arXiv:2602.08856v1 [math.RT] 9 Feb 2026

关于GL_2 与四元数单位的、具有无穷小特征的 p-进巴拿赫表示的 Gelfand–Kirillov界

Reinier Sorgdrager

Abstract. 我们证明：$\mathrm{GL}_2 K$ 的一个可容许 p-进巴拿赫表示，若其局部解析向量具有无穷小特征，则其Gelfand-Kirillov维数为 $\leq [K: \textbf{有理数域}_p]$，其中 $p > 2$ 且 K 是一个p-进域。我们还证明，将$\mathrm{GL}_2 K$替换为 K 上四元数的单位群时，该结论同样成立。在此过程中，我们对 p-进巴拿赫表示的理论作了一些可能具有独立意义的观察。

Contents

1. 引言 2 主定理 3 伴随分次与“卡西米尔理想” 3 1.1. 概述 4 1.2. 致谢 6 1.3. 预备知识（主要关于滤过）6 2. 环与滤过 7 2.1. 巴拿赫表示简要回顾 7 2.2. p 值群及其伴随滤环 9 2.3. 从有限类型 $\mathcal{O}_L[\![H]\!]$- 模构造 11 2.4. 对 $\mathrm{gr}\, M$ 13 不会产生混淆 3. 李理论 14 3.1. 指数映射 14 3.2. 无穷小作用与特征 14 3.3. $\mathbf{Z}^p$-李代数 H 15 3.4. Lazard 同构 16 4. p 次幂群 17 5. ε 无挠性 20 6. Gelfand-Kirillov 维数的界 23 6.1. Gelfand-Kirillov 维数回顾 23 6.2. 设定 24 6.3. 分解 $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{Lie}\, G$ 26 6.4. 间奏：非分歧 $\mathrm{GL}_2 K$ 与范畴 $\mathcal{C}$ 29 6.5. 李代数的有序基与生成元 $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} H$ 32 6.6. 同余 33

6.7. 一般情形下的界 35 6.8. 主系列中的等号成立 39 6.9. 在来自 p-进 Langlands 的某些表示上的应用 40 参考文献 41

1. Introduction

Gelfand-Kirillov 维数[1] 是 p-进表示的一个不变量，这些表示属于 p-进李群，例如模 p 光滑表示、 p-进巴拿赫表示或局部解析表示。

这一不变量在 p-进朗兰兹纲领中备受关注，尤其见于 [BHH$^+$23b]的工作。该文证明，在满足充分假设的条件下，通过志村曲线的几何构造，与绝对伽罗瓦群 $\mathbf{Q}_{p^f}$ 的二维模 p 伽罗瓦表示 ρ相关联的 $\mathrm{GL}_2\mathbf{Q}_{p^f}$ 的光滑模 p 表示 π 的 Gelfand-Kirillov 维数等于 f。

他们的陈述具有重要推论，其中许多是技术性的，并由同一批作者在后续工作中加以探讨。我们仅指出一个相当直接的应用，即由[CEG$^+$18]通过拼接所提出的、GL_2**有理数域**$_{p^f}$ 的猜想 p-进朗兰兹对应之候选对象的非零性。

具体而言，存在一个修补模 $\mathbb{M}_\infty$ ，它定义在一个完全局部环 R_∞ 上，而该环在 ρ的带框架伽罗瓦变形环[2] $R_\rho^\square$ 上形式光滑。该模允许GL_2**有理数域**$_{p^f}$ 的作用，且其特殊纤维是模 p 表示 π的对偶 $\pi^\vee$ 。若 $y \in \operatorname{SpecMax} R_\infty[1/p]$, 则它位于 $R_\rho^\square[1/p]$ 的一个极大理想 x 之上（即 ρ 到某个 p-进域的提升 ρ_x ），并且$\mathbb{M}_\infty[1/p]/y$ 是GL_2 **有理数域**$_{p^f}$的一个 p-进巴拿赫表示 Π_y 的对偶。在[CEG$^+$18] 中，人们猜想 Π_y 事实上仅依赖于 x ，并由此应通过GL_2 **有理数域**$_{p^f}$的一个猜想的 p-进朗兰兹对应对应于 ρ_x 。问题在于，证明 Π_y 仅由 x 决定是非常困难的，而且先验地甚至不清楚是否 $\Pi_y \neq 0$。

然而， [BHH$^+$23b] 至少证明了 $\Pi_y \neq 0$ 对所有 y成立：非零性直接由 $\mathbb{M}_\infty$ 在 R_∞上的忠实平坦性得出，而这是 Gelfand-Kirillov 维数为 f 时经由“奇迹平坦性”所得的推论，正如 [GN22]已经指出的那样。事实上，借助 [GN22]附录中的结果，用 f从下方界定 π 的 Gelfand-Kirillov 维数是相对直接的。因此，[BHH$^+$23b]的主要贡献在于给出上界，而这被认为是困难的部分。我们的工作同样关注上界，但是在 Banach 情形中。

[1]通常称为“典范维数”，但本文中并非如此。[2]实际上，在 [BHH$^+$23b], 的设定中，还必须固定中心特征，但此处我们暂且忽略这一技术细节。

主定理。 在 p进巴拿赫表示的背景下， [DPS23]为 Gelfand-Kirillov 维数提供了一般界，当这些表示容许无穷小特征时：若 G是**有理数域**p上的连通约化群，且 d_G 是 $G_{\mathbf{Q}_p}$的旗簇的维数，则他们的主要结果之一是， G**(有理数域**p**)**的一个容许 p进巴拿赫表示（其局部解析向量容许无穷小特征）的 Gelfand-Kirillov 维数为 $< 2d_G$。

在 [DPS23 的注 6.2]中，他们提出了一个问题：能否证明更强的界 $\leq d_G$。本文的主要结果是对这一问题给出肯定回答，适用于 GL_2 或四元数单位的情形：

定理 (定理 6.2**)**。 设 $p > 2$ ，且 K 和 L 是 p-进域。设Π 是以下任一对象的可容许 L-巴纳赫空间表示：$\mathrm{GL}_2 K$ 或$D^\times$，其中 D 是 K上的四元数。若Π 的局部解析向量具有无穷小特征，则 Π 的 ***Gelfand-Kirillov*** 维数为 $\leq [K\colon \mathbf{Q}_p]$。

至少在 GL_2 的情形下，这是最优界，因为正如我们在第 6.8 节所示，主系列表示可达到等号。我们的方法与 [DPS23]的方法颇为不同，但在某种意义上与 [BHH$^+$23b] 相似，具体将在下文讨论。我们没有理由认为所期望的界不适用于更一般的群，并计划在未来的工作中探讨这一问题。事实上，针对 GL_3 的初步计算已表明，我们的方法在相应情形下应能给出最优界。

伴随分次与"卡西米尔理想"。 [BHH$^+$23b]的上界需要运用复杂的方法，其中包括非常细致地研究若干 Ga- lois 变形环，但最终可归结为某个理想湮灭某个 $\pi^\vee$ 的伴随分次。具体而言，若 k_L 是 π 的模 p系数字段，例如，那么 $\pi^\vee$ 是一个有限生成的 $k_L[\![I_1]\!]$-模，其中 I_1 是 GL_2 **有理数域**p^f的（上三角）pro-p Iwahori 子群；环 $k_L[\![I_1]\!]$ 是局部环，其极大理想为 $\mathfrak{m}$，我们可以相对于 $\mathfrak{m}$-进滤过取伴随分次 $\mathrm{gr}\ \pi^\vee$，从而得到一个 $\mathrm{gr}\, k_L[\![I_1]\!]$-模。Gelfand-Kirillov 维数大致上是 $\mathrm{gr}\,\pi^\vee$ 的 Krull 维数，而 [BHH$^+$23b] 通过证明该模被 $\mathrm{gr}\, k_L[\![I_1]\!]$ 的某个理想湮灭，成功给出了它的上界；这个理想仅取决于 GL_2 **有理数域**p^f （例如，不依赖于 ρ）。

我们以非常相似的方式得到这个上界。首先，选取一个合适的开子群 H ，它属于 $\mathrm{GL}_2 K$ （或 $D^\times$），能发挥与此前 I_1 相同的作用，并且配备一个来自 pro-p Iwahori 的 p-赋值。然后，我们考虑对偶 Π^* 内的一个有限生成子-$\mathcal{O}_L[\![H]\!]$-模 $M_\circ$，其中 Π 与主定理中的定义相同，且满足 $M_\circ[1/p] = \Pi^*_\circ$。我们在 $M_\circ$ 和 Π^* 上考虑若干种滤过，如 [ST03], ，它们来自 H 上的p-赋值以及对"解析半径"的选取；不过，在将 $M_\circ$ 模 ϖ_L 的一致化元约化所得的 M 上，它们基本上都变得相同

L。 Π 的 Gelfand-Kirillov 维数等于 gr M 的 gr $k_L[\![H]\!]$-模的 Krull 维数；我们通过证明 gr M 被 $\overline{\text{gr}}\, k_L[\![H]\!]$ 的某个理想的一个幂所湮灭，得到这个上界。

同样，这个理想只取决于群，而不取决于 Π 的任何特定性质。我们可以称它为“卡西米尔理想”，因为它的生成元来自 H 的李代数的泛包络代数的中心中的元素——尽管方式可能不那么直接。将 K =**有理数域**$_{p^f}$ 特化为有理数域，并取 GL_2，便可恢复 [BHH$^+$23b] 的理想。这样一来，首先，我们对 [BHH$^+$23b] 中发现的理想给出了更具概念性的解释，而他们的工作尚未提供这种解释。其次，我们的工作提出了一个候选理想，可用于将 [BHH$^+$23b] 的工作推广到 GL_2 K，此时 K 具有分歧。举例来说，我们在注 6.2 中明确描述了 GL_2**有理数域**$_p[\sqrt{p}]$ 的理想。

尽管我们当然希望，我们的方法能够以更直接的方式用于推广 [BHH$^+$23b], 的工作，但我们不清楚是否可行。需要指出的是，即使根据[DPS23，定理 9.27]，每个 Π_y（在更一般的 GL_2 K 情形下，由修补模 $\mathbb{M}_\infty$ 以如上方式得到）都具有无穷小特征，因而 Gelfand-Kirillov 维数至多为 $[K\colon$ **有理数域**$_p]$，也不能由此推出修补模本身的特殊纤维的 Gelfand-Kirillov 维数受这一次数界定：只有当 $\mathbb{M}_\infty/(R_\infty \cap y)$ 无 p-挠时，结论才成立，正如我们在注 6.3 a) 中指出的那样。 $\mathbb{M}_\infty$ 的（忠实）平坦性当然足以推出这种无挠性，但事实上，这只能说明忠实平坦性这一断言等价于特殊纤维的 Gelfand-Kirillov 维数至多为 $[K\colon$ **有理数域**$_p]$。是否存在某个$y \in$ SpecMax $R_\infty[1/p]$，使得 $\mathbb{M}_\infty/(R_\infty \cap y)$ 无 p-挠，我们并不清楚。

最后值得一提的是， [DPS23] 实际上证明了 $\mathbb{M}_\infty$ 具有“族中的无穷小特征”。虽然我们的方法无法立即推广到这种情形，但我们希望未来能将其调整到补丁化情形中。

1.1. 概述。 下面我们将介绍本文的结构，同时在一定程度上揭示主要结果证明中所运用的思想。前几节内容相当一般，适用于任何带有 p-赋值的 p-进李群 H。

在第2节中，我们主要回顾分布代数 $D_r(H,\ L)$ 及其滤过的相关构造，其中 $r \in [1/p, 1)$，如 [ST03] 中所述。这些构造在 $\mathcal{O}_L[\![H]\!]$,$L[\![H]\!] := \mathcal{O}_L[\![H]\!][1/p]$, $D_r(H,\ L)$ 或 $k_L[\![H]\!]$ 上的有限生成模诱导出滤过。我们观察到，当 M 是一个 $k_L[\![H]\!]$-模时，伴随分次 $\mathrm{gr}_r M$ 不依赖于 r。我们还证明，对于一个有限生成的 $\mathcal{O}_L[\![H]\!]$-模 $M_\circ$，其到 k_L 的约化记为 M，模 $\mathrm{gr}_r M_\circ/\varepsilon_L$ (ε_L 是一致化元的主符号

的 L) 等于 $\mathrm{gr}\,\overline{M}$，只要 $\mathrm{gr}_r M_\circ$ 是 ε_L-无挠的。同时，$\mathrm{gr}_r M_\circ[1/\varepsilon_L] = \mathrm{gr}_r\left(D_r(H,\ L) \otimes_{\mathcal{O}_L[\![H]\!]} M_\circ\right)$ 总是成立。

在 §3 中，我们讨论 p-进李群的李理论基础及其对 p-进巴拿赫表示和局部解析表示的影响。我们解释无穷小特征的概念，最重要的是，说明如何将泛包络代数视为分布代数的一部分。借助 Lazard 同构，我们可以将 $\mathrm{gr}_{1/p}\mathcal{O}_L[\![H]\!]$ 视为泛包络代数。

在 §4 中，我们研究群 H^{p^N} 中 H 的 p 次幂所对应的分布代数和滤过。具体而言，当 H 上的 p-赋值饱和时，p^N 次幂集合 H^{p^N} 是 H 的开子群。我们引入一种称为“严格饱和”的概念，它仅比 p-赋值饱和的条件略强；在此条件下，不同群 H^{p^N} 的滤过之间具有良好的关联。例如，$\mathrm{gr}_{1/p}\mathcal{O}_L[\![H^{p^N}]\!]$（相对于 H^{p^N} 上自然诱导的 p-赋值构造）将是 $\mathrm{gr}_{r_N}\mathcal{O}_L[\![H]\!]$ 的子环，其中 $r_N \coloneqq p^{-1/p^N}$。因此，$\mathrm{gr}_{r_N}\mathcal{O}_L[\![H]\!]$ 中的许多元素现在也可以得到李理论上的解释。

在第 5 节中，我们证明，只要 $M_\circ$ 是 p-无挠的，且 N 足够大，$\mathrm{gr}_{r_N} M_\circ$ 就没有 ε_L-挠元。这推广了 [ST03] 的一个结果；他们证明了 $M_\circ$ 有单一生成元时的情形，而我们的证明是对他们证明的直接推广。

由此可推得，当 r 足够接近 1 时，对于任意 p-进李群的容许 p-进巴拿赫表示 Π，$\Pi^{r\text{-la}} \subset \Pi$ 都是稠密的。然而，对我们而言，其重要性在于，结合第 2 节中的观察，当 N 足够大时，我们便处于以下情形：1

$$\left(\ \right)\\ \mathrm{gr}\,\overline{M} = \mathrm{gr}_{r_N} M_\circ/\varepsilon_L \twoheadleftarrow \mathrm{gr}_{r_N} M_\circ \hookrightarrow \mathrm{gr}_{r_N} M_\circ[1/\varepsilon_L] = \mathrm{gr}_{r_N}\left(D_{r_N}(H,L)\otimes_{\mathcal{O}_L[\![H]\!]} M_\circ\right).$$

这样一来，来自无穷小作用的信息——它可以在 $D_{r_N}(H,\ L) \otimes_{\mathcal{O}_L[\![H]\!]} M_\circ$ 上观察到——就能一路传递到 $\mathrm{gr}\ M_\circ$。主定理的证明正是以这种方式进行的：无穷小特征的存在为我们提供了消去 $\mathrm{gr}_{r_N}\left(D_{r_N}(H,\ L) \otimes_{\mathcal{O}_L[\![H]\!]} M_\circ\right)$ 的元素，由此我们得到消去 $\mathrm{gr}\ M$ 的元素。将若干个 N 对应的这些元素汇集起来，就能得到“卡西米尔理想”。单个 N 并不足够，因此 $\mathrm{gr}_{r_N} M$ 实际上独立于 N 这一点至关重要。

我们在§6中才专门讨论 GL_2 或四元数单位，但会先简要回顾 Gelfand-Kirillov 维数的概念。

接下来，我们定义设定，例如，选择一个合适的子群 H，并为其选取一个合适的（严格饱和） p-赋值。随后，我们的论证将大量使用图式 (1)——尽管我们不会在正文中直接呈现该图式。因此，实际上，这一论证可以

针对任意 H^{p^N} 进行。特别地，可以令 H^{p^N} 取为一致的。不过，我们想强调（如注 4.1 所述），切勿取相应的“一致” p-赋值，将有序基中的每个元素都映为 1；这一点非常重要。

也就是说，我们对 p 赋值的选择有一个关键后果：它使卡西米尔元变得齐次（在某种意义上），从而它们在各种 $\operatorname{gr}_{r_N}\mathcal{O}_L[\![H]\!]$ 中的主符号足够规整：它们是变量 ε_K 的多项式表达式，系数取自 $\operatorname{gr} k_L[\![H]\!]$；这些系数将生成卡西米尔理想，而齐次性确保足够多的系数非零，从而充分限制 Gelfand-Kirillov 维数。

1.2. 致谢。 作者感谢他的导师 Benjamin Schraen，感谢他提出研究卡西米尔元能够带来哪些湮灭性质，并感谢他进行的诸多富有成效的讨论。他还感谢 Christophe Breuil、Stefano Morra 和 Vytautas Paˇsk¯unas 解答问题。

1.3. 预备知识（主要关于滤过）。 本文中，我们会考虑许多滤环。我们考虑的滤过总是由 $\mathbf{R}$ 索引的递减滤过，并且是穷尽的。若 R 是一个带有滤过 $\operatorname{Fil}^\bullet R$的滤环，那么一个滤过 R-模是一个 R-模 M，带有一个由 M 的 R-子模构成的滤过 $\operatorname{Fil}^\bullet R$，使得这些子模的并集为 M，并且满足

$$\operatorname{Fil}^t R \cdot \operatorname{Fil}^s M \subset \operatorname{Fil}^{s+t} M$$

对所有 $s,t \in \mathbf{R}$。滤环的定义是：它是一个以自身为底环、且带有 $1 \in \operatorname{Fil}^0 R$ 的滤过模。

若 R 是一个滤环（记号中省略滤过），而 S 是另一个同时也是 R-代数的滤环，那么如果 S 是一个滤过 R-模，我们就称它为 滤过 R-代数。

对于滤过 R-模 M，一个非常重要的构造是取其关联分次模 $\operatorname{gr} M$：

$$\operatorname{gr} M = \bigoplus_{s\in\mathbf{R}} \operatorname{Fil}^s M / \operatorname{Fil}^{>s} M,$$

其中 $\operatorname{Fil}^{>s} M := \cup_{t>s} \operatorname{Fil}^t M$。它自然是一个分次 $\operatorname{gr} R$-模。滤过 R-模之间的态射（其定义显而易见）会诱导出伴随分次之间的态射。

若 $x \in M$，则我们用 $\sigma(x) \in \operatorname{gr} M$ 表示其 主符号——如果它存在的话——该主符号是一个非零齐次元素，其次数等于 $\sup\{s\colon x \in \operatorname{Fil}^s M\}$，并且等于 x 在相应分次部分中的像。我们通常将此次数称为 x 的“赋值”（相对于 M 上的滤过）。我们强调，取主符号的运算完全不是可加的：$\sigma(x)+\sigma(y)$ 当且仅当 $\sigma(x)+\sigma(y)$ 是齐次且非零时。必要时，我们会在 $\operatorname{gr} M$ 的记号以及主符号的记号中明确所采用的滤过。

若 A 和 B 都是带滤过的 R-模，分别带有滤过 $\mathrm{Fil}_A^\bullet$ 和 $\mathrm{Fil}_B^\bullet$，则 $A\oplus B$ 自然成为一个带滤过的 R- 模，其滤过定义为

$$\mathrm{Fil}^s_{A\oplus B} \coloneqq \mathrm{Fil}^s_A \oplus \mathrm{Fil}^s_B\,.$$

我们将此滤过称为<style id='1'>直和滤过。如果 A 是一个带滤过的 R-代数，那么 $A\otimes_R B$ 通过以下方式成为一个带滤过的 A-模：

$$\mathrm{Fil}^s_{A\otimes_R B} \coloneqq \left\{ \sum_i a_i\otimes b_i \colon \text{对于每个 } i,\ \text{存在一个 } s_i\in\mathbf{R},\ \text{使得 } a_i\in\mathrm{Fil}_A^{s-s_i},\ b\in\mathrm{Fil}_B^{s_i} \right\}.$$

我们将此滤过称为张量滤过。

若 F 是一个 p-进（斜）域，则 p-进赋值 v_p（我们始终将其指标化，使得 $v_p(p)=1$）使 F 及其整数环 $\mathcal{O}_F$ 成为滤过的$\mathbf{Z}_p$-代数。我们所关注的滤过环将是滤过的$\mathbf{Z}_p$-代数。

我们用 $\varepsilon\in \mathrm{gr}\mathbf{Z}_p$ 表示 p的主符号 $\sigma(p)$。当 ϖ_F 是 F的一个固定一致化元时，我们也用记号 ε_F 表示其主符号，其次数为 $1/e_F$，即 F 在**有理数域**$_p$上的分歧指数的倒数。

我们有 $\mathrm{gr}\ \mathcal{O}_F = k_F[\varepsilon_F]$ 与 $\mathrm{gr}\ F = k_F[\varepsilon_F^{\pm 1}]$，其中用 k_F表示 F的剩余域。

最后，我们将考虑以下两种诱导滤过的方式：

定义 1.1. 设 $A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{f} C$ 为集合间的态射，并假设 B具有滤过 $\mathrm{Fil}^\bullet$。则我们分别在 A 与 C上定义如下滤过：

- $\iota^*\,\mathrm{Fil}^s \coloneqq \{x\in A\colon \iota(x)\in \mathrm{Fil}^s\}$,
- $f_*\,\mathrm{Fil}^s \coloneqq \{x\in C\colon \exists b\in \mathrm{Fil}^s, f(b)=x\}$.

在全文中，L 是一个用作我们系数域的 p-进域。从第6.2节起，将假定它在适当的意义下充分大。

最后，我们引入最后一点与滤过无关的记号。我们用Gal_F 表示一个 p-进域的绝对伽罗瓦群，并且总是用$\mathrm{Frob}\ \in \mathrm{Gal}($**有理数域**$_p^{\mathrm{ur}}/$**有理数域**$_p)$表示**有理数域**$_p$的最大非分歧域扩张**有理数域**$_p^{\mathrm{ur}}$的绝对算术弗罗贝尼乌斯自同构。

2. Rings and filtrations

2.1. 关于巴拿赫表示的简要回顾。 设 G为一个 p-进李群。设 Π 为 G的一个 L-巴拿赫表示，即：Π是一个容许 G的线性连续作用的 L-巴拿赫空间。L-巴拿赫表示的一个例子是 $C(G,L)$，即在 G为紧的条件下，从 G 到L并配备上确界范数的连续函数集。

Π 的局部解析向量是指那些 $v\in\Pi$，其轨道映射

$$\mathrm{orb}_v\colon G\to\Pi, g\mapsto gv$$

是局部解析的，也就是说，在每个 $g \in G$ 附近，都可以找到一个坐标图 φ: $B_\varepsilon(0) \to U \subset G$，将 0 映射到 g，使得 $\mathrm{orb}_v \circ \varphi$ 由一个幂级数给出

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^d_{\geq 0}} x_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot x_d^{\alpha_d} v_\alpha, \qquad (x_1, \ldots, x_d) \in B_\varepsilon(0) \subset \mathbf{Q}_p^d$$

满足 $\lim_{|\alpha| \to \infty} \varepsilon^{|\alpha|} \|v_\alpha\| = 0$，其中 $|\alpha| := \sum_i \alpha_i$。

所有 Π^{la} 局部解析向量的集合 Π 是 G的一个表示。可以推导出 G 在 Π^{la}上的作用，进而得到 G 的李代数在 Π^{la} 上的无穷小作用，以及无穷小特征的概念；我们将在第 3 节中对此作更详细的介绍。在我们的例子中，有 $C(G, L)^{\mathrm{la}} = C^{\mathrm{la}}(G, L)$，后者是 $G \to L$的局部解析函数集合。

我们主要关注容许 L-巴拿赫表示，即那些 Π 嵌入到 $C(H, L)^{\oplus N_0}$ 中的 L- H巴拿赫表示，其中 H 是 G 的某个紧开子群，而 N_0是某个整数。若 Π 是容许的，则对于任意开紧子群H，都可以找到这样的整数 N_0 。容许表示非常适合使用非交换代数的方法，因为事实证明，其连续线性对偶

$$(-)^* := \mathrm{Hom}_L^{\mathrm{cont}}(-, L) \tag{2}$$

这诱导出从 G 的可容许 L-巴纳赫表示范畴到 $L[\![G]\!]$-模范畴的反等价；这些模对于 G的某个（等价地，任意一个）紧开子群 H 而言，是在 $L[\![H]\!]$ 上有限生成的。这里， $L[\![G]\!]$是所谓的增广伊瓦萨瓦代数，或完备群环 $L[\![G]\!] := L[G] \otimes_{L[H]} L[\![H]\!]$（其中$H$ 是 G的任意紧开子群——因此也是有限群的逆极限），其中 $L[\![H]\!] := \mathcal{O}_L[\![H]\!][1/p]$。

一般而言，当 G 不一定紧致时，我们赋予 $C(G, L)$强拓扑，或等价地赋予有界收敛拓扑。这意味着它是一个拓扑向量空间，其零点处开邻域的基由所有子集 $\{f \in C(G, L) : f(B) \subset \varpi_L^n \mathcal{O}_L\}$构成，其中 $B \subset G$是紧致的，且 $n \in \mathbf{Z}$。于是我们可以定义 $C(G, L)^*$；再赋予 $C^{\mathrm{la}}(G, L)$子空间拓扑，也可以定义 $C^{\mathrm{la}}(G, L)^*$。第一个我们已经了解，因为可以验证 $L[\![G]\!] = C(G, L)^*$。第二个自然是一个 L-代数，称为 G上的局部解析分布代数，记作$D(G, L) := C^{\mathrm{la}}(G, L)^*$。

群 H 可自然地视为分布代数 $D(H, L)$ 和 $L[\![H]\!]$ 的（乘法）子集：将元素 $h \in H$ 与其定义的狄拉克分布对应即可。为清晰起见，对于 $h \in H$，当其被视为 $\mathcal{O}_K L[\![H]\!]$（或更大的代数之一）的元素时，我们总是用括号将其括起，记作 $[h] \in \mathcal{O}_L[\![H]\!]$。

当 Π 是容许的时，结果自然是

$$\Pi^{\mathrm{la},*} = D(G, L) \otimes_{L[\![G]\!]} \Pi^*, \tag{3}$$

因此，对偶 Π^{la} 是一个有限生成的 $D(G,\ L)$-模，甚至是一个有限生成的 $D(H,\ L)$-模，其中 H 是 G的任意紧开子群（这就是强容许的概念）。此外，Π^{la} 在 Π中稠密。参见[ST03，定理 7.1]。

连续线性对偶 $\Pi^{\mathrm{la},\ *}$ 通过以下反等价捕获了 Π^{la} 的全部信息：从强可容许局部解析L-表示的范畴（其中 G ）到 $D(G,\ L)$-模的范畴，其中这些模在某个（等价地，任意一个） $D(H,\ L)$上有限生成；这里 H 是 G的一个紧开子群，参见 [ST02，推论 3.3]。

本文的主要研究对象是可容许的 L-巴拿赫表示 Π。然而，基于上述原因，我们更倾向于研究有限生成的 $L[\![H]\!]$-模，甚至是有限生成的 $\mathcal{O}_L[\![H]\!]$，其中 H是一个紧开子群。事实上，我们还希望进一步专门化所考虑的情形，要求 H 是一个取值于 p的群，这使我们能够在由 H构造的各种环上定义有用的滤过。接下来我们将对此进行讨论。

2.2. **p值群及其关联滤过环**。一个 p赋值定义在群 H 上的映射 $\omega\colon\ H\to(\frac{1}{p-1},\infty]$ 满足

- $\omega(xy^{-1})\ \geq$ 分钟$\{\omega(x)\ \omega(y)\}$,
- $\omega([x,y])\ \geq\omega(x)\ +\omega(y)$,
- $\omega(x)=\infty$ 当且仅当 x 是平凡的,
- $\omega(x^p)\ =\omega(x)\ +1$,

对所有 $x,y\in H$，其中 $[x,y]=xyx^{-1}y^{-1}$。

p赋值自然地在 H 上定义了一个拓扑，使其成为一个拓扑群。若 H 关于其定义的拓扑是完备的，并且 $\omega(h)\ >p/(p-1)$蕴含 $h\in H^p:=\{x^p\colon\ x\in H\}$，我们称 ω 饱和 。

我们只研究同时也是李群的 p值 H 。这仍然相当一般，因为每个 p进李群都包含一个容许 p赋值的开子群，甚至可以要求 p赋值是饱和的且为整数值的，参见 [Sch11，第27定理。1]

在 H 也是 p进李群的情形下，它将具有由元素 $h_1,\ \ldots\ldots,\ h_d\ \in\ H$组成的一个有序基 ，其中 d是其作为 p进李群的维数。这意味着映射

$$\mathbf{Z}_p^d\to H,(a_1,\ldots,a_d)\mapsto h_1^{a_1}h_2^{a_2}\cdots h^{a_d},\tag{4}$$

是一个同胚，事实上还给出了 H 作为 p进流形的一个坐标图。在本章节余下部分，设 H 是带有 p赋值 ω的 p进李群。

有序基使得我们可以如下显式描述环 $\mathcal{O}_L[\![H]\!]$,$k_L[\![H]\!]$, $L[\![H]\!]$和 $D(H,\ L)$。我们记 $b_i:=[h_i]-1$和 $\mathbf{b}^\alpha:=b_1^{\alpha_1}\cdot\cdots\cdot b_d^{\alpha_d}$为 $\alpha=(\alpha_1,\ \ldots\ldots,\ \alpha_d)\ \in\mathbf{Z}_{\geq 0}^d$。那么，首先，我们

have

$$\mathcal{O}_L[\![H]\!] = \left\{ \sum_\alpha c_\alpha \mathbf{b}^\alpha \colon c_\alpha \in \mathcal{O}_L \right\}$$

完备群环中的每个元素都可以唯一地表示为这样的幂级数。因此， $L[\![H]\!]$: $= \mathcal{O}_L[\![H]\!][1/p]$ 中的元素也可以唯一地表示为幂级数， $k_L[\![H]\!]$中的元素亦然。

同胚 (4) 也非常有用，因为马勒展开理论使我们能够进一步写出

$$D(H,L) \coloneqq \left\{ \sum_\alpha c_\alpha \mathbf{b}^\alpha \colon c_\alpha \in L, |c_\alpha| r^{|\alpha|} \to 0 \text{ as } |\alpha| \to \infty, \text{ for all } r \in (0,1) \right\},$$

参见 [ST03, §4]。

此外， p-赋值 ω 为这些代数提供了若干范数。记作$\tau\alpha \coloneqq \sum_i \alpha_i \omega(h_i)$。对于 $r \in [1/p, 1)$，我们在 $D(H, L)$ 上定义范数 $\| - \|_r$，其定义如下:

$$\| \sum_\alpha c_\alpha \mathbf{b}^\alpha \|_r \coloneqq \sup_\alpha |c_\alpha| r^{\tau\alpha}.$$

我们注意到，这个范数只取决于 r 和 ω ，而与有序基的选择无关，参见 [ST03] 中定理4.10之后的讨论。

关于此范数取完备化后，我们得到“半径为 r 的分布代数”

$$D_r(H,L) = \left\{ \sum_\alpha c_\alpha \mathbf{b}^\alpha \colon c_\alpha \in L, |c_\alpha| r^{\tau\alpha} \to 0 \text{ as } |\alpha| \to \infty \right\}.$$

这个范数在 $D_r(H, L)$ 上诱导出一个滤过，为了得到一个带滤过的 $\mathbf{Z}p$-代数，我们按加法方式为其编入指标:

$$\operatorname{Fil}_r^s D_r(H,L) = \left\{ \sum_\alpha c_\alpha \mathbf{b}^\alpha \colon v_p(c_\alpha) - \frac{\log r}{\log p} \cdot \tau\alpha \geq s \right\}. \tag{5}$$

Via

$$k_L[\![H]\!] \twoheadleftarrow \mathcal{O}_L[\![H]\!] \subset L[\![H]\!] \subset D_r(H,L) \tag{6}$$

由此，我们在所有这些环 R上都得到明确无歧义的诱导滤过，记作 $\mathbf{Fil}_r^\bullet R$。相伴分次环记作 $\mathbf{gr}_r R$ ，在所有情形下，主符号记作 $\sigma_r(-)$；但在 $k_L[\![H]\!]$ 的情形下，我们记作$\sigma_r(-)$。

注2.1。 请读者注意，尽管这种记号或许颇具启发性，而且有 $\operatorname{gr}_r k_L[\![H]\!] = \operatorname{gr}_r \mathcal{O}_L[\![H]\!]/\varepsilon_L$ ，但并非必然有： $\sigma_r(x)$ 对 ε_L 取模后的约化，其中 $x \in \mathcal{O}_L[\![H]\!]$，等于$\sigma_r(x)$。

最后提一下，如果 $x = \sum_\alpha c_\alpha \mathbf{b}^\alpha \in D_r(H,L) \setminus \{0\}$，那么 $\sigma_r(x)$ 在 $\mathbf{gr}_r D_r(H,L)$ 中的次数等于 $v_r(x) \coloneqq \inf_\alpha v_p(c_\alpha) - \log r \log p \cdot \tau\alpha$，这是 $\| - \|$. 的加法 “r- 赋值 ” 版本。

2.3. 由有限生成 $\mathcal{O}_L[\![H]\!]$-模构造。设 $M_\circ$ 是一个有限生成的 $\mathcal{O}_L[\![H]\!]$-模。例如，若 Π 是 H 的一个容许 L-巴拿赫表示，且 $\Pi_\circ$ 是 Π 中一个 H-不变的单位球，那么可以取

$$M_\circ \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_L}^{\mathrm{cont}}(\Pi_\circ, \mathcal{O}_L) \subset \mathrm{Hom}_{L}^{\mathrm{cont}}(\Pi, L) = M_\circ[1/p].$$

本节的目的是使模 $M_\circ$ 与 $M \coloneqq M_\circ[1/p]$分别成为滤过 $\mathcal{O}_L[\![H]\!]$-模或 $L[\![H]\!]$-模，即这些环上对任意 $r \in [1/p, 1$ 的 $\mathbf{Fil}_r^\bullet$-滤过）。同样，我们对 $M_r \coloneqq D_r(H, L) \otimes_{\mathcal{O}_L[\![H]\!]} M_\circ$ 与 $M \coloneqq k_L[\![H]\!] \otimes_{\mathcal{O}_L[\![H]\!]} M_\circ$ 也如此处理。

在全文中，我们对由 $M_\circ$ 得到的模保持上述记号。

固定一个满射

$$\mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0} \twoheadrightarrow M_\circ. \tag{7}$$

对于每个 $r \in [1/p, 1)$，我们在 $\mathcal{O}_L[\![H]\!]$ 上有滤过 $\mathbf{Fil}_r^\bullet$，因而在直和上也有滤过。通过该满射，我们得到诱导滤过 $\mathbf{Fil}_r^\bullet M_\circ$；这里的记号未将该满射考虑在内。将 (7) 张量积上 (6) 中的一个 $\mathcal{O}_L[\![H]\!]$-代数 R 后，同样得到满射 $R^{\oplus N_0} \twoheadrightarrow R \otimes_{\mathcal{O}_L[\![H]\!]} M_\circ$，它们利用 R 上的滤过 $\mathbf{Fil}_r^\bullet R$ 诱导出滤过 $\mathbf{Fil}_r^\bullet \left(R \otimes_{\mathcal{O}_L[\![H]\!]} M_\circ\right)$。我们用 $\mathbf{gr}_r R \otimes_{\mathcal{O}_L[\![H]\!]} M_\circ$ 表示（在相伴分次环上的）伴随分次模，并将上述主符号的记号扩展到这一情形。

滤过 $\mathbf{Fil}_r^\bullet$ 在 M 上定义了一个拓扑，我们将其完备化记为 $M^{\wedge_r}$，它是一个 $D_r(H, L)$-模。对 $\mathbf{Fil}_r^s M$ 也进行完备化后，便得到一个滤过 $\mathbf{Fil}_r^s M^{\wedge_r}$，它使 $M^{\wedge_r}$ 成为一个带滤过的 $D_r(H, L)$-模。

引理 2.1. 完备化 $M^{\wedge_r}$ 与 M_r 存在典范同构，作为带滤过的 $D_r(H, L)$-模。

证明。 自然映射 $M \to M_r$ 关于两个模上分别由其滤过诱导的拓扑都是连续的。因此，它诱导出一个态射 $f\colon M^{\wedge_r} \to M_r$，因为 M_r 在其拓扑下是完备的，而这源于 $D_r(H, L)$的完备性。根据张量积的泛性质，我们也有一个态射 $g\colon M_r = D_r(H, L) \otimes_{L[\![H]\!]} M \to M^{\wedge_r}$，它同样由 $M \to M_r$ 及完备化上的 $D_r(H, L)$-作用诱导。M_r 和 $M^{\wedge_r}$ 都存在来自 M 的自然态射，且由 M 在 $D_r(H, L)$上生成。复合映射 $f \circ g$ 和 $g \circ f$ 在 M 各自的像上是单位元，因此分别等于 M_r 和 $M^{\wedge_r}$ 上的单位元。

最后，f 和 g 尊重滤过，因为自然映射 $M \to M_r$ 和 $M \to M^{\wedge_r}$ 是滤过 $L[\![H]\!]$-模的态射。■

下面的引理说明了我们的模上的不同滤过候选何时一致。

引理 2.2。 *i*) 在 M 上从 $\mathrm{Fil}_r^\bullet D_r(H,L)^{\oplus N_0}$ 以及通过该图表诱导滤过的两种可能方式

$$\begin{array}{ccc} L[\![H]\!]^{\oplus N_0} & \xhookrightarrow{\iota} & D_r(H,L)^{\oplus N_0} \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ M & \xrightarrow{\iota'} & M_r \end{array}$$

同意。也就是说，$f_*\iota^* \mathrm{Fil}_r^\bullet D_r(H,L)^{\oplus N_0} = \iota'^* f'_* \mathrm{Fil}_r^\bullet D_r(H,L)^{\oplus N_0}$。

因此，我们有一个 $\mathrm{gr}_r M \cong \mathrm{gr}_r M_r$ 的$\mathrm{gr}_r L[\![H]\!]$-模之间的典范同构。

ii) 如果 $\mathrm{gr}_r M_\circ$ 是 ε-无挠的，那么以下对象也具有相同性质：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0} & \xhookrightarrow{\iota_\circ} & D_r(H,L)^{\oplus N_0} \\ \downarrow f_\circ & & \downarrow f' \\ M_\circ & \xrightarrow{\iota'_\circ} & M_r \end{array} .$$

That is, $f_{\circ,*}\iota_\circ^* \mathrm{Fil}_r^\bullet D_r(H,L)^{\oplus N_0} = \iota_\circ'^* f'_* \mathrm{Fil}_r^\bullet D_r(H,L)^{\oplus N_0}$.

证明。 对于 i)，我们需要证明滤过 $\mathrm{Fil}_r^\bullet M = f_*\iota^* \mathrm{Fil}_r^\bullet D_r(H,L)^{\oplus N_0}$等于 $\iota'^* f'_* \mathrm{Fil}_r^\bullet D_r(H,L)^{\oplus N_0}$。根据前述引理，后一个滤过实际上是由 $M \to M^{\wedge_r}$ 和 $\mathrm{Fil}_r^\bullet M^{\wedge_r}$ 在 M 上诱导的滤过，也就是 $\mathrm{Fil}_r^\bullet M_\circ$。同构 $\mathrm{gr}_r M \cong \mathrm{gr}_r M_r$ 因此可由 M 在 M_r 中稠密这一事实推出。

现在我们证明 ii)，因此假设 ε-无挠。根据 i)，我们可以等价地对图证明该结论

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0} & \hookrightarrow & L[\![H]\!]^{\oplus N_0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_\circ & \hookrightarrow & M \end{array} .$$

ε-无挠意味着，对于所有 $s \in \mathbf{R}$ 以及所有 $i \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$

$$\mathrm{Fil}_r^s M_\circ \cap \varpi_L^i M_\circ = \varpi_L \mathrm{Fil}_r^{s-i/e_L} M_\circ.$$

同时，对每个 s，我们有

$$\mathrm{Fil}_r^s M = \bigcup_{i \in \mathbf{Z}} \varpi_L^i \mathrm{Fil}_r^{s-i/e_L} M_\circ,$$

因为 $L[\![H]\!]^{\oplus N_0} \cong L \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0}$ 上的滤过是张量积滤过。

结合这两个等式可得

$$M_\circ \cap \mathrm{Fil}_r^s M = \mathrm{Fil}_r^s M_\circ$$

由此我们得出结论。 ■

我们还有如下结论：

引理 2.3. 自然映射 $\operatorname{gr}_r M_\circ[1/\varepsilon] \to \operatorname{gr}_r M = \operatorname{gr}_r M_r$ 是一个同构。

证明。首先，这个映射是满射。为此，取任意非零的 $x \in \mathbf{gr}_r M$，不失一般性，设它是某个次数为 $s \in \mathbf{R}$的齐次元素。它是某个元素$\tilde{x}$ 在 M 中的主符号 $\sigma_r(\tilde{x})$，我们可以将其写作 $\frac{1}{p^n}\tilde{x}'$，其中 $\tilde{x}'$ 属于 $\mathbf{Fil}_r^{s+n} M_\circ$（因为即使 M 上的滤过不是按这种方式定义的，它也与 $L \otimes_{\mathcal{O}_L} M_\circ$的张量滤过一致）。主符号 $\sigma_r(\tilde{x}') \in \mathbf{gr}_r M_\circ$ 存在，且次数为 $n+s$，因为如果它的次数更高，那么 $\sigma_r(\tilde{x})$的次数必然高于 s，这就会产生矛盾。由此可见，$\varepsilon^n \sigma_r(\tilde{x}') = x$，从而得到满射性。

为证明单射性，任取一个映射到 $\mathbf{gr}_r M$ 中零元的非零 $y \in \mathbf{gr}_r M_\circ[1/\varepsilon]$，不失一般性，设其次数为 $s \in \mathbf{R}$，并将其写为$\sigma_r(\tilde{y}')/\varepsilon^n$。由于它映射到零，显然 $\tilde{y}' \in \mathbf{Fil}_r^{>s+n} M$，因此存在 $k \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ 和 $\tilde{z} \in \mathbf{Fil}_r^{\geq s+n+k} M_\circ$，使得 $\tilde{y}' = \tilde{z}/p^k$；这里再次用到了我们处理的是张量滤过 $L \otimes_{\mathcal{O}_L} M_\circ$。因此，$\varepsilon^k \sigma_r(\tilde{y}') = 0$在 $\mathbf{gr}_r M_\circ$ 中成立，所以 $y \in \mathbf{gr}_r M_\circ[1/\varepsilon]$ 实际上原本就是零，从而通过矛盾证明了单射性。■

2.4. **关于 $\mathbf{gr}\ M$ 不会产生任何混淆。** 固定表示 $\overline{\mathcal{O}_L[\![H]\!]}^{\oplus N_0} \twoheadrightarrow M_\circ$。那么，如上所述，每个 $\mathbf{Fil}_r^\bullet M_\circ$ 都会在滤环 $\mathbf{Fil}_r^\bullet k_L[\![H]\!]$ 上诱导一个滤过模 $\mathbf{Fil}_r^\bullet M$（与通过 $k_L[\![H]\!]^{\oplus N_0} \twoheadrightarrow M$ 由 $\mathbf{Fil}_r^\bullet k_L[\![H]\!]^{\oplus N_0}$ 诱导的模相同）。这里我们证明，这些模本质上都相同，即除滤过指标的重新缩放外，与半径 r 的选取无关。

命题 2.1. 设 $r, r' \in [1/p, 1)$。那么，对于所有 $s \in \mathbf{R}$，

$$\mathrm{Fil}_r^s \overline{M} = \mathrm{Fil}_{r'}^{\frac{\log r'}{\log r}\cdot s} \overline{M}.$$

证明。只需对 $M = k_L[\![H]\!]$ 证明该命题，因为 $\overline{M}$ 上的滤过都由同一个表示 $\overline{k_L[\![H]\!]}^{\oplus N_0} \twoheadrightarrow M$ 诱导。这里，我们有如下描述

$$\mathrm{Fil}_r^s k_L[\![H]\!] = \left\{ \sum_\alpha c_\alpha \mathbf{b}^\alpha : \ -\frac{\log r}{\log p} \cdot \tau\alpha \geq s \right\},$$

可由 (5) 轻易推出。因此，

$$\mathrm{Fil}_r^s k_L[\![H]\!] = \mathrm{Fil}_{r'}^{\frac{\log r'}{\log r}\cdot s} k_L[\![H]\!].$$

■

因此，随着 $[1/p, 1$ 的变化，环 $\mathbf{gr}_r k_L[\![H]\!]$, r 都典范同构，我们将它们统称为 $\mathbf{gr}\, k_L[\![H]\!]$。类似地，我们将典范同构的 $\mathbf{gr}k_L[\![H]\!]$-模 $\mathbf{gr}_r M$（始终保持 M 的表示固定）记作 $\mathbf{gr}\, M$，并用 $\sigma(\text{–})$ 代替 $\sigma_r(\text{–})$ 来表示 _

主符号。
最后，当 $\mathrm{gr}_r M_\circ$ 是 ε-挠的，$\mathrm{gr}M$ 还有另一种解释：

引理 2.4. 若$\mathrm{gr}_r M_\circ$ 是 ε-无挠的，则$\mathrm{gr}\, M = \mathrm{gr}_r \overline{M_\circ/\varepsilon_L M_\circ}\, \mathrm{gr}_r M_\circ$。

证明。 由 ε-无挠性可知，对每个 $s \in \mathbf{R}$ 都有

$$\mathrm{Fil}_r^s M_\circ \cap \varpi_L M_\circ = \varpi_L \mathrm{Fil}_r^{s-1/e_L} M_\circ.$$

因此，以下等式链中的第二个等式成立：

$$\begin{aligned}
\mathrm{gr}_r M_\circ/\varepsilon_L \mathrm{gr}_r M_\circ &= \bigoplus_s \mathrm{Fil}_r^s M_\circ / \left(\mathrm{Fil}_r^{>s} M_\circ + \varpi_L \mathrm{Fil}_r^{s-1/e_L} M_\circ\right) \\
&= \bigoplus_s \mathrm{Fil}_r^s M_\circ / \left(\mathrm{Fil}_r^{>s} M_\circ + \mathrm{Fil}_r^s M_\circ \cap \varpi_L M_\circ\right) \\
&\cong \bigoplus_s \left(\mathrm{Fil}_r^s M_\circ + \varpi_L M_\circ\right) / \left(\mathrm{Fil}_r^{>s} M_\circ + \varpi_L M_\circ\right) \\
&= \mathrm{gr}_r M_\circ/\varpi_L M_\circ.
\end{aligned}$$

■

3. Lie theory

我们先回顾一些关于 p-进李群的基本李理论，可参见 [Sch11，第 III、VII 章]。在本节中， G 仍是一个 p-进李群，而 $H \subset G$ 是一个开 p-值子群。

3.1. 指数映射。 按照惯例， G 的李代数 $\mathrm{Lie}\, G$ 定义为 G 在单位元处的切空间，并具有有理数域 $\mathbf{Q}_p$上的李代数结构。存在指数映射 $\exp : \mathrm{Lie}\ G \dashrightarrow G$，但它只在 $\mathrm{Lie}\, G$的一个足够小的开集上定义，且在该开集上解析。尽管如此，情况相当有利：在 $\mathrm{Lie}\, G$ 上选取一个范数后，我们得到以 0 为中心、半径为 $\varepsilon > 0$ 的开球 $G_\varepsilon \subset \mathrm{Lie}\, G$；当 ε 足够小时，这些开球可赋予规范的 p-进李群结构。指数映射 $\exp\colon \mathrm{Lie}\ G \dashrightarrow G$ 定义在这些 G_ε 上，并且实际上将G_ε 嵌入 G，使其成为一个开子群。这些 $\{G_\varepsilon\}_\varepsilon$ 称为李代数 $\mathrm{Lie}\, G$的李群芽。

3.2. 无穷小作用与特征。 设 Π 是 G的一个容许 L-巴拿赫表示。则 $\mathrm{Lie}\, G$ 中的元素 $\mathfrak{r} \in$ 通过指数映射以导子的方式作用于局部解析向量 Π^{la}：

$$\mathfrak{r}.v \coloneqq \frac{d}{dt} \exp(t\mathfrak{r})v\big|_{t=0}$$

其中 $v \in \Pi^{\mathrm{la}}$。这个等式是有意义的，因为当 t 足够小时， $t\mathfrak{r}$ 会属于某个 G_ε 。

如果 M 是 Π 的连续 L-对偶，那么 $\mathrm{Lie}\, G$ 在其对偶上的作用

Π^{la}（即 $D(H,\ L)\otimes_{L[\![H]\!]}M$）由一个 **有理数域**$p$-李代数映射给出，我们不严谨地将其描述为

$$\psi\colon \operatorname{Lie} G\to D(H,L),\mathfrak{r}\mapsto \log\left([\exp\mathfrak{r}]\right)=-\sum_{i\geq 1}\frac{(1-[\exp\mathfrak{r}])^i}{i}. \tag{8}$$

这里的记号滥用有两层含义：首先，$\exp\mathfrak{r}$ 可能根本没有定义；其次，即使它有定义，也不意味着 $\exp\mathfrak{r}$ 必然是 H的一个元素。不过，只要取足够大的 N，$\log\left([\exp\ p^N\mathfrak{r}]\right)$就会是 $D(H,\ L)$的一个元素，我们将 $\psi(\mathfrak{r})$定义为 $\frac{1}{p^N}\log\left([\exp\ p^N\mathfrak{r}]\right)$。该映射自然延拓到泛包络代数

$$U_L(L\otimes_{\mathbf{Q}_p}\operatorname{Lie} G)\to D(H,L). \tag{9}$$

用这些术语，无穷小特征可以如下描述，下面简要回顾一下。具体而言，设 λ：$\mathcal{Z}(U_L(L\otimes_{\mathbf{Q}_p}$李 $G))\to L$ 是一个 L-代数的态射，其中 $\mathcal{Z}(U_L(L\otimes_{\mathbf{Q}_p}$ 李 $G))$表示 $U_L(L\otimes_{\mathbf{Q}_p}$ 李 $G)$的中心。若 Π 具有无穷小特征 λ，则 $U_L($ $L\otimes_{\mathbf{Q}_p}$ 李 $G)$在$D(H,\ L)$上的作用由 λ给出。

3.3. $\mathbf{Z}_p$-李代数 H。当然，反过来，我们也可以在群 G 中识别出至少一些 $\operatorname{Lie} G$ 内的李格；事实证明，如果 H 是饱和的，那么 H 本身自然具有李代数的结构。也就是说，在以下加法和李括号 H 下，它就成为一个$\mathbf{Z}_p$-李代数，参见 [Laz65，第（III, 2.1.10）节]^3:

$$g+h\coloneqq\lim_{n\to\infty}(g^{p^n}h^{p^n})^{p^{-n}},$$
$$[g,h]\coloneqq\lim_{n\to\infty}(g^{p^n}h^{p^n}g^{p^{-n}}h^{p^{-n}})^{p^{-2n}}.$$

于是，有序基成为该 p-模的基，而 p-赋值 ω 在 H 上使 H 成为一个带滤过的$\mathbf{Z}_p$-模，其中$\mathbf{Z}_p$ 配备其 p-进滤过。其伴随分次 $\operatorname{gr} H$ 随后成为定义在 $\operatorname{gr}\mathbf{Z}_p=\mathbf{F}_p[\varepsilon]$ 上的李代数，其中李括号使次数相加。

注意到，借助 $\operatorname{Lie} G$ 上的一个适当范数，H 实际上表现为 $\operatorname{Lie} G$ 的一个李群芽，参见 [Sch11，第 §31] 节。我们将相应的识别映射称为对数，并记作 $\log\colon H\to\operatorname{Lie} H=\operatorname{Lie} G$；它是$\mathbf{Z}_p$-代数的一个嵌入。

虽然我们不会用到这一点，但值得一提的是，截至目前所见内容所处的更大背景是 Lazard 等价 [Laz65, (IV, 3.2.6)]：饱和的 p-值群范畴与 [Ser 64] 所称的“*-饱和”$\mathbf{Z}_p$-李代数范畴之间的等价。

---

[3]Lazard 习题并非显而易见，正如 Serre 在他的 Bourbaki 报告中所指出的那样，[Ser64, §4.2]。Serre 在那里简要讨论了如何通过 [Laz65], 中发展的理论来证明这一点；该理论也见于 [Sch11, Ch. VII]。另一种方法是按照 [DDSMS99], 的思路，通过直接计算解出这道习题。读者也不妨查阅后一本书以及 [Sch11]中的若干有用恒等式。

3.4. **Lazard 同构**。 假设 H 连同其 p-赋值是饱和的，因此 H 可视为 $\mathbf{Z}_p$-李代数。考虑泛包络代数 $U_{\mathbf{Z}_p}(H)$，它是张量代数 $\bigoplus_{n\geq 0} H^{\otimes_{\mathbf{Z}_p} n}$ 对李括号所给关系取商所得。若 $h_1\otimes\cdots\otimes h_n$属于 Fil^s，只要满足 $\omega(h_1)+\cdots+\omega(h_n)\geq s$，便由此在张量代数上得到一个诱导滤过。不等式 $\omega([g,h])\geq\omega(g)+\omega(h)$ 随即表明，商 $U_{\mathbf{Z}_p}(H)$ 仍是一个滤环，实际上是一个滤$\mathbf{Z}_p$-代数。可以验证，$\mathrm{gr}\,U_{\mathbf{Z}_p}(H)\cong U_{\mathbf{F}_p[\varepsilon]}(\mathrm{gr}\ H)$，且该同构是典范的。

对数映射 log: $H\to\mathrm{Lie}\ H$可扩展到泛包络代数，并与 (9) 复合后再与 $\mathcal{O}_L$ 张量化，我们得到一个映射

$$U_{\mathcal{O}_L}(\mathcal{O}_L\otimes_{\mathbf{Z}_p} H)\to D(H,L), h\mapsto -\sum_{i\geq 1}\frac{(1-[h])^i}{i}. \tag{10}$$

注意，通过将其与 $\mathcal{O}_L\otimes_{\mathbf{Z}_p} U_{\mathbf{Z}_p}(H)$ 的识别赋予张量滤过，源是一个带滤过的 $\mathcal{O}_L$-代数。

以下命题表明，伴随分次 $\mathrm{gr}\,U_{\mathcal{O}_L}(\mathcal{O}_L\otimes_{\mathbf{Z}_p}H)$ 同构于 $\mathrm{gr}_{1/p}\mathcal{O}_L[\![H]\!]$，即 [Laz65，定理 (III, 2.3.3)]。注意，Lazard 同构也有类似的（非分次）版本（[DPS25，第2节.2]）。

命题 3.1。 将映射 *(10)* 与到 $D_{1/p}(H,L)$的映射复合，得到一个滤过 $\mathcal{O}_L$-代数的单射。事实上，$\mathrm{Fil}^\bullet_{1/p} D_{1/p}(H,L)$ 在 $U_{\mathcal{O}_L}(\mathcal{O}_L\otimes_{\mathbf{Z}_p} H)$ 上诱导出上述定义的滤过，因此我们有一个单射

$$\mathrm{gr}\,U_{\mathcal{O}_L}(\mathcal{O}_L\otimes_{\mathbf{Z}_p} H)\hookrightarrow \mathrm{gr}_{1/p} D_{1/p}(H,L).$$

该映射的像为$\mathrm{gr}_{1/p}\mathcal{O}_L[\![H]\!]$。

证明。 容易验证，关于有序基 $h_1,\dots,h_d$，该映射是滤过 $\mathcal{O}_L$-模之间的映射，因此它也是滤过 $\mathcal{O}_L$-模之间的映射。要证明最后一个陈述之外的所有结论，只需证明伴随分次的映射是单射。为此，我们使用

$$\mathrm{gr}\,U_{\mathcal{O}_L}(\mathcal{O}_L\otimes_{\mathbf{Z}_p} H)=U_{k_L[\varepsilon_L]}(k_L[\varepsilon_L]\otimes_{\mathbf{F}_p[\varepsilon]}\mathrm{gr}\,H)$$

以及 $k_L[\varepsilon_L]\otimes_{\mathbf{F}_p[\varepsilon]}\mathrm{gr}\,H$ 在 $k_L[\varepsilon_L]$ 上是自由模这一事实，其基由 $h_1,\dots,h_d$ 的主符号给出。具体而言，每个主符号$\sigma(h_i)$ 在 $\mathrm{gr}\,U_{\mathcal{O}_L}(\mathcal{O}_L\otimes_{\mathbf{Z}_p} H)$ 中的次数为 $\omega(h_i)$，而该映射将 $\sigma(h_i)$ 映为 $\sigma_{1/p}(h_i-1)=\sigma_{1/p}(-\sum_{n\geq 1}\frac{(1-[h_i])^n}{n})$，它们的次数相同。利用 Poincaré-Birkhoff-Witt $U_{k_L[\varepsilon_L]}(k_L[\varepsilon_L]\otimes_{\mathbf{F}_p[\varepsilon]}\mathrm{gr}\,H)$ 可以将其作为 $k_L[\varepsilon_L]$-模完全明确地描述为：它是以 $\sigma(h_1)\dots,\sigma(h_d)$ 为生成元的对称代数。于是该映射可描述为

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}^d} c_\alpha\sigma(h_1)^{\alpha_1}\cdots\sigma(h_d)^{\alpha_d}\mapsto\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}^d} c_\alpha\sigma_{1/p}([h_1]-1)^{\alpha_1}\cdots\sigma_{1/p}([h_d]-1)^{\alpha_d}$$

根据我们对 $D_{1/p}(H,\ L)$ 及其范数的描述，这显然是单射。同时我们还发现，其像是 $\mathrm{gr}_{1/p}\mathcal{O}_L[\![H]\!]$。■

注 3.1。即使 H 仅为 p-值的且不一定是饱和的，$\mathbf{F}_p[\varepsilon]$-模（其中 ε 对应于将群元素提升到 p 次方）$\operatorname{gr} H\colon=\bigoplus_{s\in\mathbf{R}}\{h\in H\colon\ \omega(h)\geq s\}/\{h\in H\colon\ \omega(h)>s\}$ 仍然是一个$\mathbf{F}_p[\varepsilon]$-李代数，并且有 $\operatorname{gr}_{1/p}\mathcal{O}_L[\![H]\!]\cong U_{k_L[\varepsilon_L]}(k_L[\varepsilon_L]\otimes_{\mathbf{F}_p[\varepsilon]}\operatorname{gr} H)$。参见Laz65，定理（III, 2.3.3）]。这使我们能够在下一条推论中更一般地得到诺特性。

推论 3.1. 设 H 是任意一个取值于 p 的 p-进李群。那么环$\operatorname{gr} k_L[\![H]\!]$、$\operatorname{gr}_{1/p}\mathcal{O}_L[\![H]\!]$、$\operatorname{gr}_{1/p}L[\![H]\!]\cong\operatorname{gr}_{1/p}D_{1/p}(H,L)$ 均为诺特的。

证明。由于 $\operatorname{gr}_{1/p}L[\![H]\!]$ 是 $\operatorname{gr}_{1/p}\mathcal{O}_L[\![H]\!]$的局部化，而 $\operatorname{gr} k_L[\![H]\!]$是 $\operatorname{gr}_{1/p}\mathcal{O}_L[\![H]\!]$的商，只需证明 $\operatorname{gr}_{1/p}L[\![H]\!]$ 是诺特的。根据前一个命题（及备注），它是 $\operatorname{gr}\mathcal{O}_L$ 上有限李代数的泛包络代数。我们有 Poincar´e-Birkhoff-Witt 滤过

$$\operatorname{Fil}^i U_{\operatorname{gr}\mathcal{O}_L}(\operatorname{gr} H)\coloneqq\operatorname{Span}_{\operatorname{gr}\mathcal{O}_L}\{x_1\cdot\dots\cdot x_j\colon j\leq -i, x_k\in\operatorname{gr} H\}$$

对 $i\in\mathbf{Z}$ 而言，其相伴分次环是以有限个（负次数）变量为变量的 $\operatorname{gr}\mathcal{O}_L$ 上的多项式代数，因此是诺特的。

现在由 [LVO96, 命题 I.7.1.2]得出结论：具有完备且分离滤过的环是（左诺特的，或右诺特的），当且仅当其伴随分次环是诺特的，且滤过的跳跃仅发生在$\mathbf{Z}$ 中（后一部分已通过 [LVO96]所采用的滤过定义而隐含地考虑在内）。■

注 3.2. 假设 ω 取值于$\mathbf{Q}$，则可以再次利用 [LVO96, 命题 I.7.1.2] 推出 $\mathcal{O}_L[\![H]\!]$, $D_{1/p}(H,L)$ 等是诺特的，因为在这种情况下，$\operatorname{Fil}^\bullet_{1/p}$ 仅在某些 $M\in\mathbf{Z}_{>0}$ 的 $s\in\frac{1}{M}\mathbf{Z}$ 处发生跳跃。然后，可以按照证明ST03, 命题 4.7]的相同方法，推出 $D_{1/p}(H,L)$ 在 $L[\![H]\!]$ 上是平坦的。假设根据下一节的定义，ω 是“严格饱和”的，那么通过下文的 ***(11)*** 可以推出，对于 $r_N\coloneqq p^{-1/p^N}$，$D_{r_N}(H,L)$ 在 $L[\![H]\!]$ 上是平坦的。

尽管这并不能推出一般的 $D_r(H,L)$ 具有 $r\in p^{\mathbf{Q}}$ 时的平坦性，但仍可将 [ST03，命题 4。7] 推广到这样的意义：其假设***“(HYP)”***并非必要。

无论如何，我们不再进一步探讨这一点，因为事实上我们并不需要平坦性。

4. Groups of p-powers

在本节中，我们假设 H 上的 p-赋值是饱和的。

设 $N\geq 0$ 为一个整数，且 $r\in[1/p,1)$。p^N-次幂的集合

$$H^{p^N}\coloneqq\left\{h^{p^N}\colon h\in H\right\}$$

是 H 的一个开子群，并且自然带有诱导的饱和 p-赋值，即 $\omega-N$。还要注意，$h_1^{p^N},\dots,h_d^{p^N}$ 构成一个有序

基。关于这一点，我们也可以对 H^{p^N} 进行上述构造，从而得到滤过环

$$D_r(H^{p^N}, L) = \left\{ \sum_\alpha c_\alpha \mathbf{b}_{p^N}^\alpha : v_p(c_\alpha) - \frac{\log r}{\log p} \tau\alpha \to \infty \text{ as } \alpha \to \infty \right\},$$

其中 $\mathbf{b}_{p^N}^\alpha = ([h_i^{p^N}] - 1)^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot ([h_d^{p^N}] - 1)^{\alpha_d}$。我们还得到诱导滤过 $\mathrm{Fil}_r^\bullet \mathcal{O}_L[\![H^{p^N}]\!]$ 和 $\mathrm{Fil}_r^\bullet L[\![H^{p^N}]\!]$。

我们有如下分解

$$\mathcal{O}_L[\![H]\!] = \bigoplus_{H^{p^N} h \in H^{p^N} \backslash H} \mathcal{O}_L[\![H^{p^N}]\!] \cdot [h]$$

对于 $L[\![H]\!]$ 和 $D(H, L)$，也同样如此。不过，对于固定半径的分布代数（因此也包括由它们诱导的滤过），比较起来要稍微复杂一些。为便于比较，我们倾向于只考虑以下解析半径：

$$r_n := p^{-1/p^n}, n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}.$$

我们还需要以下概念，它比饱和性稍强一些（根据 Sch11，命题 26.11]，若 p-adic 李群上的 p-赋值满足有序基中每个元素的 p-赋值均为 $\leq p/(p-1)$，则称其为饱和的 [）。

定义4.1. 设 H' 是一个具有 p-赋值 ω' 和有序基 $h'_1, \ldots, h'_n$的 p-进李群。若对所有 i都有 $\omega(h'_i) < p/(p-1)$，则称 ω' 严格饱和。

容易看出，若原来的赋值是严格饱和的，则 p^N-幂群上诱导的 p-赋值也是严格饱和的。在严格饱和性的假设下，我们有如下关系：

引理4.1. 设 ω 是严格饱和的。则

$$L[\![H^{p^N}]\!] \cap \mathrm{Fil}_{r_N}^\bullet L[\![H]\!] = \mathrm{Fil}_{r_0}^\bullet L[\![H^{p^N}]\!].$$

因此，$\mathrm{gr}_{1/p} L[\![H^{p^N}]\!]$与$\mathrm{gr}_{1/p} \mathcal{O}_L[\![H^{p^N}]\!]$分别等同于$\mathrm{gr}_{r_N} L[\![H]\!]$ 与$\mathrm{gr}_{r_N} \mathcal{O}_L[\![H]\!]$ 的子环。在此等同下，

$$\mathrm{gr}_{r_N} \mathcal{O}_L[\![H]\!] \ni \sigma_{r_N}([h_i] - 1)^{p^N} = \sigma_{1/p}\left(\left[h_i^{p^N}\right] - 1\right) \in \mathrm{gr}_{1/p} \mathcal{O}_L[\![H^{p^N}]\!].$$

证明. 反复使用恒等式$a^p - 1 = \sum_{j=1}^p \binom{p}{j}(a-1)^j$，可用归纳法证明：模去 $\mathcal{O}_L[\![H]\!]$ 中由 $k \in \{1, \ldots, N\}$ 所对应的那些 $p^k([h_i] - 1)^{p^{N-k}}$生成的理想，有同余式

$$[h_i^{p^N}] - 1 \equiv ([h_i] - 1)^{p^N}$$

对于每个 i。 $p^k([h_i] - 1)^{p^{N-k}}$ 的 r_N-赋值等于 $k + \omega(h_i)/p^k$。由于 ω 是严格饱和的，因此 $[h_i^{p^N}] - 1$ 的 r_N-赋值与 $([h_i] - 1)^{p^N}$ 的赋值相同，即 $\omega(h_i)$。这是 $\omega(h_i^{p^N}) - N$，因此

也就是 $[h_i^{p^N}]-1$ 在 $L[\![H^{p^N}]\!]$ 中的 r_0-赋值。此外，我们甚至可以看出，$[h_i^{p^N}]-1$ 与 $([h_i]-1)^{p^N}$ 在 $\mathrm{gr}_{r_N} L[\![H]\!]$ 中的主符号相同。这便足以得到引理的最后一部分。

利用这一观察，可以验证：$L[\![H^{p^N}]\!]$ 的一般元素 $\sum_\alpha c_\alpha \mathbf{b}_{p^N}^\alpha$ 与 $\sum_\alpha c_\alpha \mathbf{b}^{p^N\alpha}$ 在 $\mathrm{gr}_{r_N} L[\![H]\!]$ 中具有相同的主符号。因此，$\sum_\alpha c_\alpha \mathbf{b}_{p^N}^\alpha$ 在 $L[\![H]\!]$ 中的 r_N-赋值为 $\inf_\alpha v_p(c_\alpha)+\frac{1}{p^N}\cdot\tau(p^N\alpha) = \inf_\alpha v_p(c_\alpha)+\tau\alpha$，这也是它在 $L[\![H^{p^N}]\!]$ 中的 r_0-赋值。我们得出结论。■

由此可知，$L[\![H^{p^N}]\!]$ 在 $D_{r_N}(H,L)$ 中的闭包等于 $D_{r_0}(H^{p^N},L)$。因此 $D_{r_N}(H,L) = \bigoplus_{H^{p^N}h\in H^{p^N}\backslash H} D_{r_0}(H^{p^N},L)\cdot[h]$。
因此，通过归纳法，我们可以得出一般情况下 $D_{r_n}(H^{p^N},L) \subset D_{r_{n+N}}(H,L)$，并且

$$D_{r_{n+N}}(H,L) = \bigoplus_{H^{p^N}h\in H^{p^N}\backslash H} D_{r_n}(H^{p^N},L)\cdot[h] \tag{11}$$

在严格饱和的情形下。
最后，我们再给出两个有用的观察。第一个推广了前一个引理的前一个证明中所作的一项观察。

引理 4.2. 假设 ω 是严格饱和的。设 $\sum_i c_i([h_i]-1) \in \mathcal{O}_L[\![H]\!]$是一个元素，其中每个非零的 c_i 都属于 $\mathcal{O}_L^\times$，并且对于所有 N，$\sigma_{r_N}([h_i]-1)$ 满足 $c_i\neq 0$ 彼此交换且次数相同。那么对于所有 $N,N'\in\mathbf{Z}^{\geq 0}$，元素

$$\sigma_{r_{N+N'}}\left(\sum_i c_i([h_i]-1)\right)^{p^N} \in \mathrm{gr}_{r_{N+N'}}\mathcal{O}_L[\![H]\!]$$

等于

$$\sigma_{r_{N'}}\left(\sum_i c_i^{p^N}\left(\left[h_i^{p^N}\right]-1\right)\right) \in \mathrm{gr}_{r_{N'}}\mathcal{O}_L[\![H^{p^N}]\!] \subset \mathrm{gr}_{r_{N+N'}}\mathcal{O}_L[\![H]\!].$$

证明。 根据这些假设，我们已经得出

$$\sigma_{r_{N+N'}}\left(\sum_i c_i([h_i]-1)\right)^{p^N} = \sum_i c_i^{p^N}\sigma_{r_{N+N'}}([h_i]-1)^{p^N}.$$

（注意，我们也可以将待证等式右边的求和项移出。）于是，由

$$\sigma_{r_{N+N'}}([h_i]-1)^{p^N} = \sigma_{r_{N'}}\left(\left[h_i^{p^N}\right]-1\right),$$

可得结论，这正是前述引理的推论。 ■

最后，通过转而考虑 H^p，可以使上述交换性条件自动成立：

引理 4.3。 假设 ω 是饱和的。对于 $N \geq 1$ 和 $r \in [1/p, 1)$ ，环 $\mathrm{gr}_r \mathcal{O}_L[\![H^{p^N}]\!]$ 是关于变量 $\sigma_r([h_i^{p^N}] - 1)$ 和 ε_L的交换多项式 k_L-代数。

证明。 只需考虑 $N = 1$ 情形。群 H^p 配有序基 $h_1^p, \ldots, h_d^p$ 和 p-赋值 $\omega - 1$。我们发现

$$\omega\left([h_i^p, h_j^p]\right) - 1 \geq \omega(h_i^p) + \omega(h_j^p) - 1 > \begin{cases} \frac{\omega(h_i^p)-1+\omega(h_j^p)-1}{p} + 1 & *, \\ \omega(h_i^p) - 1 + \omega(h_j^p) - 1 & **. \end{cases}$$

对于 $r > 1/p$ ，证明 [ST03, 引理 4.4] 适用于交换性：若将其中的“(HYP)”替换为关于其 (G, ω) 及其有序基 $h_1, \ldots, h_d$ 饱和且$\omega([h_i, h_j]) > \omega(h_i) + \omega(h_j) - p + 1$的假设，该引理仍然成立；界 * 表明我们确实处于这种情形。

对于 $r = 1/p$ ，我们改用命题 3.1，即 $\mathbf{gr}_{1/p} \mathcal{O}_L[\![H^p]\!] \cong U_{\mathcal{O}_L}\left(\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} H\right) \cong U_{k_L[\varepsilon_L]}\left(k_L[\varepsilon_L] \otimes_{\mathbf{F}_p[\varepsilon]} \mathbf{gr}\ H\right)$。随后，交换性断言由 $\mathbf{gr}\, H$ 是交换李代数这一点得出，而这直接源于界 **。

在所有情况下，我们都可以得出结论：这些就是与 [ST03，定理 4.5] 中以同样方式描述的多项式环。■

注 4.1。 在文献中，人们通常更倾向于使用限制性更强的“统一” p-进李群 H ，而不是 p值的 H。这些 H 满足 H/H^p 为阿贝尔群，并且可以在其上赋予一个 p-赋值，使每个有序基元素的赋值均为 1，参见 [DDSMS99，定理 4。5]以及 [ST03，引理 4。4]之前的注记。

当 H 是饱和的时，上述引理证明中的界 * 表明，H^p 实际上是统一的。不过，对我们而言， H^p 上的 p-赋值 $\omega - 1$ ，而不是将所有有序基元素赋值为1 的赋值，可能有趣得多，即使它使用起来可能稍微困难一些。事实上，我们的主定理将关键地依赖于这一事实（引理 *6.5*）： $\mathfrak{gl}_2\, K$的卡西米尔元，关于某个特定的（“非统一”） p-赋值，在某种意义上是齐次的。

5. ε-TORSION FREENESS

在本章节中， H 仍具有 p-赋值 ω，但不再要求其饱和。

设 $M_\circ$是一个无 p-挠的有限生成 $\mathcal{O}_L[\![H]\!]$-模。固定一个满射$\mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0} \twoheadrightarrow M_\circ$ ，其核为 $N_\circ$。本章节讨论以下结果，该结果本质上归功于 [ST03]:

命题 5.1。 对于 $N \gg 0$ ，关联分次模 $\mathrm{gr}_{r_N} M_\circ$ 是 ε-无挠的。

在 [ST03] 中，这一点仅在 $M_\circ$ 有一个生成元且满足其假设“(HYP)”的情形下得到证明，作为其证明 [ST03，定理 4.11]的一部分。不过，他们的证明几乎可以原封不动地照搬。尽管如此，我们仍选择在此完整给出证明，因为它在后续论证中起着关键作用。记 $N = N_\circ/\left(N_\circ \cap \varpi_L \mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0}\right)$，并且对于一个 $N \geq 0$，赋予它从 $\mathrm{Fil}^\bullet_{r_N} k_L[\![H]\!]^{\oplus N_0}$ 诱导而来的滤过，并将其伴随分次记为 $\mathrm{gr}_{r_N} N$。提醒读者，这是我们唯一一次考虑一种（定义在 N 上的）并非由某个有限自由 $k_L[\![H]\!]$- 模到其上的满射所诱导的滤过。

与 [ST03] 一样，我们需要以下两个引理：

引理 5.1. 存在 $v_1, \ldots, v_\ell \in N_\circ \setminus \varpi_L \mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0}$，并且对每个$N \geq 0$，存在常数 $s_{i,N} \in \mathbf{R}$ 使得

- 对每个 $N \geq 0$, $\overline{v_i} \in \mathrm{Fil}^{s_{i,N}}_{r_N}(k_L[\![H]\!]^{\oplus N_0}) \setminus \mathrm{Fil}^{>s_{i,N}}_{r_N}(k_L[\![H]\!]^{\oplus N_0})$
- 对每个 $N \geq 0$ 和 $s \in \mathbf{R}$，$\mathrm{Fil}^s_{r_N} \overline{N} = \sum_{i=1}^{\ell} \mathrm{Fil}^{s-s_{i,N}}_{r_N}(k_L[\![H]\!]) \cdot \overline{v_i}$。

证明。首先回顾一下，$\mathrm{gr}_{r_N} k_L[\![H]\!]^{\oplus N_0}$，因此 $\mathrm{gr}_{r_N} N$，除了分次的缩放之外，并不依赖于 N。所以结果与N 无关，而常数 $s_{i,N}$ 只依赖于 N，因为它们需要进行适当的缩放。

v_i 的存在（因此我们任意选取的 v_i 提升也存在）随即由 $\mathrm{gr}\, k_L[\![H]\!]$的诺特性得出：这意味着 $\mathrm{gr}\ N$ 在 $\mathrm{gr}\, k_L[\![H]\!]$ 上有限生成，我们可以将这些生成元取为主符号，再将它们提升回来，得到v_i。先验地，对于所有 $s \in \mathbf{R}$，我们只能得到

$$\mathrm{Fil}^s_{r_N} \overline{N} = \sum_{i=1}^{\ell} \mathrm{Fil}^{s-s_{i,N}}_{r_N}(k_L[\![H]\!]) \cdot \overline{v}_i + \mathrm{Fil}^{>s}_{r_N} \overline{N},$$

但由于 N 关于其滤过分离且完备，第二个要点确实可由逼近论证得到；这里用到滤过 $\mathrm{Fil}^\bullet_{r_N} N$ 的跳跃点集合包含于离散子集 $\sum_i \omega(h_i)\mathbf{Z}_{\geq 0}$ of$\mathbf{R}$。 ■

下一个要用到的是以下引理，它推广了 [ST03，引理 4.12]:

引理 5.2。设 $v \in \mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0} \setminus \varpi_L \mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0}$。存在一个 $r_v \in [1/p, 1)$，使得对所有 $r_v \leq r < 1$ 以及所有 $s \in \mathbf{R}$：$v \in \mathrm{Fil}^s_r\left(\mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0}\right) + \varpi_L \mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0}$ 蕴含 $v \in \mathrm{Fil}^s_r \mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0}$。

证明。写出 $v = (\sum_\alpha c_{i,\alpha} \mathbf{b}^\alpha)_{i=1}^{N_0}$。集合 $\{(\alpha, i) : c_{i,\alpha} \in \mathcal{O}_L^\times\}$ 非空，取其中一个 (α, i)，使得 $\tau\alpha$ 最小。现在选择 r_v，使得$-\log r_v$对数 $p \cdot \tau\alpha \in (0, 1/e_L)$。 ■

现在我们可以开始主要证明了。

命题 *5.1* 的证明。令 $N \geq 0$ 满足 $r_N \geq \max_i r_{v_i}$，其中 r_{v_i} 是从引理 5.2 中为引理 5.1 的 v_i 选取的常数。这确保了 $v_i \in \mathrm{Fil}_{r_N}^{s_i} \mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0}$. 对所有 i 都成立。我们将通过证明 $\mathrm{gr}_{r_N} M_\circ$ 没有 ε-扭结，来证明它没有 ε_L-扭结。

为此，假设 $x \in \mathrm{Fil}_{r_N}^{s} M_\circ$ and $\varpi_L x \in \mathrm{Fil}_{r_N}^{>s+1/e_L} M_\circ$。只需证明$x \in \mathrm{Fil}_{r_N}^{>s} M_\circ$。记

$$\varpi_L x = y + u, \text{ where } y \in \mathrm{Fil}_{r_N}^{>s+1/e_L} \left(\mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0}\right), u \in N_\circ.$$

我们的目标是找到 $y' \in \mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0}$ and $u' \in \mathrm{Fil}_{r_N}^{>s+1/e_L} N_\circ$，使得 $y = \varpi_L y' + u'$。也就是说，一旦完成这一步，我们就有 $\varpi_L y' = y - u' \in \mathrm{Fil}_{r_N}^{>s+1/e_L} \mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0}$，因此 $y' \in \mathrm{Fil}_{r_N}^{>s} \mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0}$ 且 $\varpi_L(x-y') = u+u' \in N_\circ$。由此，$M_\circ = \mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0}/N_\circ$ 的 ϖ_L-无挠性推出 $x \equiv y'$模 $N_\circ$，从而 $x \in \mathrm{Fil}_{r_N}^{>s} M_\circ$，这正是我们要证明的。

由于 $y = -u \in \mathrm{Fil}_{r_N}^{>s+1/e_L} N$,¯由引理 5.1 可知，对每个 i，存在 $c_i \in \mathrm{Fil}^{>s+1/e_L-s_i,\ r_N}{}^{N} \mathcal{O}_L[\![H]\!]$ 使得

$$y \equiv c_1 v_1 + \cdots + c_\ell v\ell \mod \varpi_L \mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0}.$$

也就是说，$y = \varpi_L y' + u'$ 对某个 $y' \in \mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0}$，且其中 $u' := c_1 v_1 + \cdots + c_\ell v\ell \in \mathrm{Fil}_{r_N}^{>s+1/e_L} N_\circ$。■

推论 5.1。对于 $N \gg 0$，自然映射$\mathrm{gr}_{r_N} M_\circ \to \mathrm{gr}_{r_N} M = \mathrm{gr}_{r_N} M_\circ[1/\varepsilon]$是单射。

推论 5.2。对于 $N \gg 0$，自然映射 $\mathrm{gr}_{r_N} M_\circ \to \mathrm{gr}_{r_N} M_{r_N}$ 和$M \to M_{r_N}$ 都是单射。

证明。取 $N \gg 0$，使得 $\mathrm{gr}_{r_N} M_\circ$ 是 ε-无挠的。由引理 2.2 的 i)，$\mathrm{gr}_{r_N} M = \mathrm{gr}_{r_N} M_{r_N\circ}$ 由同一引理的 ii)，由于 ε-无挠性，$\mathrm{gr}_{r_N} M_\circ$ 嵌入 $\mathrm{gr}_{r_N} M_{\circ\circ}$ 这意味着 $M_\circ$ 本身嵌入 M_{r_N}：假设 $x \in M_\circ$ 映射到 0，则 $x \in \cap_{s\geq 0} \mathrm{Fil}_{r_N}^{s} M_\circ$，但这个交集为 0，例如这可由 $\mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0} \twoheadrightarrow M_\circ$ 的连续性推出。■

推论 5.3。设 G 是一个 p-进李群，包含 H 作为开子群。设 Π 是 G 的一个容许 L-巴拿赫表示。那么，对于 $N \gg 0$，相对于 H取的 r_N-解析向量 $\Pi^{r_N\text{-}la} := \left((\Pi^*)_{r_N}\right)^*$ 在 Π中稠密。

证明。取 $N \gg 0$ 使得 $\Pi^* \to (\Pi^*)_{r_N} = \left(\Pi^{r_N\text{-la}}\right)^*$ 是单射。反设 $\Pi^{r_N\text{-la}} \subset \Pi$ 不稠密。令 V 为$\Pi^{r_N\text{-la}}$ 在 Π 和 $w \in \Pi \setminus V$中的闭包。用 $\|-\|$ 表示 Π上的范数。可以在 $Lw + V \cong Lw \oplus V$上定义一个连续的 L值线性形式 ℓ，其核为V，且 $|\ell(w)| \leq \inf\{\|w+v\| : v \in V\} > 0$。

于是，根据 Hahn-Banach 定理（[Sch02，命题 9.2]），该形式可延拓为一个元素 $\ell' \in \Pi^*$。根据构造，形式 ℓ' 非零，却属于 $\Pi^* \to (\Pi^*)_{r_N}$ 的核，因此我们得到了所需的矛盾。■

6. Bounding the Gelfand-Kirillov dimension

现在我们将介绍上述一般理论的一个应用：设 $p > 2$和K 是一个 p-进域，那么我们将证明，对于 $\mathrm{GL}_2 K$ 或 K 上的四元数代数的单位群，任何具有无穷小特征的可容许 p-进巴拿赫表示，其 Gelfand-Kirillov 维数至多为 $[K\colon$ **有理数域**$_p]$。在解释设定之前，我们先简要回顾 Gelfand-Kirillov 维数的概念。

6.1. 关于 Gelfand-Kirillov 维数的回顾。

设 G 是一个 p-进李群， H 是其任意紧开子群。设 C 是下列系数环之一 k_L， $\mathcal{O}_L$， 或 L。设 M 是一个有限生成的 $C[\![H]\!]$-模。以下概念基本上刻画了 Gelfand-Kirillov 维数：M 的 级 $j_{C[\![H]\!]}(M)$ 定义为

$$j_{C[\![H]\!]}(M) \coloneqq \inf\left\{i\colon \operatorname{Ext}^i_{C[\![H]\!]}(M, C[\![H]\!]) \neq 0\right\}.$$

Gelfand-Kirillov 维数的定义如下： M 的 ***Gelfand-Kirillov* 维数** 定义为

$$d_{C[\![H]\!]}(M) \coloneqq \begin{cases} \dim H - j_{C[\![H]\!]}(M) & \text{if } C \text{ is } k_L \text{ or } L, \\ \dim H + 1 - j_{C[\![H]\!]}(M) & \text{if } C = \mathcal{O}_L. \end{cases}$$

若 Π （分别地， π）是 G的可容许 L-巴纳赫表示（分别地，可容许光滑 k_L-表示），则其连续对偶是有限生成的 $L[\![H]\!]$-（分别地， $k_L[\![H]\!]$-）模，并将其 Gelfand-Kirillov 维数定义为其对偶的 Gelfand-Kirillov 维数。

引理 6.1。 设 M 是有限生成的 $L[\![H]\!]$-模， L'/L是有限域扩张，且 $H' \subset H$ 是开子群。那么

$$d_{L[\![H]\!]}(M) = d_{L'[\![H]\!]}(L' \otimes_L M) = d_{\mathbf{Q}_p[\![H]\!]}(M) = d_{\mathbf{Q}_p[\![H']\!]}(M),$$

对于 $M_\circ$ 和 M （分别在 $\mathcal{O}_L$ 和 k_L 上），也有类似结论。

证明。 这直接源于 $L'[\![H]\!]$ 是 $L[\![H']\!]$ 上的有限自由模，以及以下事实：$\operatorname{Ext}^i_{L[\![H]\!]}(M,\ L[\![H]\!])$可通过对 M 的有限自由 $L[\![H]\!]$-模分解应用$\operatorname{Hom}_{L[\![H]\!]}(-,\ L[\![H]\!])$来计算。对于 $M_\circ$ 和M ，论证类似。■

因此，Gelfand-Kirillov 维数不依赖于紧开子群 H 或系数的选择。这意味着可以尝试选择 H ，以便于计算 Gelfand-Kirillov 维数。例如，引理 4.3 使我们处于可以使用下述结果的情形：

命题 6.1 ([DPS23，命题 3。5])。 假设 $k_L[\![H]\!]$ 关于某个滤过是完备的，且相对于该滤过，$\operatorname{gr}(k_L[\![H]\!])$ 是一个交换诺特正则环。

那么，对于任意 p-无挠 $\mathcal{O}_L[\![H]\!]$-模 $M_\circ$，满足 $M = M_\circ[1/p]$ 且模 ϖ_L 约化后等于 M:

$$j_{\mathcal{O}_L[\![H]\!]}(M_\circ) = j_{L[\![H]\!]}(M) = j_{k_L[\![H]\!]}(\overline{M}).$$

此外，如果 $\overline{M}$ 具有一个良滤过，即一个与 $k_L[\![H]\!]$ 上的滤过相容的滤过，使得伴随分次 $\operatorname{gr} M$ 在$\operatorname{gr} k_L[\![H]\!]$上有限生成，那么上述各个量都相等于

$$j_{\operatorname{gr} k_L[\![H]\!]}(\operatorname{gr}\overline{M}) \coloneqq \inf\left\{i\colon \operatorname{Ext}^i_{\operatorname{gr} k_L[\![H]\!]}\left(\operatorname{gr}\overline{M}, \operatorname{gr} k_L[\![H]\!]\right) \neq 0\right\}.$$

因此，我们确实处于引理 4.3 的情形中： H具有一个严格饱和的 p-赋值 ω 以及有序基 $h_1, \dots, h_d$，相对于它们我们定义 r-解析滤过（对 $r \in [1/p, 1$而言）。于是，引理告诉我们，对于 $N > 0$，$\operatorname{gr}_r \mathcal{O}_L[\![H^{p^N}]\!]$是 k_L 上的多项式环，其变量为 $\sigma_r([h_i^{p^N}] - 1)$ 和 ε_L；因此，$\operatorname{gr} k_L[\![H^{p^N}]\!]$ 是 $d =$ 中的一个多项式 k_L-代数，具有 $\dim H$ 个变量，特别地，它是诺特正则的，从而我们处于上述命题的情形中。由此可见，计算 Gelfand-Kirilov 维数归结为计算 $\operatorname{grade}^{j_{\operatorname{gr}(k_L[\![H^{p^N}]\!])}(\operatorname{gr}(M))}$[4]。

为此，我们可以应用 [LVO96, III§4.1, 定理 7“广义 Roos 定理”],，它给出：对任意有限生成的 $\operatorname{gr} k_L[\![H^{p^N}]\!]$-模 A

$$j_{\operatorname{gr} k_L[\![H^{p^N}]\!]}(A) = \dim H - \operatorname{K.dim} A, \tag{12}$$

其中 $\operatorname{K.dim} A$ 是 A 的 Krull 维数，即其在谱 $\operatorname{gr} k_L[\![H^{p^N}]\!]$ 中的支撑的维数，也就是环 $(\operatorname{gr} k_L[\![H^{p^N}]\!])/$ 湮灭子 A 的 Krull 维数。

总之，我们发现，有限生成的 $k_L[\![H]\!]$-模 M 的 Gelfand-Kirillov 维数等于 $\operatorname{gr} M$ 作为 $\operatorname{gr} k_L[\![H^{p^N}]\!]$- 模的 Krull 维数，对任意 $N \geq 1$ 成立。

6.2. **设定**。设 $p > 2$，并设 K 为 **有理数域**p 的有限扩张，其一致化子为 ϖ_K。我们将把前几节的准备工作应用于两个p-进李群 G，它们具有一个饱和的 p-值开子群 H:

$$G = \begin{cases} \mathrm{GL}_2 K & \textbf{in the } \mathrm{GL}_2\textbf{-case,} \\ D^\times & \textbf{in the quaternion case.} \end{cases}$$

这里 D 是 K上的四元数代数。它作为 K-代数由元素 Π和 $\sqrt{a}$生成，满足:

- $\Pi^2 = \varpi_K$,
- $a \in \mathcal{O}_K^\times$ 是一个元素，其平方根生成 K的二次非分歧扩张，并且我们取它使得**有理数域**$_p[\sqrt{a}]$ 在**有理数域**$_p$上是非分歧的,

[4]由从 $k_L[\![H]\!]^{\oplus N_0}$出发的满射所诱导的 M 上的滤过，按我们惯常的方式，确实是 $k_L[\![H^{p^N}]\!]$上的良滤过：这是因为$\operatorname{gr} k_L[\![H]\!]$ 是有限的$\operatorname{gr} k_L[\![H^{p^N}]\!]$-模，我们将其留给读者验证。

- Π 和 $\sqrt{a}$反交换。

我们将 $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}_K[\Pi, \sqrt{a}]$记作 D中 $\mathcal{O}_K$上的极大阶。它由 D中所有非负赋值的元素组成。

我们首先定义如下子群

$$H^{1/p} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 + p\varpi_K\mathcal{O}_K & p\mathcal{O}_K \\ p\varpi_K\mathcal{O}_K & 1 + p\varpi_K\mathcal{O}_K \end{pmatrix} & \mathrm{GL}_2\text{-case}, \\ 1 + p\Pi\mathcal{O}_D & \text{quaternion case}. \end{cases}$$

在每种情形下，我们都可以在 $H^{1/p}$ 上赋予一个严格饱和的 p-赋值 ω。四元数情形最为直接：

$$\omega(x) \coloneqq v_p(x-1) - C_{\mathrm{quat}}, \text{ for } x \in 1 + p^2\Pi\mathcal{O}_D. \tag{13}$$

这里必须减去一个常数 C_{quat}，才能得到严格饱和的 p-赋值：为此，有序基的像必须落在区间 $(1/(p-1)\ p/(p-1))$ 内，因此 C_{quat} 必须落在区间内

$$\left(1 - \frac{1}{p-1} - \frac{1}{2e_K}, 1 - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2e_K}\right).$$

尽管具体数值完全不重要，甚至根本不会用到，我们仍然设

$$C_{\mathrm{quat}} \coloneqq 1 - 1/(p-1).$$

利用对数 $\log$：$1 + p\mathcal{O}_D \to p^2\mathcal{O}_D$（这是一个将 p 次幂转换为 p 的倍数的同胚），可以很快验证 (13) 确实给出了一个 p-赋值。

在 GL_2 情形下，首先注意到

$$\tilde{\omega}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \coloneqq \min\{v_p(a), v_p(b), v_p(c), v_p(d)\}$$

这是 $\{g \in \mathrm{GL}_2 K[\sqrt{\varpi_K}]$ 上的一个 p-赋值：$\tilde{\omega}(g) > 1/(p-1)\}$；同样，只需考虑将该集合映射到其像上的同胚对数即可。映射

$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1/\sqrt{\varpi_K} \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & \\ & \sqrt{\varpi_K} \end{pmatrix}$将 $H^{1/p}$ 嵌入 $\{g \in \mathrm{GL}_2 K[\sqrt{\varpi_K}]$ 中：$\tilde{\omega}(g) > 1/(p-1)\}$，由此我们最终得到 $H^{1/p}$ 上如下的严格饱和 p-赋值：

$$\omega\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \coloneqq \min\left\{v_p(a-1), v_p(b) + \frac{1}{2e_K}, v_p(c) - \frac{1}{2e_K}, v_p(d-1)\right\} - C_{\mathrm{GL}_2} \tag{14}$$

再次进行减法是为了确保严格饱和性，而这一次常数

$$C_{\mathrm{GL}_2} \coloneqq 1 - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{4e_K}$$

可以是区间内的任意值

$$\left(1 - \frac{1}{p-1}, 1 - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2e_K}\right).$$

正如我们的记号所示，我们将讨论群 $H := \left(H^{1/p}\right)^p$ 以及其上诱导的 p-赋值 $\omega - 1$。之所以按照这种方式引入 H，是因为现在，与 H 的各种完备群环相关联的所有分次代数的交换性，都由引理 4.3 自动保证。因此，验证引理 4.2 的条件变得更加容易，而且不再需要取 p次幂的群，便可像上一章节所述那样，将 Gelfand-Kirillov 维数作为 Krull 维数来计算。

系数域的假设 L： </style}我们假设我们的 -进系数域 足够大，具体如下。在 GL 情形下，它包含在有理数域p上的正规闭包，记作 K'；在四元数情形下，它应包含 $K[\sqrt{a}]$ 在**有理数域**p上的正规闭包 $K'[\sqrt{a}]$。这里，$\sqrt{a}$ 与描述四元数 D 在 K上的生成元时所用的元素相同。下一节的分解中我们将立即用到这一假设。

根据引理 6.1， p-进巴拿赫表示的 Gelfand-Kirillov 维数在标量扩张下保持不变，因此这一假设不会影响我们所给界的普遍性。

6.3. **分解** $L \otimes_{\mathbf{Q}_p}$ 李 G。 李代数

$$\mathfrak{gl}_2 L \cong L \otimes_K \operatorname{Lie} G$$

由以下元素在 L 上生成

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

在四元数情形下，当 $\operatorname{Lie} G = D$ 时，我们利用

$$\begin{aligned} M_2 K[\sqrt{a}] &\to K[\sqrt{a}] \otimes_K D, \\ e &\mapsto \frac{1}{2\varpi_K}\left(1 \otimes \Pi + \frac{1}{\sqrt{a}} \otimes \sqrt{a}\Pi\right), \\ f &\mapsto \frac{1}{2}\left(1 \otimes \Pi - \frac{1}{\sqrt{a}} \otimes \sqrt{a}\Pi\right), \\ h &\mapsto \frac{1}{\sqrt{a}} \otimes \sqrt{a}, \\ z &\mapsto 1 \end{aligned} \tag{15}$$

是 $K[\sqrt{a}]$-代数的同构。 $^{-}$
为了将这一描述用于 $L \otimes_{\mathbf{Q}_p}$ 李 G，我们首先按标准方式分解 $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} K$：

$$L \otimes_{\mathbf{Q}_p} K \cong \bigoplus_{\rho\colon K \hookrightarrow L} L \otimes_{\rho, K} K.$$

其中求和遍历嵌入 $\rho\colon\ K \hookrightarrow L$；在 $L \otimes_{\rho,\ K} K$ 中，我们将左因子视为通过 ρ 作用的 K-模。我们将对应于 ρ 的幂等元记为 1_ρ，也就是说，它是通过上述同构对应于 $\bigoplus_{\rho'} L \otimes_{\rho',\ K} K$ 中元素 $(\ell_{\rho'})_{\rho'}$ 的幂等元，其中 $\ell_\rho = 1$，且当 $\rho' \neq \rho$ 时 $\ell_{\rho'} = 0$。

由此我们得到一个分解

$$L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \operatorname{Lie} G \cong \bigoplus_{\rho\colon\ K \hookrightarrow L} L \otimes_{\rho,K} \operatorname{Lie} G \cong \bigoplus_{\rho\colon\ K \hookrightarrow L} L \otimes_{\rho,K} \mathfrak{gl}_2 K. \tag{16}$$

在四元数情形中，我们将始终使用同构 $L \otimes_{\rho,K} \mathbf{Lie}\, G \cong L \otimes_{\rho,K} \mathfrak{gl}_2 K$，该同构通过在 (15) 的第一个张量因子中将每个“$\sqrt{a}$”替换为“$\mathrm{Frob}^k\sqrt{a}$”而得到，其中 k 满足：ρ 限制在 K 中 $\mathbf{Q}p$ 的最大非分歧扩张上时，等于算术 Frobenius 的 k 次幂（这是有意义的，因为我们的假设 $K \subset L$ 允许我们将此限制视为一个自同构）。

于是，我们用 e_ρ, f_ρ, h_ρ 和 z_ρ 表示 $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{Lie}\, G$ 中经由该分解分别对应于 $1 \otimes e$, $1 \otimes f, 1 \otimes h$, 和 $1 \otimes z$ 的元素。对于每个 $x \in \{e, f, h, z\}$，都有 $x_\rho = 1_\rho \cdot (1 \otimes x)$。

此外，这一分解还可扩展至泛包络代数及其中心：

$$U_L\left(L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \operatorname{Lie} G\right) \cong \bigotimes_{\rho\colon\ K \hookrightarrow L} U_L\left(L \otimes_{\rho,K} \mathfrak{gl}_2 K\right)$$

and

$$\mathcal{Z}\left(U_L\left(L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \operatorname{Lie} G\right)\right) \cong \bigotimes_{\rho\colon\ K \hookrightarrow L} \mathcal{Z}\left(U_L\left(L \otimes_{\rho,K} \mathfrak{gl}_2 K\right)\right).$$

还需指出，我们对泛包络代数的中心有一个精确的描述：它是一个在 L 上由 z_ρ 和卡西米尔元生成的多项式代数

$$\Delta_\rho := \frac{1}{2}h_\rho^2 + e_\rho f_\rho + f_\rho e_\rho = \frac{1}{2}h_\rho^2 + h_\rho + 2 f_\rho e_\rho.$$

最后，我们希望进一步明确上述分解和幂等元 1_ρ。特别是，我们希望研究它们的整性性质。

首先注意到，自然单射

$$\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathcal{O}_K \hookrightarrow \bigoplus_{\rho\colon\ K \hookrightarrow L} \mathcal{O}_L \otimes_{\rho,\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K \tag{17}$$

仅当 K 在$\mathbf{Q}p$上非分歧时才是同构。因此，我们找到的幂等元通常不包含在 $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathcal{O}_K$ 中。我们将把它们写得更明确一些，以便看出它们与属于 $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathcal{O}_K$ 相差多远。首先固定一个 $\alpha \in \mathcal{O}_K^\times$，使得$\mathbf{Q}_p[\alpha]$ 是$\mathbf{Q}p$ 在 K 中的最大非分歧子扩张。于是，$\mathbf{Q}_p[\alpha]$ 的相应分解在整环上成立，

也就是说， $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p[\alpha]$ 同构于 $\bigoplus_{i=0}^{f-1} \mathcal{O}_L \otimes_{\mathrm{Frob}^i,\ \mathbf{Z}_p[\alpha]} \mathbf{Z}_p[\alpha]$。我们有相应的幂等元

$$\sum_{j=0}^{f-1} \mathrm{Frob}^i(\beta_j) \otimes \alpha^j \in \mathcal{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p[\alpha],\ \text{for } i \in \{0, \dots, f-1\},$$

与 $\beta_j \in \mathbf{Z}_p[\alpha]^\times$。

扩张 $K/$**有理数域**$_p[\alpha]$ 是完全分歧的，并由 ϖ_K 生成，而 ϖ_K 是 Eisenstein 多项式 $f(X) \in$ **有理数域**$_p[\alpha][X]$ 的一个根。我们仅有有理分解

$$L \otimes_{\mathbf{Q}_p[\alpha]} K \cong \bigoplus_{\tau\colon K \hookrightarrow L} L \otimes_{\tau, K} K,$$

其中直和取遍 **有理数域**$_p[\alpha]$-线性嵌入 τ。我们有相应的幂等元

$$\begin{aligned} 1_{\mathrm{id}} &= \sum_{i=0}^{e_K-1} \gamma_i \otimes \varpi_K^i \in L \otimes_{\mathbf{Q}_p[\alpha]} K, \\ 1_\tau &= \sum_{i=0}^{e_K-1} \tau(\gamma_i) \otimes \varpi_K^i \in L \otimes_{\mathbf{Q}_p[\alpha]} K, \end{aligned} \tag{18}$$

与 $\gamma_i \in K$。幂等元的非整性来自分歧。借助下述引理，我们仍能充分控制它。

引理 6.2. 存在 $R_K \in \mathbf{Z}$，使得由 *(18)* 定义的 $\gamma_i \in K$（因而也包括它们的共轭）具有赋值

$$v_p(\gamma_i) = -i/e_K - R_K/e_K.$$

此外， $R_K/e_K = v_p(f'(\varpi_K)) + 1/e_K - 1$，其中 f 是 ϖ_K 在 **有理数域**$_p[\alpha]$上的最小多项式，并且当且仅当 $p \nmid e_K$ 时， $R_K = 0$。

证明。我们先简要回顾如何得到分解和幂等元。方法是将 **有理数域**$_p[\alpha][X]/f(X)$ 与 K 等同，并将 X 映射到 ϖ_K。于是 $L \otimes_{\mathbf{Q}_p[\alpha]} K \cong L[X]/f(X)$，我们可以利用中国剩余定理得到分解，因为 $f(X)$ 在 L 上分解为互素线性因子。

幂等元 1_{id} 对应于与线性因子 $X - \varpi_K$ 相对应的直和项。接着可以检查，用多项式表示时，我们有

$$1_{\mathrm{id}} = \frac{1}{f'(\varpi_K)} \frac{f(X)}{X - \varpi_K}.$$

若 $f(X)/(X - \varpi_K) = c_0 + c_1 X + \cdots + c_{e_K-1} X^{e_K-1}$，则 $\gamma_i = c_i/f'(\varpi_K)$。由于 $(X - \varpi_K) \sum_i c_i X^i$ 在 $\mathbf{Z}_p[\alpha]$ 上是艾森斯坦多项式，可以归纳检查得 $v_p(c_i) = 1 - (i+1)/e_K$。事实上，进而有 $R_K/e_K = v_p(f'(\varpi_K)) + 1/e_K - 1$。

最后， $R_K = 0$ 当且仅当 $v_p(f'(\varpi_K)) = (e_K - 1) v_p(\varpi_K)$，这就是

当且仅当对所有 K 的自同构 $\sigma \neq \mathrm{id}$，都有 $v_p(\varpi_K - \sigma(\varpi_K)) = v_p(\varpi_K)$ 时成立；这又当且仅当分歧至多为驯分歧。■

最后，总结一下，我们得到

$$\begin{aligned} L \otimes_{\mathbf{Q}_p} K \cong L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{Q}_p[\alpha] \otimes_{\mathbf{Q}_p[\alpha]} K &\cong \left(\bigoplus_{i=0}^{f-1} L \otimes_{\mathrm{Frob}^i, \mathbf{Q}_p[\alpha]} \mathbf{Q}_p[\alpha] \right) \otimes_{\mathbf{Q}_p[\alpha]} K \\ &\cong \bigoplus_{i=0}^{f-1} L \otimes_{\mathrm{Frob}^i, \mathbf{Q}_p[\alpha]} K \\ &\cong \bigoplus_{i=0}^{f-1} \bigoplus_{\substack{\tau\colon K \hookrightarrow L, \\ \tau|_{\mathbf{Q}_p[\alpha]} = \mathrm{Frob}^i}} L \otimes_{\tau, K} K \\ &\cong \bigoplus_{\rho\colon K \hookrightarrow L} L \otimes_{\tau, K} K, \end{aligned}$$

其中，最后一个直和以所有**有理数域**p-线性嵌入 ρ为指标。我们看到，与 $\rho = \mathrm{id}$ 对应的 $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} K$ 的幂等元为

$$1_{\mathrm{id}} = \sum_{\substack{0 \le i < f, \\ 0 \le j < e_K}} \beta_i \gamma_j \otimes \alpha^i \varpi_K^j \in L \otimes_{\mathbf{Q}_p} K.$$

因此，对于一般的**有理数域**p-线性嵌入 $\rho\colon K \hookrightarrow L$，有

$$1_\rho = \sum_{\substack{0 \le i < f, \\ 0 \le j < e_K}} \rho(\beta_i \gamma_j) \otimes \alpha^i \varpi_K^j \in L \otimes_{\mathbf{Q}_p} K. \tag{19}$$

6.4. 间奏：非分歧 $\mathrm{GL}_2 K$ 与范畴 $\mathcal{C}$。 我们稍微提前讨论了最初研究这项工作的情形：对于 $\mathrm{GL}_2 K$，其中 K 非分歧且 $p > 2$。正如上一节所见，分歧使情况变得复杂。我们发现，非分歧 $\mathrm{GL}_2 K$ 的证明更简单，也能很好地突出一般证明的主要思想。因此，我们选择用这一简短章节来证明这一特定情形。只对一般情形的证明感兴趣的读者可以放心跳过本节。

本节中，我们将 K 的一致化元记为 $\varpi_K = p$。

Gelfand–Kirillov 界。

定理 6.1。设 $p > 2$，假设 K 是**有理数域**p 上的非分歧扩张，次数为 f，并且假设我们处于 GL_2 情形。
设 $M_\circ$ 是有限生成的 p-无挠 $\mathcal{O}_L[\![H]\!]$-模。假设 $M = M_\circ[1/p]$ 具有无穷小特征。那么 M 的 *Gelfand-Kirillov* 维数为 $\le f$。

证明。 我们首先汇集证明所需的各项要素。

a) 我们为 H 选取的有序基（所有构造均以此为准）是在下一章节的 (21) 中定义的有序基。我们将其简记为 e_i, f_i, h_i, z_i，其中 $0 \le i < f$。

b) 对于 $N \ge 0$，$\mathbf{gr}_{r_{N'}} \mathcal{O}_L[\![H^{p^N}]\!]$ 是由 $\mathbf{e}_k^{p^N}$、$\mathbf{f}_k^{p^N}$、$\mathbf{h}_k^{p^N}$、$\mathbf{z}_k^{p^N}$、$0 \le k < f$ 生成的多项式代数，定义如下：

$$\mathbf{x}_k^{p^N} = \sum_{i=0}^{f-1} \mathrm{Frob}^{k+N} \beta_i \cdot \sigma_{r_{N'}} \left(\left[x_i^{p^N} \right] - 1 \right),$$

其中，$x \in \{e, f, h, z\}$ 被视为对 \mathbf 敏感。
这是将引理 4.3（连同剩余域的分解 (17)）应用于群 $H^{1/p}$ 的结果。

c) 作为 $D_{1/p}(H^{p^N}, L)$ 中元素的 $p^{2N+6}\Delta_{\mathrm{Frob}^k}$，其主符号为

$$\sigma_{1/p}\left(p^{2N+6}\Delta_{\mathrm{Frob}^k}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{h}_{k-N}^{p^N}\right)^2 + 2\varepsilon \mathbf{e}_{k-N}^{p^N}\mathbf{f}_{k-N}^{p^N}. \tag{20}$$

这是前面两节中的引理 6.5。

现在我们照例选定一个满射 $\mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0} \twoheadrightarrow M_\circ$，以便定义 $M_\circ$ 上的所有滤过。用 λ 表示无穷小特征，并取足够大的 N，使得所有 $\lambda\left(p^{2N+6}\Delta_{\mathrm{Frob}^k}\right)$ 的赋值都大于 (20) 的赋值（显然，$\ge 2p/(p-1)$ 已足够大）。然后

$$p^{2N+6}\Delta_{\mathrm{Frob}^k} - \lambda\left(p^{2N+6}\Delta_{\mathrm{Frob}^k}\right)$$

在 M_{r_N} 上作用为 0，且它们的主符号仍如 (20) 所示。
取可能更大的 N，以确保 $\mathbf{gr}_{r_N} M_\circ \to \mathbf{gr}_{r_N} M_{r_N}$ 是一个单射；根据推论 5.2，这是可能的。
于是，(20) 中的主符号都湮灭 $\mathbf{gr}_{r_N} M_\circ$。这意味着 $\mathbf{h}_k$ 在 $\mathbf{gr}_{r_N} M_\circ/\varepsilon_L\mathbf{gr}_{r_N} M_\circ$ 上幂零地作用。由 $\mathbf{gr}_{r_N} M_\circ$ 的 ε-无挠性以及引理 2.4，$\mathbf{gr}_{r_N} M_\circ/\varepsilon_L\mathbf{gr}_{r_N} M_\circ$ 实际上等于 $\mathbf{gr}\ M$，其不依赖于 N。因此，我们可以重新选取 N（至少与之前一样大），从而得到：$\mathbf{h}_k^{p^N}$ 的乘法将 $\mathbf{gr}_{r_N} M_\circ$ 映入 $\varepsilon\mathbf{gr}_{r_N} M_{\circ\circ}$ $\mathbf{h}\ \frac{1}{2}\binom{p^N}{k}^2/\varepsilon$ 也随即将 $\mathbf{gr}_{r_N} M_\circ$ 映入 $\varepsilon\mathbf{gr}_{r_N} M_{\circ\circ}$ 与此同时，所有

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{h}_{k-N}^{p^N}\right)^2/\varepsilon + 2\mathbf{e}_{k-N}^{p^N}\mathbf{f}_{k-N}^{p^N}$$

根据其 ε-无挠性，在 $\mathbf{gr}_{r_N} M_\circ$ 上的作用为 0。因此我们得出，所有 $\mathbf{e}_k\mathbf{f}_k$ 都在 $\overline{\mathbf{gr}}\ M$ 上幂零地作用。
最后，$\mathbf{z}_k$ 也在 $\overline{\mathbf{gr}}\ M$ 上幂零地作用，因为

$$\sigma_{1/p}\left(p^{N+3}z_{\mathrm{Frob}^k}\right) = \mathbf{z}_{k-N}^{p^N} \in \mathrm{gr}_{1/p} D_{1/p}(H^{p^N}, L)$$

其中，$p^{N+3}z_{\mathrm{Frob}^k}$ 被视为 $D_{1/p}(H^{p^N},\ L)$ 的元素——再次应用引理 6.5。选取可能更大的 N，可知 $\lambda\left(p^{N+3}z_{\mathrm{Frob}^k}\right)$ 具有

正赋值，并像之前一样得出结论：$\mathbf{z}_k$ 在 $\operatorname{gr} M$ 上幂零作用。

由于 $\operatorname{gr} k_L[\![H]\!]/\left(\mathbf{h}_k,\ \mathbf{e}_k\mathbf{f}_k,\ \mathbf{z}_k\colon\ 0\le k\prec f\right)$是 f，因此 $\operatorname{gr} M$ 的 Krull 维数至多为 f；根据第6.1节末尾的讨论，这就给出了 Gelfand-Kirillov 维数所需的界。■

范畴 $\mathcal{C}$。如上所述，研究湮灭性质的最初动机之一，是考察一个范畴——我们称之为 $\mathcal{C}$ ——由 $\mathrm{GL}_2\mathbf{Q}^{p^f}$ 上 $\mathrm{GL}_2 K$ 的光滑可容许模 k_L-表示构成；该范畴最早见于 [BHH+23a，第 113]页，以及 [BHH+23b，第5节3]。这个范畴由如下光滑可容许模 k_L-表示构成：它们是 $\mathrm{GL}_2\mathbf{Q}^{p^f}$ 的表示，具有中心特征，并且其伴随分次 $\operatorname{gr} k_L[\![I_1]\!]$-模 $\operatorname{gr}\pi^\vee$ 被该双边理想的某个幂所湮灭

$$I_G\coloneqq(\overline{\sigma}(ph_{\mathrm{Frob}^i}),\overline{\sigma}(e_{\mathrm{Frob}^i})\overline{\sigma}(pf_{\mathrm{Frob}^i}))\colon 0\le i<f)\subset U_{k_L}\left(\overline{\operatorname{gr} I_1}\right)\cong\operatorname{gr} k_L[\![I_1]\!],$$

其中，$I_1=H^{1/p^2}$ 是 $\mathrm{GL}_2 K$ 的上三角 pro-p Iwahori 子群。此外，中心特征条件还确保 $\operatorname{gr}\pi^\vee$ 被 $\sigma(p^{z_{\mathrm{Frob}^i}})$ 湮灭，因为 $\operatorname{gr} k_L[\![I_1]\!]$ 中的这些元素是带有 $z\in I_1$ 中心的元素 $z-1$ 的线性组合的（主符号），而 I_1 的中心在 π 上平凡作用。

由此可知，对于这样的 π，其伴随分次 $\operatorname{gr}\pi^\vee$ 实际上被双边理想的某个幂湮灭

$$J\coloneqq(\overline{\sigma}(ph_{\mathrm{Frob}^i}),\overline{\sigma}(e_{\mathrm{Frob}^i})\overline{\sigma}(pf_{\mathrm{Frob}^i}),\overline{\sigma}(pz_{\mathrm{Frob}^i})\colon 0\le i<f).$$

这与我们在定理 6.1 中看到的情形有明显联系。首先，理想 J 包含理想

$$\left(\overline{\mathbf{h}}_k,\overline{\mathbf{e}}_k\overline{\mathbf{f}}_k,\overline{\mathbf{z}}_k\colon 0\le k<f\right)\subset\operatorname{gr} k_L[\![I_1^{p^2}]\!]$$

定理的证明中所述的理想。因此，如果 J 的某个幂具有此性质，那么这个后一个理想的某个幂也会湮灭 $\operatorname{gr}\pi^\vee$。如同在我们的定理证明中一样，这给出了 Gelfand-Kirillov 维数的一个界：$\mathcal{C}$ 中的表示 π 的 Gelfand-Kirillov 维数至多为 f（见 [BHH+23b，推论 5.3.5]）。

反过来，我们可以从一个可容许的 L-巴纳赫表示 Π 出发，它具有 $\mathrm{GL}_2 K$ 的无穷小特征，并且还是酉的，因此它有一个 $\mathrm{GL}_2 K$-稳定的开单位球，其模 ϖ_L-约化随后给出一个光滑可容许的 k_L-表示 π。若 M 是 Π的 L-对偶，那么 $\pi^\vee$ 便可表示为 M，其中某个有限生成的 $\mathcal{O}_L[\![I_1]\!]$-模 $M_\circ$ 满足 $M_\circ[1/p]=M_\circ$。因此，定理 6.1 的证明告诉我们，$\operatorname{gr}\pi^\vee$ 被 $\left(\mathbf{h}_k,\mathbf{e}_k\mathbf{f}_k,\mathbf{z}_k\colon\ 0\le k<f\right)$的某个幂所湮灭。

如果我们进一步假设 π 具有中心特征，那么 [Sor] 意味着 $\operatorname{gr}\pi^\vee$ 实际上被 I_G的某个幂所湮灭，因此 π 将属于 $\mathcal{C}$。

范畴 $\mathcal{C}$ 在模 p朗兰兹纲领中仍扮演着神秘但似乎重要的角色，此前对它的研究纯粹是在模 p 的情形下进行的。我们希望，定理 6.1 背后的思想能让我们对它有更深入的了解

。由于 [Sor] 表明，该范畴可以针对任意小的 $I_1^{p^N}$ 来定义，下面更一般的定理 6.2 似乎指出了哪些理想可能定义类似的模 p 表示范畴，这些范畴适用于带有 K 分歧的 $\mathrm{GL}_2 K$ 群，或四元数的单位群。

事实上，再次利用 [Sor] 中的结果，定理 6.2 专门应用于非分歧 K 上的四元数单位时，也能以同样的方式恢复 [HW24] 中研究的模 p 表示范畴；当专门应用于非分歧 GL_2 时，它也能恢复 $\mathcal{C}$。

6.5. 李代数的有序基与生成元 $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} H$。现在我们将为 H 选取一组有序基，不过我们并不特别在意其排列顺序，这部分就留给读者。

在 GL_2 情形下，它将由以下元素构成：$e_{i,\,j}$，$f_{i,\,j}$，$h_{i,\,j}$，$z_{i,\,j}$，其中 $0 \le i < f$，$0 \le j < e_K$，定义如下：对于 $x \in \{e, f, h, z\}$，我们令

$$x_{i,j} \coloneqq \begin{cases} \exp(\alpha^i \varpi_K^j p^2 e) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^i \varpi_K^j p^2 \\ & 1 \end{pmatrix} & \text{if } x = e, \\ \exp(\alpha^i \varpi_K^{j+1} p^2 x) & \text{else.} \end{cases} \tag{21}$$

利用对数 log：$H \to M_2 \mathcal{O}_K$ 可以验证，这些确实构成一组有序基。

在四元数情形下，我们为 $H = 1 + p^2 \Pi \mathcal{O}_D$选取以下有序基：

$$a_{i,j} \coloneqq \exp(p^2 \alpha^i \Pi^{2j+1}), b_{i,j} \coloneqq \exp(p^2 \sqrt{a} \alpha^i \Pi^{2j+1}),$$
$$c_{i,j} \coloneqq \exp(p^2 \sqrt{a} \alpha^i \varpi_K^{1+j}), z_{i,j} \coloneqq \exp(p^2 \alpha^i \varpi_K^{1+j}),$$

其中 $0 \le i < f$，$0 \le j < e_K$。同样，利用对数可以看出它们构成一组有序基。

现在将 H 视为$\mathbf{Z}_p$ 上的李代数，基本上根据定义可知，它由这组有序基在 $\mathbf{Z}_p$ 上生成。利用 $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathcal{O}_K$ 由 $\mathcal{O}_L$ 上的 $\sum_i \mathrm{Frob}^k(\beta_i) \otimes \alpha^i$和 $1 \otimes \varpi_K^j$生成这一事实，并受四元数情形下 (15) 的启发，我们注意到，$\mathcal{O}_L$-李代数 $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} H$在 $\mathcal{O}_L$上有以下生成元：

- 在 GL_2 情形下的 $\sum_{i=0}^{f-1} \mathrm{Frob}^k \beta_i \otimes x_{i,\,j}$对于 $0 \le k < f$，$0 \le j < e_K$，以及 $x \in \{e, f, h, z\}$；
- 在四元数情形下，我们得到以下生成元

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{f-1} \mathrm{Frob}^k \beta_i \otimes a_{i,j} + \mathrm{Frob}^k \left(\frac{\beta_i}{\sqrt{a}}\right) \otimes b_{i,j}\right),$$
$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{f-1} \mathrm{Frob}^k \beta_i \otimes a_{i,j} - \mathrm{Frob}^k \left(\frac{\beta_i}{\sqrt{a}}\right) \otimes b_{i,j}\right),$$
$$\sum_{i=0}^{f-1} \mathrm{Frob}^k \left(\frac{\beta_i}{\sqrt{a}}\right) \otimes c_{i,j}, \text{ and } \sum_{k=0}^{f-1} \mathrm{Frob}^k \beta_i \otimes z_{i,j},$$

where $0 \leq k < f, 0 \leq j < e_K$.

将上述元素乘以 p^N （这等价于将表达式中指数映射的参数乘以 p^N），我们得到在 $\mathcal{O}_L$ 上的 $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} H^{p^N} = \mathcal{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} p^N \cdot H$的生成元。

最后，我们指出，既然现在在 H 上已有一个有序基，我们便可以考虑分布代数 $D_{r_n}(H, L)$ 等，尤其是相应的滤过；并且今后每当我们这样做时，都将相对于所选的基（采用读者所偏好的顺序）。

6.6. **同余**。 我们首先以更便于处理李元素的方式来描述环 $\mathbf{gr}_{r_{N'}} \mathcal{O}_L[\![H^{p^N}]\!]$。

引理 6.3。 设 N、$N' \geq 0$。 k_L-代数 $\mathrm{gr}_{r_{N'}} \mathcal{O}_L[\![H^{p^N}]\!]$ 是以 ε_L 为生成元的多项式代数，并且

$$\mathbf{x}_{k,j}^{(p^N)} := \sigma_{r_{N'}} \left(\sum_{i=0}^{f-1} \mathrm{Frob}^{k+N} \beta_i \left(\left[x_{i,j}^{p^N} \right] - 1 \right) \right), x \in \{e, f, h, z\}, 0 \leq k < f, 0 \leq j < e_K$$

在 GL_2 情形中，通过 ε_L 和

$$\mathbf{w}_{k,j}^{(p^N)} := \frac{1}{2} \sigma_{r_{N'}} \left(\sum_{i=0}^{f-1} \mathrm{Frob}^{k+N} \beta_i \left(\left[a_{i,j}^{p^N} \right] - 1 \right) + \mathrm{Frob}^{k+N} \left(\frac{\beta_i}{\sqrt{a}} \right) \left(\left[b_{i,j}^{p^N} \right] - 1 \right) \right),$$

$$\mathbf{h}_{\ell,j}^{(p^N)} := \sigma_{r_{N'}} \left(\sum_{i=0}^{f-1} \mathrm{Frob}^{\ell+N} \left(\frac{\beta_i}{\sqrt{a}} \right) \left(\left[c_{i,j}^{p^N} \right] - 1 \right) \right),$$

$$\mathbf{z}_{\ell,j}^{(p^N)} := \sigma_{r_{N'}} \left(\sum_{i=0}^{f-1} \mathrm{Frob}^{\ell+N} \beta_i \left(\left[z_{i,j}^{p^N} \right] - 1 \right) \right), 0 \leq k < 2f, 0 \leq \ell < f, 0 \leq j < e_K$$

在四元数情形中。

注 6.1. 上文定义的记号“$\mathbf{x}_{(p^N)k,j}$”，$\mathbf{x} \in \{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{h}, \mathbf{z}, \mathbf{w}\}$省略了解析半径 $r_{N'}$，因此会造成记号滥用：可数无穷多个不同的元素（因它们属于不同的环而彼此不同）都用同一种方式表示。为避免混淆，我们将始终确保母环是明确的。

这些元素模 ε_L 的约化，记作 $\mathbf{x}_{(p^N)\ k,j}$，则始终是 $\mathrm{gr}\ k_{\bar{L}}[\![H^{p^N}]\!] \cong \mathrm{gr}_{r_{N'}} k_L[\![H^{p^N}]\!]$ 中的同一个元素。

关于 p 次幂，我们有如下相容性。

引理 6.4. 设 N、$N' \geq 0$ 为整数，并将单射

$$\mathrm{gr}_{r_{N'}} \mathcal{O}_L[\![H^{p^N}]\!] \hookrightarrow \mathrm{gr}_{r_{N+N'}} \mathcal{O}_L[\![H]\!]$$

作为一个包含。在 GL_2 情形下，我们于是有

$$\mathbf{x}_{k,j}^{(p^N)} = \mathbf{x}_{k,j}^{p^N},$$

其中 $\mathbf{x}_{k,j} := \mathbf{x}_{(p^0)\ k,j}$，四元数情形也类似。因此，我们将省略前一个引理中定义的记号里的括号。

证明。这就是引理 4.2。 ■

最后，与 Lie H 的关系由下一个引理描述。

引理 6.5。考虑自然映射

$$L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathfrak{gl}_2\, K \cong L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \operatorname{Lie} H \to D_{r_N}(H, L).$$

将所有主符号都视为取自 $\operatorname{gr}_{r_N} D_{r_N}(H, L)$，则有：

$$\sigma_{r_N}(e_\rho) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^{N+2}} \sum_{j=0}^{e_K-1} \rho(\gamma_j)\mathbf{e}_{k-N,j}^{p^N} & \mathrm{GL}_2\text{-}case, \\ \frac{1}{\varepsilon_K\varepsilon^{N+2}} \sum_{j=0}^{e_K-1} \rho(\gamma_j)\mathbf{w}_{k-N,j}^{p^N} & quaternion\ case, \end{cases}$$

$$\sigma_{r_N}(f_\rho) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_K\varepsilon^{N+2}} \sum_{j=0}^{e_K-1} \rho(\gamma_j)\mathbf{f}_{k-N,j}^{p^N} & \mathrm{GL}_2\text{-}case, \\ \frac{1}{\varepsilon^{N+2}} \sum_{j=0}^{e_K-1} \rho(\gamma_j)\mathbf{w}_{k+f-N,j}^{p^N} & quaternion\ case, \end{cases}$$

$$\sigma_{r_N}(h_\rho) = \frac{1}{\varepsilon_K\varepsilon^{N+2}} \sum_{j=0}^{e_K-1} \rho(\gamma_j)\mathbf{h}_{k-N,j}^{p^N},$$

$$\sigma_{r_N}(z_\rho) = \frac{1}{\varepsilon_K\varepsilon^{N+2}} \sum_{j=0}^{e_K-1} \rho(\gamma_j)\mathbf{z}_{k-N,j}^{p^N},$$

其中 ρ 限制为 Frob^k。
卡西米尔算子的主符号如下

$$\sigma_{r_N}(\Delta_\rho) = \frac{1}{2\varepsilon_K^2\varepsilon^{2N+4}} \left(\sum_{j=0}^{e_K-1} \rho(\gamma_j)\mathbf{h}_{k-N,j}^{p^N} \right)^2 + \frac{2}{\varepsilon_K\varepsilon^{2N+4}} \left(\sum_{j=0}^{e_K-1} \rho(\gamma_j)\mathbf{e}_{k-N,j}^{p^N} \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{e_K-1} \rho(\gamma_j)\mathbf{f}_{k-N,j}^{p^N} \right)$$

在GL_2 情形下，以及

$$\sigma_{r_N}(\Delta_\rho) = \frac{1}{2\varepsilon_K^2\varepsilon^{2N+4}} \left(\sum_{j=0}^{e_K-1} \rho(\gamma_j)\mathbf{h}_{k-N,j}^{p^N} \right)^2 + \frac{2}{\varepsilon_K\varepsilon^{2N+4}} \left(\sum_{j=0}^{e_K-1} \rho(\gamma_j)\mathbf{w}_{k-N,j}^{p^N} \right) \left(\sum_{j=0}^{e_K-1} \rho(\gamma_j)\mathbf{w}_{k+f-N,j}^{p^N} \right)$$

在四元数情形下。

证明。首先注意，一般而言，当 $\mathbf{r} \in$ 是李 G 时，指数映射$\mathbf{r}$ 存在，且 $[\exp \mathbf{r}] - 1$ 的赋值为 $> 1/(p-1)$，那么$\mathbf{r}$ 在分布代数中的像为

$$-\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1 - [\exp \mathbf{r}])^i}{i}$$

（如式（8）附近所述），与 [指数映射$\mathbf{r}$] $- 1$ 具有相同的主符号。
由此以及李代数的分解 (16)，尤其是 (19)（四元数情形下还有 (15)），即可得出 $e_\rho, f_\rho, h_\rho, z_\rho$ 的主符号表达式，前提是主

符号对我们的求和具有可加性。由于我们声称为主符号的表达式显然非零，只需验证它们是齐次的。这由引理 6.2 以及以下事实可知：对于 $0 < j+1 < e_K$，$\mathbf{x}_i^{p^N}{}_{,j+1}$ 的赋值总是恰好比$\mathbf{x}_i^{p^N}{}_{,j}$ 的赋值大 $1/e_K$（这可由 H 上的 p-赋值的定义推出）。卡西米尔算子的公式看起来或许可以直接得出，但同样需要注意验证其齐次性，这次就留给读者了。■

6.7. **一般情形下的界。**

定理 6.2. 设 $p > 2$，设 K 是一个 p-进域，且 D 是 K上的四元数代数。若 Π 是具有无穷小特征的可容许 L-巴拿赫表示，属于$\mathrm{GL}_2 K$ 或 $D^\times$，则其 ***Gelfand-Kirillov* 维数为 $\leq [K\colon$ 有理数域$_p]$。**

证明。选取并固定一个嵌入 $\rho\colon K \hookrightarrow L$。并令 $0 \leq k < f$ 使得 $\rho|_{\mathbf{Q}_p[\alpha]} = \mathrm{Frob}^k$。
根据引理 6.2，我们定义

$$\mu_{j,\rho} \coloneqq \varpi_K^{R_K+j}\rho(\gamma_j) \in \mathcal{O}_{K'}^\times$$

并将它们模 $\varpi_{K'}$ 的约化记为 $\mu_{j,\rho} \in k_{K'} = k_K$。
令 C 为二次卡西米尔算子 Δ_ρ 或李代数中心元素 z_ρ。对于 $N \in f\mathbf{Z}_{\geq 0}$，考虑以下元素

$$C_N \coloneqq \begin{cases} \left(p^{N+2}\varpi_K^{e_K+R_K}\right)^2 C & \text{if } C = \Delta_\rho, \\ p^{N+2}\varpi_K^{e_K+R_K} C & \text{if } C = z_\rho, \end{cases}$$

$\mathcal{Z}\left(U(L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathfrak{gl}_2 K)\right)$ 的
那么，根据引理 6.5，$\sigma_{r_N}(C_N) \in \mathrm{gr}_{r_N} \mathcal{O}_L[\![H]\!] \subset \mathrm{gr}_{r_N} D_{r_N}(H, L)$，其值为

(22)

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{e_K-1} \overline{\mu}_{e_K-1-j,\rho}\mathbf{h}_{k,e_K-1-j}^{p^N}\varepsilon_K^j\right)^2$$

$$+2\varepsilon_K\left(\sum_{j=0}^{e_K-1} \overline{\mu}_{e_K-1-j,\rho}\mathbf{e}_{k,e_K-1-j}^{p^N}\varepsilon_K^j\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{e_K-1} \overline{\mu}_{e_K-1-j,\rho}\mathbf{f}_{k,e_K-1-j}^{p^N}\varepsilon_K^j\right)$$

在 $C = \Delta_\rho$ 的情况下以及 GL_2 的情况下，其值为

$$\sum_{j=0}^{e_K-1} \overline{\mu}_{e_K-1-j,\rho}\mathbf{z}_{k,e_K-1-j}^{p^N}\varepsilon_K^j$$

在情形 $C = z_\rho$ 中。在四元数情形下，要将 $\mathbf{e}_{k,\ e_K-1-j}$替换为 $\mathbf{w}_{k,\ e_K-1-j}$，并将$\mathbf{f}_{k,\ e_K-1-j}$ 替换为 $\mathbf{w}_{k+f,\ e_K-1-j}$，才能得到二次 Casimir 情形下的正确表达式。

（在二次 Casimir 情形下展开括号后，）我们发现，在这两种情形下，$\sigma_{r_N}(C_N)$ 都是关于 ε_K 的多项式：

$$\sigma_{r_N}(C_N) =: \sum_{i=0}^{d_C} c_{N,i}\varepsilon_K^i, \tag{23}$$

其中次数等于 $d_C = \begin{cases} 2e_K - 1 & \text{若 } C = \Delta_\rho, \\ e_K - 1 & \text{若，并} \quad C = z_\rho \end{cases}$

且 $C_{N,\,i} \in \mathrm{gr}_{r_N} \mathcal{O}_L[\![H]\!]$ 是关于变量 $\mathbf{x}_{k,\,j}$ 的 $k_{K'} = k_K$ 上的齐次多项式表达式，其中 $\mathbf{x} \in \{\mathbf{e},\ \mathbf{f},\ \mathbf{h},\ \mathbf{w},\ \mathbf{z}\}$。

观察： 对于所有 $0 \le i \le d_C$ 和所有 $m \in \mathbf{Z}_{\ge 0}$，我们有

$$\bar{c}_{N,i}^{p^{mf}} = \bar{c}_{N+mf,i} \text{ in } \operatorname{gr} k_L[\![H]\!]$$

并且实际上 $c_{N,\,i} \in \operatorname{gr} k_L[\![H]\!] \cong \mathrm{gr}_{r_{N+mf}} \mathcal{O}_L[\![H]\!]/\varepsilon_L$ 可提升为 p^{mf} 次根 $c_{N,\,i}$ 于 $\mathrm{gr}_{r_{N+mf}} \mathcal{O}_L[\![H]\!]$ 中。

现在选择满足 $\log\left(p^{sf}\right) \ge e_L/e_K$ 的极小 $s \in \mathbf{Z}_{>0}$。然后我们作出如下断言。

断言： 设 $M_\circ$ 是有限生成的 $\mathcal{O}_L[\![H]\!]$-模，并固定一个 $\mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0} \twoheadrightarrow M_\circ$，在其上按通常方式诱导所有 $\mathrm{Fil}^\bullet_{r_N}$-滤过。假设存在一个 $N \in f\mathbf{Z}_{\ge 0}$，使得所有 $\mathrm{gr}_{r_{N+sfi}} M_\circ$ 都是 ε- 无挠的，并且被 $\sigma_{r_{N+sfi}}(C_{N+sfi})$ 湮灭，其中 $0 \le i \le d_C$。那么，$c_{N+sfi,\,i}$ 湮灭 $\operatorname{gr} M$，其中 $0 \le i \le d_C$。

我们对 i 使用归纳法证明该断言。首先注意到，根据引理 2.4，ε-无挠性假设意味着 $\mathrm{gr}_{r_{N+sfi}} M_\circ/\varepsilon_L \mathrm{gr}_{r_{N+sfi}} M_\circ$ 全都等于 $\operatorname{gr} M_\circ$。因此，$M$ 被 $c_{N,\,0}$ 湮灭，直接由假设以及 $\sigma_{r_N}(C_N)$ 模 ε_L 等于 $\bar{c}_{N,\,0}$ 得出。

现在假设 $c_{N+sf\ell,\,\ell}$ 湮灭 $\operatorname{gr} M$ 对于 $0 \le \ell < i$。那么，根据上述观察，乘法乘以 $c_{N+sfi,\,\ell}$ 定义了一个映射

$$\mathrm{gr}_{r_{N+sf\ell}} M_\circ \to \varepsilon_L^{p^{sf(i-\ell)}} \mathrm{gr}_{r_{N+sf\ell}} M_\circ,$$

这意味着乘法乘以 $c_{N+sfi,\,\ell}\varepsilon_K^\ell$ 定义了一个映射

$$\mathrm{gr}_{r_{N+sf\ell}} M_\circ \to \varepsilon_L \varepsilon_K^i \mathrm{gr}_{r_{N+sf\ell}} M_\circ,$$

利用这一点

$$p^{sf(i-\ell)}/e_L + \ell/e_K > \log(p^{sf})(i-\ell)/e_L + \ell/e_K \ge i/e_K.$$

[5]事实上，这样的提升到 $\mathrm{gr}_{r_{N+mf}} \mathcal{O}_L[\![H]\!]$ 中可以直接通过与 $C_{N,\,i} \in \mathrm{gr}_{r_N} \mathcal{O}_L[\![H]\!]$ 相同的公式给出，该公式使用变量 $\mathbf{x}_{k,\,j}$，但现在这些变量被解释为 $\mathrm{gr}_{r_{N+mf}} \mathcal{O}_L[\![H]\!]$ 的元素。

因此，该元素

$$t_i \coloneqq \frac{1}{\varepsilon_K^i} \sum_{\ell=0}^{i-1} c_{N+sfi,\ell} \varepsilon_K^\ell \in \mathrm{gr}_{r_{N+sf\ell}} L[\![H]\!]$$

稳定 $\mathrm{gr}_{r_{N+sf\ell}} M_\circ \subset \mathrm{gr}_{r_{N+sf\ell}} M_\circ[1/\varepsilon]$，并在其商 $\mathrm{gr}\ M$上平凡作用。

根据假设，元素 $\sigma_{r_{N+sfi}}(C_N)/\varepsilon_K^i \in \mathrm{gr}_{r_{N+sf\ell}} L[\![H]\!]$ 湮灭 $\mathrm{gr}_{r_{N+sf\ell}} M_\circ \subset \mathrm{gr}_{r_{N+sf\ell}} M_\circ[1/\varepsilon]$。因此，$\sigma_{r_{N+sfi}}(C_N)/\varepsilon_K^i - t_i$ 湮灭 $\mathrm{gr}\ M_\circ$。与此同时，根据 (23)，$\sigma_{r_{N+sfi}}(C_N)/\varepsilon_K^i$ 是 $\mathrm{gr}_{r_{N+sf\ell}} \mathcal{O}_L[\![H]\!]$的一个元素，其模 ε_L 约化等于 $c_{N+sfi,\ i_\circ}$ 至此，断言得证。

现在我们已做好充分准备来证明该定理。令 M为 Π^*，并在 M 中取一个有限生成的子-$\mathcal{O}_L[\![H]\!]$-模 $M_\circ$，使得$M_\circ[1/p] = M_\circ$

固定如上方断言中的 $\mathcal{O}_L[\![H]\!]^{\oplus N_0} \twoheadrightarrow M_\circ$。对于 $N \gg 0$，上述断言的条件均满足。事实上，取 $N \gg 0$，首先可以根据命题 5.1 确保对所有 $N' \geq N$，所有 $\mathrm{gr}_{r_{N'}} M_\circ$ 都是 ε-无挠的。其次，注意到 $\sigma_{r_{N'}}(C_{N'}) \in \mathrm{gr}_{r_{N'}} \mathcal{O}_L[\![H]\!]$ 的次数与 N' 无关，而 $\sigma_{r_{N'}}(\lambda(C_{N'}))$ 的次数是 $\lambda(C_{N'})$ 的 p-进赋值，当 $N' \to \infty$ 时趋于 ∞。因此，

$$\sigma_{r_{N'}}(C_{N'} - \lambda(C_{N'})) = \sigma_{r_{N'}}(C_{N'}) \text{ for } N' \gg 0.$$

由于上述等式的左端在 $\mathrm{gr}_{r_{N'}} M_{r_{N'}}$ 上作用为 0，且引理 2.3 告诉我们 $\mathrm{gr}_{r_{N'}} M_\circ[1/\varepsilon] = \mathrm{gr}_{r_{N'}} M_{r_{N'}}$，我们看到，只要将 N 取得可能更大一些，就确实可以满足上述断言的条件。

最后，对每个 $0 \leq k < f$，选择一个嵌入 $\rho_k\colon K \hookrightarrow L$，使其限制为 Frob^k。对 $0 \leq i < 2e_K$, $c_{\rho_k,\ i} \in$定义 $\mathrm{gr}\ k_L[\![H]\!]$ 为系数 $c_{0,\ i}$，在情形 $C = \Delta_{\rho_k}$ 下。回顾上文所做的一切，我们发现理想的某个幂

$$I \coloneqq (\overline{c}_{\rho_k,i}, \overline{\mathbf{z}}_{k,i} \colon 0 \leq i < 2e_K, 0 \leq k < f) \subset \mathrm{gr}\, k_L[\![H]\!] \tag{24}$$

湮灭 $\mathrm{gr}\ M_\circ$

因此，$\mathrm{gr}\ M$ 的 Krull 维数（即 Π 的 Gelfand-Kirillov 维数）至多为环 $\mathrm{gr}\, k_L[\![H]\!]/I$ 的 Krull 维数，而我们断言该维数至多为 $[K\colon \textbf{有理数域}_p]$。为说明这一点，首先注意到

$$\mathrm{gr}\, k_L[\![H]\!]/I \cong \otimes_{k=0}^{f-1} R_k/I_k$$

其中张量积取在 k_L 上，并且对于 $0 \leq k < f$,

$$R_k \coloneqq \begin{cases} k_L[\overline{\mathbf{e}}_{k,i}, \overline{\mathbf{f}}_{k,i}, \overline{\mathbf{h}}_{k,i} \colon 0 \leq i < e_K] & \mathrm{GL}_2\text{-case}, \\ k_L[\overline{\mathbf{w}}_{k,i}, \overline{\mathbf{w}}_{k+f,i}, \overline{\mathbf{h}}_{k,i} \colon 0 \leq i < e_K] & \text{quaternion case}, \end{cases}$$

是 k_L 上的多项式代数，其理想为

$$I_k \coloneqq (\overline{c}_{\rho_k,i} \colon 0 \le i < e_K) \subset R_k.$$

因此，只需证明 R_k/I_k 的 Krull 维数至多为 e_K。这由下面的引理 6.6 得出，因为 R_k/I_k 与该引理中的环（取 $n = e_K - 1$）抽象同构；由（22）以及 $\mu_{\rho_k,j}$ 非零这一事实即可看出这一点。■

引理 6.6。设 $n \ge 0$ 和 $R \colon = k_L[u_0, \dots, u_n, v_0, \dots, v_n, w_0, \dots, w_n]$ 以及$U(X) = \sum_{i=0}^{n} u_i X^i, V(X) = \sum_{i=0}^{n} v_i X^i, W(X) = \sum_{i=0}^{n} w_i X^i \in R[X]$。设 I为由 $U(X)^2 - V(X)W(X)X$的系数生成的 R的理想。那么 R/I 的 *Krull* 维数至多为 $n+1$。

证明。设 $\mathfrak{p} \subset R$ 是一个包含 I的素理想。只需证明 $R/\mathfrak{p}$的 Krull 维数至多为 $n+1$。设 F是 $R/\mathfrak{p}$ 的分式域，并将显然的映射记为 $q\colon R \to F$。

由于 $U(X)^2 = V(X)W(X)X$在 F上， X必定整除 $U(X)$ 在 F上的形式，因此也整除 $V(X)$ 和 $W(X)$ 中的一个。我们在 F上得到如下恒等式：

$$\tilde{U}(X)^2 = \tilde{V}(X)\tilde{W}(X) \tag{25}$$

其中 $\tilde{U}(X) = q(U(X)) / X$，而 $\tilde{V}(X)$ 和 $\tilde{W}(X)$ 中的一个同样与原多项式相差。将 U的次数记为 d，于是 $d < n$。分别将 $\tilde{V}(X)$ 和 $\tilde{W}(X)$ 的次数记为 a和 b，于是$a, b \le n$且 $a + b = 2d$。若 $d = -\infty$，则 $\tilde{V}(X)$ 和 $\tilde{W}(X)$ 中的一个在 F 上为 0，而 $R/\mathfrak{p}$ 由另一个多项式的系数在 k_L 上生成，因此我们看到 $R/\mathfrak{p}$ 的 Krull 维数至多为 $n+1$。

现在假设 $d \ne -\infty$。记 $\tilde{U}(X) = \tilde{u}_0 + \cdots + \tilde{u}_d X^d$，依此类推。设 $\alpha_1, \dots, \alpha_d$是 $U(X)$ 在 F的某个代数扩张中的根（按重数计）。那么，$\frac{1}{\tilde{u}_d}\tilde{U}(X)$ $\frac{1}{\tilde{v}_a}\tilde{V}(X)$,和 $\frac{1}{\tilde{w}_b}\tilde{W}(X)$ 的系数全都属于由 $\alpha_1, \dots, \alpha_d$生成的 k_L-代数。因此可见，由 $\alpha_1, \dots, \alpha_d$、 $\tilde{v}_a$和 $\tilde{w}_b$生成的 k_L-代数包含 $U(X)$ $V(X)$,和 $W(X)$ 的系数，因此这个 k_L-代数包含 $R/\mathfrak{p}$。

因此， F在 k_L上的超越次数至多为 $d + 2 < n + 2$，故根据诺特正规化引理， $R/\mathfrak{p}$的 Krull 维数至多为 $n+1$，这正是我们要证明的。

■

注 6.2. 定理 *6.2* 的证明展示了$\operatorname{gr} k_L[\![H^{p^N}]\!]$中的某个理想 I，其某个幂会湮灭 $\operatorname{gr} M$。这启发我们将定义BHH$^+$23a] 和 [HW24] 的模 p表示范畴的零化条件推广到非分歧情形之外；这些范畴在第 *6.4* 章节中讨论。

通过引理 *6.2* 证明中的恒等式将（*22*）具体化，可以使这些*“Casimir* 理想*”*完全明确。

例如，若 $K =$**有理数域**$_p[\sqrt{p}]$, 所得到的理想（定理 *6.2* 证明中那个理想的根）为

$$\Big(\overline{\mathbf{z}}_0, \overline{\mathbf{z}}_1, \overline{\mathbf{h}}_1, \overline{\mathbf{e}}_0\overline{\mathbf{f}}_0, \overline{\mathbf{e}}_1\overline{\mathbf{f}}_1, \overline{\mathbf{h}}_0^2 + 4(\overline{\mathbf{e}}_1\overline{\mathbf{f}}_0 + \overline{\mathbf{e}}_0\overline{\mathbf{f}}_1)\Big) \subset k_L[\overline{\mathbf{e}}_i, \overline{\mathbf{f}}_i, \overline{\mathbf{h}}_i, \overline{\mathbf{z}}_i \colon i = 0, 1] = \operatorname{gr} k_L[\![H]\!],$$

其中，$\overline{\mathbf{x}}_i$ 表示当 $x \in \{f, h, z\}$ 时，[指数映射$(\sqrt{p}^{i+1} p^2 x)$]-1 的主符号，而 $\mathbf{e}_i$ 是 [指数映射 $(\sqrt{p}^{i} p^2 x)] - 1$ 的主符号。

最后，在 $f > 1$ 的情形下，我们指出，理想 I 不依赖于关于嵌入 $\rho_k\colon\ K \hookrightarrow L$ 所作的选择。

6.8. 主系列的等式。 在 GL_2 情形下，我们现在证明定理 6.2 中的界是最优的。取一个连续特征 $\chi\colon\ B \to L^\times$，其中 $B \subset \mathrm{GL}_2 K$ 是上三角博雷尔子群。于是我们定义主系列表示

$$\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2 K}(\chi) \coloneqq \left\{ f\colon \mathrm{GL}_2 K \overset{\text{cont.}}{\to} L\colon f(bg) = \chi(b)^{-1} f(g), \forall b \in B, g \in \mathrm{GL}_2 K \right\}.$$

根据岩泽分解 $B\,\mathrm{GL}_2 \mathcal{O}_K = \mathrm{GL}_2 K$，其在 $\mathrm{GL}_2 \mathcal{O}_K$ 上的限制同构于 $\mathrm{Ind}_{B\cap}^{\mathrm{GL}_2 \mathcal{O}_K}$ $_{\mathrm{GL}_2 \mathcal{O}_K}(\chi) \subset C(\mathrm{GL}_2 \mathcal{O}_K,\ L)$，因此显然这是 $\mathrm{GL}_2 K$ 的一个容许 L-巴拿赫表示。根据（[AH23，命题 2.48]，的证明），它具有无穷小特征，因此其 Gelfand-Kirillov 维数至多为 $[K\colon$ **有理数域**$_p]$。事实证明这里取等号。

命题 6.2. $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2 K}(\chi)$ 的 *Gelfand-Kirillov* 维数为 $[K\colon$ **有理数域**$_p]$。特别地，定理 *6.2* 的界在 GL_2 情形下是最优的。

证明。 $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2 K}(\chi)|_H$ 的限制自然包含 $\mathrm{Ind}_{H\cap B}^H(\chi)$ 作为子表示。根据 [GN22，引理 A.8] 结合命题 6.1，$\mathrm{Ind}_{H\cap B}^H(\chi)$ 的 Gelfand-Kirillov 维数至多为主系列表示的维数。因此，只需证明 $\mathrm{Ind}_{H\cap B}^H(\chi)$ 的 Gelfand-Kirillov 维数为 $[K\colon$ **有理数域**$_p]$。

特征 χ 通过在群元素上取值，诱导出一个映射 $L[\![H \cap B]\!] \to L$。将该映射的核记为 I_χ，它是一个双边理想。我们有

$$\mathrm{Ind}_{H\cap B}^H(\chi)^* = L[\![H]\!] / \left(L[\![H]\!] \cdot I_\chi\right)$$

由紧致性，映射可在整环上定义，$\mathcal{O}_L[\![H \cap B]\!] \to \mathcal{O}_L$，我们将其核记为 $I_{\chi,\ \circ}$。那么，当取 p的逆时，$M_\circ \coloneqq \mathcal{O}_L[\![H]\!]/(\mathcal{O}_L[\![H]\!] \cdot I_{\chi,\ \circ})$ 给出 $\mathrm{Ind}_{H\cap B}^H(\chi)^*$，并且

$$\mathrm{gr}\, \overline{M} = \mathrm{gr}\, k_L[\![H]\!] / \mathrm{gr}\left(k_L[\![H]\!] \cdot I_{\chi,\circ}\right),$$

其中 $k_L[\![H]\!] \cdot I_{\chi,\ \circ}$ 配备由 $k_L[\![H]\!]$诱导的滤过。由于 χ 是连续的、H 是 pro-p，且 $k_L^\times$ 与p互素，多项式 k_L-代数的理想 $\mathrm{gr}\,(k_L[\![H]\!] \cdot I_{\chi,\ \circ})$

$$\mathrm{gr}\, k_L[\![H]\!] = k_L[\overline{\sigma}\left([x_{i,j}] - 1\right) : 0 \le i < f, 0 \le j < e_K, x \in \{e, f, h, z\}]$$

（使用 (21) 中的记号）是由元素 $\sigma([x_{i,j}] - 1)$（$x \in \{e, h, z\}$）生成的理想，因此

$$\mathrm{gr}\, \overline{M} \cong k_L[\overline{\sigma}\left([f_{i,j}] - 1\right) : 0 \le i < f, 0 \le j < e_K]$$

Krull 维数为 $[K\colon$ **有理数域**$_p]$。 ■

6.9.**对某些来自 p进朗兰兹纲领的表示的应用**。我们希望我们的界和证明方法能对 p进朗兰兹纲领产生更多有趣的应用，但目前我们只想指出，我们的界可以直接应用于 p进朗兰兹纲领中出现的某些表示。

对于 $n \geq 1$ 一个整数， [CEG+18] 考虑任意连续的伽罗瓦表-示 r: $\mathrm{Gal}_K \to \mathrm{GL}_n k_L$ 及其 $R_r^{\square}$框架变形环。假设$p \nmid 2n$，他们通过拼接定定酉群上的自守形式，构造了一个修补模 $\mathbb{M}_\infty$ ，它是$R_\infty[\![\mathrm{GL}_n \mathcal{O}_K]\!]$上的有限生成模，其中 R_∞ 是一个完备诺特局部平坦的 $R_r^{\square}$-代数，剩余域为 k_L。修补模 $\mathbb{M}_\infty$ 还带有一个 R_∞-线性的 $\mathrm{GL}_n K$ 作用，并且该作用与 $\mathrm{GL}_n \mathcal{O}_K$作用相容。

对于 $y \in \mathrm{SpecMax}\, R_\infty[1/p]$ ，用 L_y 表示剩余域，并考虑

$$\Pi_y := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{L_y}}^{\mathrm{cont}} \left(\mathbb{M}_\infty \otimes_{R_\infty} \mathcal{O}_{L_y}, L_y \right).$$

它是 $\mathrm{GL}_n K$ 的一个（酉）可容许巴纳赫 L_y-表示，并被视为 p-进朗兰兹对应的候选对象，对应于伽罗瓦表示，即 y 在 $\mathrm{SpecMax}\, R_r^{\square}[1/p]$中的像。

在 [DPS25 定理 9.27] 中证明了，所有 Π_y 都有无穷小特征，因此我们得到:

推论 6.1。 若 $n = 2$ 且 $y \in \mathrm{SpecMax}\, R_\infty[1/p]$，则 $\mathrm{GL}_2 K$ 的 L_y-巴拿赫表示 Π_y 的 *Gelfand-Kirillov* 维数为 $\leq [K\colon \textbf{有理数域}_p]$。

备注 6.3。 *a)* 一个强得多的结果是，对特殊纤维 $\mathbb{M}_\infty/\mathfrak{m}_\infty$的 *Gelfand-Kirillov* 维数也能得到相同的界，其中$\mathfrak{m}_\infty$ 是 R_∞ 的极大理想。正如 [BHH+23b]中所述，这将（至少在 R_∞ 形式光滑且维数适当时）推出 $\mathbb{M}_\infty$ 在 R_∞ 上忠实平坦，进而例如可推出所有 Π_y 均非零。

> 遗憾的是，我们无法应用命题 *6.1* 得到这样的界，因为我们不知道这些 $\mathbb{M}_\infty \otimes_{R_\infty} \mathcal{O}_{L_y}$ 中是否有任何一个是 p-无挠的。我们用于建立该界的方法无法直接推广到当前这种 [DPS25] “族中的无穷小特征”的情形，但我们希望将来能够调整方法以适用于这种情形。

b) 最后值得注意的是， [DPS25] 给出了满足特定条件的情形；在这些情形下，连通约化群 G 在 $\mathbf{Q}$ 上的局部对称空间的完备上同调（在位置 p处）的海克特征空间具有无穷小特征，作为 $G(\mathbf{Q}_p)$ 的 p-进巴拿赫表示——参见其定理 *9.20* 和 *9.24*。对于模曲线或志村曲线情形下的某些海克特征空间（ [DPS25]的第 *§9.7* 和 *§9.8* 节），文中证明这些条件均得到满足。在这些情形下， $G(\mathbf{Q}_p)$ 是我们

研究过的群之一，因此我们得到了其中的 *Gelfand–Kirillov* 维数界。

References

[AH23] Noriyuki Abe 与 Florian Herzig。关于 p-进约化群的 p-进巴拿赫主系列的不可约性。https://arxiv.org/abs/2303. 13287v2, 2023.[BHH+23a] Christophe Breuil、Florian Herzig、Yongquan Hu、Stefano Morra 与 Benjamin Schraen。关于 p-进域 K 上 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的模表示的猜想与结果。https://arxiv.org/abs/2102.06188v4, 2023.[BHH+23b] Christophe Breuil、Florian Herzig、Yongquan Hu、Stefano Morra 与 Benjamin Schraen。GL_2 的 Gelfand-Kirillov 维数与模 p 上同调。*Inventiones mathematicae*, 234(1):1–128, 2023.[CEG+18] Ana Caraiani、Matthew Emerton、Toby Gee、David Geraghty、Vytautas Paˇsk¯unas 与 Sug Woo Shin。拼接与 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 的 p-进 Langlands 纲领。 *Compositio Mathematica*, 154(3):503–548, 2018. [DDSMS99] J. D. Dixon、M. P. F. Du Sautoy、A. Mann 与 D. Segal。 *Analytic Pro-p Groups* 。剑桥高等数学研究。剑桥大学出版社，第2版，1999。[DPS23] Gabriel Dospinescu、Vytautas Paˇsk¯unas 与 Benjamin Schraen。Gelfand-Kirillov 维数与 p-进 Jacquet-Langlands 对应。 *Journalfür die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2023(801):57–114, 2023. [DPS25] Gabriel Dospinescu、Vytautas Paˇsk¯unas 与 Benjamin Schraen。算术族中的无穷小特征。 *Selecta Mathematica*, 31(4):76, 2025. [GN22] Toby Gee 与 James Newton。拼接与局部对称空间的完备同调。 *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 21 2 395( ): –458, 2022. [HW24] Yongquan Hu 与 Haoran Wang。关于 $\mathbb{Q}_p$ 上四元数代数的某些模 p 表示。 *Compositio Mathematica*, 160(11):2585–2655, 2024. [Laz65] Michel Lazard。 p-进解析群。 *Publications Mathématiquesde l'IHÉS*, 26:5–219, 1965. [LVO96] Huishi Li 与 Freddy Van Oystaeyen。 *Zariskian Filtrations* 1 K-，卷 。施普林格 Dordrecht，st 版，。电子书 ISBN: 978-94-015-8759-4；平装 ISBN: 978-90-481-4738-0。[Sch02] Peter Schneider。 *Nonarchimedean Functional Analysis*。施普林格数学专著。施普林格，柏林，海德堡，第1版，2002。最初于2001年以精装出版。[Sch11] Peter Schneider。 *p-Adic Lie Groups* 344 *Grundlehren der mathe-*，卷 。施普林格，柏林，海德堡，st 版，。[Ser64] Jean-Pierre Serre。 p-进解析群。 *Séminaire Bourbaki*, 8 401 410, 1962 1964 : – - . [Sor] Reinier Sorgdrager。关于模 p 表示的某一范畴的注记。*manuscripta mathematica*，待发表。[ST02] Peter Schneider 与 Jeremy Teitelbaum。局部解析分布与 p-进表示理论及其在 GL_2 *Journal of the American* 上的应用。， *Mathematical Society* 15 2 443 468, 2002 ( ): – . [ST03] Peter Schneider 与 Jeremy Teitelbaum。 p-进分布代数与容许表示。 *Inventiones mathematicae*, 153(1):145–196, 2003.