arXiv:2602.08851v1 [math.CT] 9 Feb 2026

无穷运算子上的代数的 Koszul 对偶

ERIC HOFFBECK 和 IEKE MOERDIJK

Abstract. 本文提出了线性 ∞运算子上的代数这一新概念，以及 ∞余运算子上的余代数这一相应概念。接着，我们将线性 ∞运算子与线性 ∞余运算子之间的 Koszul 对偶，从 [11] 推广到它们的代数与余代数范畴。该对偶定理在经典（非无穷）运算子上的代数情形下化为已知的对偶性，但我们的证明有所不同。事实上，它基于树范畴上的预层与余预层之间一种更一般的对偶性。后一种对偶性先验地独立于（余）代数结构，但我们证明，它可以提升到具有此类结构的（余）预层。基于这种对偶性，我们定义了 ∞运算子上的代数的同调，并证明它可以用同一树范畴上取值于预层的系数同调来描述。

Introduction

本文旨在构造代数A 在运算子 P上的巴复形 $\mathcal{B}(P, A)$，证明关于它的一个对偶定理，并将 A 的 Andr´e-Quillen 同调群构造为不可分解元的导出函子。这样表述时，读者可能会觉得这些构造和结果似曾相识。（稍后我们会给出一些参考文献。）不过，我们将在一般的线性 ∞-运算子背景下展开工作，而对于这种运算子上的代数究竟应该是什么，事先甚至都不清楚。为立即阐明这一点，回想一下，根据 [11]，线性 ∞-运算子可以定义为范畴 $\mathbb{A}$ 上的一个预层 X，其取值于链复形，并配备额外的结构映射 $X(S \circ_e T) \to X(S) \otimes X(T)$；对于树 T嫁接到另一棵树 S的叶 e 上的任意嫁接 $S \circ_e T$，这些结构映射都满足某些标准的结合条件。随后要求这些结构映射为拟同构。对偶地，可以将 ∞-余运算子定义为配备额外结构映射的余预层。在同上文献中，我们证明了以下结果。

定理。
(1) 在取值于链复形的预层与余预层范畴之间，存在一对“余柱-柱”伴随函子 $\mathcal{B}^\vee\colon CoPsh(\mathbb{A}) \to Psh(\mathbb{A})$ 和 $\mathcal{B}\colon Psh(\mathbb{A}) \to CoPsh(\mathbb{A})$，其定义在 $\mathbb{A}$ 上。(2) 这些函子在拟同构意义下互为逆函子。(3) 该伴随提升为 ∞-运算子与 ∞-余运算子的范畴之间的伴随。

我们将在第 3 节给出该定理及相关构造的更精确表述，以便本文能够独立于 [11] 阅读；此外，本文所采用的符号约定略有不同。

本文将介绍 $\mathbb{A}$ 到更大的树范畴 $\mathbb{R}$ 的扩展，并首先证明上述定理第 (1) 部分的对应结论。不过，由于该范畴 $\mathbb{R}$ 不具备 $\mathbb{A}$ 所具有的相同有限性，我们必须将讨论限制在 余幂零 预层上（参见下文第 4.3 节和命题 4.1）。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 18N70, 55N35, 18M70.

定理。 存在伴随函子

$$\mathcal{B}^{\vee} : CoPsh^{c}(\mathbb{R}) \rightleftarrows Psh(\mathbb{R}) : \mathcal{B}$$

在余幂零余预层范畴与取值于链复形的 $\mathbb{R}$ 上预层范畴之间。该伴随的单位和余单位都是拟同构。

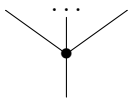
定义范畴 $\mathbb{R}$ 的动机源于这样一个事实：对于一个 ∞-幺半群 X （在 $\mathbb{A}$ 上的预层），可以自然地将 ∞-代数在 X 上定义为 $\mathbb{R}$ 上配备了某些结构映射的预层 M，这些结构映射将 M 与 X 联系起来，有点类似于上述嫁接情况下的 M（$S \circ_e T$）$\to X$（S）$\otimes M$（T）；精确定义见第 2.3 节。类似地，将余幂零 ∞-余代数在 ∞-余运算子 Y 上定义为 $\mathbb{R}$ 上带有结构映射的余幂零余预层 N，这些结构映射将 N 与 Y 联系起来。于是我们能够证明，对于一个 ∞- 幺半群 X，前一定理中的伴随可以进一步细化如下。

定理。 前述伴随提升为 $\mathcal{B}X$ 上的余幂零∞-余代数与 X 上的 ∞-代数之间的伴随。

（精确表述见定理 7.3，其中还包括一个对偶陈述：关于 ∞-余拟簇 Y 上的 ∞-余代数，以及 $\mathcal{B}^{\vee}Y$ 上的 ∞-代数。）

如果 ∞-幺半群来自经典的（“严格”）微分分次幺半群 P，那么任意 P-代数 A 都定义了一个 X 上的 ∞-代数 $M = N(P,\ A)$，并且可以通过在特定的树上对余预层求值，从 $\mathcal{B}M$ 恢复 A 的通常巴构造。由此，我们针对 ∞-代数和 ∞-余代数的 Bar-Cobar对偶，以非常精确的方式扩展了关于幺半群上的代数和余拟簇上的余代数的对偶性，相关讨论见 [13, 第 11 节。3]）。不过，我们要强调的是，我们的证明有所不同，而且起初适用于预层和余预层，甚至早于加入（余）代数结构映射；参见上面的两个定理。

对于每个自然数 $\ell \geq 2$，具有 ℓ 个叶子的花冠树 C_ℓ，如图所示



是范畴 $\mathbb{A}$ 的一个对象。在 [11] 中，我们定义了 ∞-幺半群 X 的“树状同调” $DH_*^{(\ell)}(X)$，即链复形 $\mathcal{B}(X)(C_\ell)$ 的同调。对于所有 $\ell \geq 2$，这些分次阿贝尔群共同构成一个（严格的）余运算子 $DH_*(X)$。如果X 是向量空间中的经典 Koszul 拟簇，那么这个余运算子恰好是 X 的 Koszul 对偶；在这一经典语境下，[6, 5, 13] 等文献都讨论过它。事实上，这些同调群 $DH_*^{(\ell)}(X)$ 可以用非常传统的术语描述为范畴对的同调，

$$DH_*^{(\ell)}(X) = H_*(C_\ell/\mathbb{A}, C_\ell//\mathbb{A}; X)$$

其中，$C_\ell//\mathbb{A} \subseteq C_\ell/\mathbb{A}$ 是切片范畴中由 $\mathbb{A}$ 内非同构 $C_\ell \to T$ 构成的全子范畴（参见 [11, 命题 3.7]）。范畴 $C_\ell//\mathbb{A}$ 与含有 ℓ 个元素的集合的分拆复形 密切相关，因此（当ℓ 变化时）可以直接联系到李歌剧；参见 [16, 12, 4, 1, 10]。

自然地，我们可以用类似的方式，将一个 ∞代数M 在一个 ∞幺半群 X 上的树状同调定义为 M 的巴复形在仅由一片叶子且没有顶点的树 η 处取值后的同调，即 $\eta = |$。换言之，按照定义，

$$DH_*(M) = H_*(\mathcal{B}(M)(\eta)). \tag{1}$$

这个同调具有一个在余运算子$DH_*(X)$上的余幂零余代数结构。此外，我们将在命题 8.1 中证明，它也可以用范畴同调来描述，即

$$DH_*(M) = H_*(\eta/\mathbb{R}, \eta//\mathbb{R}; M)$$

（其中，双斜线再次表示由非同构构成的全子范畴）。

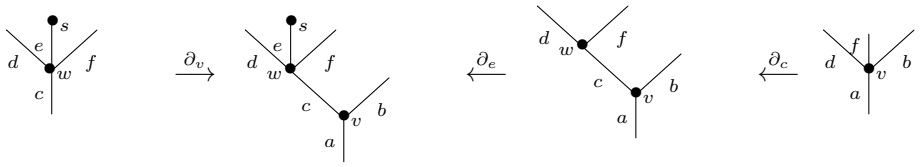
如果 $M = N(P,\ A)$ 来自经典运算子P上的“普通”代数 P，那么这个定义（1）与 A 的同调一致，正如 [13] 中所定义的那样。也可以用余切复形 [14]来定义这一同调。使用运算子条复形来定义 P-代数 A 的同调这一思路，也出现在 Ching [2, 3] 和 Harper [7] 的著作中的其他语境里。关于富集 ∞-运算子上的不同代数（和余代数）概念，也见于 Haugseng [8] 的著作以及 Petersen、Roca i Lucio 和 Yalin [15] 最近的一篇预印本。目前尚未对这些概念进行比较。

致谢： 我们谨向所在机构，以及 ANR HighAGT (ANR-20-CE40-0016) 和荷兰科学组织 NWO 致谢，感谢它们支持了数次相互访问。

1. Some categories of trees

1.1. 范畴 Ω。 我们回顾 [9] 中的树范畴**Ω**。它的对象是带有外边的有限树，其中一条被选作根，其余的称为叶子。连接两个顶点的其他边称为内部边。顶点的价数 是入边的数量，边的方向朝向根。若一个顶点仅连接一条内部边，则称其为外部顶点。若 Ω 的对象没有单价顶点，即价数为 1 的顶点，则称其为约化对象；若没有价数为零的顶点，则称其为开对象。

例 1.1。 下图所示的第二棵树 T 有两条内部边 c 和 e，



三片叶子 $b,\ d,\ f$ 和一个根 a。价数为 2 的顶点 v 是外部的，顶端价数为零的树桩 s 也是如此。树 T 是约化的，但不是开树。

Ω 中的态射 $S \to T$ 是由“初等”态射复合而成的：同构、外面 $\partial_v : S \to T$，其中 S 是从 T 上剪去一个外部顶点 v （连同附着于它的外边）得到的；内部（或内）面 $\partial_e : S \to T$，其中 S 是从 T 收缩一条内部边得到的；以及退化态射 $S \to T$，其中 T 是通过删除一个单价顶点（并将其入边与出边识别）从 S 得到的。在上面的例子中，∂_v是剪去根顶点 v 的一个外部面，而 ∂_e 和 ∂_c 是内面。

一个子树 S 是 T 外部面复合的源 $S \to T$。如果这个映射保持根不变，我们就称子树 S 以及映射为 T的修剪 。树 T 的叶子集合通常记作 $\lambda(T)$。只有一个顶点的树称为花冠，而没有顶点的唯一一棵树记作 η。它只有一条边，同时也是叶子和根。更多细节和例子，请参见 [9]。

1.2. Ω 的子范畴Ω。 本文将讨论 Ω 的两个子范畴 $\mathbb{A}$ 和$\mathbb{R}$ 。事实上，它们是开约化树范畴 Ω_r^o 的子范畴。注意，子范畴 Ω_r^o 没有退化态射，因此所有态射都是外部面或内面的复合以及同构。

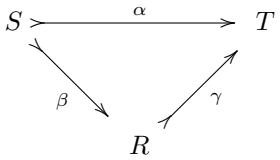
范畴 $\mathbb{A}$ 由开放约化树组成（也就是说，其中所有顶点的价数都至少为 2。）$\mathbb{A}$ 中的态射是同构与内部面的复合。这些是 Ω 中保留根边和叶子集合的态射 $S \to T$ （但它们可以置换叶子）。

较大的范畴 $\mathbb{R}$ 也由开放约化树组成。$\mathbb{R}$ 中的态射是 Ω 中保留根边的态射。因此，这些态射是同构、内部面以及外部面（即修剪）的复合，后者会剪去一个连接到叶子的顶点。

因此我们有嵌入

$$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \Omega_r^o \subseteq \Omega.$$

1.3. 分解。 我们将内部面的复合也简称为内部面，外部面也同理。我们经常会用到这样一个事实：任意态射α： $S \rightarrowtail T$ Ω 中的态射$_r^o$ 都可以唯一地（相差一个同构）分解为先一个内部面、后一个外部面。

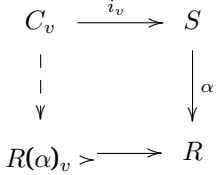


R 的叶子和根是 S的叶子和根在 α 下的像。映射 β 属于 $\mathbb{A}$。如果 α 是 $\mathbb{R}$中的映射，那么 γ 又属于 $\mathbb{R}$，从而 R 成为 T的修剪。

1.4. 内面与爆破。 如果 α： $S \to R$ 是 $\mathbb{A}$中的一个态射，我们也可以将 R 看作通过将 S 的每个顶点 v 爆破为R 的一个子树而从 S 得到的对象，该子树记作 R_v 或 $R(\alpha)_v$。利用上述分解，可以在同构意义下唯一地定义这个子树 $R_v \rightarrowtail R$： 顶点 v 确定了一个唯一的外部面映射

$$i_v : C_v \to S$$

该映射从一个花冠出发，将 C_v 的唯一顶点映射到 $v \in S$。复合 $\alpha \circ i_v$现在本质上唯一地分解为 $\mathbb{A}$ 中的一个映射，后面接一个外部面映射，如下所示



这就将 $R(\alpha)_v$ 唯一地定义为 R的一个子树。注意，除非 v 是 S的根顶点，否则 $R(\alpha)_v \to R$ 不是 $\mathbb{R}$ 中的态射。

1.5. 树的嫁接与分解。 我们先讨论一个简单的情形。若e 是树 T中的一条内边，则在 e 处“切开”树 T，会得到两个子树（外部面） $S \rightarrowtail T$ 和 $R \rightarrowtail T$，使得 e 是 S 的一片叶，也是 R的根。于是， T 是在 e处将 R 嫁接到 S 上所得的树，记作

$$T = S \circ_e R.$$

（注意，在两个包含函子 $S \rightarrowtail T$ 和 $R \rightarrowtail T$中，只有 $S \rightarrowtail T$ 属于 $\mathbb{R}$。）我们也称 S 和 R 构成 T的分解 。这一分解对应于 $\mathbb{A}$中的一个态射同构类

$$\alpha : T_e \rightarrowtail T$$

其中， T_e 是通过收缩 T 中除 e以外的所有内边得到的。因此， T_e 仅有一条内边，且有两个顶点。就前面讨论过的膨胀而言，$S = T(\alpha)_r$ ，其中 r 是 T_e 的根顶点；而 $R = T(\alpha)_v$ ，其中 v 是 T_e的顶点。

更一般地，如果 E 是 T中的一族内边，那么在这些边处切开 T ，会将 T 分解为较小的树，或者得到一个迭代嫁接

$$(\star) \qquad T = T_r \circ_{e \in E} T_e$$

其中， T_r 是包含根边（及根顶点）的连通分支，而 T_e 是以 e 为根边的连通分支（其根顶点是 T中紧邻 e上方的顶点）。就膨胀而言，记 T_E 为通过收缩不属于 E 的所有内边而得到的树。这给出一个内面映射$\alpha : T_E \rightarrowtail T$，而 E 恰好是 T_E的内边集合。此外，对于 T_E中 e 上方的顶点v ，有 $T(\alpha)_v = T_e$；而对于 T_E的根顶点 r ，有$T(\alpha)_r = T_r$。这样，树 T 如（$\star$）所示的分解，与 $\mathbb{A}$中态射 $S \rightarrowtail T$ 的同构类一一对应；构成该分解的 T 的子树，正是 S中顶点的膨胀。

2. Presheaves、(co)operads and (co)algebras

本节将回顾预运算子和 ∞-幺半群及其对偶版本的概念，相关内容见 [11]。此外，我们还将介绍预运算子和 ∞-幺半群上的预代数与代数的相应概念，以及其对偶的余代数版本。

2.1. 预层。 固定一个域 k ，并简单地记 Ch 为 k上的链复形范畴。 $\mathbb{A}$ 上的一个预层 是一个取值于Ch的反变函子，因此 $\mathbb{A}^{op} \to Ch$；而余预层 是一个协变函子 $\mathbb{A} \to Ch$。我们还将考虑较大范畴 $\mathbb{R}$上的预层和余预层。这类（余）预层之间的态射是自然变换。如果一个态射的每个分量都是拟同构，则称其为拟同构。

例 2.1。 下面的例子构成了后续内容的重要动机。若 P 是 Ch中的一个（无色）幺半群，则其神经 NP 定义了 $\mathbb{A}$上的一个预层，该预层在对象 T 上的取值为

$$NP(T) = \bigotimes_{v} P(in(v))$$

其中 v 遍历 T 的顶点，且 $in(v)$是 v的入边集。若$S \to T$是 $\mathbb{A}$中的一个态射，则幺半群 P中的复合定义了一个映射 $NP(T) \to NP(S)$。在此语境下，以一种“无坐标”的方式呈现 P很方便：对于有限集的映射 $G \to F$，其结构映射为 $P(F) \otimes \bigotimes_f P(G_f) \to P(G)$，其中 f 上的纤维记作 G_f。读者会注意到，当 P 是约化的（即 $P(0) = 0$且 $P(1) = k$）时，这个神经忠实地表示幺半群 P 。

如果 A是一个 P-代数，那么 A和 P共同定义了较大范畴 $\mathbb{R}$上的预层 $N(P, A)$，定义如下：

$$N(P, A)(T) = NP(T) \otimes \bigotimes_{\ell} A = NP(T) \otimes A^{\otimes \lambda T}$$

其中 ℓ 遍历 T的叶子。 $\mathbb{A}$ 中的态射 $S \to T$ 会诱导映射$N(P,\ A)(T) \to N(P,\ A)(S)$, 与 NP的情形相同，只保留 A的张量幂不变。一个切去顶点 w 的态射 $\partial_w : S \to T$ 定义了映射

$$\partial_w^* : N(P,A)(T) \to N(P,A)(S)$$

如下。记

$$N(P,A)(T) = \left(\bigotimes_{v \neq w} P(in\, v) \otimes \bigotimes_{\ell \notin in\, w} A \right) \otimes \left(P(in\, w) \otimes \bigotimes_{\ell \in in\, w} A \right).$$

P在 A 上的作用给出一个映射 $P(in\, w) \otimes \bigotimes_{\ell \in in\, w} A \to A$，从而得到一个映射

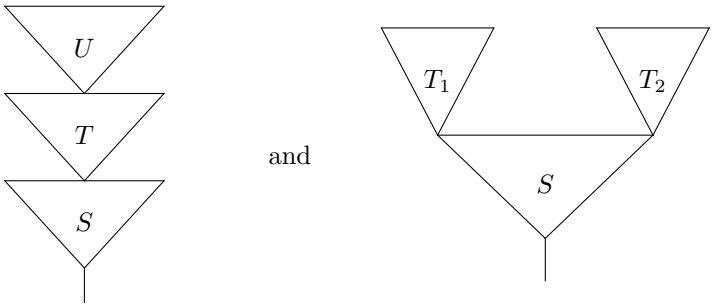
$$N(P,A)(T) \to \bigotimes_{v \neq w} P(in\, v) \otimes \bigotimes_{\ell \notin in\, w} A \otimes A.$$

陪域恰为 $N(P,A)(S)$，其中最后一次出现的 A 对应于 S 中的叶，而该叶是 T中 w 的输出边。

2.2. 预运算子与 ∞-幺半群。 预运算子是定义在 $\mathbb{A}$ 上的预层 X ，并配备结构映射 $\theta^{S\circ_e T}$，对每个嫁接 $S \circ_e T$都有一个结构映射，通常简记为 θ_e 或直接记为 θ,

$$\theta : X(S \circ_e T) \to X(S) \otimes X(T).$$

这些结构映射须满足显然的关于S 和 T的自然性条件，以及结合条件。后者分为两类：如图所示的“嵌套”嫁接和“平行”嫁接,



与通常的运算子部分复合的结合条件完全相同，参见 [13]。我们始终假设 $X(\eta)$ 是 k 且 $\theta^{S\circ_e T}$ 在 S 或 T 为 η时是典范同构。

对于 $x \in X(S \circ_e T)$，我们将 $\theta^{S\circ_e T}(x)$ 在 $X(S) \otimes X(T)$ 中记作 $x_1 \otimes x_2$, 而不是 $\sum x_1 \otimes x_2$，并省略和号。这种记号滥用也将用于本文其余部分出现的所有其他类型的分解映射。

预运算子之间的态射 $X \to X'$ 是保持这些结构映射 θ的预层态射。由此，我们得到一个预运算子范畴，并带有一个到预层范畴的遗忘函子

$$PreOp \to Psh(\mathbb{A}).$$

预运算子 X 称为 ∞-运算子，如果它的每个结构映射 $X(S \circ_e T) \to X(S) \otimes X(T)$ 都是拟同构。 ∞-运算子的范畴记作∞Op。注意，如果 $X = NP$ 是某个经典运算子的神经，这些结构映射实际上都是同构。在这种情况下，我们称 X 为一个严格运算子。

2.3. 预代数与 ∞-代数。设 X 是一个预运算子。 X-预代数是在 $\mathbb{R}$上的一个预层 M，并且对 $\mathbb{R}$中的每个态射 $\alpha\colon S\to T$，都配备一个形式如下的结构映射 τ^α

$$\tau^\alpha : M(T)\to X(S)\otimes M(T/S)$$

其中 $M(T/S)=\bigotimes_\ell M(T_\ell)$，其中 ℓ遍历 S的叶子，而 $T_\ell=T(\alpha)_\ell$是 T中根为 $\alpha(\ell)$的子树。在不会引起混淆时，我们将简单地把 τ^α写作τ。这些结构映射还应满足显然的自然性、含幺性（即，当 $S=\eta$时， τ是典范同构）以及结合条件。特别地，如果我们将 $\alpha\colon S\to T$分解为 $\alpha'\circ\gamma\colon S\to S'\to T$，其中 γ属于 $\mathbb{A}$，且$\alpha'\colon S'\to T$是一个外部面（即一次修剪），那么 S的叶子就是 S'和 $T/S=T/S'$的叶子，并且

$$\begin{array}{ccc} M(T) & \xrightarrow{\ \tau\ } & X(S')\otimes M(T/S') \\ & \searrow^{\tau} & \downarrow{\scriptstyle \gamma^*\otimes id} \\ & & X(S)\otimes M(T/S) \end{array}$$

交换。因此，结构映射 τ完全由修剪对应的结构映射决定。还要注意，任何修剪都是由截去单个顶点的面复合而成的。由此可见，与上文讨论的经典运算子上的代数相关联的预层 $N(P,\ A)$是一个 $N(P)$-预代数的例子。

在 X 是一个 ∞-运算子的特殊情形下，如果对于每个修剪 $\alpha\colon S\to T$ in $\mathbb{R}$，相应的结构映射 $M(T)\ \to X(S)\otimes M(T/S)$是一个拟同构，则称 M 是一个 ∞-代数 *over*X。

配备显然的保持结构的态射，这些定义给出了预代数和

$$Prealg(X)\ \text{ and }\ \infty Alg(X)$$

∞-代数在 X上的范畴。

2.4. 推前。设 $f\colon X\to X'$是预运算子（或 ∞-运算子）的一个态射。则任意在 X 上的预代数 M，通过复合结构映射，都会得到一个在 X' 上的预代数

$$\begin{array}{ccc} M(T) & \xrightarrow{\ \tau\ } & X(S)\otimes M(T/S) \\ & \searrow^{\tau} & \downarrow{\scriptstyle f\otimes id} \\ & & X'(S)\otimes M(T/S) \end{array}$$

我们也将 $f_!(M)$或 $f_!(M,\tau)$记作带有结构映射$\tau'=(f\otimes id)\circ\tau$的 Mas X'-预代数。注意，如果 M是一个 ∞-代数，那么只有当 f是拟同构时， $f_!(M)$才是一个 ∞-代数。这个函子 $f_!$有一个右伴随 f^*，用于描述预代数的基变换，因为 $X-$预代数可以视为由 X诱导的余单子上的余代数，详见附录A。此外，当 f是拟同构时，文中还证明了 $f_!$和 f^*互为拟同构意义下的逆。

上述定义显然都有对偶形式，下面简要概述如下。

2.5. 预余运算子与 ∞-余运算子。预余运算子是一个协变函子（余预层） $Y\colon\ \mathbb{A}\to Ch$，同样配备结构映射

$$\theta : Y(S\circ_e T)\to Y(S)\otimes Y(T)$$

满足自然性和结合条件。我们始终假设 $Y(\eta)$ 是 k，并且当 S 或 T 为 η 时，θ 是典范同构。若所有结构映射都是拟同构，则称这样的预余运算子为 ∞- 余运算子。配备显然的保持结构的态射后，这定义了范畴

$$Precoop \text{ and } \infty Coop$$

预余运算子和 ∞-余运算子。

2.6. **余代数**。在预余运算子 Y 上的预余代数，是一个余预层 $N:\mathbb{R}\to Ch$，配备了结构映射；每个剪枝映射 $\alpha: S\to T$ in $\mathbb{R}$对应一个结构映射，

$$\nabla=\nabla^{\alpha}: N(T)\to Y(S)\otimes N(T/S)$$

这些态射同样必须满足自然性、含幺性和结合条件。与代数的情形不同，这些条件并不能确定 ∇^{α}，对于任意 $\alpha: S\to T$ in $\mathbb{R}$皆如此。若 ∞-余拟簇 Y 上的预余代数 N 对每个剪枝而言，其结构映射 ∇^{α} 都是拟同构，则称其为一个 ∞-余代数。配备显然的保结构态射后，它们构成如下范畴

$$Precoalg(Y) \text{ and } \infty Coalg(Y)$$

Y上的预余代数和 ∞-余代数。与预代数的情形一样，预余运算子之间的任意态射$f: Y\to Y'$ 同样会给出一个显然的推前函子

$$f_!: Precoalg(Y)\to Precoalg(Y').$$

2.7. **例子**。与运算子及其代数类似，一个“经典”的余运算子 C 会给出一个 ∞-余运算子 NC。如果 C 由有限集之间映射的无坐标分解映射给出

$$C(G)\to C(F)\otimes\bigotimes_{f\in F}C(G_f)$$

$G\to F$，那么 NC 可以定义为

$$NC(T)=\bigotimes_{v}C(in\ v),$$

这与运算子的情形对偶。C 的分解映射使 NC 成为 $\mathbb{A}$上的协变函子，而结构映射 θ 是同构。类似地，如果 E是一个在 C 上的余代数，其结构映射为 $E\to C(F)\otimes E^{\otimes F}$（其中 F为有限集），那么我们可以通过下式定义一个在 NC上的 ∞-余代数 $N(C,\ E)$

$$N(C,E)(T)=NC(T)\otimes\bigotimes_{\ell}E$$

其中 ℓ 遍历 T的叶子。

注意，每个 ∞-余运算子 Y都准同构于一个严格余运算子。事实上，令 C_Y为由 $C_Y(n)=Y(C_n)$定义的余运算子，其中 C_n 是具有 n个叶子的花冠。那么，结构映射 θ: $Y(S\circ T)\to Y(S)\otimes Y(T)$以及 $C_{k+\ell-1}\to C_k\circ_i C_\ell$的余预层结构映射（其中 $i=1,\ .....,\ k$）共同诱导出

$$C_Y(k+\ell-1)=Y(C_{k+\ell-1})\to Y(C_k\circ C_\ell)\to Y(C_k)\otimes Y(C_\ell)=C_Y(k)\otimes C_Y(\ell)$$

并将 C_Y 构造成严格余运算子。Y 的 ∞-余运算子结构给出一个映射$Y\xrightarrow{\simeq} NC_Y$，表明 Y 等价于严格余运算子 C_Y。

类似地，若 E 是 Y上的一个 ∞-余代数，则复形 $E(\eta)$通过以下映射具有余运算子 C_Y 上的（严格）余代数结构

$$E(\eta)\to E(C_n)\xrightarrow{\nabla} Y(C_n)\otimes E(\eta)^{\otimes\lambda C_n}=C_Y(n)\otimes E^{\otimes n}.$$

这里，第一个映射由 E 关于根包含 $\eta\to C_n$ 的余预层结构给出，第二个映射由 E 关于恒等映射 $C_n\to C_n$ 的 ∞-余代数结构给出。

3. Review of Koszul duality for ∞-operads

本节将回顾 [11] 中的巴与余巴构造。这些构造涉及一个函子

$$\mathcal{B} : Psh(\mathbb{A}) \to CoPsh(\mathbb{A})$$

及其左伴随

$$\mathcal{B}^{\vee} : CoPsh(\mathbb{A}) \to Psh(\mathbb{A}).$$

这些函子在 [11] 中证明的性质如下。

定理 3.1。(i) 函子 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}^{\vee}$ 互为准逆。换言之，每个余单位 $\mathcal{B}^{\vee}\mathcal{B}X \to X$ 都是拟同构，每个单位 $Y \to \mathcal{B}\mathcal{B}^{\vee}Y$ 也如此。(ii) 函子 $\mathcal{B}$ 将预运算子（分别是 ∞-运算子）映至预余运算子（分别是 ∞-余运算子）；反之，对于 $\mathcal{B}^{\vee}$ 亦然。(iii) 该伴随提升为伴随

$$\mathcal{B}^{\vee} : PreCoop \rightleftarrows PreOp : \mathcal{B}$$

$$\mathcal{B}^{\vee} : \infty Coop \rightleftarrows \infty Op : \mathcal{B}$$

（模去悬移）。

现在我们来回顾相关定义。请注意，符号和次数约定与文章 [11] 略有不同。现在它们与 Koszul 符号规则更加一致。

3.1. 预层的巴复形。设 X 是 $\mathbb{A}$ 上的一个预层（其值总是在 Ch 中）。X 的巴复形 $\mathcal{B}X$ 是余预层 $\mathcal{B}X : \mathbb{A} \to Ch$，定义在树 S 上如下：

$$\mathcal{B}(X)(S) = \Big(\prod_{\alpha : S \to T} \mathrm{Hom}(k[en_T], X(T)) \Big)^{inv},$$

其中，α 遍历 $\mathbb{A}$中以 S为定义域的态射构成的有限集，而 en_T是树 T的内边枚举的集合。我们将这样的一个枚举记作

$$e = (e_1, \ldots, e_p)$$

其中，每个 e_i 的次数均取为 -1。因此，e 的次数为 $-p$，在诸如 $(-1)^e$ 这样的语境中，我们通常只写 e。取关于这些枚举的置换以及在 S 之下的同构 $T \xrightarrow{\simeq} T'$ 的不变量。因此，一个次数为 n 的齐次元素 $\omega \in \mathcal{B}(X)(S)$ 可写作

$$\omega = (\omega_\alpha)_{\alpha : S \to T}$$

其中，ω_α 将每个枚举 $e = (e_1, \ldots\ldots, e_p)$ 对应到 $X(T)$ 中次数为 $n - p$ 的一个元素 $\omega_\alpha(e)$。不变性意味着，首先，

$$\omega_\alpha(e \cdot \sigma) = (-1)^{\sigma} \omega_\alpha(e)$$

对于任意排列 $\sigma \in \Sigma_p$，其中 $(-1)^{\sigma}$ 是 σ 的符号；其次，对于$S \xrightarrow{\alpha} T \xrightarrow{\gamma} T'$，其中 γ 是一个同构，

$$\gamma^* \omega_{\gamma\alpha}(\gamma e) = \omega_\alpha(e).$$

这里，γe 是 T' 的内边的诱导枚举，而 $\gamma^* : X(T') \to X(T)$ 是由 X 上的预层结构给出的。

$\mathcal{B}(X)(S)$上的微分对 α 定义如下：$S \to T$ by

$$(\partial\omega)_\alpha(e) = \partial_X \omega_\alpha(e) + (-1)^{\omega} \int_d d^* \omega_{d \circ \alpha}(de).$$

这里， ∂_X 是 $X(T)$ 的微分，而积分是对 $\mathbb{A}$ 中所有满足 T' 比 T 恰好多一条内边的态射 $d\colon T \to T'$ 取“加权”和。该态射以及新内边均记作 d。“加权”求和通过对这类态射的同构类 $T \xrightarrow{d} T'$（固定 T）取平均来进行，这样就避免了为同构类选择代表元这一不自然的做法，参见 [11] 的附录。此外，和本文其他地方一样，我们用 $(-1)^{\omega}$ 简写 $(-1)^{degree(\omega)}$。

$\mathcal{B}X$ 上的余预层结构由 $\mathbb{A}$中的复合直接给出。因此，对于$\beta : R \to S$ 和 $\omega \in \mathcal{B}(X)(R)$，在 α 上定义 $\beta_*(\omega)$： $S \to T$ 如下：

$$\beta_*(\omega)_\alpha = \omega_{\alpha\beta}.$$

显然可以验证 $\partial\partial = 0$ ，并且 β_* 保持微分。

有时使用不同的记号表示 $\mathcal{B}X$会更方便。注意

$$\prod_{\alpha} \mathrm{Hom}(k[en_T], X(T)) \cong \prod_{\alpha,e} X(T)[e]$$

其中，右侧的乘积遍历 T中内边的各对 $\alpha : S \to T$ 及枚举 e。移位 $X(T)[e]$ 为

$$X(T)[e]_n = X(T)_{n-p}$$

其中，若 $e = (e_1, \dots, e_p)$，则 e 也表示 p。因此我们也可以写成

$$\mathcal{B}(X)(S) = \Big(\prod_{\alpha,e} X(T)[e]\Big)^{inv}.$$

注意，构造 $\mathcal{B}(X)$ 关于 X 显然是函子性的。此外，如果 $X \to X'$ 是拟同构，那么 $\mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X')$ 也是拟同构。

3.2. 余不变量的巴复形。 我们需要用余不变量来描述 $\mathcal{B}X$ ，这基于典范同构

$$\rho : \bigoplus_{\alpha,e} X(T)[e] \to \prod_{\alpha,e} X(T)[e]$$

它诱导出一个从余不变量到不变量的同构

$$(\star\star) \qquad \rho : \Big(\bigoplus_{\alpha,e} X(T)[e]\Big)_{coinv} \to \Big(\prod_{\alpha,e} X(T)[e]\Big)^{inv}.$$

我们将左侧的元素写作三元组 (α, e, x)，有时在 α 已知的情况下，也简写为 (e, x)。这样的元素 (e, x) 的次数为 $e + x$ （即 e 的长度与 x 的次数之和）。同构 ρ 完全由不变性以及 $\rho(\alpha, e, x)_\alpha(e) = x$ 和 $\rho(\alpha, e, x)_\beta(f) = 0$ 确定，其中 β 与 α 不同构。我们将 ρ 写作一个同构

$$\rho : \bar{\mathcal{B}}(X) \to \mathcal{B}(X)$$

其中

$$\bar{\mathcal{B}}(X)(S) = \Big(\bigoplus_{\alpha,e} X(T)[e]\Big)_{coinv}$$

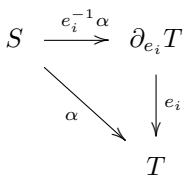
如（$\star\star$）所示，并将 $\mathcal{B}(X)$ 称为“以余不变量形式表示的 X 的巴复形”。沿着 ρ 传递微分和预层结构，可得到 $\mathcal{B}(X)$ 的以下公式：对于 $\beta\colon R \to S$ 映射 $\beta_*\colon \mathcal{B}(X)(R) \to \mathcal{B}(X)(S)$ 由下式给出

$$\beta_*(\gamma, e, x) = \begin{cases} (\alpha, e, x) & \text{if } \gamma = \alpha\beta \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

¯（若 $\gamma\colon\ R\to T$ 经由 β 分解为 $\gamma=\alpha\beta$，则 α 是唯一的。）$\mathcal{B}(X)$（S）上的微分 ∂ 由下式给出

$$\bar{\partial}(\alpha,e,x)=(\alpha,e,\partial_X(x))+(-1)^{e+x}\sum_{i\notin im(\alpha)}(-1)^{i-1}(e_i^{-1}\alpha,\partial_i e,e_i^*x).$$

此处 $\partial_i e=(e_1,\ \ldots\ldots,\ \hat{e}_i,\ \ldots\ldots,\ e_p)$，若 $e=(e_1,\ \ldots\ldots,\ e_p)$，并且我们使用了如下记号



表示 α 经过树 $\partial_{e_i}T$ 的分解，其中 $\partial_{e_i}T$ 由 T 收缩边 e_i得到。若边 e_i 不属于 α的像，则这样的分解存在且唯一。

接下来，我们将简要回顾对偶构造。

3.3. 余预层的余巴复形。 设 $Y\colon\ \mathbb{A}\to Ch$ 是定义在$\mathbb{A}$上的余预层。我们为每棵树 S 定义一个复形

$$\mathcal{B}^\vee(Y)(S)=\Big(\bigoplus_{\alpha:S\to T}Y(T)\otimes k[en_T]\Big)_{coinv}$$

与之前一样取余不变量。$\mathcal{B}^\vee(Y)$上的微分定义如下

$$\partial(\alpha,y\otimes e)=(\alpha,\partial_Y y\otimes e)+(-1)^y\int_d(d\circ\alpha,(\partial_d)_*y\otimes de)$$

其中，d 遍历在 $\mathbb{A}$ 中恰好增加一条内部边的态射 $T\xrightarrow{d}T'$，这些边仍称为 d（与前文相同）。α对应直和项中 $y\otimes e$的次数为 $y-e$。预层结构由复合直接给出：对于 $R\xrightarrow{\beta}S$ 和 $S\xrightarrow{\alpha}T$,

$$\beta^*(\alpha,y\otimes e)=(\alpha\beta,y\otimes e).$$

这显然与微分相容。与巴复形 $\mathcal{B}$一样，余巴复形 $\mathcal{B}^\vee(Y)$关于 Y 具有函子性，并且函子 $\mathcal{B}^\vee$ 保持拟同构。

3.4. 伴随性。 函子 $\mathcal{B}^\vee$ 是 $\mathcal{B}$的左伴随。具体而言，对于预层X 和余预层 Y，态射之间存在一一对应

$$\mathcal{B}^\vee Y\xrightarrow{\varphi}X\quad\text{ and }\quad Y\xrightarrow{\psi}\mathcal{B}X$$

我们稍后需要对它作出明确描述。给定 φ，定义 ψ，其中$y\in Y(S)$和 $S\xrightarrow{\alpha}T$满足

$$\psi_S(y)_\alpha(e)=(-1)^e\varphi_T(1_T,\alpha_*(y)\otimes e).$$

反过来，给定 ψ，定义 φ，其中 $S\xrightarrow{\alpha}T$和 $y\otimes e$ 满足

$$\varphi_S(\alpha,y\otimes e)=(-1)^e\alpha^*\psi_T(y)_{1_T}(e).$$

给定 φ，相应的 ψ 也可以用余不变量表示为

$$\bar{\psi}:Y\to\bar{\mathcal{B}}X,$$

$$\bar{\psi}_S(y)=\int_{\alpha,e}(-1)^e(\alpha,e,\varphi_T(1_T,\alpha_*(y),e)).$$

容易验证，φ 保留微分当且仅当 ψ 保留微分；φ 自然当且仅当 ψ 自然；并且从 φ 到 ψ 再返回的过程互为逆过程（详见附录 B）。

3.5. 预运算子的巴复形。 假设 X 具有预运算子结构，由以下映射给出

$$\theta_a = \theta_a^{S_1,S_2} : X(S_1 \circ_a S_2) \to X(S_1) \otimes X(S_2).$$

于是， $\mathcal{B}(sX)$具有预余运算子的结构，其中 sX 是X 的悬移，其元素记作 $sx \in (sX)_n$ ，其中 $x \in X_{n-1}$。我们希望对这一结构作出明确描述。首先，我们将描述 θ 如何诱导出一个自然映射Δ^a ，如

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\alpha,e} X(T)[e] & \xrightarrow{\Delta^a} & \prod_{\alpha_1,e_1} X(T_1)[e_1] \otimes \prod_{\alpha_2,e_2} X(T_2)[e_2] \\ & \searrow^{\Delta'} & \downarrow \mu \wr \\ & & \prod_{\alpha_1,\alpha_2,e_1,e_2} X(T_1) \otimes X(T_2)[e_1+e_2] \end{array}$$

这里，嫁接 $S_1 \circ_a S_2$ 在扩张 α： $S \to T$ 与这类 α_1： $S_1 \to T_1$ 和 α_2： $S_2 \to T_2$ 的对之间诱导出一个双射，其中 $T = T_1 \circ_a T_2$。若 ae 是 T 的内边的一个枚举，并将嫁接边 a置于最前面，则 T_1 和 T_2 的相应枚举记为 e_1 和 e_2。同构μ 由通常的 Koszul 符号给出

$$\mu(\omega_1 \otimes \omega_2)(e_1, e_2) = (-1)^{e_1\omega_2}\omega_1(e_1) \otimes \omega_2(e_2)$$

这里我们像通常一样省略了 α，并用 $e_1\omega_2$ 表示相应次数的乘积。映射 Δ' 定义为

$$\Delta'(\omega)(e_1, e_2) = (-1)^{\omega}\theta_a(\omega(ae_1e_2))$$

其中 θ_a 是 X 在嫁接 $T = T_1 \circ_a T_2$下的预运算子代数结构映射。注意， Δ' 的次数为 -1（因为删去了边 a）。该映射 Δ^a 是自然的，且在不变量上定义良好，因此定义了一个映射

$$\Delta^a : \mathcal{B}(X)(S) \to \mathcal{B}(X)(S_1) \otimes \mathcal{B}(X)(S_2)$$

次数为 -1。为验证 Δ^a 是余结合的并且与微分相容，方便起见，我们给出相应的余不变量上的映射的描述，记作

$$\bar{\Delta}^a : \bar{\mathcal{B}}(X)(S) \to \bar{\mathcal{B}}(X)(S_1) \otimes \bar{\mathcal{B}}(X)(S_2).$$

为此，考虑如下图表

$$\begin{array}{ccccc} \prod_{\alpha,e} X(T)[e] & \xrightarrow{\Delta^a} & \prod_{\alpha_1,e_1} X(T_1)[e_1] \otimes \prod_{\alpha_2,e_2} X(T_2)[e_2] & \xrightarrow[\sim]{\mu} & \prod_{\alpha_1,\alpha_2,e_1,e_2} X(T_1) \otimes X(T_2)[e_1+e_2] \\ \uparrow \rho & & \uparrow \rho\otimes\rho & & \uparrow \rho \\ \bigoplus_{\alpha,e} X(T)[e] & \xrightarrow{\bar{\Delta}^a} & \bigoplus_{\alpha_1,e_1} X(T_1)[e_1] \otimes \bigoplus_{\alpha_2,e_2} X(T_2)[e_2] & \xrightarrow[\sim]{\bar{\mu}} & \bigoplus_{\alpha_1,\alpha_2,e_1,e_2} X(T_1) \otimes X(T_2)[e_1+e_2] \end{array}$$

其中 ρ 是标准同构，而同构 $\bar{\mu}$ 则使右侧方框交换，因此

$$\bar{\mu}((e_1, x_1) \otimes (e_2, x_2)) = (-1)^{e_1(e_2+x_2)}(e_1, e_2, x_1 \otimes x_2)$$

（为节省篇幅，我们没有在上述图表中标明（余）不变量。）于是可以得到使左侧方框交换的 Δ^a 的如下公式，

$$\bar{\Delta}^a(e,x) = (-1)^{e+x+e_1(e_2+x_2)}((e_1,x_1)\otimes(e_2,x_2)),$$

其中 $e+x$ 是来自 Δ' 的符号，而 $e_1(e_2+x_2)$ 来自 $\bar{\mu}$；并且我们使用了记号 $\theta_a(x) = x_1\otimes x_2$（请记住，我们将和隐含省略）。这里假设 e 按顺序 ae_1e_2给出。利用这些公式，很容易验证 Δ^a 是余结合的，并且 ∂ 相对于 Δ^a 是一个余导子，如

$$\bar{\Delta}^a\bar{\partial} = -(\bar{\partial}\otimes 1 + 1\otimes\bar{\partial})\bar{\Delta}^a,$$

其中，负号来自 Δ^a 的次数为 -1。（验证过程见附录。）经过悬挂后，我们得到一个次数为 0 的余结合余乘法，

$$\bar{\Delta}^a : \bar{\mathcal{B}}(sX)(S) \to \bar{\mathcal{B}}(sX)(S_1)\otimes\bar{\mathcal{B}}(sX)(S_2)$$

其中 ∂ 是一个余导子，这表明 $\mathcal{B}(sX)$ 具有预余运算子-运算子的结构。显然，如果 X 是一个 ∞-运算子，那么 $\mathcal{B}(sX)$ 实际上是一个 ∞-余运算子；如果 X 是一个严格运算子，则它是一个严格余运算子。

3.6. **预余运算子的余巴复形**。假设余预层

$$Y : \mathbb{A} \to Ch$$

具有由映射给出的预余运算子附加结构

$$\theta_a : Y(S) \to Y(S_1)\otimes Y(S_2)$$

对每个嫁接 $S = S_1\circ_1 S_2$，如第 2.5 节所述。这会导出一个余乘法

$$\nabla = \nabla_a : \mathcal{B}^\vee(Y)(S) \to \mathcal{B}^\vee(Y)(S_1)\otimes\mathcal{B}^\vee(Y)(S_2),$$

这次其次数为 $+1$。对于 $\mathcal{B}^\vee(Y)(S)$ 中的一个元素 (α,y,e)，其中 $\alpha\colon S\to T, y\in Y(T)$，且 e 是 T 的一个枚举，按与之前相同的顺序取定，

$$\nabla(\alpha,y,e) = (-1)^{y+e_1y_2}(\alpha_1,y_1,e_1)\otimes(\alpha_2,y_2,e_2).$$

这里的符号是通常的 Koszul 符号，其中我们将 ∇ 视为复合

$$\nabla = tw\circ(\theta_a\otimes id)\circ(id\otimes drop_a)$$

其中 $drop_a$ 将 $e = ae_1e_2$ 映射到 e_1e_2，而 θ_a 将 y 映射到 $y_1\otimes y_2$，并且 tw 将 $(y_1\otimes y_2, e_1e_2)$ 洗牌为 $(y_1,e_1)\otimes(y_2,e_2)$（这里我们再次省略 α,α_1,α_2）。由于 $\mathcal{B}^\vee(Y)$ 中 (α,y,e) 的次数为 $y-e$，映射 ∇ 的次数为 $+1$。同样可以验证，∇ 关于 S 是自然的、（分次）余结合的，并且微分

$$\partial(\alpha,y,e) = (\alpha,\partial_Y y,e) + (-1)^y\int_d(d\circ\alpha, d_*y, de)$$

是一个分次余导子，即

$$\nabla\circ\partial = -(\partial\otimes 1 + 1\otimes\partial)\circ\nabla.$$

因此，若 Y 是预余运算子，则反悬挂 $s^{-1}Y$ 的 Cobar 构造 $\mathcal{B}^\vee(s^{-1}Y)$ 将具有余乘法 $\nabla\colon \mathcal{B}^\vee(s^{-1}Y)(S)\to\mathcal{B}^\vee(s^{-1}Y)(S_1)\otimes\mathcal{B}^\vee(s^{-1}Y)(S_2)$，其次数为 0，并使 $\mathcal{B}^\vee(s^{-1}Y)$ 成为预运算子。从 ∇ 的定义显然可知，若 Y 是一个 ∞-余运算子，则 $\mathcal{B}^\vee(s^{-1}Y)$ 实际上是一个 ∞-运算子；若 Y 是严格余运算子，则它是严格运算子。

3.7. 伴随性与结构。第 3.4 节中预层 $\mathcal{B}^\vee Y \xrightarrow{\varphi} X$ 的映射与余预层 $Y \xrightarrow{\psi} \mathcal{B}X$ 的映射之间的双射对应，现在限制到预运算子与预余运算子（或分别限制到 ∞-运算子与 ∞-余运算子）。更确切地说，若 (X, θ_X) 是一个预运算子，(Y, θ_Y) 是一个预余运算子，且 $\varphi : \mathcal{B}^\vee Y \to X$ 和 $\psi : Y \to \mathcal{B}X$ 是在该伴随下对应的次数为 -1 的映射，则

$$(\varphi \otimes \varphi)\nabla = -\theta_X \varphi \qquad \text{if and only if} \qquad (\psi \otimes \psi)\theta_Y = -\Delta\psi$$

（见附录 B）。因此，如果次数为 0 的映射 $\mathcal{B}^\vee(s^{-1}Y) \xrightarrow{\varphi'} X$ 和 $Y \xrightarrow{\psi'} \mathcal{B}(sX)$ 在伴随关系下对应，那么对 $\varphi = \varphi' \circ (\mathcal{B}^\vee s^{-1})$ 和 $\psi = (\mathcal{B}s)^{-1} \circ \psi'$ 应用该等价可知，φ' 是预运算子的映射，当且仅当 ψ' 是预余运算子的映射。这便得到本节开头所述的伴随关系。

3.8. 注记（严格化）。回顾第 2.7 节，每个 ∞-余拟簇 Y 都准同构于一个严格的余拟簇，我们将其记作 C_Y。由于函子 $\mathcal{B}^\vee$ 保准同构，根据定理 3.1，通过考虑如下 zig-zag，我们可知每个 ∞-运算子都准同构于一个严格的运算子

$$X \xleftarrow{\sim} \mathcal{B}^\vee(s^{-1}\mathcal{B}(sX)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}^\vee(s^{-1}C_{\mathcal{B}(sX)}).$$

4. The bar-cobar adjunction for presheaves on $\mathbb{R}$

回顾第 2.3 节，预运算子 X 上的代数被定义为 $\mathbb{R}$ 上的预层，其结构映射将这些对象联系到 X。对偶地，预余运算子 Y 上的余代数是 $\mathbb{R}$ 上的余预层，并配有这类结构映射。在本节中，我们将再次定义 bar 函子 $\mathcal{B}$ 和 cobar 函子 $\mathcal{B}^\vee$，并证明它们互为伴随。在下一节中，我们将证明它们实际上在准同构意义下互为逆。

4.1. 预层的巴复形。设 M 是 $\mathbb{R}$上的预层。对于 $\mathbb{R}$的一个对象S，我们定义

$$\mathcal{B}(M)(S) = \Big(\prod_{\alpha : S \to T}^{c} \mathrm{Hom}(k[en_T^+], M(T)) \Big)^{inv}.$$

此处 $\alpha : S \to T$ 遍历 $\mathbb{R}$中的态射。与 $\mathbb{A}$ 上的预层的巴构造（如第 3.1 节所述）相比，一个重要区别是，对于固定的 S，这不再是一个有限集。乘积上的上标 c 表示我们取乘积中由有限支撑函数构成的子空间。T 的根边和内边的枚举集合记作 en_T^+（除了内边之外，现在还必须考虑根，因为花冠的外部根面对于代数结构至关重要）。根据定义，$en^+(\eta)$是空集（也就是说，在此语境中，η 的唯一边必须被视为一片叶）。因此，$\mathcal{B}(M)(S)$的一个元素 ω 为每个 $\alpha : S \to T$ 以及每个枚举$e = (e_1, \ldots\ldots, e_p)$指定一个 $M(T)$中的元素 $\omega_\alpha(e)$，或者仅仅是 $\omega(e)$。此外，对于除有限多个 α之外的所有情形，$\omega_\alpha(e) = 0$。要求这样的元素 ω 在枚举 e 的置换以及 S下的同构作用下保持不变，与之前一样。具体而言，

$$\omega_\alpha(e\sigma) = (-1)^\sigma \omega_\alpha(e)$$

对于任意排列 $\sigma \in \Sigma_p$，以及

$$\omega_\alpha(e) = \gamma^* \omega_{\gamma\alpha}(\gamma e)$$

对于任意同构 $\gamma : T \to T'$。枚举 $e = (e_1, \ldots, e_p)$ 的次数为 $-p$，有时也不严谨地记作 $-e$。因此，如果 ω 的次数为 n，它将 α

并将 e映射到 $\omega_\alpha(e) \in M(T)^{n-p}$。我们还将写作

$$\mathcal{B}(M)(S) = \Big(\prod_{\alpha,e}^{c} M(T)[e] \Big)^{inv}.$$

为描述微分，先回忆一下， a 的内边 T 定义了一个映射∂_a： $\partial_a T \rightarrowtail T$ 在 $\mathbb{A}$ 中（因而也在 $\mathbb{R}$中），有时也简记为 a： $\partial_a T \rightarrowtail T$。而 T 中的顶点 v 定义了一个映射 ∂_v： $\partial_v T \to T$ 在 $\mathbb{R}$ 中，其中 $\partial_v T$ 是从 T 上剪去顶点 v后得到的树。现在，对于 $\omega \in \mathcal{B}(M)(S)$，微分由下式给出，其中 α： $S \to T$，且 e 是一个枚举:

$$(\partial\omega)_\alpha(e) = \partial\omega_\alpha(e) + (-1)^\omega \int_d \partial_d^* \omega_{d\alpha}(de) - (-1)^\omega \int_{v\ top} \partial_v^* \omega_{d\alpha}(de).$$

这个公式与预运算子的公式相似，但有一些重要区别。在第一个积分中， d 遍历 $\mathbb{R}$ 中的内部态射 d： $T \to T'$，这些态射添加一个输出边为 d的新顶点，使得 T 可由 T' 收缩 T'中的一条内边 d得到。在第二个积分中， v遍历 T'中输出边为 d 的顶点，这条边是 T的一片叶。因此， T是从 T'上剪去 T'中的这个顶点 v后得到的。第二类外态射 ∂_v： $T \to T'$构成一个无限集，因此，第二个积分要有意义，有限支撑至关重要。预运算子的情形中没有这个第二个积分，因为当时只考虑了内部映射。可以验证 $\partial\partial = 0$，从而使 $\mathcal{B}(M)(S)$成为一个链复形（实际上，按照第 4.2 节中的描述，在取余不变元之后再验证会更容易）。 $\mathcal{B}(M)$ 上的余预层结构由复合给出：对于 β： $S \to R$ 和 $\omega \in \mathcal{B}(M)(S)$，定义

$$\beta_*(\omega)_\alpha(e) = \omega_{\alpha\beta}(e),$$

对于 α：$R \to T$和 $e \in en_T^+$。此映射 β_*：$\mathcal{B}(M)(S) \to \mathcal{B}(M)(R)$ 保持微分，并赋予 $\mathcal{B}(M)$： $\mathbb{R} \to Ch$ 余预层结构。

4.2. 余不变量的巴构造。我们需要用余不变量来描述 $\mathcal{B}(M)$，如同第 3.2 节中对 $\mathcal{B}(X)$ 的描述。记

$$\bar{\mathcal{B}}(M)(S) = \Big(\bigoplus_{\alpha:S\to T} k[en_T^+] \otimes M(T) \Big)_{coinv} = \Big(\bigoplus_{\alpha,e} M(T)[e] \Big)_{coinv}$$

¯和 ρ：$\mathcal{B}(M)(S) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(M)(S)$ 表示典范同构（记住， $\mathcal{B}(M)$ 的元素具有有限支撑）。为描述微分如何沿着 ρ传递 $\mathcal{B}(M)$ 的微分，介绍一些记号会很方便。设 $e = (e_1、\ .....、\ e_p)$ 是树 T 的根和内边的一个枚举。 $\mathcal{B}(M)(S)$ 中的一个元素由三元组 $(\alpha,\ e,\ x)$ 表示，其中 $x \in M(T)_n$，次数为$n + e = n + p$。令 v_i 为紧邻 e_i 上方的顶点。预层 M 结构给出映射

$$e_i^* : M(T) \to M(\partial_{e_i} T)$$

对于 e_i 一条内边；若 v_i 恰好是一个顶点，也包括

$$v_i^* : M(T) \to M(\partial_{v_i} T).$$

现在为 α 定义： $S \to T$， $e \in en_T^+$ 以及 $x \in M(T)$ 元素 $e_i^*(\alpha, e, x)$ 和 $v_i^*(\alpha, e, x)$，定义如下：

$$\begin{aligned}
e_i^*(\alpha, e, x) &= 0 \text{ if } e_i \text{ is an inner edge of } S \text{ or the root} \\
v_i^*(\alpha, e, x) &= 0 \text{ unless } v_i \text{ is a top vertex of } T \text{ that does not belong to } S \\
e_i^*(\alpha, e, x) &= (e_i^{-1}\alpha, (e_1, \ldots, \hat{e_i}, \ldots, e_p), e_i^* x) \\
&\quad \text{if } e_i \text{ is an inner edge of } T, \text{ not belonging to } S \\
v_i^*(\alpha, e, x) &= (v_i^{-1}\alpha, (e_1, \ldots, \hat{e_i}, \ldots, e_p), v_i^* x) \\
&\quad \text{if } v_i \text{ is a top vertex of } T, \text{ not belonging to } S.
\end{aligned}$$

这里我们使用记号

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "e_i^{-1}\alpha"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \partial_{e_i} T \arrow[d, "e_i"] \\
& T
\end{tikzcd}$$

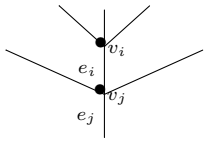
表示 e_i 不属于 S， v_i也类似。现在通过公式定义 ∂ 在 $\mathcal{B}(M)(S)$ 上的微分

$$\bar{\partial}(\alpha, e, x) = (\alpha, e, \partial_X x) + (-1)^{e+x} \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} (e_i^*(\alpha, e, x) - v_i^*(\alpha, e, x))$$

其中 α： $S \to T$, $e = (e_1, \ldots\ldots, e_p) \in en_T^+$ 和 $x \in M(T)$，与之前一样。注意，对于固定的 i ，求和之后的表达式中可能有零项、一项或两项非零项：若 e_i 是 T 的内部边且 v_i 在 T 中不是顶点，并且 e_i不属于 S，则有一项；若 e_i 是 S 的一片叶且 v_i 是 T的一个顶点，则有一项；若 v_i 是 T 的一个顶点且 e_i 不属于 S，则有两项。我们还将使用记号

$$\hat{\partial}_i(\alpha, e, x) = e_i^*(\alpha, e, x) - v_i^*(\alpha, e, x)$$

∂ 是 $\mathcal{B}(M)(S)$ 上的微分这一事实，即 $\partial\partial = 0$，可以通过检查 $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ 来验证。若 e_i 是 v_j 的一条输入边，如下图所示，则后一等式并非显然，



然后基于树状恒等式 $\partial_{v_j} \partial_{e_i} = \partial_{v_j} \partial_{v_i}$ ，如下面的交换图所示。

$$\begin{tikzcd}
\partial_{v_j} \partial_{v_i} T \arrow[r, "\partial_{v_j}"] \arrow[d, equal] & \partial_{v_i} T \arrow[r, "\partial_{v_i}"] & T \arrow[d, equal] \\
\partial_{v_j} \partial_{e_i} T \arrow[r, "\partial_{v_j}"] & \partial_{e_i} T \arrow[r, "\partial_{e_i}"] & T
\end{tikzcd}$$

（注意，在如树 $\partial_{e_i} T$ 中那样收缩 e_i 之后， $\partial_{e_i} T$ 中位于 e_j 上方的顶点 v_j 是原先位于 T 中的顶点 v_j 与 v_i 的“复合顶点”。）

4.3. 余幂零余预层。 余预层 $N:\mathbb{R}\to Ch$ 称为余幂零的，如果对 $\mathbb{R}$ 中的任意对象 S 以及任意 $y\in N(S)$，仅存在有限集的态射$\alpha:\ S\to T$ 使得 $\alpha_*(y)$ 非零。换言之，对任意 $y\in N(S)$，当态射 $\alpha:\ S\to T$ 进入充分大的树 T 时， $\alpha_*(y)$ 变为零。例如，设 C 为链复形中的余交换余代数，并设 $N(C)$ 为其在第 3 节中定义的神经。于是 $N(C):\ \mathbb{R}\to Ch$ 由下式定义

$$N(C)(S)=\underline{k}(S)\otimes C^{\otimes\lambda S}=C^{\otimes\lambda S}.$$

这里 $\underline{k}:\ \mathbb{R}\to Ch$ 是取值为 k 的常值函子，表示余交换余代数的余运算子，而 λS 是树 S 的叶子集合。如果 $S\to T$ 是一个内部态射，那么 $N(C)(S)\ \to N(C)(T)$ 是一个同构。但如果 $S\to T$ 是一个外部面映射，即一个修剪，则它涉及一个非平凡的余乘法 $C^{\otimes\lambda S}\to C^{\otimes\lambda T}$。因此，当且仅当 C 按通常意义上是一个余幂零余代数时， $N(C)$ 才是一个余幂零余预层。

我们将记

$$CoPsh^c(\mathbb{R})\subset CoPsh(\mathbb{R})$$

为 $\mathbb{R}$ 上余幂零预层的全子范畴。我们注意到，预层 M 的巴构造 $\mathcal{B}M$ 是余幂零的，因此 $\mathcal{B}$ 是一个函子 $Psh(\mathbb{R})\ \to CoPsh^c(\mathbb{R})$。

4.4. 余幂零预层的 Cobar 构造。设 $N:\ \mathbb{R}\to Ch$ 是一个余幂零余预层。现在我们定义一个 Cobar 预层

$$\mathcal{B}^\vee(N):\mathbb{R}^{op}\to Ch$$

其公式为

$$\mathcal{B}^\vee(N)(S)=\left(\bigoplus_{\alpha:S\to T}N(T)\otimes k[en_T^+]\right)_{coinv}$$

其中 α 遍历 $\mathbb{R}$ 中以 S 为定义域的无限多个态射，而三元组（$\alpha,\ y\otimes e$）（我们也写作（$\alpha,\ y,\ e$））的次数为 $y-e$，其中 e 在此表示：若 $e=$（$e_1,\ .....,\ e_p$），则 p。因此我们也可以写成

$$\mathcal{B}^\vee(N)(S)=\left(\bigoplus_{\alpha,e}N(T)[-e]\right)_{coinv}$$

余不变量取自枚举 e 的置换以及在 S 下的同构。因此对于 $\sigma\in\Sigma_p$,

$$(\alpha,y\otimes e)=(-1)^\sigma(\alpha,y\otimes e\sigma).$$

而对于 $\gamma:\ T\xrightarrow{\sim}T'$,

$$(\alpha,y\otimes e)=(\gamma\alpha,\gamma_*y\otimes\gamma e).$$

微分定义为

$$\partial(\alpha,y\otimes e)=(\alpha,\partial_Y(y)\otimes e)+(-1)^y\int_d(d\circ\alpha,(\partial_d)_*y\otimes de)-(-1)^y\int_{v\ top}(d\circ\alpha,(\partial_v)_*y\otimes de)$$

其中，在第一个积分 d 中， $T\to T'$ 遍历 $\mathbb{A}$ 中恰好增加一条内部边的态射；在第二个积分中， v 遍历 T' 中输出边为 d 的顶点，其中 d 是 T 的一片叶，这与上文 $\mathcal{B}M$ 的微分相同。此类态射 $d:\ T\to T'$ 的集合是无限的，而微分之所以有意义，只是因为我们假设 N 是余幂零的。至于预层结构，与态射 $\beta:$ $R\to S$ 相关联的映射 $\beta^*:\ \mathcal{B}^\vee(N)(S)\ \to\mathcal{B}^\vee(N)(R)$ 定义为

$$\beta^*(\alpha,y\otimes e)=(\alpha\beta,y\otimes e).$$

微分与预层结构彼此兼容，并且在余不变量上定义良好，从而使 $\mathcal{B}^\vee(N):\ \mathbb{R}^{op}\to Ch$ 成为一个预层。

命题 4.1。 *bar* 函子与 *cobar* 函子

$$\mathcal{B}^\vee : CoPsh^c(\mathbb{R}) \rightleftarrows Psh(\mathbb{R}) : \mathcal{B}$$

互为伴随，其中 $\mathcal{B}^\vee$ 是 $\mathcal{B}$的左伴随。

证明。 态射 φ： $\mathcal{B}^\vee N \to M$ 与 ψ :$N \to \mathcal{B}M$ 之间的一一对应仍由以下公式给出

$$\varphi_S(\alpha, y \otimes e) = (-1)^e \alpha^* \psi_T(y)_{1_T}(e)$$
$$\psi_S(y)_\alpha(e) = (-1)^e \varphi_T(1_T, \alpha_*(y) \otimes e).$$

注意，若 y 是余幂零余预层 N中的一个元素，则 $\psi_S(y)$确实具有有限支撑。容易验证， φ 是自然的当且仅当 ψ 是自然的； φ 保持微分当且仅当 ψ 保持微分；此外，关于 φ 和 ψ 的两个定义互为逆变换。验证过程与运算子和余拟簇的情形完全相同，见附录 B。□

注记 4.2。 (i) 虽然本文不会用到这一点，我们注意到，该伴随由一个“扭曲余循环”介导

$$\tau_S : (\bigoplus_e N(S))_{coinv} \to M(S)$$

其中 S 遍历 $\mathbb{R}$ 和 $e \in en_S^+$ 中的对象。上述 φ 与ψ 之间的对应关系，对于 $\alpha : S \to T$和 $y \in N(S)$，可以表示为

$$\psi_S(y)_\alpha(e) = (-1)^e \tau_T(e, \alpha_* y)$$
$$\varphi_S(\alpha, y \otimes e) = \alpha^* \tau_T(e, y),$$

并且 τ由此最后一个方程以 φ 定义，即 $\tau_S(e, y) = \varphi_S(1_S, y \otimes e)$。态射族 τ_S（其中 S 属于 $\mathbb{R}$）对于 $\mathbb{R}$ 中的同构是自然的，并满足“Maurer-Cartan 方程”

$$\partial_M \tau_S(e, y) - \tau_S(e, \partial_N y) = (-1)^y \int_d d^* \tau_{S'}(de, d_* y) - (-1)^y \int_{v\, top} d^* \tau_{S'}(de, (\partial_v)_* y)$$

其中两个积分的范围分别与之前相同，涵盖相同的 d 和 v。

(ii) 我们需要明确描述该伴随的单位和余单位。在对象 S 处，单位 $\eta : N \to \mathcal{B}\mathcal{B}^\vee N$ 由下式给出

$$\eta_S(y)_\alpha(e) = (-1)^e (1_T, \alpha_*(y) \otimes e).$$

余单位 ε: $\mathcal{B}^\vee \mathcal{B}M \to M$ 在 S 处由下式给出

$$\varepsilon_S(\beta, \omega \otimes e) = (-1)^e \beta^*(\omega_{1_T}(e))$$

对于 β: $S \to T$, $\omega \in \mathcal{B}(M)(T)$ 和 $e \in en_T^+$。

(iii) 关于第 4.2 节中以余不变量描述 $\mathcal{B}M$ ， φ: $\mathcal{B}^\vee N \to M$ 与 $\bar{\psi} : N \to \bar{\mathcal{B}}M$ 之间的对应关系形式如下

$$\bar{\psi}(y) = \int_{S \leftarrow T, e} (-1)^e \varphi_T(1_T, e, \alpha_* y)$$

对于 $y \in N(S)$。由于假设 N 是余幂零的，这个积分（或对同构类求和，参见 [11] 的附录）是有限的。特别地，这给出了对象 S 处 $\mathbb{R}$ 的单位 $\bar{\eta} : N \to \bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}^\vee N$ 的如下公式:

$$\bar{\eta}_S(y) = \int_{\alpha, e} (-1)^e (\alpha, e, (1_T, e, \alpha_* y))$$

其中 α： $S \to T$和 $e \in en_T^+$ 同前。余单位 $\bar{\varepsilon}$： $\mathcal{B}^\vee \bar{\mathcal{B}}M \to M$在 S处定义，对于 α： $S \to R$和 $e \in en_R^+$，以及任意 $\xi = (R \xrightarrow{\beta} T, f \otimes x) \in \bar{\mathcal{B}}(M)(R)$，定义为

$$\bar{\varepsilon}_S(\alpha, \xi \otimes e) = (-1)^{e+\sigma} (\beta\alpha)^*(x)$$

假设 β是一个满足 $\beta e = f\sigma$的同构；否则 $\bar{\varepsilon}_S(\alpha, \xi \otimes e) = 0$。

5. Bar-cobar duality

本节将讨论范畴 $\mathbb{R}$ 上（余）预层的一个巴–cobar（或“Koszul”）对偶版本，如下列定理所述。

定理 5.1. 巴函子与 *cobar* 函子 $\mathcal{B}: Psh(\mathbb{R}) \to CoPsh^c(\mathbb{R})$ 和 $\mathcal{B}^\vee: CoPsh^c(\mathbb{R}) \to Psh(\mathbb{R})$ 互为逆函子，差一个拟同构。更确切地说，根据命题 *4.1* 中的伴随，对于每个余幂零余预层 N，单位 $\eta: N \to \mathcal{B}\mathcal{B}^\vee N$ 是拟同构；对于每个预层 M，余单位 $\varepsilon: \mathcal{B}^\vee\mathcal{B}M \to M$也同样是拟同构。

我们将详细证明每个单位 $\eta: N \to \mathcal{B}\mathcal{B}^\vee N$ 都是拟同构，并利用以余不变量表述的巴构造来完成证明。余单位的情形本质上是对偶的，证明思路也相同，因此我们把余单位的细节留给读者。

5.1. **复形** $\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}^\vee(N)(R)$。对于对象 $R \in \mathbb{R}$，我们来更详细地描述复形$\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}^\vee(N)(R)$。根据定义，它是如下复形

$$\Big(\bigoplus_{\alpha,e} \bigoplus_{\beta,f} N(T)\Big)_{coinv}$$

其中 $\alpha: R \to S$ 和 $\beta: S \to T$ 属于 $\mathbb{R}$，e 遍历 S 的根边与内边的枚举，而 f 遍历 T的根边与内边的枚举。由于我们取的是余不变量，不妨假设 e 是 f 沿 β的限制，并将 e 完全舍去。出于类似的原因，我们可以假设 S 是 T的一个面，即 β 是由初等内部面映射和外部面映射复合而成，但不包含任何同构。在这些约定下，余不变量仅涉及枚举 f 的排列以及 T的同构。换言之，复形中的元素可以写成如下形式的元素之和

$$(R \xrightarrow{\gamma} T, S, f, y)$$

其中 $S \rightarrowtail T$ 是一个包含 R像的面，f 是 T（的根边与内边）的一个枚举，而 $y \in N(T)$。特别地，取余不变量意味着，对于同构 $\delta: T \xrightarrow{\sim} T'$，这样的四元组$(R \xrightarrow{\gamma} T, S, f, y)$与$(R \xrightarrow{\delta\gamma} T', \delta(S)\ \delta f, \delta_* y)$视为相同。复形 $\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}^\vee(N)(R)$是一个三重复形的全复形。该三重复形中元素$(R \xrightarrow{\gamma} T, S, f, y)$的次数为$(p, q, n)$，其中 p是 S 的顶点数，q是 T的顶点数（我们也将其记作 f），而 n是 $y \in N(T)$的次数。（我们也用 y 表示这个次数 n。）总次数为 $p + (n - q)$，这符合第 4 节中巴与余巴构造的次数约定。来自 $\bar{\mathcal{B}}$的外部微分 ∂^{ext}: $\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}^\vee(N)(R)_{p,q,n} \to \bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}^\vee(N)(R)_{p-1,q,n}$由下列公式给出

$$\partial^{ext}(R \xrightarrow{\gamma} T, S, f, y) = (-1)^{p+n-q} \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} (R \xrightarrow{\gamma} T, \hat{\partial}_i S, f, y), \qquad (1)$$

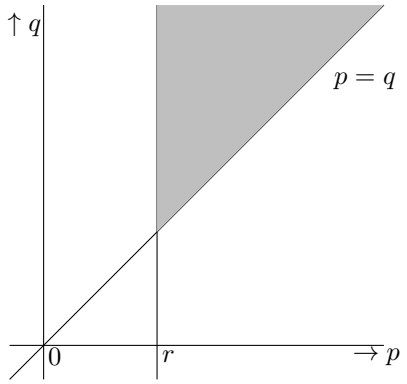
其中，$e = (e_1, \ldots\ldots, e_p)$ 是由枚举 f 诱导的 S 的根和内部边的枚举，而和仅对满足 $\partial_{e_i} S$ 包含 R 的 i 求取。这个三次数为 $(-1, 0, 0)$ 的微分既不影响 T 和 f，也不影响 y。由 $\mathcal{B}^\vee(N)(R)$ 的微分产生的 $\mathcal{B}\mathcal{B}^\vee(N)(R)$ 的内部微分本身具有一个三次数为 $(0, 1, 0)$ 的“外部”部分 $\partial^\vee$，我们可以将其写成

$$\partial^\vee(\gamma, S, f, y) = (-1)^n \int_d (d\gamma, S, df, (\partial_d)_* y) - (-1)^n \int_{v\ top} (d\gamma, S, df, (\partial_v)_* y) \qquad (2)$$

其中，两个积分都遍历与之前相同的 d 和 v，以及一个三次数为 $(0, 0, -1)$ 的内部部分∂_Y，

$$\partial_Y(\gamma, S, f, y) = (\gamma, S, f, \partial_N y). \qquad (3)$$

注意，忽略来自 N 的次数 n，对于双次数 (p, q)，我们有 $p \leq q$，其中 p 以树 R 的大小为下界，而 q 原则上无上界。因此，(p, q)-双复形位于如下图所示的一个卦限中，其中 r 是 R 的顶点数。



暂且固定次数 n，并聚焦于这个 (p, q)-双复形。

引理 5.2。除双次数为 $p = q = r$ 的底行仅由 $N(R)$ 组成外，(p, q)-复形的每一行都是无环的（对于 $\gamma\colon R \to T$ 和 $S \to T$ 均为恒等态射）。

证明。首先注意，在 (γ, S, f, y) 上双次数为 $(-1, 0)$ 的微分 ∂^{ext} 不影响 γ, f 和 y，因此对于固定的 q（以及固定的 n 和 y），该复形分解为一系列复形 $C(\gamma, f)$ 的和，其中 (γ, f) 遍历态射 $\gamma\colon R \to T$ 和枚举 $f \in en_T^+$ 的同构类。固定这样一个同构类，我们可以用面映射 $\gamma\colon R \to T$ 和枚举 f 来表示它。于是，$C(\gamma, f)$ 可以识别为 $N(T)_n$ 与复形的张量积

$$\underline{k}[Fact(\gamma)]$$

其在次数 p 上是由分解 $R \rightarrowtail S \rightarrowtail T$ 生成的向量空间，其中 $S \rightarrowtail T$ 是 T 的一个面，且恰有 p 个顶点。我们将简写 S 表示这样的分解。微分是一个和

$$\partial S = \sum \pm S'$$

其中 $S' \rightarrowtail S$ 是包含 R 的 S 的一个初等面。这可以是收缩 S 的一个内部面 e 所得到的内部面，也可以是修剪，即切去一个不属于 R 的顶点树 S 的顶点 v。如果 $(e_1, \ldots, e_p)$ 是由固定枚举 f 诱导的 S 的内边枚举，那么前一个等式中的符号 $\pm$ 在 $S' = \partial_{e_i} S$ 为内部面时是 $(-1)^{p+(n-q)+i-1}$；在 $S' = \partial_{v_i} S$ 且 v_i 是 S 的一个顶点、其输出边为 e_i 时是 $(-1)^{p+(n-q)+i}$。为简化记号，我们将因子 $p + (n - q)$ 约去，因为只需证明带有如下符号的复形 $k[Fact(\gamma)]$

$$(-1)^{i-1} \text{ if } S' = \partial_{e_i} S$$

$$(-1)^{i} \text{ if } S' = \partial_{v_i} S$$

是可缩的。

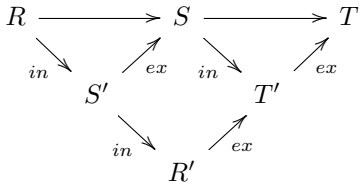
现在假设 $\gamma\colon R \to T$ 不是同构，也就是说，复形 $k[Fact(\gamma)]$并非只集中在一个次数 $p - q = r$ 上。将 $\gamma\colon R \to T$ 分解为$R \to R' \to T$，其中 $R \to R'$ 是内部的，而 $R' \to T$ 是外部的。那么这两者之一

不是同构。如果 $R \to R'$ 不是同构，就在 R' 中选取一条不属于 R的内边 a。如果 $R \to R'$ 是同构，就选取 R（或 R'）的一片叶 a，它同时是 T的一条内边。这样的 R 的叶存在，因为否则 $R' \to T$ 也会是同构。

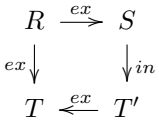
利用 T的这条边 a，我们可以定义同伦算子 h_a：

$$\begin{aligned} h_a(R \to S \to T) &= R \to S_a \to T, \text{ if } a \text{ is not an inner edge of } S \\ &= 0 \text{ otherwise.} \end{aligned}$$

这里，S_a 是 T 的唯一一个面，其内边由 S 的内边以及 a组成。为了说明这样的面 S_a 确实存在（若 a 不是 S的内边），我们再次使用内外分解，如图所示



其中，标记为 in 的边是内边，标记为 ex 的边是外边。若 $R \to T$不是外部的，则 a属于 R'，因而属于 T'；S可由 T'通过收缩若干条内边（其中包括 a）得到（仍假设 a不是 S的内边），而 S_a 是通过收缩这些内边（除 a之外）从 T' 得到的树。若 $R \to T$ 是外部的，则如上图所示有 $R = S' = R'$，这可简化为



其中复合 $R \to T'$ 同样是外部的，且 a 是 R的一片叶。若 a 不是 S 中的内边，则 a 是 S的一片叶，而 S_a 是这样得到的树：将 T 的顶点嫁接到 a 正上方，并置于 S之上。

要证明 h_a 是一个收缩同伦，我们可以假设 $a = f_1$ 位于所选的枚举（f_1，.....，f_q）$= f$中，该枚举针对 T的根和内边。于是，如果 $R \to T$不是外部的，则对于每个 S，$S \to S_a$ 都是一个内面，并且

$$\partial(h_a S) = S - h_a(\partial S).$$

而如果 $R \to T$ 是外部的，则对于每个 S，$S \to S_a$ 都是一个外部面，并且

$$\partial(h_a S) = -S - h_a(\partial S).$$

无论哪种情况，我们都看到，对于固定的 $R \to T$，h_a 都是一个收缩同伦。

这表明，当 γ 时，复形 $k[Fact(\gamma)]$ 是可缩的：$R \to T$ 不是一个同构，并证明了该引理。□

因此，在保持来自预层 N 的次数 n 固定的情况下，我们得到以下情形。

引理 5.3。设 $C_{p,\ q}$ 是一个双复形，其中 $C_{p,\ q} = 0$，除非 $r \le p \le q$ 对于某个固定的下界 r成立；其微分 ∂^{ext} 的双次数为（-1，0），而 $\partial^{\vee}$ 的双次数为（0，1），如上图（*）所示。假设当 $q > r$时，各行 $C_{-,\ q}$ 都是可缩的。则全复形 Tot（C）$_s = \bigoplus_{p-q=s} C_{p,\ q}$ 在次数 $s < 0$上同调消失。

证明。证明遵循通常的井字游戏论证。由于分次可能有些不寻常，我们略述证明。令 h: $C_{p,\ q} \to C_{p+1,\ q}$ 为收缩

同伦，记作 $h\partial^{ext} + \partial^{ext}h = Id$。（这里的具体符号并不重要。）考虑全复形 $Tot(C)_s = \bigoplus_{p-q=s} C_{p,q}$，其微分为 $D = \partial^{ext} + \partial^{\vee}$，并注意到它集中在次数 ≤ 0。设 x 是一个总次数为$s < 0$的余循环，记作 $x = (x_{p,q})_{p-q=s} = (x_{q+s,q})_{q\geq r-s}$。作为直和中的一个元素，$x_{q+s,\ q}$ 仅对有限多个 q's 非零，记作 $q \leq q_0$。因此，只需证明 x 的同调类可以由另一个循环 $x' = (x'_{q+s,q})_{q\leq q_0}$ 表示，并且对于越来越大的 q，有 $x'_{q+s,q} = 0$。假设我们已经对 $q < q'$实现了这一点，即$x'_{q+s,q} = 0$。令 $x'' = x' - Dh(x'_{q'+s,q'})$。由于 $Dh(x'_{q'+s,q'})$ 位于双次数 $(q'+s, q')$ 和 $(q'+s, q'+1)$ 中，循环 x''仍具有如下性质：对于 $q < q'$，$x''_{q+s,q} = 0$。此外，$\partial^{ext}(x'_{q'+s,q'}) = 0$，因此由关于 h 的同伦方程可得 $x''_{q'+s,q'} = 0$。这就证明了引理。□

注记 5.4。在该引理的情形下，0 次同调是映射的核

$$D : \bigoplus_p C_{p,p} \to \bigoplus_p C_{p,p+1}$$

由满足 $\partial^{ext}(x_{p+1}) + \partial^{\vee}(x_p) = 0 \text{ in } C_{p,p+1}$ 的元素 $x = (x_p)_p$ 组成。

定理的证明。让我们回到三重复形 $\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{\vee}(N)(R)_{p,q,n}$，其微分为 $\partial^{ext}, \partial^{\vee}, \partial_N$，次数分别为 $(-1, 0, 0)$、$(0, 1, 0)$ 和 $(0, 0, -1)$，总次数为 $p - q + n$。令 $K_n \subset \bigoplus_p \bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{\vee}(N)(R)_{p,p,n}$ 为前一条注记中所述的核。N 的微分诱导出一个微分 $\partial_N : K_n \to K_{n-1}$；根据前一引理和注记，包含函子 $\text{if}\,(K_n, \partial_N)$ 到 $\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{\vee}(N)(R)$ 的全复形中是一个拟同构。我们断言，这个包含函子正是单位 $\bar{\eta} : N(R) \to \bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{\vee}(N)(R)$ 的像，由此即可完成定理的证明。

为验证这一断言，注意到 K_n 的元素可以表示为将一个元素赋给每个 K_n 的有限支撑分配

$$y_{\gamma,e} \in N(T)_n$$

：$R \to T$ 以及枚举 $e = (e_1、\ .....、\ e_p) \in en_T^+$；或者用加法记法表示为形如 $(R \to S \to T、\ e、\ \gamma)$ 的元素之和，其中

$$y = \sum (R \xrightarrow{\gamma} T = T, e, y_{\gamma,e})$$

结合余不变量的通常约定识别。方程 $\partial^{ext} y + \partial^{\vee} y = 0$ 意味着，对于形如 $R \xrightarrow{\alpha} \partial_{e_i} T \xrightarrow{\partial_{e_i}} T$ 的每个复合以及如上所述的枚举 e，

$$(-1)^{(p-1)+(n-p)}(-1)^{i-1} y_{\partial_{e_i} \circ \alpha, e} = (-1)^n (\partial_{e_i})_* (y_{\alpha, e_1 \ldots \hat{e_i} \ldots e_p});$$

或者等价地，

$$y_{d\alpha, df} = -d_* y_{\alpha, f}$$

对于每个 $R \xrightarrow{\alpha} T \xrightarrow{d} T'$，其中 f 枚举 T 的内边，并且 $d :\ T \to T'$ 是内部的。对于与边 e_i 上方的顶点 v_i 相关联的外部面 ∂_{v_i}，方程 $\partial^{ext} y + \partial^{\vee} y = 0$ 意味着

$$(-1)^{(p-1)+(n-p)}(-1)^{i} y_{\partial_{e_i} \circ \alpha, e} = -(-1)^n (\partial_{v_i})_* (y_{\alpha, e_1 \ldots \hat{e_i} \ldots e_p});$$

这再次得到方程

$$y_{d\alpha, df} = -d_* y_{\alpha, f}$$

对每个 $d :\ T \to T'$ 外部面。因此，对 T 的大小应用归纳法，我们得到$y_{\alpha,e} = (-1)^e \alpha_*(y_{id_R})$，故有 $y = \bar{\eta}(y_{id_R})$。□

6. Bar and Cobar constructions for (co)algebras

回顾第 3 节，存在伴随函子 bar 和 cobar，$\mathcal{B}: Psh(\mathbb{A}) \to CoPsh(\mathbb{A})$ 以及 $\mathcal{B}^\vee: CoPsh(\mathbb{A}) \to Psh(\mathbb{A})$，它们在预运算子与预余运算子之间（分别在 ∞-运算子与∞-余运算子之间）诱导出类似的伴随（模悬移），参见定理 3.1。此外，在每种情形下，单位和余单位都是拟同构。在第 4 节中，我们将第一个伴随扩展为一个伴随

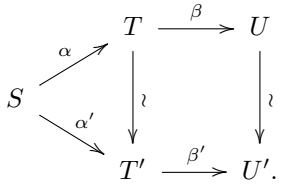
$$\mathcal{B}^\vee : CoPsh^c(\mathbb{R}) \rightleftarrows Psh(\mathbb{R}) : \mathcal{B}$$

在较大的范畴 $\mathbb{R}$ 上，余幂零余预层与预层之间的对应关系再次构成了模拟同构意义下的范畴等价。本节及下一节的目标是证明，对于给定的预运算子 X，这个伴随可以提升为 X 上的预代数与 $\mathcal{B}(sX)$ 上的预余代数之间的伴随。

对于预运算子 X，$\mathcal{B}(sX)$ 上的预余运算子结构取决于这样一种对应关系：一方面，$\mathbb{A}$ 中形如 $R \to U$ 和 $S \to V$ 的态射对；另一方面，$\mathbb{A}$ 中沿 R 的叶 e 嫁接所得对象之间形如 $R \circ_e S \to U \circ_e V$ 的态射，参见引理 5.12] 中的 [11, 。我们先考察与 $\mathcal{B}(sX)$ 上预（余）代数结构相关的范畴 $\mathbb{R}$ 中的一种类似对应关系。为此，取 $\mathbb{R}$ 的一个固定对象 S。考虑二重扩张范畴

$$S \xrightarrow{\alpha} T \xrightarrow{\beta} U$$

其中 α 是 $\mathbb{R}$ 中的一个修剪，β 是 $\mathbb{R}$中的任意映射。从一个这样的扩张到另一个扩张 $S \xrightarrow{\alpha'} T' \xrightarrow{\beta'} U'$的态射，是一对同构 $T \to T'$和$U \to U'$，使下图交换:



我们不妨将这个范畴——事实上是一个群胚——记作

$$S/(Ext, \mathbb{R}).$$

现在我们将给出这个范畴的另一种描述。为此，对每个集合 L，定义一个群胚 $\mathbb{G}_L$，其对象是由 L索引的态射对族 $(T_\ell \to U_\ell : \ell \in L)$，其中态射取自 $\mathbb{R}$。$\mathbb{G}_L$ 中的态射，从 $(T_\ell \to U_\ell)_{\ell \in L}$ 到 $(T'_\ell \to U'_\ell)_{\ell \in L}$，是由 L索引的同构对族 $T_\ell \xrightarrow{\sim} T'_\ell$和 $U_\ell \xrightarrow{\sim} U'_\ell$，它们使每个方块

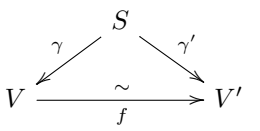
$$\begin{array}{ccc} T_\ell & \longrightarrow & U_\ell \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ T'_\ell & \longrightarrow & U'_\ell \end{array}$$

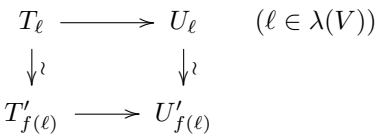
交换。显然，$\mathbb{G}_L$ 关于 L是函子性的，也就是说，集合之间的任意函数 $f : K \to L$ 都会诱导一个函子 $f^* : \mathbb{G}_L \to \mathbb{G}_K$。此外，考虑群胚 $(S/\mathbb{A})_{iso}$，其对象是 $\mathbb{A}$ 中的态射 $\gamma : S \to V$，其态射则是 S下的同构。这个群胚作用于 $\mathbb{G}_-$，其在 γ 处的纤维为 $\mathbb{G}_{\lambda(V)}: S \to V$。因此我们可以构造半直积

$$(S/\mathbb{A})_{iso} \ltimes \mathbb{G}_\lambda.$$

其对象是一些对 $(S \xrightarrow{\gamma} V,\ (T_\ell \xrightarrow{\beta_\ell} U_\ell)_{\ell \in \lambda(V)})$，其中 γ属于 $\mathbb{A}$，且 $(T_\ell \xrightarrow{\beta_\ell} U_\ell)_{\ell \in \lambda(V)}$ 是 $\mathbb{G}_{\lambda(V)}$中的一个对象。其从这样的对象到另一个对象 $(S \xrightarrow{\gamma'} V',\ (T'_\ell \xrightarrow{\beta'_\ell}$

$U'_\ell)_{\ell\in\lambda(V')}$) 是如.....中所述的同构族





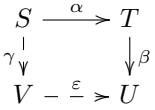
引理 6.1. 存在一个范畴（群胚）等价

$$S/(Ext,\mathbb{R}) \simeq (S/\mathbb{A})_{iso} \ltimes \mathbb{G}_\lambda.$$

证明。我们只说明如何将其中一个范畴中的对象变换为另一个范畴中的对象，反之亦然；其余细节留给读者。

首先，给定 $S \overset{\alpha}{\to} T \overset{\beta}{\to} U$ in $S/(Ext,\mathbb{R})$，将 $\beta\circ\alpha$ 分解为一个内面后接一个外面，如下所示

(6.1)



修剪 $S \overset{\alpha}{\to} T$ 表明 T 是将一棵树 T_ℓ 嫁接到 S的每个叶 ℓ 上所得到的结果，记作

$$T \cong S\circ(T_\ell)_{\ell\in\lambda(S)}.$$

类似地， $U \cong V\circ(U_{\gamma(\ell)})^{\ell\in\lambda(S)}$，作为 $\gamma: S\to V$ in $\mathbb{A}$，诱导出一个同构$\lambda(S) \to \lambda(V)$。由上方方块的交换性可知， β 将 T中的边 $\alpha(\ell)$映到 U中的边 $\varepsilon\gamma(\ell)$，因此 β 限制为一个映射 β_ℓ，从 T 中以 $\alpha(\ell)$为根的子树 T_ℓ 到以 $\varepsilon\gamma(\ell)$为根的子树 U_ℓ，从而得到一个族

$$(\beta_\ell : T_\ell \to U_\ell)_{\ell\in\lambda(S)}$$

$\mathbb{R}$中的态射。这族态射与映射 $S \overset{\gamma}{\to} V$ 一起，在 $\mathbb{A}$ 中定义了 $(S/\mathbb{A})_{iso} \ltimes \mathbb{G}_\lambda$ 的一个对象。

反过来，给定 $\gamma: S\to V$ 在 $\mathbb{A}$ 中，以及这样一族 $(\beta_\ell: T_\ell \to U_\ell)^{\ell\in\lambda(S)}$，我们可以将各个 T_ℓ 嫁接到 S 的叶子 ℓ 上，从而得到一个修剪 $\alpha: S\to T$。我们还可以将每棵树 U_ℓ 嫁接到 V 的叶子 $\gamma(\ell)$ 上，从而得到一个修剪 $\varepsilon: V\to U$。映射 $S \overset{\gamma}{\to} V$ 和映射族 $T_\ell \overset{\beta_\ell}{\to} U_\ell$ 一起定义了一个映射 $\beta: T\to U$，它与上方的交换方块相适配，并特别定义了 $S/(Ext,\ \mathbb{R})$ 中的一个对象 $(S \overset{\alpha}{\to} T \overset{\beta}{\to} U)$。

如前所述，这两个构造函子性且互为逆映射，留待读者验证。□

注记 6.2。考虑 $S/(Ext,\ \mathbb{R})$ 中的一个对象 $S \overset{\alpha}{\to} T \overset{\beta}{\to} U$，以及如上所述与之对应的 $(S/\mathbb{A})_{iso} \ltimes \mathbb{G}_\lambda$ 中的对象 $(\gamma,\ (\beta_\ell: T_\ell \to U_\ell)^{\ell\in\lambda(S)})$。那么， U 的内边就是 V 的内边，加上各个 U_ℓ 的根和内边。因此， en^+_U 中的一个枚举 e （相差一个排列）对应于 en_V 中的一个枚举 f、 $en^+_{U_\ell}$ 中的一列枚举 g_ℓ，以及 V （或 S）的根。

命题 6.3。*(i)* 设 X 为一个预运算子。那么对于任意的 X上的预代数 M，巴构造 $\mathcal{B}M$ 具有自然的 $\mathcal{B}(sX)$ 上的预余代数结构。

(ii) 此外，如果 X 是一个 ∞-幺半群，且 M 是一个 ∞-代数（定义在 X上），那么 $\mathcal{B}M$就是一个定义在 $\mathcal{B}(sX)$ 上的 ∞-余代数。

命题证明中涉及的构造显然在 M 上具有函子性。因此，我们得到一个由函子构成的交换图

$$\begin{array}{ccccc} \infty Alg(X) & \hookrightarrow & Prealg(X) & \longrightarrow & Psh(\mathbb{R}) \\ \downarrow \mathcal{B} & & \downarrow \mathcal{B} & & \downarrow \mathcal{B} \\ \infty Coalg\mathcal{B}(sX) & \hookrightarrow & Precoalg\mathcal{B}(sX) & \longrightarrow & CoPsh^c(\mathbb{R}) \end{array} \tag{6.2}$$

其中，水平函子分别是包含函子和遗忘函子。

证明。 (i) 设 M 是 X上的预代数。 $\mathcal{B}M$ 上的$\mathcal{B}(sX)$余代数结构由以下零次映射给出

$$\mathcal{B}M(T) \to \mathcal{B}(sX)(S) \otimes \mathcal{B}(M)(T/S),$$

对每个修剪 $\alpha\colon S \to T$，都有一个这样的映射。我们将改为定义映射

$$\nabla^{\alpha} : \mathcal{B}M(T) \to \mathcal{B}(X)(S) \otimes \mathcal{B}(M)(T/S)$$

次数为 -1，并通过与悬移 $\mathcal{B}X \to \mathcal{B}(sX)$ 复合来得到所需的结构映射。

因此，固定一个修剪 $\alpha\colon S \to T$，并将 $\mathcal{B}M(T)$ 记作“不变乘积”

$$\mathcal{B}M(T) = \Big(\prod_{\beta,e}^{c} M(U)[e] \Big)^{inv}$$

其中， β 遍历态射 $\beta\colon T \to U$ in $\mathbb{R}$ ，而 e 遍历 en_U^+ 中的枚举。因此， $\mathcal{B}M(T)$的元素是有限支撑函数 ω，其 $\omega_\beta(e) \in M(U)$的次数为 $\omega - e$。为定义 $\nabla^{\alpha}(\omega)$，我们按照第 3.5 节的做法，首先考虑同构

$$\prod_{\gamma,f}^{c} X(V)[f] \otimes \prod_{\beta_\ell,g_\ell}^{c} M(U_\ell)[g_\ell] \xrightarrow{\mu} \prod_{\gamma,\beta_\ell,f,g_\ell}^{c} X(V) \otimes \bigotimes_{\ell} M(U_\ell)[f + \Sigma g_\ell].$$

这里， γ 遍历 $\mathbb{A}$中的态射 $S \to V$， ℓ 遍历 S的叶子，而 β_ℓ 遍历 $\mathbb{R}$ 中的态射 $T_\ell \to U_\ell$ ，其中 T_ℓ 是 T 中位于边 $\alpha(\ell)$上方的部分，如引理 6.1 的证明中所述。此外，f 遍历 en_V 中的枚举，且每个 g_ℓ 遍历 $en_{U_\ell}^+$ 中的枚举。按照上述记号，映射 μ 定义为

$$\mu(\omega, (\psi_\ell)_\ell)_{\gamma,\beta_\ell}(f, g_\ell) = (-1)^{f \cdot \Sigma g_\ell} (\omega_\gamma(f), (\psi_\ell)_{\beta_\ell}(g_\ell)_\ell).$$

映射 μ 在取不变量后诱导出一个类似的同构。

现在我们可以引入一个次数为 -1的映射 ∇'

$$\prod_{\beta,e}^{c} M(U)[e] \to \prod_{\gamma,\beta_\ell,f,g_\ell}^{c} X(V) \otimes \bigotimes_{\ell} M(U_\ell)[f + \Sigma g_\ell]$$

$_c$其在 $\zeta \in \prod M(U)[e]$处的值定义如下。任选余域乘积中的指标，即映射 $\gamma\colon S \to V$ in $\mathbb{A}$、映射 $\beta_\ell\colon T_\ell \to U_\ell$ in $\mathbb{R}$ ，以及枚举 f in en_V 和 g_ℓ in $en_{U_\ell}^+$。于是 γ 与各个 β_ℓ 共同定义了一个 $(S/\mathbb{A})_{iso} \ltimes \mathbb{G}_\lambda$ 中的对象。令 $S \xrightarrow{\alpha} T \xrightarrow{\beta} U$为 $S/(Ext, \mathbb{R})$ 中与之对应的对象，这里我们沿用了引理证明中的相同记号；再令 $e \in en_U^+$ 为 U 的枚举，它由 U 的根、枚举 f 以及按某种顺序排列的各个枚举 g_ℓ 构成，参见前一条注记。然后定义

$$\nabla'(\zeta)_{\gamma,\beta_\ell}(f, g_\ell) = (-1)^{\zeta} \theta^{\varepsilon}(\zeta_\beta(e))$$

其中 $\theta^{\varepsilon}\colon M(U) \to X(V)\otimes\bigotimes_\ell M(U_\ell)$ 是 M 作为 X 上代数、对应于映射 $\varepsilon\colon V \to U$ in $\mathbb{R}$ 的结构映射（参见引理 6.1 证明中的图表 (6.1)）。先验地，$\nabla'(\zeta)$ 的值取决于我们如何从 f 和各个 g_ℓ 重构枚举 e（相差一个符号）。但若 ζ 本身是不变的，则 $\nabla'(\zeta)$ 给出不变乘积中的一个良定义元素。由此，对于任意给定的如上所述的修剪 $\alpha\colon S \to T$，我们得到一个次数为 -1 的映射

$$\nabla^{\alpha} : \mathcal{B}M(T) \to \mathcal{B}(X)(S) \otimes \mathcal{B}(M)(T/S).$$

我们声称，此映射满足所需的结合性和单位条件（悬移意义下）；也就是说，映射 $(\mathcal{B}s\otimes id)\circ\nabla^{\alpha}\colon \mathcal{B}M(T) \to \mathcal{B}(X)(S) \otimes \mathcal{B}(M)(T/S)$ 满足这些条件。读者不妨直接验证。不过，用下一条注记中余不变量的方式描述这些映射，在记号上更为方便。用余不变量来证明微分相对于此映射 ∇^{α} 也是一个余导子，同样更容易。

(ii) 再次考虑一个外部面映射 $\alpha\colon S \to T$。由不变性，我们可以固定枚举，并利用引理 6.1 的等价，将结构映射 $\nabla^{\alpha}$of $\mathcal{B}M$ 写为

$$\Big(\prod_{\beta:T\to U}^{c} M(U)\Big)^{inv} \to \Big(\prod_{\beta:T\to U}^{c} X(V)\otimes M(U/V)\Big)^{inv}$$

其中，V是将 $\beta\circ\alpha\colon S \to U$ 按引理 6.1 中的方式分解得到的。于是，结构映射成为一系列结构映射的乘积：$M(U) \to X(V) \otimes M(U/V)$，这些映射作用于 M本身，且对应于外部面映射 $\varepsilon\colon V \to U$。若 M 是 ∞-幺半群 X上的代数，则这些映射全都是拟同构，因此 ∇^{α}也如此，从而证明了 (ii) 部分。□

注记 6.4. 对于上述给定的外部面映射 $\alpha\colon S \to T$，其余代数结构映射 $\mathcal{B}M(T) \to \mathcal{B}(X)(S) \otimes \mathcal{B}(M)(T/S)$ 可通过同构 $\rho\colon \mathcal{B}M \to \mathcal{B}M$ 转移到以余不变量表示的巴构造中，下面将对此作更明确的说明。为此，考虑以下图表。为节省空间，我们省略了底行和顶行中余不变量的下标以及不变量的上标:

$$\begin{array}{ccccc}
\prod_{\beta,e}^{c} M(U)[e] & \xrightarrow{\nabla^{\alpha}} & \prod_{f}^{c} X(V)[f]\otimes\bigotimes_{\ell}\prod_{g_\ell}^{c} M(U_\ell)[g_\ell] & \xrightarrow{\mu} & \prod_{f,g_\ell}^{c} X(V)\otimes\bigotimes_{\ell} M(U_\ell)[f+\Sigma g_\ell] \\
\uparrow{\scriptstyle\rho} & & \uparrow{\scriptstyle\rho} & & \uparrow{\scriptstyle\rho} \\
\bigoplus_{\beta,e} M(U)[e] & \xrightarrow{\overline{\nabla}^{\alpha}} & \bigoplus_{f} X(V)[f]\otimes\bigotimes_{\ell}\bigoplus_{g_\ell} M(U_\ell)[g_\ell] & \xrightarrow{\bar{\mu}} & \bigoplus_{f,g_\ell} X(V)\otimes\bigotimes_{\ell} M(U_\ell)[f+\Sigma g_\ell]
\end{array}$$

（为节省篇幅，我们也省略了与 f 和 g_ℓ 对应的指标 γ, β_ℓ 。）使右侧方块交换的映射 $\bar{\mu}$ 定义为

$$\bar{\mu}((f,x)\otimes\bigotimes_{\ell}(g_\ell,y_\ell)) = (-1)^{f\cdot(\Sigma g_\ell+y_\ell)}((f,(g_\ell)_\ell), x\otimes\bigotimes_{\ell} y_\ell).$$

利用上一个证明中对 ∇' 的显式描述，我们得到该映射的如下描述

$$\bar{\mu}\overline{\nabla}^{\alpha} : \bigoplus_{\beta,e} M(U)[e] \to \bigoplus_{f} X(V)[f]\otimes\bigotimes_{\ell}\bigoplus_{g_\ell} M(U_\ell)[g_\ell].$$

固定 ∇^{α} 定义域中的一个直和项，即由一个态射 $\beta\colon T \to U$ in $\mathbb{R}$ 和一个枚举 e in en_U^+ 组成的一对。根据引理 6.1 的对应关系，$S \xrightarrow{\alpha} T \xrightarrow{\beta} U$ 和 e 对应于一个态射 $\gamma\colon S \to V$ in $\mathbb{A}$ 以及一个态射

β_ℓ：$T_\ell \to U_\ell$ in $\mathbb{R}$，对 S（或等价地，对 V）的每个叶 ℓ 都成立；并且存在枚举 $f$in en_V 和 g_ℓ in $en^+_{U_\ell}$，使得经过适当的排列后，$e = (root,\ f,\ (g_\ell)_\ell)$。于是

$$\bar{\mu}\overline{\nabla}^{\alpha}(e,y) = (-1)^{e+y}(f,(g_\ell)_\ell,\theta^{\varepsilon}(y))$$

其中 ε：$V \to U$ 如上文引理 6.1 所述。符号 $(-1)^{e+y}$ 对应于 ∇' 的定义中的符号 $(-1)^{\zeta}$。使用 $\bar{\mu}$ 的符号，可得 ∇^{α} 的如下公式：

$$\overline{\nabla}^{\alpha}(e,y) = (-1)^{f\cdot(\Sigma g_\ell + y_\ell)+e+y}((f,(g_\ell)_\ell), x\otimes\bigotimes_{\ell} y_\ell).$$

其中 $e = f + \Sigma g_\ell + 1$ 和 $\theta^{\varepsilon}(y) = \sum x\otimes\otimes_\ell y_\ell$（将最后一项改写为 $(f,\ x)\otimes\otimes_\ell(g_\ell,\ y_\ell)$，还会引入通常的 Koszul 符号）。

例 6.5。设 P是链复形范畴 Ch 中的一个“经典”运算子，其对应的“严格” ∞-运算子 NP：$\mathbb{A}^{op} \to Ch$。巴复形 $\mathcal{B}(sNP)$：$\mathbb{A} \to Ch$ 定义了一个严格余运算子 BP（在第 2.7 节中记为 $C_{\mathcal{B}(sNP)}$），且

$$BP(n) = \Big(\prod_{\alpha:C_n\to T,e} sNP(T)[e]\Big)^{inv}$$

其中，α 和 e 分别遍历 $\mathbb{A}$ 中的态射和 $e \in en_T$中的枚举。其余算子结构映射 ∇_i：$BP(n) \to BP(k)\otimes BP(\ell)$（对于 $k+\ell = n+1$和 $i = 1,\ldots,k$）可明确描述如下。∇_i的陪域同构于一个不变乘积

$$\Big(\prod_{\beta,f,\gamma,g} sNP(R)[f]\otimes sNP(S)[g]\Big)^{inv}$$

其中，指标遍历 $\mathbb{A}$中的态射 β：$C_k \to R$ 和 γ：$C_\ell \to S$，以及枚举。对于 $BP(n)$中的 ω，$\nabla_i(\omega)$在 β,f,γ,g 处的取值，是 $\omega_\alpha(e)$在该同构下的像

$$sNP(T)[e] \to sNP(R)[f]\otimes sNP(S)[g]$$

其中，α 是复合 $C_n \to C_k\circ_i C_\ell \to R\circ_{\beta(i)} S$，$e$ 是由 $\beta(i)$ f和 g给出的 $R\circ S$ 的枚举。

现在令 A为经典意义下的一个 P-代数，其关联函子 $N(P,A)$:$\mathbb{R}^{op} \to Ch$ 如例 2.1 所示。其巴复形 $\mathcal{B}N(P,A)$：$\mathbb{R} \to Ch$ 具有 $\mathcal{B}(sNP)$上的余代数结构。记

$$BA = \mathcal{B}(N(P,A))(\eta) = \Big(\prod_{U,f}^{c} NP(U)[f]\otimes A^{\otimes\lambda U}\Big)^{inv}$$

其中，U 遍历 $\mathbb{R}$ 的对象，而 f 遍历 en^+_U 中的元素。于是，BA 是一个 BP上的余代数，其结构映射

$$BA \xrightarrow{\nabla} BP(n)\otimes BA^{\otimes n}$$

描述如下。∇ 的陪域同构于以下映射的不变乘积：α：$C_n \to T$属于 $\mathbb{A}$，树 U_1、.....、U_n 以及枚举 $e \in en_T$和$f_i \in en^+_{U_i}$。映射 ∇ 是使得该图表与到此类因子的投影相交换的映射

$$\begin{array}{ccc} BA & \overset{\nabla}{\dashrightarrow} & BP(n)\otimes BA^{\otimes n} \\ \downarrow{\scriptstyle proj_{U,e}} & & {\scriptstyle proj}\downarrow \\ NP(U)\otimes A^{\otimes\lambda U} & \longrightarrow & sNP(T)\otimes NP(U_1)\otimes\ldots\otimes NP(U_n)\otimes\bigotimes_{i=1}^{n} A^{\otimes\lambda U_i} \end{array}$$

交换，其中 U 是将 U_1、.....、U_n 嫁接到 T 的叶子 $\alpha(1)$.....、$\alpha(n)$ 上所得到的树，而 f 是由根、e 和 f_1、.....、f_n 给出的枚举

在一起。（图表中未标出次数移位。枚举 f 比 e、f_1、……、f_n 合起来多一个，这解释了底部态射中的悬移。）

现在我们转向命题 6.3 在与 $\mathcal{B}^\vee$伴随的 Cobar 构造上的对应结果。读者会发现，这个 Cobar 对应情形比刚才讨论的巴构造情形容易得多。

命题 6.6。 *(i)* 设 Y 为预余运算子。那么，对于任意的 Y上的预余代数 N，余巴复形 $\mathcal{B}^\vee N$ 具有自然的 $\mathcal{B}^\vee(s^{-1}Y)$ 上的预代数结构。

(ii) 此外，若 Y 是一个 ∞-余运算子，且 N 是一个 Y上的 ∞-余代数，那么 $\mathcal{B}^\vee N$ 是一个 $\mathcal{B}^\vee(s^{-1}Y)$ 上的 ∞-代数。

证明。 与命题 6.3 的巴构造情形一样，(ii) 部分可由相关结构映射的显式描述直接看出，因此我们只证明 (i) 部分。

回想，对于一棵树 T，

$$\mathcal{B}^\vee(N)(T) = \Big(\bigoplus_{\beta:T\to U} N(U)\otimes k[en_U^+]\Big)_{coinv}$$
$$= \Big(\bigoplus_{\beta,e} N(U)[-e]\Big)_{coinv}$$

其中在第一个和中，$y\otimes e$的次数为 $y-e$。我们需要为每个外部面映射（修剪）$S \xrightarrow{\alpha} T$ 描述一个映射

$$\mathcal{B}^\vee(N)(T) \to \mathcal{B}^\vee(s^{-1}Y)(S)\otimes\mathcal{B}^\vee(N)(T/S)$$

考虑 $\mathcal{B}^\vee(N)(T)$ 的一个由 β 标记的直和项：$T\to U$与 e。由引理 6.1，复合 $s \xrightarrow{\alpha} T \xrightarrow{\beta} U$ 对应于 $\mathbb{A}$ 中的一个态射 $\gamma:\ S\to V$，以及修剪 $\beta_\ell:\ T_\ell\to U_\ell$，对 S 的每个叶 ℓ 各有一个，使得 T 是将诸 T_ℓ 嫁接到 S 上的结果，而 U 是将诸 U_ℓ 嫁接到 V 上的结果，同时我们将相应的修剪记为 $\varepsilon:\ V\to U$。此外，枚举 $e\in en_U^+$ 可取为形如 $(root,\ f,\ (g_\ell))$ 的形式，其中 $f\in en_V$ 与 $g_\ell\in en_{U_\ell}^+$（对于 S 的叶子的某个选定排序）。N 的预余代数结构给出一个态射

$$\theta^\varepsilon : N(U)[-e]\to s^{-1}Y(V)[-f]\otimes N(V/U)[-\Sigma g_\ell]$$

（其中反悬挂弥补了 $f+\Sigma g_\ell$ 与 e 相差 1 这一事实）。所需的映射是使每个如下形式的图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}^\vee(N)(T) & \dashrightarrow & \mathcal{B}^\vee(s^{-1}Y)(S)\otimes\mathcal{B}^\vee(N)(T/S) \\ \uparrow & & \uparrow \\ N(U)[-e] & \xrightarrow{\quad\theta^\varepsilon\quad} & s^{-1}Y(V)[-f]\otimes N(V/U)[-\Sigma g_\ell] \end{array}$$

交换的映射，其中竖直映射是直和项的包含函子（回忆一下，$\mathcal{B}^\vee(N)(T/S$ $)$ 是余乘法 $\bigoplus\bigotimes N(U_\ell)[-g_\ell])$。该映射与微分的相容性源于结构映射 θ 与微分的相容性。□

7. Duality for algebras over ∞-operads

现在我们将转而讨论如何将定理 3.1 的伴随提升到预代数和预余代数上的问题，详见下文的定理 7.3。

为证明这一结果，设 X 为一个预运算子，M 为一个 X-预代数，N 为一个 $\mathcal{B}(sX)$-余代数。考虑一个预层态射

$\varphi\colon \mathcal{B}^\vee N \to M$ 在 $\mathbb{R}$上。我们希望简化这样的条件： φ 是一个 $\mathcal{B}^\vee(s^{-1}\mathcal{B}(sX)) \xrightarrow{\varepsilon} X$上的预代数映射；换言之， $\varepsilon_!\mathcal{B}^\vee N \to M$ 是一个 X上的预代数映射。为此，回想一下，对于一棵树 T，我们有

$$\mathcal{B}^\vee(N)(T) = \Big(\bigoplus_{\beta:T\to U,e} N(U)[-e]\Big)_{coinv}.$$

我们将记

$$j_{\beta,e} : N(U)[-e] \to \mathcal{B}^\vee N(T)$$

为典范映射。 $\varepsilon_!\mathcal{B}^\vee N$ 作为 X-代数的结构，对于每个修剪 $\alpha : S \to T$ 以及每个 β，给出： $T \to U$ 和 $e \in en_U^+$ 的一个映射

$$\nabla^\alpha_{\beta,e} = \nabla^\alpha \circ j_{\beta,e} : N(U)[-e] \to X(S) \otimes \bigotimes_\ell N(U_\ell)[-g_\ell]$$

其中 U_ℓ 和 g_ℓ 同前，参见引理 6.1及其后的注记。特别地，对于 β 恒等态射，我们有映射

$$\nabla^\alpha_{1,e} : N(T)[-e] \to X(S) \otimes \bigotimes_\ell N(T_\ell)[-g_\ell]$$

并且映射 β_ℓ 也是恒等态射。

引理 7.1。 预层上的一个映射 $\varphi\colon \mathcal{B}^\vee N \to M$ 定义了一个 X-预代数 $\varepsilon_!\mathcal{B}^\vee N \to M$ 的映射，当且仅当对于每个修剪 $\alpha : S \to T$ 以及每个枚举 $e \in en_T^+$，图表

$$\begin{array}{ccc} N(T)[-e] & \xrightarrow{\nabla^\alpha_{1,e}} & X(S)\otimes\otimes_\ell N(T_\ell)[-g_\ell] \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_{T,1,e}} & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\otimes\varphi_{T_\ell,1,g_\ell}} \\ M(T) & \xrightarrow{\theta^\alpha} & X(S)\otimes\otimes_\ell M(T_\ell) \end{array}$$

交换，其中 $\varphi_{T,\ 1,\ e} = \varphi_T \circ j_{1,\ e}$； 对于 $\varphi_{T_\ell,\ 1,\ g_\ell}$，情况类似。

证明。 设 $\varphi\colon \mathcal{B}^\vee N \to M$ 是这样的预层映射。那么， φ 是 X-预代数的映射，当且仅当对于每个修剪 $\alpha : S \to T$、每个 $\beta : T \to U$ 以及每个枚举 $e \in en_T^+$，图表

$$(\square) \qquad \begin{array}{ccc} N(U)[-e] & \xrightarrow{\nabla^\alpha_{\beta,e}} & X(S)\otimes\otimes_\ell N(U_\ell)[-g_\ell] \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_{T,\beta,e}} & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\otimes\varphi_{T_\ell,\beta_\ell,g_\ell}} \\ M(T) & \xrightarrow{\theta^\alpha} & X(S)\otimes\otimes_\ell M(T_\ell) \end{array}$$

交换，其中 $\beta_\ell : T_\ell \to U_\ell$， $g_\ell \in en_{U_\ell}^+$ 同前，并且 $\varphi_{T,\ \beta,\ e} = \varphi_T \circ j_{\beta,\ e}$；对于$\varphi_{T_\ell,\ \beta_\ell,\ g_\ell}$，情况类似。

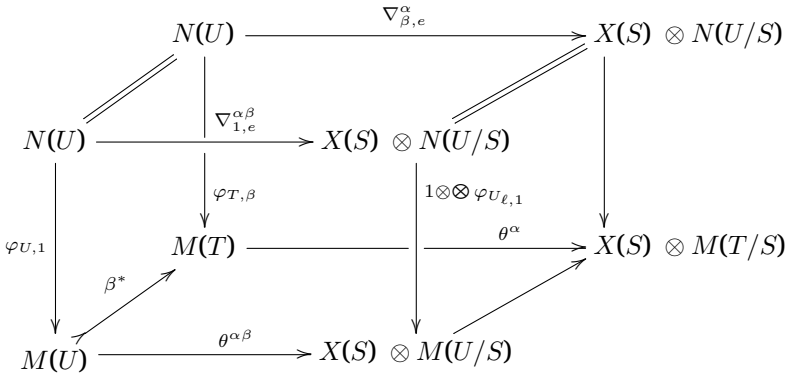
该引理断言，只需对每个 $\alpha : S \to T$ 以及每个满足 β 为恒等态射的 e 作此要求即可。这由 φ 的自然性以及以下事实得出：对于任意 $\beta : T \to U$，预层结构 $\beta^* : \mathcal{B}^\vee N(U) \to \mathcal{B}^\vee N(T)$ 将恒等态射对应的直和项映射到 β对应的直和项，如

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}^\vee(N)(U) & \xrightarrow{\quad\beta^*\quad} & \mathcal{B}^\vee(N)(T) \\ & {\scriptstyle j_{1,e}}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle j_{\beta,e}} & \\ & N(U)[-e] & \end{array}$$

因此，由 φ 的自然性可知，对于 $\varphi_{T,\ \beta,\ e}$： $N(U)[-e] \to M(T)$，有

$$\varphi_{T,\beta,e} = \varphi_T \circ j_{\beta,e} = \varphi_T \circ \beta^* \circ j_{1,e} = \beta^* \circ \varphi_U \circ j_{1,e} = \beta^* \circ \varphi_{U,1,e}.$$

换言之，下方立方体中的左侧方块交换；出于同样的理由，右侧方块也交换。（在立方体中，为节省空间，我们省略次数移位，并用 $\varphi_{T,\ \beta}$ 代替 $\varphi_{T,\ \beta,\ e}$。）



前方面方块是一个形如 (□) 的方块，其中 β 是恒等态射；底面方块由算畴分解映射的自然性而交换，而后方面方块的交换性则由前方面方块的交换性推出。这就证明了引理。□

现在我们转向对偶情形，并像之前一样，考虑 M 上的预余代数 X 和 N 上的预余代数 $\mathcal{B}(sX)$，以及一个余预层映射 $\psi\colon N\to\mathcal{B}M$。我们希望考察 ψ 何时是预余代数态射。首先回忆，对于一棵树 S，$\mathcal{B}(sX)$ 在 S 处的取值由下式给出

$$\mathcal{B}(sX)(S)=\Big(\prod_{\gamma:S\to V,f} sX(V)[f]\Big)^{inv}.$$

其中 γ 遍历 $\mathbb{A}$ 和 $f\in en_V$ 中的态射。记

$$p_{\gamma,f}:\mathcal{B}(sX)(S)\to sX(V)[f]$$

对于该投影。同样，

$$\mathcal{B}(M)(T)=\Big(\prod_{\beta:T\to U,e}^{c} M(U)[e]\Big)^{inv}$$

并记

$$q_{\beta,e}:\mathcal{B}(M)(T)\to M(U)[e]$$

对于该投影。$\mathcal{B}M$ 作为 $\mathcal{B}(sX)$-预余代数的结构由映射给出

$$\nabla^{\alpha}:\mathcal{B}M(T)\to\mathcal{B}(sX)(S)\otimes\mathcal{B}(M)(T/S),$$

每个修剪 $\alpha\colon S\to T$对应一个。记

$$\nabla^{\alpha}_{\beta,e}=(p\otimes q)\circ\nabla^{\alpha}:\mathcal{B}M(T)\to sX(V)[f]\otimes\bigotimes_{\ell}M(U_\ell/T_\ell)[g_\ell]$$

其中 $p=p_{\gamma,\ f}$ 且 $q=\otimes_\ell q_{\beta_\ell,\ g_\ell}$ 对于 γ，β_ℓ 和 f，g_ℓ，如引理 6.1 及其后面的注记所述。余预层的映射 $\psi\colon N\to\mathcal{B}M$ 由此给出如下交换图；对任意枚举 $e\in en_T^{+}$ 及其得到的枚举，

$f \in en_S$ 和 $g_\ell \in en^+_{T_\ell}$ 同前：

$$\begin{array}{ccccc}
N(T) & \xrightarrow{\tau^\alpha} & \mathcal{B}(sX)(S)\otimes N(T/S) & \xrightarrow{p_{1,e}\otimes 1} & sX(S)[f]\otimes \bigotimes_\ell N(T_\ell) \\
\downarrow{\scriptstyle \psi_T} & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\psi_{T/S}} & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\bigotimes \psi_{T_\ell,\beta_\ell,g_\ell}} \\
\mathcal{B}M(T)[e] & \xrightarrow{\nabla^\alpha} & \mathcal{B}(sX)(S)\otimes \mathcal{B}M(T/S) & \xrightarrow{p_{1,e}\otimes 1} & sX(S)[f]\otimes \bigotimes_\ell \mathcal{B}M(T_\ell) \\
\downarrow{\scriptstyle q_{1,e}} & & \downarrow{\scriptstyle p\otimes q} & \swarrow{\scriptstyle 1\otimes\bigotimes q_{1,g_\ell}} & \\
M(T)[e] & \xrightarrow{\theta^\alpha} & sX(S)[f]\otimes \bigotimes_\ell M(T_\ell)[g_\ell] & &
\end{array}$$

其中，中间的 $p\otimes q$ 表示 $p_{1,\ f}\otimes\bigotimes_\ell q_{1,\ g_\ell}$。

记 $\psi_{T,\ \beta,\ e}\colon\ N(T)\ \to\ M(U)[e]$ 为 $q_{\beta,\ e}\circ\psi_T$，其中 $\beta\colon\ T\ \to\ U$ 且 $e\in en^+_U$。然后，完全仿照前一个引理，ψ 的自然性现在蕴含以下结论。

引理 7.2。沿用上述记号，余预层在 $\mathbb{R}$ 上的映射 $\psi : N \to \mathcal{B}M$ 是 $\mathcal{B}(sX)$-代数的态射，当且仅当对于每个修剪 $\alpha :\ S \to T$，图表

$$\begin{array}{ccc}
N(T) & \xrightarrow{\nabla^\alpha_{1,e}} & sX(S)[f]\otimes \bigotimes_\ell N(T_\ell) \\
\downarrow{\scriptstyle \psi_{T,1,g}} & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\bigotimes \psi_{T_\ell,1,g_\ell}} \\
M(T)[e] & \xrightarrow{\theta^\alpha} & sX(S)[f]\otimes \bigotimes_\ell M(T_\ell)[g_\ell]
\end{array}$$

交换。

如前所述，这个引理的证明方法与前一个完全相同，此处略去细节。本节的主要结果现在可直接推出：

定理 7.3. *(i)* 设 X 是一个预运算子。对于 $\mathbb{R}$上的预层的 *bar-cobar* 伴随可提升为 X 上的预代数与$\mathcal{B}(sX)$上的预余代数之间的伴随，

$$\varepsilon_!\mathcal{B}^\vee : Precoalg(\mathcal{B}sX) \rightleftarrows Prealg(X) : \mathcal{B}$$

其中 $\varepsilon\colon\ \ \mathcal{B}^\vee(s^{-1}\mathcal{B}(sX))\ \to X$ 是该伴随的余单位。

(ii) 该伴随的单位和余单位都是拟同构。

(iii) 此外，若 X 是一个 ∞-幺半群，则该伴随限制为 X 上的 ∞-代数与 $\mathcal{B}(sX)$上的 ∞-余代数之间的伴随。

证明. 对于 X上的预代数 M，命题 6.3 中确立的 $\mathcal{B}M$ 上的预余代数结构显然关于 M具有函子性，因此巴构造可提升为函子$Prealg(X)\ \to\ Precoalg(\mathcal{B}sX)$。类似地，对于预余运算子 Y，命题 6.6 表明函子 $\mathcal{B}^\vee$ 可提升为函子 $Precoalg(Y)\ \to Prealg(\mathcal{B}^\vee s^{-1}Y)$。由此我们得到一对函子

$$\varepsilon_!\mathcal{B}^\vee : Precoalg(\mathcal{B}sX) \rightleftarrows Prealg(X) : \mathcal{B}$$

如定理中所述。现在比较前两个引理可知，对于一个 M 上的预代数 X 和一个 $\mathcal{B}(sX)$上的预余代数 N，余预层映射 $\varphi\colon\ N\ \to\ \mathcal{B}M$ 是预余代数映射，当且仅当它沿定理 4.1 的伴随的转置$\psi\colon\ \mathcal{B}^\vee N\ \to M$ 是预代数映射。这就证明了 (i) 部分。(ii) 部分由 (i) 部分和定理 4.1 得出。最后，对于 (iii) 部分，首先注意到，由于余单位 ε 是拟同构（见定理 5.1），函子 $\varepsilon_!$ 将 ∞-代数映为 ∞-代数（见第 2.4 节）。(iii) 部分现由命题 6.3 和命题 6.6 形式上得出。□

8. The homology of the bar complex

在我们较早的论文 [11], 中，我们将∞-幺半群 X 的树状同调 $DH_*(X)$定义为双复形的全复形的同调:

$$DC_p(X)_q = \bigoplus_\ell \bar{\mathcal{B}}(X_q)(C_\ell)_p \tag{8.1}$$

其中， C_ℓ 是具有 $\ell \geq 2$ 个叶子的花冠。这一同调分解为直和

$$DH_*(X) = \bigoplus DH_*^{(\ell)}(X) \tag{8.2}$$

并且，悬移之后， $DH_*^{(\ell)}(X)$ 在向量空间中构成一个（严格）余运算子（即 $DH_*^{(\ell)}(sX)$ 构成）。事实上，根据定理 3.1， $\bar{\mathcal{B}}(sX)$ 是一个 ∞-余运算子，因此 $\bar{\mathcal{B}}(sX)(C_\ell)$共同构成链复形中的严格余运算子，参见 2.7。

我们可以用类似的方式，将一个 ∞-幺半群 X 上的 ∞-代数 M 的树状同调 $DH_*(M)$定义为在树 η 处取值的巴复形的同调，

$$DH_*(M) = H_*(\bar{\mathcal{B}}(M)(\eta)). \tag{8.3}$$

于是，由于根据定理 6.3，$\mathcal{B}(M)$ 是一个 ∞-余代数上的 $\mathcal{B}(sX)$-余代数， $DH_*(M)$ 是（严格）余运算子 $DH_*(sX)$ 上的余代数，因此， $\mathcal{B}(M)(\eta)$ 是由 $\mathcal{B}(sX)(C_\ell)$ 构成的余运算子上的严格余代数，参见注记 3.8。

这种如 (8.3) 中所定义的树状同调，当然满足通常的标准性质，例如拟同构不变性、长正合列，以及由 M 中的分次和树的边所给出的双复形所关联的谱序列。

若 P 是向量空间中的经典 Koszul 算子（视为集中在 0 次的链复形），则按 (8.1) 定义的 $DH_*(NP)$与 [6], 中定义的幺半群的同调一致，而余运算子 $\{DH_*^{(\ell)}(NP)\}_\ell$ 是 P 的 Koszul 对偶¡。向量空间 $DH_0(NP)$是 P的不可分解元空间。类似地，若 A 是一个 P-代数（同样集中在 0 次），则如上定义的 $DH_*(N(P,A))$与 [13], 中定义的 A 的同调 $H_*^P(A)$一致，而 $DH_0N(P,A)$是 A的不可分解元空间，也就是该映射的余核

$$\bigoplus_\ell P(\ell) \otimes A^{\otimes \ell} \to A.$$

现在我们将证明，这个同调 $H_*\mathcal{B}(M)$ 可以按照定理 8.1 所述，用范畴的同调来解释。更一般地，我们将描述同调 $\mathcal{B}(M)$ 在每棵树处的取值。

回顾一下，对于一个小范畴 $\mathbb{C}$ 和一个预层 $A\colon\ \mathbb{C}^{op} \to Ch$ （其取值为链复形），同调 $H_*(\mathbb{C}, A)$ 是双复形 $C_*(\mathbb{C}, A)$ 的全复形的同调，该双复形定义为

$$C_p(\mathbb{C}, A)_q = \bigoplus_{c_0 \to \ldots \to c_p} A(c_p)_q$$

其中 p 中的微分由神经 $\mathbb{C}$ 的面映射 $d_i : (c_0 \to \ldots \to c_p) \mapsto (c_0 \to \ldots \hat{c}_i \to \ldots \to c_p)$ 以及 $\mathbb{C}$ 对 A 的作用（对于 d_p）诱导而来。如果 $\mathbb{C}' \subset \mathbb{C}$ 是一个子范畴，那么若我们也将限制到 $\mathbb{C}'$ 记作 A，便得到一个双复形 $C_*(\mathbb{C}', \mathbb{C}; A)_*$，作为通常的余核

$$0 \to C_*(\mathbb{C}', A)_* \to C_*(\mathbb{C}, A)_* \to C_*(\mathbb{C}', \mathbb{C}; A)_* \to 0.$$

该余核的全复形计算范畴对的同调 $H_*(\mathbb{C}', \mathbb{C}; A)_*$，其中范畴为 $\mathbb{C}$，子范畴为 $\mathbb{C}'$。

另请回忆，存在一个分次阿贝尔群的同构

$$DH_*^{(\ell)}(X) = H_*(C_\ell/\mathbb{A}, C_\ell//\mathbb{A}; X)$$

¯（参见 [11], ，但请注意，我们对 $\mathcal{B}(X)$的分次与 [11]中的分次相差 1。）请注意，方程（8.2）右侧并不先验地具有自然的（移位）余运算子结构。

现在让我们回到第 1 节定义的树范畴 $\mathbb{R}$ 。对于 $\mathbb{R}$中的对象S ，在 S 之下的对象所构成的逗号（或“切片”）范畴记作 $S/\mathbb{R}$。其在非同构 $S \to T$ 上的全子范畴记作 $S//\mathbb{R}$。巴构造具有如下性质。

定理 8.1. 对于取值于链复形的 $\mathbb{R}$上的任意预层 M ，以及 $\mathbb{R}$中的任意对象 S ，存在一个同构

$$H_*(\mathcal{B}(M)(S)) = H_{*-p}(S/\mathbb{R}, S//\mathbb{R}; M),$$

其中 p 是树 S的顶点数。

该定理的证明用到了以下引理。

引理 8.2. 设 R 是 $\mathbb{R}$中的一个对象，并考虑与之对应的可表预层 $M = k\mathbb{R}(-, R)$（视为集中于零次的链复形预层）。那么对于 $\mathbb{R}$中的任意对象 S

$$H_n(\mathcal{B}(M)(S)) = \begin{cases} \underline{k}[Iso(S,R)] & if\ n = p \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

其中 p 是 R中的顶点数。

证明。 使用余不变量来描述 $\mathcal{B}(M)$ 会更方便。因此，对于 $M = k\mathbb{R}(-, R)$,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{B}}(M)(S) &= \Big(\bigoplus_{\alpha: S \to T} k[en_T^+] \otimes \underline{k}[Hom_{\mathbb{R}}(T,R)] \Big)_{coinv} \\ &\cong \Big(\bigoplus_{S \to T \to R} k[en_T^+] \Big)_{coinv}. \end{aligned}$$

¯ $\mathcal{B}(M)(S)$ 的元素可表示为 k-线性组合，其项为如下形式的三元组：($S \xrightarrow{\alpha} T \xrightarrow{\beta} R$, e)，其中 $e = (e_1, \ldots\ldots, e_p)$ 是 T 的一个枚举（即与前面一样，是 T 的内边和根边的枚举）。微分在忽略符号的情况下定义为

$$\begin{aligned} \partial(S \xrightarrow{\alpha} T \xrightarrow{\beta} R, e) = \quad & \sum (-1)^i (S \to \partial_{e_i} T \to R, (e_1, \ldots, \hat{e_i}, \ldots, e_p)) \\ & - \sum (-1)^j (S \to \partial_{v_j} T \to R, (e_1, \ldots, \hat{e_j}, \ldots, e_p)) \end{aligned}$$

其中，第一个和仅遍历不属于 S 的 T 的内边；第二个和遍历紧邻 e_j 上方、不属于 S 且位于 T 顶部的顶点 v_j （这样，切去 v_j 所得到的面 $\partial_{v_j} T \to T$ 才有定义）。注意，在后一种情况下，尽管 v_j 不应属于 S，边 e_j 仍可以是 S 的叶。

首先注意到，复合 $\beta \circ \alpha : S \to R$ 在¯微分下保持不变。因此，复形 $\mathcal{B}(M)(S)$ 分解为关于态射$S \xrightarrow{\gamma} R$的和，如下所示:

$$\bar{\mathcal{B}}(M)(S) = \bigoplus_{\gamma} \bar{\mathcal{B}}(M)(S)_\gamma$$

¯其中 $\mathcal{B}(M)(S)\gamma$ 是（余不变类的）三元组 (α, β, e) 的复形，其中$\beta \circ \alpha = \gamma$。若 γ 是同构，则该复形集中于次数 p ，并可取为由三元组 (α, β, e) 组成，其中 α 与 β分别为恒等态射与 γ，且 e 是一个固定的枚举。因此对于同构 γ,

$$H_n(\mathcal{B}(M)(S)_\gamma) = \begin{cases} \underline{k} & \text{if } n = p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

¯我们断言，若 γ 不是同构，则直和项 $\mathcal{B}(M)(S)\gamma$ 是无环的。由此将表明

$$H_n(\mathcal{B}(M)(S)) = \underline{k}[Iso(S,R)] \text{ if } n = p$$

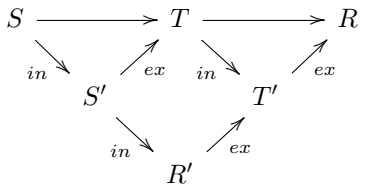
其他 n 取零，并证明该命题。

为证明这一断言，考虑一个非同构 $\gamma:\ S \to R$，并将其分解为先经过内面映射 $S \to R'$，再经过外部面映射 $R' \to R$。那么其中至少有一个不是同构，我们分别考察这两种情形。

如果 $S \to R'$ 不是同构，则在 R' 中固定一条不属于 S 的内边 a，并定义

$$h_a(S \xrightarrow{\alpha} T \xrightarrow{\beta} R, e) = \begin{cases} (-1)^{q+1}(S \to T_a \to R, ea) & \text{if } a \text{ is not an edge of } T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

这里，$e = (e_1, \ldots\ldots, e_q)$，而 ea 是将 a 放在末尾的枚举。树 T_a 是 R 的面，描述如下。如果我们像下式那样，将 α 和 β 分解为先经过内面、再经过外部面，



（其中 in 表示一个内面，ex 表示一个外部面），那么 a 是 R' 的一条内边（根据定义），因此也是 T' 的一条内边。树 T 由收缩 T' 的某些内边得到。现在，T_a 由收缩 T' 中除 a之外的那些边得到。容易验证

$$\partial h_a(S \to T \to R, e) = -h_a\partial(S \to T \to R, e) + (S \to T \to R, e)$$

如果 a不属于 T。如果 a属于 T，则有 $\partial h_a(S \to T \to R,\ e) = 0$。另一方面，如果我们将 $e = e'a$ 写成把 $a = e_q$ 放在序列 $e = (e_1, \ldots,\ e_q)$ 的末尾（这可以通过余不变性做到），那么

$$h_a\partial(S \to T \to R, e) = (-1)^q h_a(S \to \partial_a T \to R, e') = (S \to T \to R, e'a)$$

因此再次有 $\partial h_a(S \to T \to R,\ e) = -h_a\partial(S \to T \to R,\ e) + (S \to T \to R,\ e)$。这表明 h_a 是一个收缩同伦，即 $h_a\partial + \partial h_a = Id$。

现在假设在分解 $S \to R' \to R$ 中，第一个映射是同构，因此 $\gamma: S \to R$ 是一个外部面。那么在 γ的任意分解 $S \xrightarrow{\alpha} T \xrightarrow{\beta} R$ 中，映射 α 也都是外部的。特例 $\eta \to \eta \to C_\ell$ 中的断言可以直接手工验证。否则，固定 S 的一片叶 a，它是 R的一条内边。这样的叶 a 必定存在，因为 $S \to R$ 不是同构，而且 R 至少有一条内边。对于 γ 的分解 $S \xrightarrow{\alpha} T \xrightarrow{\beta} R$，其中 a 不是 T的内边，该边是 T 的一片叶，因此我们可以通过将 R 中紧邻 a 上方的顶点嫁接到 T上来定义一棵树 T_a。接着定义

$$h_a(S \xrightarrow{\alpha} T \xrightarrow{\beta} R, e) = \begin{cases} (-1)^{q+1}(S \to T_a \to R, ea) & \text{if } a \text{ is not an inner edge of } T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 $e = (e_1, \ldots\ldots, e_q)$，并且和前面一样，我们假设在 a 是 T 中的内部元素时，$e_q = a$。于是再次可验证

$$\partial h_a(S \to T \to R, e) = -h_a\partial(S \to T \to R, e) + (S \to T \to R, e),$$

因此 h_a 是一个收缩同伦。

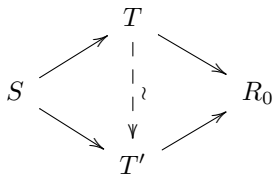
至此，命题得证，引理也随之得证。 □

定理的证明。 由通常的双复形论证，只需证明在 M 仅为取值于阿贝尔群的预层，并将其视为集中在零次的链复形时，该命题成立。

取一个阿贝尔群预层 M。固定 $\mathbb{R}$ 中的一个对象 S。于是我们可以构造一个双复形 $C_{*,*}$，其在双次数 p, q 上定义为

$$C_{p,q} = \Big(\bigoplus_{S \to T \to R_0 \to \ldots \to R_q} k[en_T^+] \otimes M(R_q) \Big)_{coinv}.$$

这里 $S \to T \to R_0 \to \ldots \to R_q$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一列态射，其中 T 有 p 个顶点。余不变量是对 T 的同构取的，如



以及 T 的枚举的置换。q 中的微分类似于 $\mathbb{R}$ 的同调所用的微分，即对删除各个 R_i 的操作取交错和。p 中的微分 $^-$ 定义为对 T 的各个面的交错和，如 $\mathcal{B}(M)$ 的定义所示。

现在，对固定的 p，复形 $C_{p,-}$ 是对箭头 $S \to T$ 的同构类以及复形 e 的枚举取和；这些复形用于计算以 M 为系数的 $T/\mathbb{R}$ 的同调。由于 $T/\mathbb{R}$ 有一个始对象，其同调在正次数上消失，因此我们得到

$$H_*(C_{p,-}) = \bigoplus_{S \to T, e} M(T)_{coinv} = \bar{\mathcal{B}}(M)(S)_p.$$

$^-$我们得出结论：该双复形计算同调 $H_*(\mathcal{B}(M)(S))$。

另一方面，固定 q，且在取余不变量之前，$C_{-,\,q}$ 是对复形序列 $R_0 \to \ldots \to R_q$ 求和$^-$所得的，其中的复形为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}(-,\ R_0))(S) \otimes M(R_q)$。若记 $_-p$ 为 S中的顶点数，则由引理可知，同调 $\mathcal{B}(\mathbb{R}(-,\ R_0))(S)$ 集中在次数 p，因此我们得到

$$H_p(C_{-,q}) = \underline{k}[Iso(S, R_0)] \otimes M(R_q)$$

（因为在取余不变量之后，每个同构 $S \to R$都只有一个分解 $S \to T \to R$。）这表明，该双复形计算同调$H_*(S/\mathbb{R},\ S//\mathbb{R};\ M)$，并整体移位 p，于是定理得证。□

Appendix A. Comonads

在本附录中，我们将证明预运算子及其代数是某个余单子的余代数。这尤其意味着存在一个基变换函子，它是沿预运算子态射对预代数作正向推送的右伴随；这一函子已在第 2.4 节中引入。

命题 A.1。 预运算子范畴是余单子上的余代数范畴

$$G : Psh(\mathbb{A}) \to Psh(\mathbb{A}).$$

（函子 G 及其余单子结构将在证明中明确描述。）

证明。 我们将给出所涉及结构的明确描述，但把一些直接的验证留给读者。

首先，对于预层 X 和树 T，定义

$$G(X)(T) = \Big(\prod_{\alpha : S \to T} \bigotimes_{v \in S} X(T(\alpha)_v) \Big)^{inv}.$$

这里， α 遍历 $\mathbb{A}$ 中陪域为 T 的态射， v 遍历 S 中的顶点，而 $T(\alpha)_v$ 是 T 的子树，定义为顶点 v 的膨胀，参见上文第 1 节。不变量是相对于 T 上的同构取的。明确地说，将 $G(X)(T)$ 中的一个元素 ω 写作一个族 (ω_α)，其中 $\alpha\colon S \to T$，且 $\omega_\alpha \in \bigotimes_v X(T(\alpha)_v)$。那么，不变性意味着，对于每个 T 上的同构 $\gamma\colon S \to R$，以及如.....中所述诱导的同构 γ_v

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\gamma} & R \\ & {\scriptstyle\alpha}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\beta} & \\ & T & \end{array} \qquad\qquad \gamma_v : T(\alpha)_v \xrightarrow{\simeq} T(\beta)_{\gamma(v)}$$

我们有

$$\bigotimes_v \gamma_v^* : \bigotimes_v X(T(\beta)_{\gamma(v)}) \to \bigotimes_v X(T(\alpha)_v)$$

映射 ω_β 到 $\omega_{\alpha\circ}$

现在有几件事需要核查，这些都相对直接，列举如下:

(i) $G(X)$ 确实具有 $\mathbb{A}$ 上预层的结构。考虑态射$\beta\colon T \to T'$属于 $\mathbb{A}_\circ$ 那么 $\beta^*\colon G(X)(T') \to G(X)(T)$ 是使下图交换的映射，对每个 $\alpha\colon S \to T$ 属于 $\mathbb{A}$,

$$\begin{array}{ccc} G(X)(T') & \xrightarrow{\beta^*} & G(X)(T) \\ {\scriptstyle proj_{\beta\alpha}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle proj_\alpha} \\ \bigotimes_v X(T'(\beta\alpha)_v) & \longrightarrow & \bigotimes_v X(T(\alpha)_v) \end{array}$$

这里的下方箭头对每个 α 的定义方式是：由X 的预层结构作用于这些映射

$$T(\alpha)_v \to T'(\beta\alpha)_v$$

对每个 $v \in S_\circ$ 这些映射来自以下所示的连续分解

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{\alpha} & T & \xrightarrow{\beta} & T' \\ {\scriptstyle i_v}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\gamma} & & \uparrow{\scriptstyle\delta} \\ C_v & \dashrightarrow & T(\alpha)_v & \dashrightarrow & T'(\beta\alpha)_v \end{array}$$

其中，左侧方块是 $\alpha\circ i_v$ 到一个 $\mathbb{A}$ 态射后接一个外部面 γ 的唯一分解，右侧方块则是对 $\beta\gamma$ 的类似分解。

(ii) 函子 G 具有余单子结构。余单位 ε 是在对象 $T \in \mathbb{A}$ 处定义的映射，它将对象投影到满足以下条件的因子上： α 是从花冠 $C_{\lambda(T)}$ 到 T 的映射，且 $C_{\lambda(T)}$ 的叶子与 T 的叶子相同,

$$\Big(\prod_{\alpha:S\to T} \bigotimes_v X(T(\alpha)_v)\Big)^{inv} \to X(T).$$

事实上，映射 $C_{\lambda(T)} \to T$ 在同构意义下唯一，因此该投影在不变量上定义良好。位于 T 的余乘法 $\delta\colon G(X) \to G^2(X)$ 是

从 $G(X)(T) = \Big(\prod_{\alpha} {}_{:S\to T} \bigotimes_{v} X(T(\alpha)_v) \Big)^{inv}$ 到对象 $G^2(X)(T)$ 的映射，它

$$\Big(\prod_{\alpha:S\to T} \bigotimes_{v} \big(\prod_{\beta_v:R_v\to T(\alpha)_v} \bigotimes_{w} X((T(\alpha)_v)(\beta_v)_w) \big)^{inv} \Big)^{inv}$$

定义如下。取 $G(X)(T)$ 中的一个元素 $\omega = (\omega_\alpha)$，并假设 $\omega_\alpha = \otimes_v \omega_\alpha(v)$。（实际上， ω_α 是这类张量的和。）其在 α 处的值为 $S \to T$，而作为 $v \in S$ 的张量因子的是一个元素；它在 δ 下的像

$$\delta(\omega)_\alpha(v) \in \big(\prod_{\beta_v:R_v\to T(\alpha)_v} \bigotimes_{w} X((T(\alpha)_v)(\beta_v)_w) \big)^{inv}.$$

为定义这个值，注意映射 $\beta_v : R_v \to T(\alpha)_v$ 拼接成 α 的一个分解 $S \xrightarrow{\gamma} R \xrightarrow{\beta} T$，其中 γ 将每个顶点 v 膨胀为一棵树 $R_v = R(\gamma)_v$。然后我们令

$$(\delta(\omega)_\alpha(v))_{\beta v}(w) := \omega_\beta(w).$$

为简化记号而略去不变量，下面给出另一种描述同一映射 $G(X)(T) \to G^2(X)(T)$ 的方式。由于涉及的乘积都是有限的，它们可以分配到张量上，而陪域 $G^2(X)(T)$ 可以视为乘积

$$\prod_{S\xrightarrow{\alpha}R\xrightarrow{\beta}T} \bigotimes_{w} X(T(\beta)_w)$$

其中 w 遍历 R的顶点。为与前面的描述进行比较，每个这样的顶点 w 都属于 $R(\alpha)_v$，其中 v 是 S的唯一顶点。于是 $\delta : G(X)(T) \to G^2(X)(T)$是使下列图表对每一对 $S \xrightarrow{\alpha} R \xrightarrow{\beta} T$都交换的映射:

$$\begin{array}{ccc} \prod_{S\xrightarrow{\alpha}T} \bigotimes_{v} X(T(\alpha)_v) & \dashrightarrow & \prod_{S\xrightarrow{\alpha}R\xrightarrow{\beta}T} \bigotimes_{w} X(T(\beta)_w) \\ & {\scriptstyle proj_\beta} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle proj_{\alpha,\beta}} & \\ & X(T(\beta)_w) & \end{array}$$

(iii) 若 X 是一个预运算子，则其结构映射可以迭代，从而对 $\mathbb{A}$ 中的每个态射 $\alpha : S \to T$给出一个映射

$$X(T) \to \bigotimes_{v\in S} X(T(\alpha)_v).$$

这个映射由结构映射的结合性约束 θ良定义。对所有态射 α，这些映射 $X(T) \to \otimes_{v\in S} X(T(\alpha)_v)$合在一起定义了一个映射$\theta : X(T) \to G(X)(T)$，并赋予 X 一个余单子G上的余代数结构。

我们留给读者验证，映射 δ 和 ε 确实满足余单子的方程，并且余代数结构 $\theta : X \to G(X)$等价于 X上的预运算子代数结构。这些验证过程稍显冗长，但很直接。□

接下来，考虑一个预运算子 X以及与之相关的预代数范畴$Prealg(X)$。我们声称，该范畴仍可表示为某个余单子的余代数范畴，正如下面的命题所述。证明过程中也将再次给出该余单子的明确描述。

命题 A.2. 设 X 是一个预运算子。那么， $Prealg(X)$ 上的预代数范畴 X 是定义在 $\mathbb{R}$上的预层范畴上的某个余单子的余代数范畴，

$$H_X : Psh(\mathbb{R}) \to Psh(\mathbb{R}).$$

证明。 证明沿用了前一个命题的思路。函子 H_X 定义在预层 V 和 $\mathbb{R}$ 中的树 T 上，其定义为

$$H_X(V)(T) = \Big(\prod_{\alpha : S \to T} X(S) \otimes V(T/S) \Big)^{inv} = \Big(\prod_{\alpha : S \to T} X(S) \otimes \bigotimes_{\ell} V(T(\alpha)_\ell) \Big)^{inv}$$

其中， α 遍历 $\mathbb{R}$中的映射， ℓ 遍历 S的叶子，而 $T(\alpha)_\ell$ 是 T中位于 ℓ在 α作用下的像之上的子树，一切均同前。下面检查几件事。

(i) $H_X(V)$ 是关于 T 的反变函子。事实上，给定 $\beta\colon T \to T'$ 在 $\mathbb{R}$ 中，映射 $\beta^*\colon H_X(V)(T') \to H_X(V)(T)$ 是使下列形式的每个方块都交换的映射，对每个 $\alpha\colon S \to T$ 均如此：

$$\begin{array}{ccc} H_X(V)(T') & \overset{\beta^*}{\dashrightarrow} & H_X(V)(T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(S) \otimes \bigotimes_\ell V(T'(\beta\alpha)_\ell) & \longrightarrow & X(S) \otimes \bigotimes_\ell V(T(\alpha)_\ell) \end{array}$$

其中，下方的映射来自由 β 诱导的态射 $T(\alpha)_\ell \to T'(\beta\alpha)_\ell$。这些映射是通过将 α 和 $\beta\alpha$ 分别分解为 $\mathbb{A}$ 中的一个映射，随后接一个外部面而得到的

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{\alpha} & T & \xrightarrow{\beta} & T' \\ \| & & \uparrow{\scriptstyle \gamma} & & \uparrow{\scriptstyle \gamma'} \\ S & \xrightarrow{\delta} & S' & \xrightarrow{\delta'} & S'' \end{array}$$

其中 γ，γ'属于 $\mathbb{R}$，而 δ，δ'属于 $\mathbb{A}$。那么 δ和 δ'在叶子上是同构。若$\delta(\ell) = \ell'$ 且 $\delta'(\ell') = \ell''$，则 β将 $\gamma(\ell)$映射到 $\gamma'(\ell')$，因此， T中以 $\gamma(\ell')$为根的子树 $T(\gamma)_{\ell'}$ 被 β映射到 T'中以 $\gamma'(\ell'')$为根的子树 $T'(\gamma')_{\ell''}$。这恰好就是树 $T(\alpha)_\ell$和 $T'(\beta\alpha)_\ell$。

(ii) H_X具有余单子的结构：在 T处的余单位 $H_X(V) \xrightarrow{\varepsilon} V$是映射

$$\Big(\prod_{\alpha : S \to T} X(S) \otimes \bigotimes_{\ell} V(T(\alpha)_\ell) \Big)^{inv} \to V(T)$$

由投影到满足 α 的因子给出： $S \to T$ 是 T根的包含函子 $\eta \to T$。此时，相应的 $T(\alpha)_\ell$就是 T，而按照约定， $X(\eta) = k$。在 T处，余乘法 $\delta\colon H_X(V) \to H_X H_X(V)$是一个从 $H_X(V)(T) = \Big(\prod_{\alpha : S \to T} X(S) \otimes \bigotimes_{\ell} V(T(\alpha)_\ell) \Big)^{inv}$ 到以下不变量中的映射

$$\prod_{\alpha : S \to T} X(S) \otimes \bigotimes_{\ell} \Big(\prod_{\beta_\ell : R_\ell \to T(\alpha)_\ell} X(R_\ell) \otimes \bigotimes_{k} V(T(\alpha)_\ell(\beta_\ell)_k) \Big).$$

这里， ℓ 遍历 S 的叶子，而 k 遍历 R_ℓ的叶子。与前面一样，这个最后的对象同构于

$$\prod_{S \xrightarrow{\alpha} R \xrightarrow{\beta} T} X(S) \otimes \bigotimes_{\ell} X(R(\alpha)_\ell) \otimes \bigotimes_{k} V(T(\beta)_k)$$

其中， k 现在遍历 R的所有叶子。映射 δ 使得下方的图表对每个 $S \xrightarrow{\alpha} R \xrightarrow{\beta} T$都交换

$$\begin{array}{ccc} H_X(V)(T) & \xrightarrow{\qquad\qquad\delta\qquad\qquad} & H_X H_X(V)(T) \\ \downarrow{\scriptstyle proj_\beta} & & \downarrow{\scriptstyle proj_{\beta\circ\alpha}} \\ X(R)\otimes\bigotimes_k V(T(\beta)_k) & \longrightarrow & X(S)\otimes\bigotimes_\ell X(R(\alpha)_\ell)\otimes\bigotimes_k V(T(\beta)_k) \end{array}$$

这里的下方映射来自 X 的运算子结构，它作用于将 $R(\alpha)_\ell$ 嫁接到 S 的叶子上所得的树 R。

(iii) 最后，由映射 $\tau^\alpha : V(T) \to X(S) \otimes \bigotimes_\ell V(T(\alpha)_\ell)$ 给出的 V 上的预代数结构，其中 $\alpha : S \to T$，归结为余代数 $\tau\colon V \to H_X(V)$ 的结构，只需取各个 τ^α 的乘积，即得到一个映射

$$V(T) \to \Big(\prod_{\alpha:S\to T} X(S) \otimes \bigotimes_\ell V(T(\alpha)_\ell) \Big)^{inv}$$

对每棵树 T。

还需检验相关恒等式，以证明 δ 和 ε 确实在 H_X 上定义了余代数结构，并且如上所述， $\tau\colon V \to H_X(V)$ 是一个余代数结构。这些检验都很直接，留给读者完成。□

接下来，考虑一个预运算子映射 $f : X \to X'$。该映射诱导出一个余单子映射 $H_f : H_X \to H_{X'}$。通过复合， H_f 定义了一个作用于余代数的函子，我们记作

$$f_! : Coalg(H_X) \to Coalg(H_{X'})$$

因为根据命题 A.2 的对应关系，它可以与函子 $f_!\colon Prealg(X) \to Prealg(X')$ 相识别。

命题 A.3. 函子 $f_! : Coalg(H_X) \to Coalg(H_{X'})$ 有一个右伴随

$$f^* : Coalg(H_{X'}) \to Coalg(H_X).$$

对于一个 H_X-余代数 (M', θ')，其值 $f^*(M)$ 可以计算为 $Psh(\mathbb{R})$ 中的等化子

$$f^*(M) \longrightarrow H_X(M') \rightrightarrows H_X H_{X'}(M')$$

由平行映射 $H_X(\theta')$和 $(H_X H_f)\circ\delta$在 M' 处给出。

注记 A.4. 在命题 A.2 的识别下，这定义了一个基变换函子，仍记作

$$f^* : Prealg(X') \to Prealg(X).$$

命题 *A.3* 的证明. 这实际上属于余单子或其对偶单子的普遍理论。关键在于证明，命题陈述中的等化子 $f^*(M')$ 具有一个 H_X-余代数结构 $f^*(M') \to H_X(f^*(M'))$。这又是因为 H_X 保持此等化子。为此，注意到这个等化子是余反射的，也就是说，这些平行映射有一个公共收缩

$$H\varepsilon' : H_X H_{X'}(M') \to H_X(M')$$

其中 ε' 是 $H_{X'}$的余单位。接下来，可以观察到函子 H_X 保留余反射等化子。（请记住，我们是在一个域上工作；在满足充分平坦性条件时，结论同样成立。）事实上，对 α 的乘积： $S \to T$、不变量

以及定义 $H_X(V)$时涉及的与 $X(S)$的张量显然都具有这一性质，因此只需证明函子

$$V \mapsto V(T/S)$$

保余反射等化子。注意， $V(T/S)$ 是由 $V(T_\ell)$ 的多个副本作张量积得到的，这些副本对应于树 T_ℓ 的每个叶 ℓ S。由此可知， $V \mapsto V(T/S)$ 保余反射等化子；这是根据下述一个众所周知的事实，通过归纳法得出的。证明很简单，但由于没有可供引用的文献，且为方便读者，我们将其列出。至此，命题的证明也就完成了。□

引理 A.5。设

$$A \xrightarrow{\ i\ } B \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} C \qquad and \qquad D \xrightarrow{\ j\ } E \underset{k}{\overset{h}{\rightrightarrows}} F$$

幺半范畴中有两个余反射等化子，其截面分别为 s 和 t 。此外，设 A、B、E 和 F 均为平坦的（与其中任一个作张量积都保持等化子）。那么

$$A \otimes D \xrightarrow{\ i\otimes j\ } B \otimes E \underset{g\otimes k}{\overset{f\otimes h}{\rightrightarrows}} C \otimes F$$

仍是一个（余反射）等化子。

证明。考虑图表

$$\begin{array}{ccccc}
A\otimes D & \longrightarrow & A\otimes E & \rightrightarrows & A\otimes F \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
B\otimes D & \twoheadrightarrow & B\otimes E & \rightrightarrows & B\otimes F \\
\downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow \\
C\otimes D & \longrightarrow & C\otimes E & \rightrightarrows & C\otimes F.
\end{array}$$

首先，利用 A 和 F 是平坦的这一事实，很容易看出左上方的方块是一个拉回。现在假设 $p\colon X \to B\otimes E$ 是一个使 $f\otimes h$ 和 $g\otimes k$相等的映射。然后，利用 f 和 g的公共收缩 s ，以及 h 和 k的公共收缩 t ，我们看到 p也使 $B\otimes E \twoheadrightarrow B\otimes F$和 $B\otimes E \twoheadrightarrow C\otimes E$相等。由于假设 B和 C是平坦的，p分别经由 $B\otimes D$和 $A\otimes E$分解，并且根据拉回性质，也经由 $A\otimes D$分解。□

注记 A.6. (a) 设 $f\colon X \to X'$ 是预运算子之间的一个映射。显然， $f_!\colon Prealg(X) \to Prealg(X')$ 保持拟同构。由于我们是在一个域上工作的，对 f^*作为等化子的描述表明， f^*也保持拟同构。

(b) 若 $f\colon X \to X'$ 本身是拟同构，则 $f_!$ 和 f^* 在拟同构意义下互为逆。事实上，由于 $f_!$ 也能检测拟同构，只需证明对每个 X'-预代数 M'，余单位 $f_!f^*(M') \to M'$ 是拟同构。这可通过比较 $f^*(M')$ 的定义性等化子与定义 M' 的余自由分解的标准等化子得出，如下图表所示

图表

$$\begin{array}{ccccc} f^*(M') & \longrightarrow & H_X(M') & \rightrightarrows & H_X H_{X'}(M') \\ \vdots & & \downarrow & & \downarrow \\ M' & \longrightarrow & H_{X'}(M') & \rightrightarrows & H_{X'} H_{X'}(M') \end{array}$$

（注：这是预层底层范畴中的一个图表。）

Appendix B. Some remarks concerning signs

在前面的各节中，我们省略了一些常规验证，以确认定义中的 Koszul 约定为所有等式给出了正确的符号。若通过对元素求值来明确进行这些验证，过程可能相当冗长。通常，给出图示论证会更简便，我们将在 B.1 节对此加以说明。作为对比，我们将在 B.3 节通过对元素求值，明确展示如何检查符号。

B.1. 余运算子结构性质的证明 $\mathcal{B}X$。 回顾第 3 节，对于预运算子 X（其结构映射为 θ），$\mathcal{B}(sX)$ 上的余算子结构在分解 $S = S_1 \circ_a S_2$ 上的定义为

$$\bar{\Delta}^a = twist \circ (id \otimes \tilde{\theta}) \circ (drop_a \otimes id)$$

其中 $\tilde{\theta}$ 为 $(s \otimes s) \circ \theta \circ s^{-1}$，这在元素上给出如下公式：

$$\bar{\Delta}^a(\alpha, e \otimes x) = \sum \pm(\alpha_1, e_1 \otimes x_1) \otimes (\alpha_2, e_2 \otimes x_2)$$

其中 $e = ae_1e_2$，$\theta(x) = \sum x_1 \otimes x_2$ 和 $\pm$ 表示相应的 Koszul 符号。

为了证明带有结构映射 Δ 的 $\mathcal{B}(sX)$ 是一个预余运算子，我们需要证明的自然性和余结合性，并且证明 ∂ 是关于 Δ的余导子。现在我们将用图表证明这三个事实。

B.1.1. 自然性。 考虑树的一个态射 $\gamma : S \to S'$ in $\mathbb{A}$，满足 $\gamma = \gamma_1 \circ_a \gamma_2 : S_1 \circ_a S_2 \to S'_1 \circ_a S'_2$。首先注意，对于一棵树 T 以及 $\mathbb{A}$中的 $\alpha : S \to T$，存在一个分解 $\alpha = \beta \circ \gamma$，当且仅当存在两个分解$\alpha_1 = \beta_1 \circ \gamma_1$ 和 $\alpha_2 = \beta_2 \circ \gamma_2$。根据定义，结构映射 θ 是自然的，因此也具有自然性。扭转映射和映射 $drop_a \otimes id$ 不与 γ_*相互作用。因此，显然下图是交换的

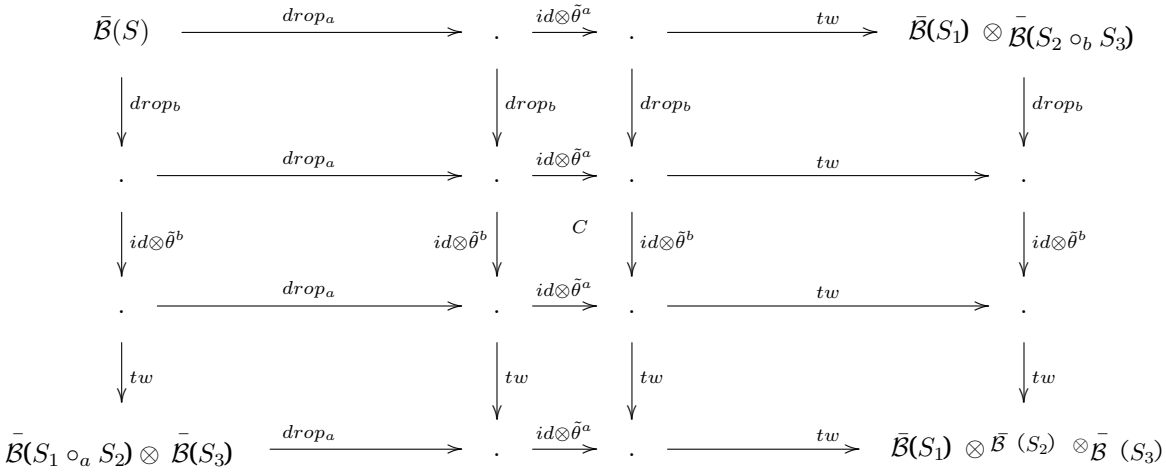
$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{B}}(sX)(S_1 \circ S_2) & \xrightarrow{\gamma_*} & \bar{\mathcal{B}}(sX)(S'_1 \circ S'_2) \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{\Delta}^a} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\Delta}^a} \\ \bar{\mathcal{B}}(sX)(S_1) \otimes \bar{\mathcal{B}}(sX)(S_2) & \xrightarrow{\gamma_{1*} \otimes \gamma_{2*}} & \bar{\mathcal{B}}(sX)(S'_1) \otimes \bar{\mathcal{B}}(sX)(S'_2) \end{array}$$

这恰好给出了 Δ的自然性。

B.1.2. 余结合性。 先验上有两种情况需要考虑：“顺序”情形，即 S 可写成（$S_1 \circ_a S_2$）$\circ_b S_3 = S_1 \circ_a$（$S_2 \circ_b S_3$）；以及“并行”情形，即 S 可写成（$S_1 \circ_a S_2$）$\circ_b S_3 =$（$S_1 \circ_b S_3$）$\circ_a S_2$。我们只验证第一种情形。第二种情形与第一种非常相似，同样基于 θ 的分次反余结合性（这由给定的 θ的余结合性推出）。

在下图（第一种情形）中，tw 表示扭转映射（请注意，水平扭转与垂直扭转并不相同），水平外部

复合项为 $\bar{\Delta}^a$，垂直项为 $\bar{\Delta}^b$。为使图表清晰易读，我们没有标出所有 $\bar{}$ 域，并且用 $\mathcal{B}$ 代替了 $\mathcal{B}(sX)$。



中间由 C 表示的方块由于 θ 的分次反余结合性而反交换。另有三个较小的方块反交换：第一列的前两个，以及中间列最上面的一个。其余较小方块均交换，因此最外层的大方块交换。这给出了串行情形下 Δ 的 $\bar{}$ 余结合性。如前所述，并行情形与此类似。

B.1.3. 余导子。 我们分别证明 ∂_{ext} 和 ∂_{int} 关于 Δ 是余导子。

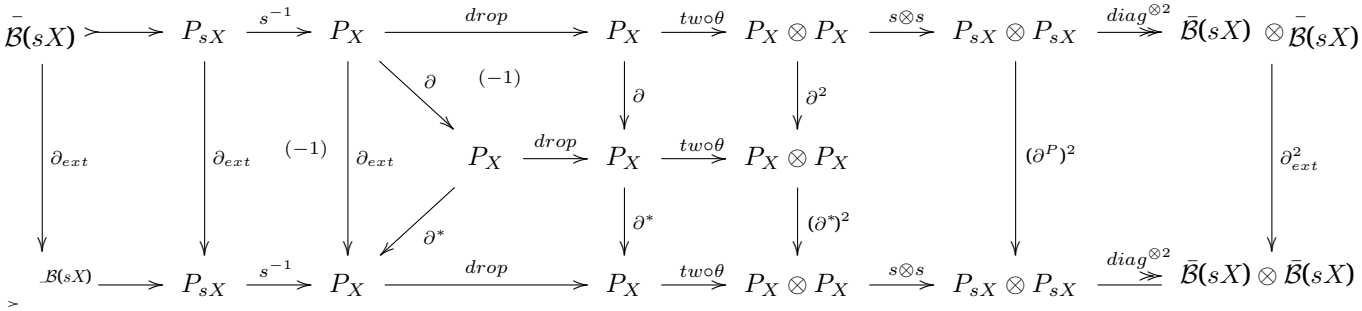
$\tilde{}$ 对于 ∂_{int}，首先注意到，由于根据假设 ∂_X 关于 θ 是余导子，∂_{sX} 关于 θ 是反余导子。利用 $drop_a$ 与 ∂_{sX} 反交换这一点，可推出 ∂_{int} 关于 Δ 是余导子。

对于 ∂_{ext}，回忆一下，元素 $e\otimes x$ 会被映射到 $(-1)^{e+x}\sum_i(-1)^{i-1}(\partial_i e\otimes\partial^*_{e_i}x)$。定义 P_X 为 $\bigoplus_{T_1,T_2}k[en_{T_1}]\otimes X(T_2)$。其微分为 $\partial^P=(id\otimes\partial^*)\circ(\partial\otimes id)$，其中 ∂^* 是 $\partial^*_{e_i}$ 的和（不带符号），而 ∂ 是 $(-1)^{e+x}\sum_i(-1)^{i-1}\partial_i$，二者都只作用于张量积的一侧。由此定义可知，$\partial_{ext}$ 是复合映射 $\bar{\mathcal{B}}(sX)\rightarrowtail P_X\overset{\partial^P}{\to}P_X\overset{diag}{\twoheadrightarrow}\bar{\mathcal{B}}(sX)$（其中 $diag$ 表示投影 $\bar{}$ 到对角的 $T_1=T_2$ 直和项）。类似地，对于边 a，在 P_X 上定义 Δ^a 如下：

$$tw\circ(id\otimes\theta^a)\circ(drop_a\otimes id)$$

$\bar{}$（约定若 $a\notin T_2$，则 $\theta^a=0$；若 $a\notin T_1$，$drop_a=0$），因此 Δ^a 是复合 $\bar{\mathcal{B}}(sX)\rightarrowtail P_X\overset{\bar{\Delta}}{\to}P_X\otimes P_X\overset{diag\otimes diag}{\longrightarrow}\bar{\mathcal{B}}(sX)\otimes\bar{\mathcal{B}}(sX)$。

证明由以下交换图给出，其中 ∂ 表示$\partial\otimes id$，∂^* 表示 $id\otimes\partial^*$，而对于 d，P_X上的映射以及 $P_X\otimes P_X$ 上的 d^2 表示通常的$d\otimes id+id\otimes d$。包含 (-1) 的两个方块反交换，其余所有小方块（以及唯一的三角形）均交换。这证明外侧矩形交换。



B.2. 到代数情形的翻译。 运算子情形涉及形如 $X(S_1 \circ S_2) \to X(S_1) \otimes X(S_2)$ 的结构映射，或更一般地，涉及形如 $X(T) \to X(S) \otimes X(T/S)$ 的结构映射，而代数情形涉及形如 $M(T) \to X(S) \otimes M(T/S)$ 的映射。代数情形中涉及的图表与运算子情形中的形式相同，只是陪域中的张量积的第一个分量位于 X 中，而不是 M中。代数的性质（如结合性）以非常相似的方式诱导出其巴构造的相应性质。与其用元素写出方程，不如使用图表，这样更容易看清楚。我们将以未移位的巴构造为例说明这一点。

更确切地说，回顾第 2.3 节，预运算子 $X\colon \mathbb{A}^{op} \to Ch$ 上的预代数 $M\colon \mathbb{R}^{op} \to Ch$ 的结构由以下映射给出：对于 $\mathbb{R}$ 中的每个 $\alpha\colon S \to T$，都有 $\theta^\alpha\colon M(T) \to X(S) \otimes M(T/S)$。在第 6 节中，我们定义了 M 的（未移位）巴构造上的余代数结构映射。更明确地说，使用注 6.4 中的记号，我们得到映射 ∇^α（次数为 -1）；对于 $y \in M(U)$ 和 $e \in en^+(U)$，这些映射用余不变量表示如下：

$$\overline{\nabla}^\alpha(e,y) = (-1)^{f\cdot(\Sigma g_\ell + y_\ell)+e+y}((f,(g_\ell)_\ell), x \otimes \bigotimes_\ell y_\ell).$$

注意，每个这样的映射 $\overline{\nabla^\alpha}$都可以分解为 $twist \circ (id \otimes \theta) \circ (drop_r \otimes id)$，其中 r 表示 U的根边，而 $twist$ 映射将树的枚举（ S 的内边，以及 T_ℓ各自的内边加根）与因子 x和 y_ℓ各自的枚举按正确顺序排列。

结构映射 ∇ 的自然性直接由 θ的自然性推出，如 B.1.1 所示。

现在，分次余结合性只有一种情形：将 U 分解为三个层次，即 $(R \circ (S_\ell)_\ell) \circ (T_{\ell j})_{\ell,\, j}$。映射 ∇ 可以先在R 正上方将 U 分开，再在每个 S_ℓ上方分开；也可以先在嫁接 $(R \circ (S_\ell)_\ell)$上方将 U 分开，再在 R上方分开。于是，余结合图表与 B.1.2 中的图表类型相同，只是原来的边 b 现在换成了S_ℓ各自的根所组成的集合（因此，$drop_b$ 被替换为删去所有连接 R 与S_ℓ各自的边）。于是，图表中的所有方块都严格交换，只有左上方块例外；它根据 S_ℓ的数量奇偶性而交换或反交换。这就得到了分次余结合性。

证明 $\mathcal{B}M$ （定义见第 4.2 节）的微分相对于 ∇ 是分次余导子的过程，同样可以分为两部分：一部分针对微分的内部部分，另一部分针对外部部分。对于内部部分，我们利用∂_M 是余导子这一事实，以及去掉根的操作与 ∂_M反交换这一事实。对于外部部分，可以采用 B.1.3 中的相同方法，但有两点不同。首先，外部微分现在有两部分（但只需定义 $\partial^* = \sum(e_i^* - v_i^*)$ 即可轻松处理）。其次， ∇ 将 P_M 映射到 $P_X \otimes \oplus_n P_M^{\otimes n}$ （其中 $n \geq 1$是切口上方子树的数量）。第二点可通过

在图表中将 ∂^2 （分别是 $(\partial^*)^2$）替换为 $\oplus\partial^{n+1}$ （分别是 $\oplus(\partial^*)^{n+1}$），即张量积上的诱导微分，来处理。证明的其余部分相同。

B.3. （余）幺半群的 bar-cobar 伴随证明中的一些符号。回顾一下，态射 φ: $\mathcal{B}^\vee N \to M$ and$\psi : N \to \mathcal{B}M$ 之间的一一对应由以下公式给出

$$\varphi_S(\alpha, y \otimes e) = (-1)^e \alpha^* \psi_T(y)_{1_T}(e)$$

$$\psi_S(y)_\alpha(e) = (-1)^e \varphi_T(1_T, \alpha_*(y) \otimes e).$$

我们先检查 φ 保持微分当且仅当 ψ 也保持微分，并注意符号。然后我们将证明，一个态射与运算子余乘法相容，当且仅当另一个也相容。

根据定义， ψ 保持微分意味着，对于 $y \in N(S)$:

$$\psi_S(\partial y) = \partial \psi_S(y),$$

在 $\alpha : S \to T$ 和 $e \in en(T)$ 中求值后，得到

$$\psi_S(\partial y)_\alpha(e) = \partial_M(\psi_S(y)_\alpha(e)) + (-1)^y \int_d d^* \psi_S(y)_{d\alpha}(de).$$

将 ψ_S 改写为用 φ_T 表示，我们得到

$$(-1)^e \varphi_T(1_T, \alpha_*(\partial y) \otimes e) = (-1)^e \partial_M \varphi_T(1_T, \alpha_* y \otimes e) + (-1)^{y+e+1} \int_d d^* \varphi_{T'}(1_{T'}, (d\alpha)_* y \otimes de).$$

约去 $(-1)^e$，移项并写成 $z = \alpha_* y$ 后，可将其改写为

$$\partial_M \varphi_T(1_T, z \otimes e) = \varphi_T(1_T, \partial z \otimes e) + (-1)^z \int_d d^* \varphi_{T'}(1_{T'}, d_* z \otimes de). \tag{B.1}$$

由 φ 的自然性，我们有 $d^*\varphi_{T'}(1_{T'},\ d_*z \otimes de) = \varphi_T(d,\ d_*z \otimes de)$；根据微分的定义， $\partial(1,\ z \otimes e) = (1,\ \partial z \otimes e) + (-1)^z \int_d (d,\ d_* z \otimes de)$。因此，方程 (B.1) 可改写为 $\partial_M \varphi_T(1,\ z \otimes e) = \varphi_T(\partial(1,\ z \otimes e))$。这表明，只要 ψ 保持微分， φ 也保持微分。反之亦然，证明方法相同。

我们还来验证一下：如果 φ 和 ψ （二者的次数均为 -1）中一个与余乘法交换，那么另一个也与余乘法交换。假设对于 $y \in N(T)$，有 $(\varphi\otimes\varphi)\nabla(y\otimes e) = -\theta_M\varphi(y\otimes e)$。我们要证明，对于 $y \in N(S)$，有 $(\psi\otimes\psi)(\theta_N(y)) = -\Delta(\psi y)$。只需在应用第 3.5 节的同构 μ 后证明这一等式。对于左边，得到

$$\begin{aligned}
&\mu(\psi \otimes \psi)(\theta(y))_{e_1,e_2} \\
=&\psi(y_1)_{e_1} \otimes \psi(y_2)_{e_2}(-1)^{y_1+e_1(y_2+1)} \\
=&\varphi(\alpha_{1*}y_1 \otimes e_1) \otimes \varphi(\alpha_{2*}y_2 \otimes e_2)(-1)^{e_1+e_2+y_1+e_1(y_2+1)} \\
=&(\varphi \otimes \varphi)((\alpha_{1*}y_1 \otimes e_1) \otimes (\alpha_{2*}y_2 \otimes e_2))(-1)^{y_1+e_1+e_1+e_2+y_1+e_1(y_2+1)} \\
=&(\varphi \otimes \varphi)(\nabla(\alpha_* y \otimes e))(-1)^{y+e_1y_2})(-1)^{e_1+e_2+e_1(y_2)} \\
=&(\varphi \otimes \varphi)(\nabla(\alpha_* y \otimes e))(-1)^{y+e_1+e_2} \\
=&\theta\varphi(\alpha_* y \otimes e)(-1)^{y+e_1+e_2}
\end{aligned}$$

考虑我们要证明的等式右边，可得

$$\begin{aligned}&(\mu\Delta(\psi y))_{e_1,e_2}\\=&\Delta'(\psi y)_{e_1,e_2}\\=&(-1)^{y+1}\theta(\psi(y)(ae_1e_2))\\=&(-1)^{y+1}\theta((-1)^e\varphi_T(1,\alpha_* y\otimes e))\\=&(-1)^{y+1+e}\theta(\varphi_T(1,\alpha_* y\otimes e))\end{aligned}$$

因此，利用前面的计算，我们得到 $(\mu\Delta(\psi y))_{e_1,\ e_2}=-(\mu(\psi\otimes\psi)\theta(y))_{e_1,\ e_2}$，这证明了如果 φ 与余乘法相容，那么 ψ 也与之相容。同样的计算也证明了逆命题。

References

[1] G. Arone 和 L. Brantner。《Young子群在分拆复形上的作用》。 *Publ.Math.*, *Inst. Hautes Étud. Sci.*，133：47–156，2021。[2] M. Ching。《拓扑幺半群的巴构造与恒等态射的Goodwillie导数》。 *Geom. Topol.*，9，2005。[3] M. Ching。《稳定同伦论中运算子的 Bar-Cobar对偶》。 *J. Topol.*，5 80，2012 1 39( )：–。[4] B. Fresse。《运算子的 Koszul 对偶与分拆偏序集的同调》。 *in "Homotopy theory and its applications (Evanston, 2002)" Contemp. Math.* 346 115 215, 2004 ，：–。

[5] E. Getzler 和 J. D. S. Jones。《双重环空间的运算子、同伦代数与迭代积分》。 *hep-th/9403055*, 1994。[6] V. Ginzburg 和 M. Kapranov。《运算子的 Koszul 对偶》。 *Duke Math. J.*，76 272，1994 1 203( )：–。[7] J. Harper。《运算子的模的巴构造与 Quillen同调》。 *Algebr. Geom.*，( )：–。 *Topol.* 10 1 87 136, 2010

[8] R. Haugseng。《丰富的 ∞运算子上的代数》。 *Algebr. Geom. Topol.*，25(7)：3789–3811，2025。[9] G. Heuts 和 I. Moerdijk。《 *Simplicial and dendroidal homotopy theory* 3 *Ergeb.* 》，[10] *Math. Grenzgeb. 3. Folge* 2022 的第，。Springer，。 *Proc. Am. Math. Soc.*G. Heuts 和 I. Moerdijk。《分拆复形与树》。[11]，151(6)：2723–2732，2023。 *Ann. Inst. Fourier*E. Hoffbeck 和 I. Moerdijk。《无穷运算子的同调》。[12]，75 965，2025 3 929( )：–。`A. Joyal。《解析函子与结构种》（Analytic functors and species of structures）。Combinatoire ´enum´erative，Proc. Colloq.，Montr´eal/Can. 1985，Lect. Notes Math. 1234，126-159（1986）。[13]，1986。 *Algebraic operads* 346 *Grundlehren der Mathematis-* J.-L. *chen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* Loday 和 B. Vallette。《[14] 》，`的第。Springer-Verlag，Berlin，2012。 *Int. Math. Res. Not.*J. Mill[15] es。《Koszul复形就是余切复形》。03101 [，2012(3)：607–650，2012。] D. Petersen、V. Roca i Lucio 和 S. Yalin。《同伦相干余代数的点集模型》。预印本，arXiv:2601.[16] math.AT *Algebr. Geom.*（2026），*Topol.* 4 943 960, 2004 2026。A. Robinson。《分拆复形、对偶性与整系数树表示》。：–。

Université Sorbonne Paris Nord, LAGA, CNRS, UMR 7539, F-93430, Villetaneuse, France*Email address*: hoffbeck@math.univ-paris13.fr

Department of Mathematics, Utrecht University, PO BOX 80.010, 3508 TA Utrecht, The Netherlands*Email address*: i.moerdijk@uu.nl