题 10 的证明），我们有

$$D\Phi_{(0,0)}(0,v) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\Phi(0,sv) = \left(J_\Sigma v + \rho v, -\frac{\partial v}{\partial \eta} + \mathrm{II}^{\partial M}(\nu,\nu)v\right)\,.$$

则， $D\Phi_{(0,0)}(0,\cdot): C^{2,\alpha}(\Sigma) \to C^{0,\alpha}(\Sigma) \times C^{1,\alpha}(\partial\Sigma)$ 是可逆的。事实上，根据 ε的选取，它是单射；根据 [LU68，定理 3.2，第 137]页，它是满射。

因此，根据隐函数定理（必要时取更小的 $\delta>0$），存在一个函数u: $(-\delta,\delta) \to B(0,\delta) \subset C^2,\alpha(\Sigma)$，使得 $u(0)=0$且 $\Phi(\tau,u(\tau))=0$，对所有 $\tau\in(-\delta,\delta)$均成立。注意，由于 Φ是光滑的，因此 u也光滑。定义 $w(x,\tau)=\varphi_k(x)\tau+u(\tau)(x)$，则超曲面 $\Sigma_\tau=\Sigma_{w(\cdot,\tau)}$ 是一个平均曲率为 H_w 、满足(6.2)的自由边界超曲面。

现在我们来计算.....的导数

$$0=\Phi(\tau,u(\tau))=(H_w-H_\Sigma-h_w+\rho u\langle\nu_w,\bar\nu\rangle,\langle\nu_w,\eta_w\rangle)$$

关于 τ在 $\tau=0$处的导数。注意，在 $\tau=0$处，

$$h_w'=-\lambda_k\varphi_k.$$

因此，定义 $w'=\frac{\partial w}{\partial\tau}\big|_{\tau=0}=\varphi_k+u'$ 后，我们得到

$$0=\left(J_\Sigma w'-(h_w)'+\rho u',-\frac{\partial w'}{\partial\nu}+\mathrm{I\!I}^{\partial M}(\nu,\nu)w'\right)=\left(J_\Sigma u'+\rho u',-\frac{\partial u'}{\partial\nu}+\mathrm{I\!I}^{\partial M}(\nu,\nu)u'\right),$$

其中第二个等号用到了： φ_k 是雅可比算子对应特征值 λ_k的特征函数。这意味着

$$\begin{cases}-J_\Sigma u'=\rho u' & \text{on } \Sigma\\ \frac{\partial u'}{\partial\nu}=\mathrm{I\!I}^{\partial M}(\nu,\nu)u' & \text{on } \partial\Sigma,\end{cases}$$

也就是说， u' 是雅可比算子对应特征值 0 的特征函数，因此根据非退化性假设，它必为 0。于是，由于 $u(0)=u'(0)=0$ 且 u 是光滑的（C^2 满足条件即可），存在 $C>0$使得 $|u(\tau)|\le C\tau^2$且 $|u'(\tau)|\le C\tau$。将变量换回 t后，我们便在 6.3上得到了所需估计， $|u|$ 和 $|u_t|$，证明完毕。 □

从现在起，我们假设 Σ 是指标为 $I>0$的自由边界极小超曲面。我们构造接近于族 $\{w(\cdot,t)\}_t$ 的平均曲率流次解与上解；该族在 命题 6.1 中针对情形 $k=1$构造，并与第一特征函数 φ_1相关。注意，该 w 满足

$$\begin{cases}w_t=-\lambda_1\varphi_1e^{-\lambda_1t}+u_t=\dfrac{H_w}{\langle\nu_w,\bar\nu\rangle}+\rho u+u_t & \text{on } \Sigma\\ \langle\nu_w,\bar\nu\rangle=0 & \text{on } \partial\Sigma,\end{cases}\tag{6.4}$$

因此，与（3.9）比较可知，演化的超曲面 $\Sigma_{w(\cdot,t)}$ “几乎”满足平均曲率流。现在，让我们通过对时间稍作重新参数化来构造次解与上解。

引理 6.5。 给定 $\lambda\in(\lambda_I,0)$，我们定义如下函数族

$$w^\pm(x,t)=w(x,t\pm e^{-\lambda t}),$$

其中 $\{w(\cdot,t)\}_t$ 是命题 *6.1* 中针对情形 $k=1$构造的函数，与特征函数 $\varphi_1>0$相关。于是存在 $t_\lambda\in\mathbb{R}$，使得 w^+ 是平均曲率流的上解，而 w^- 是平均曲率流的下解，对所有 $t<t_\lambda$均成立，即

$$\frac{dw^+}{dt}\ge\frac{H_{w^+}}{\langle\nu_{w^+},\bar\nu\rangle}\quad and\quad\frac{dw^-}{dt}\le\frac{H_{w^-}}{\langle\nu_{w^-},\bar\nu\rangle}.$$

注 释 6.6。 注意，引理 6.5 对 $\varphi_1<0$也成立，只需交换 w^+ 与 w的角色 $^-$.

证明。 令 $^wf(x,t)=w(x,t+f(t))$。然后，利用（6.4），

$$\frac{dw_f}{dt}=\frac{\partial w}{\partial t}(1+f'(t))=\left(\frac{H_{w_f}}{\langle\nu_{w_f},\bar\nu\rangle}+\rho u+\frac{\partial u}{\partial t}\right)(1+f'(t)),$$

这意味着

$$\frac{dw_f}{dt}-\frac{H_{w_f}}{\langle\nu_{w_f},\bar\nu\rangle}=-\lambda_1\varphi_1e^{-\lambda_1(t+f(t))}f'(t)+\left(\rho u+\frac{\partial u}{\partial t}\right)(1+f'(t)).\tag{6.5}$$

回顾一下，根据 命题 6.1， $|u| + |u_t| \le Ce^{-2\lambda_1 t}$ 和 $\varphi_1 > 0$。因此，对于任意 $\lambda \in (\lambda_1, 0)$，若选择 $f(t) = \pm e^{-\lambda t}$，则对于所有 t 充分小的情形，(6.5) 右端分别为正和负。因此，结论对 $w^{\pm} = w_{\pm e^{-\lambda t}}$成立。 □

定理 6.7。 对于对应于第一特征值 λ_1 的特征函数 φ_1，存在一个图形古老解 $\{\Sigma_t\}_{t\in(-\infty,T)}$，它由函数 v 的图给出： $\Sigma \times (-\infty, T) \to \mathbb{R}$，满足

$$\|v(\cdot,t)\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)} \le Ce^{-\lambda_1 t},$$

其中 $C > 0$ 是仅依赖于 M 和 Σ 的常数，并且

$$\lim_{t\to-\infty} v(x,t)e^{\lambda_1 t} = \varphi_1(x).$$

该解是平均凸的。

证明。 令 $w(x,t) = \varphi_1 e^{-\lambda_1 t} + u(x,t)$ 如 命题 6.1中所述，并令 $w^{\pm}$ 为针对某个 引理 6.5 中构造的相应屏障 $\lambda \in (\lambda_1, 0)$。不失一般性，假设 $\varphi_1 > 0$ （情形 $\varphi_1 < 0$ 类似，见 注 6.6）。我们声称可以选取 t_λ，它可以比引理 6.5中的更小，从而也满足

$$w^+(x,t) \ge w(x,t) \ge w^-(x,t) \quad \forall t < t_\lambda. \tag{6.6}$$

事实上，利用 $|u_t(x,t)| \le Ce^{-2\lambda_1 t}$，由 命题 6.1可得

$$w^+(x,t) - w(x,t) = \varphi_1 e^{-\lambda_1 t}(e^{-\lambda_1 e^{-\lambda t}} - 1) + u(x, t + e^{-\lambda t}) - u(x,t) \ge -\lambda_1 \varphi_1 e^{-(\lambda_1+\lambda)t} - Ce^{-(2\lambda_1+\lambda)t},$$

当 t 足够小时，这显然为正。同理，我们可以对 w^- 进行论证，从而得到（6.6）。

现在，设 $t_\lambda > t_0 > t_1 > t_2 > \ldots \to -\infty$ 为一个递减的时间序列；对于每个 $i \in \mathbb{N}$，令 $\Sigma^i = \Sigma_{t_i} = \Sigma_{w(\cdot,t_i)}$ 为（6.1）中的超曲面（另见第 3.1 节）。此外，设 $\{\Sigma^i_t\}_{t\in[t_i,T_i)}$为从时刻 t_i的 Σ^i 出发的平均曲率流。当 $T_i > t_i$ 充分接近 t_i时，平均曲率流是光滑的，并且 Σ^i_t 可以表示为定义在 Σ上的函数 $v^i(x,\ t)$ 的图，即$\Sigma^i_t = \Sigma_{v^i(\cdot,\ t)}$。这里注意到 $v^i(\cdot,\ t_i) = w(\cdot,\ t_i)$。

注意到 v^i 满足图形平均曲率流（3.10），并且根据引理 6.5可知

$$w^-(x,t) \le v^i(x,t) \le w^+(x,t) \quad \forall t \in [t_i, T_i).$$

因此，我们有 $\|v^i(\cdot,\ t)\|_{C^0(\Sigma)} \le \|w^+(\cdot,\ t)\|_{C^0(\Sigma)} \le Ce^{-\lambda_1 t}$ 对所有 $t \in [t_i, T_i)$，其中常数 $C > 0$仅依赖于 M，Σ。利用定理 3.6中的Schauder 估计，以及命题 3.7中的估计，可得

$$\|v^i\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))} \le C(\|v^i\|_{L^2(\Sigma\times(t-2,t))} + \|v^i\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma\times(t-2,t))}\|v^i\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-2,t))}),$$

其中 $C > 0$ 在此处不依赖于 t_i。因此，只要$\|v^i\|_{C^{1,\ \alpha}(\Sigma\times(t-2,\ t))}$ 足够小（取决于 M 和 Σ），根据引理 3.9，我们便得到

$$\|v^i\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))} \le C\|v^i\|_{L^2(\Sigma\times(t-2,t))} \le Ce^{-\lambda_1 t}.$$

由于根据注记 6.4， $\|v^i(\cdot,\ t_i)\|_{C^{2,\ \alpha}(\Sigma)}$ 初始时为 $e^{-\lambda_1 t_i}$ 量级，因此可知 v_i 确实定义在区间 $[t_i, T)$ 上，其中 T 与 i 无关，并且它们满足一致估计

$$\|v^i\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))} \le Ce^{-\lambda_1 t} \quad \forall t \in [t_i + 1, T).$$

因此，我们可以提取 $\{v_i\}$ 的一个子序列，它在 $C^{2,\ \alpha'\,\mathrm{loc}}(\Sigma \times (-\infty,\ T))$ 上对所有 $\alpha' < \alpha$都收敛到一个 $C^{2,\ \alpha}$-函数 v： $\Sigma \times (-\infty,\ T) \to \mathbb{R}$，它满足平均曲率流方程（3.10），

$$w^-(x,t) \le v(x,t) \le w^+(x,t) \quad \forall t \in (-\infty, T),$$

and

$$\|v\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))} \le Ce^{-\lambda_1 t} \quad \forall t \in (-\infty, T).$$

该函数的时间等值集给出了一个满足所需估计的古老解。

最后，我们需要证明这些解是平均凸的。我们再次假设 $\varphi_1 > 0$，负号的情形可用类似的论证。注意，如果里奇曲率为正，那么对 H的演化应用最大值原理即可立即得出结论。一般情况下，我们

可以如下论证。由于 w 满足（6.4），v 满足图形平均曲率流方程（3.10），且它们都有自由边界，因此有

$$\begin{cases}(w-v)_t = J_\Sigma(w-v) + E(w) - E(v) + \rho u + u_t & \text{on } \Sigma \\ b(w-v) = \epsilon(w) - \epsilon(v) & \text{on } \partial\Sigma\,.\end{cases}$$

Schauder 估计定理 3.6，结合命题 3.7 以及关于 u_t在命题 6.1中的估计，得到

$$\begin{aligned}\|w-v\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))} \le C\|w-v\|_{L^2(\Sigma\times(t-2,t))} + Ce^{2\lambda t} + \\ + C\|w-v\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-2,t))}(\|w\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-2,t))} + \|v\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-2,t))})\,.\end{aligned}$$

由于我们有$\|w\|_{C^{2,\,\alpha}(\Sigma\times(t-2,\,t))} + \|v\|_{C^{2,\,\alpha}(\Sigma\times(t-2,\,t))} \le Ce^{-\lambda_1 t}$，当 t充分小时，我们可以应用引理 3.9。此外，利用以下事实

$$\|w(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{C^0(\Sigma)} \le \|w^+(\cdot,t) - w^-(\cdot,t)\|_{C^0(\Sigma)} \le Ce^{-2\lambda_1 t}$$

我们得到

$$\|w-v\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma\times(t-1,t))} \le Ce^{-2\lambda_1 t}\,.$$

现在我们可以比较图 v 的平均曲率 H_v 与图 w $H_w = -\lambda_1\varphi_1 e^{-\lambda_1 t} - \varepsilon u$ 的平均曲率，如下所示

$$H_v = J_\Sigma(v) + E(v) = H_w - (J_\Sigma(w-v) + E(w) - E(v) + \rho u) \ge -\lambda_1\varphi_1 e^{-\lambda_1 t} - Ce^{-2\lambda_1 t}\,.$$

Th当 t 足够小时，右侧显然为正，这就完成了证明。 □

References

[ADS19] S. Angenent、P. Daskalopoulos 和 N. Sesum, *Unique asymptotics of ancient convex mean curvature flow solutions* **111** 2019 3, 381 455 , 《微分几何杂志》（），第–期。[ADS20] , *Uniqueness of two-convex closed ancient solutions to the mean curvature flow*, 《数学年刊》（第二辑）192（2020），第2期，353–436。[AM01] A. Abbondandolo 和 P. Majer, *Morse homology on Hilbert spaces*, 《纯粹与应用数学通讯》54（2001），第6期，689–760。[Amb15] L. Ambrozio, *Rigidity of area-minimizing free boundary surfaces in mean convex three-manifolds*, 《几何分析杂志》25（2015），第2期，1001–1017。[Bad98] E. A. Baderko, *Schauder estimates for oblique derivative problems*, 《巴黎科学院报告》数学辑，第一辑326（1998），第12期，1377–1380。[BBC25] T. Bourni、N. Burns 和 S. Catron, *Classification of convex ancient solutions to free boundary curve shortening flow in convex domains* **35** 2025 7, 210, 26 , 《几何分析杂志》（），论文编号。[BC19] S. Brendle 和 K. Choi, *Uniqueness of convex ancient solutions to mean curvature flow in $\mathbb{R}^3$*, 《数学发明》217（2019），第1期，35–76。[BL16] P. Bryan 和 J. Louie, *Classification of convex ancient solutions to curve shortening flow on the sphere*, 《几何分析杂志》26（2016），第2期，858–872。[BL23] T. Bourni 和 M. Langford, *Classification of convex ancient free-boundary curve-shortening flows in the disc*, 《分析与偏微分方程》16（2023），第9期，2225–2240。[BL25] , *Classification of convex ancient free boundary mean curvature flows in the ball*, 《比萨高等师范学院科学辑年鉴》（第五辑）26（2025），第2期，581–603。[BLL23] T. Bourni、M. Langford 和 S. Lynch, *Collapsing and noncollapsing in convex ancient mean curvature flow*, 《纯粹与应用数学杂志》801（2023），273–305。[BLT21] T. Bourni、M. Langford 和 G. Tinaglia, *Collapsing ancient solutions of mean curvature flow*, 《微分几何杂志》119（2021），第2期，187–219。[BLT22] , *Ancient mean curvature flows out of polytopes*, 《几何与拓扑》26（2022），第4期，1849–1905。[BN24] S. Brendle 和 K. Naff, *A local noncollapsing estimate for mean curvature flow*, 《美国数学杂志》146（2024），第5期，1463–1468。[Bra78] K. A. Brakke, *The motion of a surface by its mean curvature*, 《数学札记》第20卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1978年。[CG25] J. Chen 和 P. Gaspar, *Morse theory for the Allen-Cahn functional*, 《泛函分析杂志》288（2025），第9期，论文编号110876，共30页。[Cha93] K.-c. Chang, *Infinite-dimensional Morse theory and multiple solution problems*, 《非线性微分方程及其应用进展》第6卷，Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1993年。

[CHL25] K. Choi、J. Huang 和 T. Lee, *Ancient mean curvature flows with finite total curvature*, 《美国数学会会刊》378（2025），第9期，6401–6424。[CL24] A. C.-P. Chu 和 Y. Li, *Existence of 5 minimal tori in 3-spheres of positive ricci curvature*, 预印本 arXiv:2409.09315（2024）。[CM22] K. Choi 和 C. Mantoulidis, *Ancient gradient flows of elliptic functionals and Morse index*, 《美国数学杂志》144（2022），第2期，541–573。[DHS10] P. Daskalopoulos、R. Hamilton 和 N. Sesum, *Classification of compact ancient solutions to the curve shortening flow* **84** 2010 3, 455 464 ，《微分几何杂志》（），第–期。[Ede16] N. Edelen, *Convexity estimates for mean curvature flow with free boundary*, 《数学进展》294（2016），1–36。[Eva10] L. C. Evans, *Partial differential equations*, 第二版，《数学研究生教程》第19卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010年。[Fre10] A. Freire, *Mean curvature motion of graphs with constant contact angle at a free boundary*, 《分析与偏微分方程》3（2010），第4期，359–407。[FS16] A. Fraser 和 R. Schoen, *Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball*, 《数学发明》203（2016），第3期，823–890。[FS26] G. Franz 和 M. B. Schulz, *Topological control for min-max free boundary minimal surfaces*, 《欧洲数学会杂志》（JEMS）（*to appear*），预印本 arXiv:2307.00941 （ 2026 ）。[GT01] D. Gilbarg 和 N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, 《数学经典》，Springer-Verlag，柏林，2001年。[Ham94] R. S. Hamilton, *Convex hypersurfaces with pinched second fundamental form*, 《分析与几何通讯》2（1994），第1期，167–172。[HH16] R. Haslhofer 和 O. Hershkovits, *Ancient solutions of the mean curvature flow*, 《分析与几何通讯》24（2016），第3期，593–604。[HK25] R. Haslhofer 和 D. Ketover, *Free boundary minimal disks in convex balls*, 《纯粹与应用数学杂志》828（2025），307–326。[HL23] S. Hirsch 和 M. M.-C. Li, *Contracting convex surfaces by mean curvature flow with free boundary on convex barriers* **27** 2023 2, 187 220 ，《亚洲数学杂志》（），第–期。[HS15] G. Huisken 和 C. Sinestrari, *Convex ancient solutions of the mean curvature flow*, 《微分几何杂志》101（2015），第2期，267–287。[Hui84] G. Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres* **20** 1984 1, ，《微分几何杂志》（），第–期。[Hui89] , *Nonparametric mean curvature evolution with boundary conditions*, 《微分方程杂志》77（1989），第2期，369–378。[KKMS24] M. Karpukhin、R. Kusner、P. McGrath 和 D. Stern, *Embedded minimal surfaces in S^3 and B^3 via equivariant eigenvalue optimization* 2402 13121 2024 ，预印本 arXiv:。（）。[Lan17] M. Langford, *A general pinching principle for mean curvature flow and applications*, 《变分与偏微分方程》56（2017），第4期，论文编号107，共31页。[LM72] J.-L. Lions 和 E. Magenes, *Non-homogeneous boundary value problems and applications*: *Vol. 1*, 《数学科学基础》第153卷，Springer-Verlag New York Inc.，纽约，1972年。[LU68] O. A. Ladyzhenskaya 和 N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press，纽约—伦敦，1968年。由 Scripta Technica, Inc. 从俄文翻译，译文编辑：Leon Ehrenpreis。[Lun95] A. Lunardi, *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*, 《非线性微分方程及其应用进展》第16卷，Birkhäuser Verlag，巴塞尔，1995年。[LZ23] M. Langford 和 J. J. Zhu, *A distance comparison principle for curve shortening flow with free boundary*, 《美国数学杂志》（*to appear*），预印本 arXiv:2302.14258（2023）。[Maz22] L. Mazurowski, *CMC doublings of minimal surfaces via min–max*, 《几何分析杂志》32（2022），第104号，28页。[MN13] D. Maximo 和 I. Nunes, *Hawking mass and local rigidity of minimal two-spheres in three-manifolds*, 《分析与几何通讯》21（2013），409–432。[MN14] F. C. Marques 和 A. Neves, *Min-max theory and the Willmore conjecture*, 《数学年刊》（第二辑）179（2014），第2期，683–782。[Mul56] W. W. Mullins, *Two-dimensional motion of idealized grain boundaries*, 《应用物理杂志》27（1956），900–904。[MZ98] F. Merle 和 H. Zaag, *Optimal estimates for blowup rate and behavior for nonlinear heat equations*, 《纯粹与应用数学通讯》51（1998），第2期，139–196。[Pal63] R. S. Palais, *Morse theory on Hilbert manifolds*, 《拓扑》2（1963），299–340。[Pit81] J. T. Pitts, *Existence and regularity of minimal surfaces on Riemannian manifolds*, 《数学札记》第27卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州；东京大学出版社，东京，1981年。[Sim83a] L. Simon, *Asymptotics for a class of nonlinear evolution equations, with applications to geometric problems*, 《数学年刊》（第二辑）118（1983），第3期，525–571。

[Sim83b] , *Lectures on geometric measure theory*, 《Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ.》, 第3卷, 澳大利亚国立大学数学分析中心, 堪培拉, 1983年。[Sim97] , *Schauder estimates by scaling*, 《Calc. Var. Partial Differential Equations》**5** （1997）, 第5期, 391–407。[Sma61] S. Smale, *On gradient dynamical systems*, 《Ann. of Math. (2)》**74** （1961）, 199–206。[Sta96a] A. Stahl, *Convergence of solutions to the mean curvature flow with a Neumann boundary condition*, 《Calc. Var. Partial Differential Equations》**4** （1996）, 第5期, 421–441。[Sta96b] , *Regularity estimates for solutions to the mean curvature flow with a Neumann boundary condition*, 《Calc. Var.PartialDifferential Equations》**4** （1996）, 第4期, 385–407。[Tro77] A. J. Tromba, *A general approach to Morse theory*, 《J. Differential Geometry》**12** （1977）, 第1期, 47–85。[Whe14] V. M. Wheeler, *Mean curvature flow of entire graphs in a half-space with a free boundary*, 《J. Reine Angew. Math.》**690** （2014）, 115–131。[Whi03] B. White, *The nature of singularities in mean curvature flow of mean-convex sets*, 《J. Amer. Math. Soc.》**16** （2003）, 第1期, 123–138。[Whi91] , *The space of minimal submanifolds for varying Riemannian metrics*, 《Indiana Univ. Math. J.》**40** （1991）, 第1期, 161–200。

Theodora Bourni田纳西大学诺克斯维尔分校数学系, 田纳西州诺克斯维尔市 37996-1320, 美国。
E-mail address: tbourni@utk.edu

Giada Franz法国国家科学研究中心（CNRS）与古斯塔夫·埃菲尔大学, LAMA, 77420 马恩河畔尚, 法国。*E-mail address:* giada.franz@cnrs.fr