arXiv:2602.08902v1 [math.AG] 9 Feb 2026

映射到希尔泽布鲁赫曲面的曲线的卷曲不变量

Riccardo Redigolo

摘要。在本文中，我们分析 $k:\ \mathbb{P}^1$ 的 1 覆盖的卷曲不变量；这些覆盖经过 m 阶希尔泽布鲁赫曲面中一条节点曲线的正规化。随后，我们给出一个存在性定理，讨论 $\mathbb{F}_m$ 中具有固定类和奇异轨迹的节点曲线。

1 引言

给定两个光滑不可约曲线之间的覆盖 $\alpha: C \to B$，包含映射 $\alpha^{\#}: \mathcal{O}_Y \to \alpha_* \mathcal{O}_X$ 给出以下分裂正合列:

$$0 \to \mathcal{O}_Y \to \alpha_* \mathcal{O}_X \to \mathcal{T}sch(\alpha)^{\vee} \to 0$$

人们称 $\mathcal{T}sch(\alpha)$ 为 α 的 Tschirnhausen 丛。历史上，这个丛在曲线覆盖的研究中一直发挥着核心作用；早在二十世纪上半叶，人们就用它研究三次覆盖曲线（例如参见 A. Maroni 的经典结果 [Mar46]or；更现代的论述可参见 [Mir85]）。关于 Tschirnhausen 丛的基础性结果，参见[CE96], ；该文更一般地研究了代数簇的 Gorenstein覆盖。

当 $B = \mathbb{P}^1_{\Bbbk}$ 时，线丛分解为

$$\mathcal{T}sch(\alpha) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e_{k-1}),$$

其中 $0 < e_1 \leq \cdots \leq e_{k-1}$。这些整数称为 α 的卷曲不变量。研究表明，它们在分析代数曲线的 Syzygy 时起着关键作用，例如参见 F. O. Schreyer 的论文 [Sch86]，或较新的例子 G. Farkas 和 M. Kemeny 的论文 [FK19]。更广泛地说，研究 k-重曲线上的线丛在推前到 $\mathbb{P}^1_{\Bbbk}$ 时如何分解，已被证明是研究这些曲线的 Brill–Noether理论的核心。事实上，这项研究使 H. Larson 得以在 [Lar21] 中改进 N. Pflueger 先前的结果 [Pfl17]，并确定一般 k-重曲线的 Brill-Noether 位的不可约分支的维数。随后，这也推动了 Hurwitz-Brill-Noether 理论中的许多有趣进展，例如 [LLV25], [CJ22]或 [FFR25]。

记$\mathcal{H}_{g,\ k}$ 为参数化由亏格为 g 的曲线对 $\mathbb{P}^1_{\Bbbk}$ 的次数为 k 覆盖的 Hurwitz叠，根据 [Bal89] 的一个众所周知的结果，一般覆盖 $\alpha \in \mathcal{H}_{g,\ k}$ 的卷曲不变量是平衡的（即 $e_{k-1} - e_1 \leq 1$）。另见 I. Coskun、E. Larson 和 I. Vogt [CLV24] 关于 α 为正亏格曲线之间的本原覆盖时的情形。然而，正如经常发生的那样，一般情形与我们最熟悉的覆盖所呈现的情形大相径庭。例如，若取 C 为 $\mathbb{P}^2_{\Bbbk}$ 中的一条光滑次数为 k 的曲线，并令 $\alpha: C \to \mathbb{P}^1_{\Bbbk}$ 为从不属于 C 的任意点出发的投影，则很容易验证:

$$\mathcal{T}sch(\alpha) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k-1)$$

一个自然的问题是，哪些自然数元组可以作为 $\mathbb{P}^1_{\Bbbk}$ 的本原 $k:1$ 覆盖的卷曲不变量出现。该问题最近受到了 R. Vakil 与 S. Vemulapalli 的关注，他们在 [VV25], 中提出如下猜想:

猜想 1.1. (Vemulapalli，猜想 1.3，见 *[VV25]*) 设 $k \geq 3$、$g \geq 0$，并考虑如下多面体：

$$\mathcal{P}_k := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{k-1} \mid \sum_{i \leq k-1} x_i = 1,\ 0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{k-1},\ x_{i+j} \leq x_i + x_j \right\}$$

一个正整数元组$\mathbf{e} := (e_1, \ldots, e_{k-1})$ 在 $e_1 + \cdots + e_{k-1} = g + k - 1$ 的情形下，是来自亏格为 g 的曲线的本原次数为 k 的覆盖 $\pi: C \to \mathbb{P}^1_{\bar{k}}$ 的卷曲不变量，当且仅当 $\left(\frac{e_1}{g+k-1}, \ldots, \frac{e_1}{g+k-1}\right) \in \mathcal{P}_d$。

解决这一问题的一个有用工具，是研究作为某些位于希尔泽布鲁赫曲面 $\mathbb{F}_m$ 上的奇异曲线之正规化的曲线（例如见 [VV25]的定理 1。5）。

本文旨在描述希尔泽布鲁赫曲面中节点曲线的正规化的卷曲不变量。全文中，我们将在特征零的代数闭域k上进行研究，并将 $\pi: \mathbb{F}_m := \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)) \to \mathbb{P}^1$ 记为第 m个希尔泽布鲁赫曲面。为方便起见，记 $\zeta := c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(1))$ 和 $\xi := \pi^* c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$，我们将 Pic $(\mathbb{F}_m)$ 与$\mathbb{Z}^{\oplus 2}$ 等同，并称类为 $k\zeta + a\xi$ 的除子是类型为 $(k,\ a)$ 的除子。

令 $\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_m,\ (k,\ a))$ 为参数化映射 $f\colon C \to \mathbb{F}_m$ 的栈，其中 C 是亏格为 g 的光滑曲线，且 $f_*[C] = (k,\ a)$。我们将 $\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_m,\ (k,\ a))$ 的主分支（即支配参数化 $\mathbb{F}_m$ 中类为 $(k,\ a)$、几何亏格为 g 的不可约曲线的塞韦里簇的那个分支）记作 $\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_m,\ (k,\ a))^{\mathrm{bir}}$。注意存在一个自然映射

$$\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_m, (k,a))^{\mathrm{bir}} \to \mathcal{H}_{g,k}$$

该映射由与 π 作后复合给出。因此，自然会问，这个映射的像中一般点的卷曲不变量是什么。正如 [CHT23] 中所指出的，例如，$\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_m,\ (k,\ a))^{\mathrm{bir}}$ 非空当且仅当 $g \leq p_a(k,\ a) := \binom{k}{2}m + (k-1)(a-1)$，因此下文中我们始终假设这一条件成立。

定理 *1.2.* 设 $\nu: C \to \Gamma \subseteq \mathbb{F}_m$ 是 $\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_m,(k,a))^{bir}$ 的一般点。令 $\alpha := \pi \circ \nu$ 和 $\delta := p_a(\Gamma) - g$。假设 $(m,k,a) \notin \{(2,4,0)、(1,6,0)、(1,4,2)、(0,4,4)\}$，并且

$$3\delta \leq |\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a)|.$$

那么，α 的 *Tschirnhausen* 丛平衡，当且仅当 $\delta \geq \binom{k-1}{2}m$。
若 $\delta < \binom{k-1}{2}m$，选取 ℓ 和 d 使得 $\binom{\ell+1}{2}m > \delta = \binom{\ell}{2}m + d$，则 C 的卷曲不变量为：

$$e_i = \begin{cases} im + a & \text{if } i \leq k-1-\ell \\ (k-\ell)m + a - \lceil \frac{d}{\ell} \rceil & \text{if } k-\ell \leq i < k-\ell+j \\ (k-\ell)m + a - \lfloor \frac{d}{\ell} \rfloor & \text{if } i \geq k-\ell+j \end{cases}$$

其中 $0 \leq j < \ell$ 等于 $d \bmod \ell$。

注意，定理 1.2 表明，在第二种情况下，覆盖的 Tschirnhausen 丛在某种程度上也是平衡的。

在此基础上，接下来自然要问的问题是这些曲线的 Brill-Noether 位的维数是多少。当 $g = p_a(k,a)$ 时，$\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_m,(k,a))^{bir}$ 的一般点是一个嵌入，而这一问题最近已由 H. Larson 与 S. Vemulapalli 在 [LV 24] 中解决。

他们在那里证明，称 Δ 为 $\mathbb{F}_m$ 的准线，$\alpha: C \to \mathbb{P}^1$ 为 $\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_m,(k,a))^{bir} \to \mathcal{H}_{g,k}$ 的像中的一般点，并对每个 $\boldsymbol{e},\boldsymbol{f} \in \mathbb{Z}^k$ 定义

$$U^{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(C) \coloneqq \{\mathscr{L} \in Pic(C) \mid \alpha_*\mathscr{L} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e_k),\ \alpha_*(\mathscr{L}(\Delta)) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(f_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(f_k)$$

那么，当且仅当满足以下不等式时，$U^{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(C)$ 非空:

i) 对每个 i, $f_i \geq e_i$;

ii) 对每个 $i \leq k-1$, $f_i \geq e_{i+1} - m$;

iii) $\sum_{i\leq k}(f_i - e_i) = a$

此时，记 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\boldsymbol{e}) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e_k)$，以及 $u(\boldsymbol{e}) := h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\boldsymbol{e})))$，则有

$$\dim(U^{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(C)) = g - u(\boldsymbol{e}) - u(\boldsymbol{f}) + h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{H}om(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\boldsymbol{e}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\boldsymbol{f})) \otimes (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m))) \tag{1}$$

请注意，与 Hurwitz-Brill Noether一般曲线的情形不同（见 [Lar21]），这些轨迹的维数并非预期维数（即 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\boldsymbol{e})$ 和 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\boldsymbol{f})$ 的变形空间的预期维数，即：$g - u(\boldsymbol{e}) - u(\boldsymbol{f})$）。

注意，若 $\nu: C \to \Gamma \subseteq \mathbb{F}_m$ 是从一条亏格为 g 的光滑曲线到一条类为 (k,a) 的曲线的双有理映射，且 $\mathscr{L}$ 是 C 上的线丛，称 $\alpha: C \to \mathbb{P}^1$ 为由 ν 与 π 复合给出的映射，并且 $\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}$ 使得 $\alpha_*\mathscr{L} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\boldsymbol{e})$ 以及 $\alpha_*(\mathscr{L}(\Delta)) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\boldsymbol{f})$，则 $\boldsymbol{e}$ 与 $\boldsymbol{f}$ 仍须满足 *i*) 、*ii*) 与 *iii*)。

事实上，*iii*) 由 $\deg(\mathcal{O}_C(\Delta)) := \deg(\mathcal{O}_\Gamma(\Delta)) = a$ 推出，而 *i*) 由 $h^0(C,\mathcal{O}_C(\Delta)) > 0$ 推出。对于 *ii*)，注意，若将 $\nu_*\mathscr{L}(\Delta)$ 记作 $\mathscr{M}$，则有 $R^1\pi_*\mathscr{M} = R^1\alpha_*(\mathscr{L}(\Delta)) = 0$。因此，[Str87] 的命题 1.1 给出如下正合列:

$$0 \to \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\boldsymbol{e})(-1,0) \xrightarrow{\psi} \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\boldsymbol{f}) \to \mathscr{M} \to 0$$

现在，ψ 由一个 $k \times k$ 矩阵铅笔表示，其元素是次数为 $f_i - e_j$ 的形式。如 [LV24], 的引理 3.1 中所述，如果 *ii*)不成立，$\det(\psi)$就会是可约的。由于$\mathscr{M} = \mathrm{Coker}(\psi)$的支撑在 Γ 上不可约，因此这种情况不可能发生。

因此，为了使 $U^{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(C)$对像 $\alpha: C \to \mathbb{P}^1$ 中映射$\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_m,(k,a))^{bir} \to \mathcal{H}_{g,k}$的任意点都非空，我们仍需满足 *i*) *ii*) 和 *iii*)。

由于我们的方法也能计算$\mathcal{O}_C(\Delta)$的分裂型，即使在 $g \neq p_a(C)$时也是如此，因此我们决定检验至少在 $e_1 + \cdots + e_{k-1} = 1 - g - k$的情况下，上述公式是否仍然成立。由于$\mathcal{O}_C$ 是 C 上唯一具有整体截面且次数为 0 的线丛，这等价于证明:

推论 1.3. 在定理 *1.2* 的假设下，若 $\delta \leq \binom{k-1}{2}m + (a+1)(k-2)$，$\mathcal{O}_C$满足:

$$h^1(End(\alpha_*\mathcal{O}_C)) + h^1(End(\alpha_*\mathcal{O}_C(\Delta)) = g + h^1(\mathcal{H}om(\alpha_*\mathcal{O}_C, \alpha_*\mathcal{O}(\Delta)) \otimes (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)))$$

这或许暗示，至少对于较小的 $p_a(k,a) - g$，方程 (1) 仍应给出遗忘映射 $\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_m,(k,a))^{bir} \to \mathcal{M}_g$ 像中一般曲线的布里尔-诺特轨迹的正确维数。

根据定理 1.2，考察 $\mathbb{F}_m$ 中类为（k，a）、几何亏格为 g的一般曲线的正规化，可以发现，能够作为这类覆盖的卷曲不变量的向量（e_1，.. .，e_{k-1}）$\in \mathbb{N}^{k-1}$ 非常有限。

为了探究研究 $\mathbb{F}_m$ 中节点型曲线的正规化能否为猜想 1.1提供一些启示，我们将 $\mathcal{H}_{g,\ (k,a)}$ 称为 $\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_m,\ (k,\ a))^{bir} \to \mathcal{H}_{g,\ k}$的像，随后决定考察位于 $\mathcal{H}_{g,\ (k,a)}$某些特殊子轨迹中的曲线。

更确切地说，设 C_1、.....、C_u 是 π的一般截面： $\mathbb{F}_m \to \mathbb{P}^1$ 并且对每个 $i \leq u$，$S_i \subseteq C_i$ 是具有 $s_1 \geq \cdots \geq s_u$的 s_i 个点的一般子集。我们的目标是确定那些次数为 k 的覆盖 $\alpha : C \to \mathbb{P}^1$ 的卷曲不变量，其中它们可分解为：

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\nu} & \Gamma \subseteq \mathbb{F}_m \\ & \searrow^{\alpha} & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

其中 Γ 是一条节点曲线，其奇异轨迹为 $S := S_1 \cup \cdots \cup S_u$。我们首先固定一些记号。

令 $\sigma_k(i、\ j、\ \ell) := \sum_{i<t\leq j}(\mathrm{Max}\{(k-i)m + a - 1 - \ell、\ 0\} - s_t)$，并将 n_1 定义为 $\{\ell \in \mathbb{N} \mid \sigma_k(0、\ j、\ \ell) < 0$（对某个 $j \leq u\}$）的最小值。令 $0 = i_0 \leq \cdots \leq i_u$，使得每个 i_t 都是 i_{t-1} 与 $\mathrm{Min}\{j > i_{t-1} \mid \sigma_{k-i_{t-1}}(i_{t-1}、\ j、\ n_1) < 0\}$中的最大值；令 $r_1 := \mathrm{Max}\{i \mid n_1 \geq im + a\}$，并定义 $\delta_1 := -\sum_{t\leq u}\sigma_{k-i_{t-1}}(i_{t-1}、\ i_t、\ \ell)$。

Theo注 1.4。采用上述记号，覆盖 $\alpha : C \to \mathbb{P}^1$ *ar* 的卷曲不变量 e

$$e_i = \begin{cases} im + a & \text{if } i \leq r_1 \\ n_1 & \text{if } r_1 < i \leq \delta_1 + r_1 \end{cases}$$

若 $i > \delta_1 + r_1$，则可通过计算类为 $(k - i_u, a)$ 且奇异轨迹为 $S_{i_u+1} \cup \cdots \cup S_u$ 的曲线的最后一个卷曲不变量，来计算 e_i-*s*。

注意，由于任意 $m+1$ 个点 $\mathbb{F}_m$ 都位于一条经过这些点的截面 π 上，我们可以假设对每个 $i < u$ 都有 $s_i \geq m + 1$。

还要注意，一旦证明一般点 f: $C \to \Gamma \subseteq \mathbb{F}_m$ 属于 $\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_m,\ (k,\ a))^{bir}$ 是节点型的，且 Sing(Γ) 在 $\mathcal{H}ilb^{\delta}(\mathbb{F}_m)$ 中一般，我们就可以通过对每个 i 取 $s_i \leq m + 1$，将 1.2 作为定理 1.4 的推论得到。

尽管采用了不同的技术，本定理也推广了 M. Coppens 的一个结果（ [Cop21] 中的定理 1）；在那里，他证明了当 $m = 0$ 和 $u \leq k - 1$时该结果成立。

本笔记的最后一部分将致力于证明，在关于 a 的某些假设下，这样的k-重曲线确实存在。同样地，我们首先固定一些记号。令 $\delta := p_a(k,\ a) - g$，并定义ϕ: $\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_m,\ (k,\ a))^{bir} \to \mathcal{H}ilb^{\delta}(\mathbb{F}_m)$ 为将一个态射 ν: $C \to \Gamma \subseteq \mathbb{F}_m$ 映射到长度为 δ Sing(Γ) 的概形的映射。给定 $s_1 \geq \cdots \geq s_u$ 使得 $s_1 + \cdots + s_u = \delta$, $s_{u-1} \geq m + 1$，考虑：

$$\mathcal{H}^{s_1,\ldots,s_u}_{(1,0)} := \{(Z, C_1, \ldots, C_u) \in \mathcal{H}ilb^{\delta}(\mathbb{F}_m) \times |\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(1,0)|^u \mid Z \cap C_i \in \mathcal{H}ilb^{s_i}(C_i)\}$$

并令 $\mathcal{M}^{s_1,\ldots,s_u}_g(\mathbb{F}_m, (k,a)) \subseteq \mathcal{M}_g(\mathbb{F}_m, (k,a))^{bir}$ 为 $\mathcal{H}^{s_1,\ldots,s_u}_{(1,0)} \times_{\mathcal{H}ilb^{\delta}(\mathbb{F}_m)} \mathcal{M}_g(\mathbb{F}_m, (k,a))^{bir}$在第二投影下的像。

定理 1.5. 设 $k \geq 3$。那么，使用上述记号，对于任意 $a > 2(\lceil \frac{2u}{k} \rceil + 1)s_1$，模空间 $\mathcal{M}^{s_1,\dots,s_u}_{g}(\mathbb{F}_m, (k,a))$ 非空。此外，$\mathcal{M}^{s_1,\dots,s_u}_{g}(\mathbb{F}_m, (k,a))$的一般点对应于一个映射 $\overline{f}\colon C \to \Gamma \subseteq \mathbb{F}_m$，其中 $\Gamma \in |\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a)|$ 是不可约节点曲线。

若令 $m = 0$，上述结果改进了 [Bal02] 中的引理 1：它既允许 $u \geq k-1$，也证明了存在一个类为 $(k,\ a)$ 的节点曲线，该曲线位于 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 中，其奇异轨迹如上所规定，且满足 $a < 2us_1 + 2$。

这一改进使我们还得以证明以下结果，从而证实了 E. Ballico 在 [Bal02] 的注 3 中提出的猜想。

推论 1.6。设 $d \in \mathbb{Z}$，且令 $g > 6d(k-1)$。那么，对于任何满足 $\sum_{i \leq k-1} e_i = g + k - 1$ 的序列 $e_1 \leq \cdots \leq e_{k-1} = e_1 + d$，都存在一个次数为 k 的覆盖 $\alpha\colon C \to \mathbb{P}^1$，它从一条亏格为 g 的光滑曲线出发，并具有 e_1、.....、e_{k-1} 作为卷曲不变量。

结合定理 1.4 与定理 1.5，我们还找到了 $m > 0$ $\mathcal{P}_k$ 中一些并非由推论 1.6 给出的点。遗憾的是，我们未能找到获得正测度子集的方法。

致谢。本研究是 DFG 研究生培训小组 2965“从几何到数论”的一部分，该小组由柏林洪堡大学和汉诺威莱布尼茨大学参与。本研究还得到了德国研究联合会（DFG）在德国卓越战略框架下的资助——柏林数学研究中心 MATH+ （EXC-2046/1、EXC-2046/2，项目编号：390685689）。

我谨此感谢我的导师 Gavril Farkas 的指导与支持。我还要感谢 Bogdan Carasca、Andreas Kretschmer 和 Irene Spelta，与他们的多次交流令我受益匪浅。

2 希尔泽布鲁赫曲面的背景

根据射影丛公式（ [Ful98] 中的定理 3.3），$\mathbb{F}_m$ 的肖氏环同构于

$$\frac{\mathbb{Z}[\zeta,\xi]}{(\xi^2, \zeta^2 - m\xi\zeta)} \tag{2}$$

因此，采用上述记号，$\mathbb{F}_m$ 的准线的类为 $[\Delta] := \zeta - m\xi$。采用上述记号，其典范类为 $K = (m-2)\xi - 2\zeta$。由伴随公式可得，类型为 (k,a) 的除子 D 的虚亏格为 $p_a(D) = \binom{k}{2}m + (k-1)(a-1)$。

注 2.1。由于 $\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(n)) \cong \mathcal{S}ym^n(\mathcal{E}_m)$，我们可以将 $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a)$ 的整体截面与 $\mathcal{S}ym^k(\mathcal{E}_m) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$ 的整体截面等同起来。选取 u_0, u_1 作为 $\mathbb{F}_m$ 上的相对坐标，并选取 t_0, t_1 作为 $\mathbb{P}^1$上的坐标，可以将 $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a)$ 的整体截面与下列形式的多项式等同起来：

$$\sum_{im+a \geq 0} f_i(t_0,t_1)u_0^i u_1^{k-i}, \qquad \text{where } f_i \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(im+a))$$

在此对应关系下，准线对应于 u_0的消失轨迹，而 π 的其他截面则对应于以下形式的多项式的消失轨迹：

$$u_1 - h(t_0,t_1)u_0, \quad \text{with } \deg(h) = m$$

注记 2.2. 任何类型为 $(k,\ a)$ 的不可约有效除子 D，都自带一个次数为 k 的覆盖 $f\colon D \to \mathbb{P}^1$，它由限制投影 $\pi\colon \mathbb{F}_m \to \mathbb{P}^1$ 得到。

最后，我们将用 $\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_m,\ (k,\ a))$ 表示参数化满足 $f_*[C]=(k,\ a)\in A^1(\mathbb{F}_m)$ 的态射 $f\colon C\to\mathbb{F}_m$ 的模空间栈。注意，令 $\mathcal{S}\subseteq|\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,\ a)|$ 表示参数化亏格为 g 的不可约节点曲线的塞韦里簇，并令 $\mathfrak{C}$ 表示其上的普适曲线。由于结点曲线族是等正规化的，记录正规化便给出一个态射 $\mathcal{S}\to\mathcal{M}_g$。令$\mathscr{C}$ 表示 $\mathcal{M}_g$ 的普适族在 $\mathcal{S}$ 上的拉回，可得如下交换图：

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{F}_m\times\mathcal{S}\\ \downarrow & \nearrow & \downarrow\\ \mathfrak{C} & \xrightarrow[p]{} & \mathcal{S}\end{array}$$

由此得到一个单射态射$\mathfrak{z}\colon\mathcal{S}\to\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_m,(k,a))$。

注 2.3。注意，由于 [CHT23] 的命题 2.7 表明，在 $\mathbb{F}_m$ 中参数化亏格为 g 、类为 (k,a) 的不可约曲线的塞韦里簇是不可约的，且维数等于预期维数，因此由扎里斯基定理（ [CHT23] 中的推论 5.3），$\mathcal{S}$ 也具有同样的性质。

现在，正如 [CHT23]，的命题 2.7 的证明中所示，在像$\mathfrak{z}$中的每个点 $f\colon C\to\mathbb{F}_m$ 附近，都存在一个到 $\mathcal{S}$ 的态射，且其纤维有限。特别地，$\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_m,(k,a))$ 有唯一一个包含$\mathfrak{z}$的像的不可约分支。我们将此不可约分支记为 $\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_m,(k,a))^{bir}$。顺便指出，由于 $\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_m,(k,a))$ 的预期维数与 $\mathcal{S}$ 的预期维数相同，此不可约分支的维数也将等于预期维数。

3 INTERPOLATING POINTS IN $\mathbb{F}_m$

给定一条节点曲线 $\Gamma\subseteq\mathbb{F}_m$，称 $\nu\colon C\to\Gamma$ 为正规化，且 $f:=\pi\circ\nu$，曲线 C的卷曲不变量是满足下列条件的唯一整数 $0\le e_1\le\cdots\le e_{k-1}$：

$$\mathcal{T}sch(f):=f_*\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\cong\bigoplus_{i=1}^{k-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e_i)$$

特别地，称 $\mathcal{A}:=f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$，$e_i=\mathrm{Min}\{n\in\mathbb{N}\mid h^0(C,\mathcal{A}^{\otimes n})-h^0(C,\mathcal{A}^{\otimes n-1})>i\}$。根据黎曼–罗赫定理，这等价于

$$e_i=\mathrm{Min}\left\{n\in\mathbb{N}\mid h^0(C,\omega_C\otimes\mathcal{A}^{\otimes 1-n})-h^0(C,\omega_C\otimes\mathcal{A}^{\otimes -n})<k-i\right\}$$

现在，由于 Γ是一条节点曲线，若以 S 表示其奇异轨迹，则$\mathcal{O}_\Gamma$ 在$\mathcal{O}_C$ 中的导子理想由 Γ中 S 的理想层诱导，我们今后将其记作$\mathcal{I}_{S,\Gamma}$。因此 $\nu_*\omega_C\cong\omega_\Gamma\otimes\mathcal{I}_{S,\Gamma}$，并且以 $\mathcal{I}_S$ 表示 $\mathbb{F}_m$中 S 的理想层，可得

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(-2,m-2-n)\to\mathcal{I}_S(k-2,m+a-2-n)\to\nu_*(\omega_C\otimes\mathcal{A}^{\otimes -n})\to 0\tag{3}$$

由 Leray 谱序列，$h^1(\mathbb{P}^1,\ \mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(-2,\ m-2-n))=0$ 对每个 $n\ge 0$ 均成立。因此

$$H^0(C,\omega_C\otimes\mathcal{A}^{\otimes -n})\cong H^0(\mathbb{F}_m,\mathcal{I}_S(k-2,a+m-2-n))$$

若现在将 $f^S_{k,\ a}(n):=h^0(C,\ \omega_C\otimes\mathcal{A}^{\otimes 1-n})-h^0(C,\ \omega_C\otimes\mathcal{A}^{\otimes -n})$ 记作，则有

$$e_i=\mathrm{Min}\left\{n\in\mathbb{N}\mid f^S_{k,a}(n)<k-i\right\}$$

因此，计算 $\mathbb{F}_m$ 中奇异轨迹为 S的节点曲线的卷曲不变量这一问题，可以归结为确定 S 对 $\mathbb{F}_m$上双次数为 $(k-2,a+m-2-n)$ 的形式空间施加了多少独立条件。若这些点处于一般位置，则显然有：

引理 3.1。设 S 是 $\mathbb{F}_m$ 上的 s 个一般点。那么，若 $s \leq h^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a))$ 经过 S，则会对 $H^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a))$ 施加 s 个独立条件。

证明。令 $D = (p_1, \dots, p_s) \in (\mathbb{F}_m)^s$ 并定义：

$$ev_D : H^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a)) \to \Bbbk^{\oplus s} \mid f \mapsto (f_{p_i})_{i=1}^s$$

令 $\mathcal{K}_s$ 为关联对应：

$$\{(\boldsymbol{v}, D) \in \mathbb{P}H^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a) \times (\mathbb{F}_m)^s \mid \boldsymbol{v} \in Ker(ev_D)\}$$

并令 $p: \mathcal{K}_s \to (\mathbb{F}_m)^s$ 为第二投影。注意，p 显然是满射。由于纤维的维数总是大于或等于 $h^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a)) - s$，根据纤维维数的半连续性，我们只需展示一个点 $D \in (\mathbb{F}_m)^s$，使得 ev_D 具有最大秩。

现在取 $\{t_0^\ell t_1^{jm+a-\ell} u_0^j u_1^{k-j}\}_{j,\ell}$ 作为 $H^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a))$ 的基。相对于这个基，ev_D 由矩阵 E 表示，其第 i 行为：

$$(t_0(p_i)^\ell t_1(p_i)^{jm+a-\ell} u_0(p_i)^j u_1(p_i)^{k-j})_{j,\ell}$$

因此，说 ev_D 是满射，等价于要求 E 存在一个非零的 $s \times s$ 子式。现在注意，记 $\Delta_{\mathbb{F}_m}$ 为生成 $\mathbb{F}_m$ 的扇，由于根据 [Ful93] $(\mathbb{F}_m)^s$ 是由以下扇 $\prod_{i=1}^s \Delta_{\mathbb{F}_m}$ 定义的托里克簇，根据 [Cox95], $\{t_0(p_i)\ t_1(p_i)\ u_0(p_i)\ u_1(p_i)\}_{i=1}^s$ 在 $(\mathbb{F}_m)^s$ 的 Cox 环中代数独立。特别地，由于同一行上的任意两个单项式都不相同，E 的任意 $s \times s$ 子式消失所确定的都是 $(\mathbb{F}_m)^s$ 上的一个除子。这意味着，只要 $s \leq h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a))$，就存在 $(\mathbb{F}_m)^s$ 中的一个开集 U，使得对其中每个 $D \in U$，ev_D 都是满射。 □

注 3.2. 注意，前面的证明更一般地表明，对于一般的点组 $D = (p_1, \dots, p_s) \in (\mathbb{F}_m)^s$，映射 ev_D 具有最大秩。

如果这些点包含在 $\mathbb{F}_m \to \mathbb{P}^1$ 的某些截面中，则可以推广 [Cop21] 中引理 3 的证明所述的技巧，从而证明以下引理。尽管这些技巧与 [Cop21], 中的技巧非常相似，我们仍给出证明，因为该引理将在定理 1.5 的证明中发挥作用。

引理 3.3. 设 $C_0, \dots, C_k$ 是 $\pi: \mathbb{F}_m \to \mathbb{P}^1$ 的互异截面，并设 $\{D_i \subseteq C_i\}_{i=0}^k$ 是一组次数分别为 $s_0, \dots, s_k$ 的有效除子，满足对每个 i,

$$s_i \leq \mathrm{Min}\{s_{i+1}, \mathrm{Max}\{im + a + 1, 0\}\}$$

且对每个 i, j, $D_i \cap C_j = \emptyset$。那么，称 Z 为由它们的并所给出的 $\mathbb{F}_m$ 的 0 维子概形，并令 $\mathcal{I}_Z$ 为其理想层，

$$h^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{I}_Z(k,a)) = h^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a)) - \sum_{i=0}^k s_i$$

证明。首先注意，由于每个 C_i 都是光滑曲线，因此在讨论支撑于给定点的 C_i 上长度为 n 的子概形时，不存在歧义。因此，这条引理也计算了在给定点处满足关于 C_i 的相切条件的曲线所具有的参数个数。

由于 $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a)$ 的整体截面对应于形如 $p = \sum_{i=0}^k f_i(t_0, t_1) u_0^i u_1^{k-i}$ 的多项式，其中 f_i 是次数为 $im+a$ 的齐次多项式（负次数的多项式对应于 0），如果

$-im \le a < -(i-1)m$， $H^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a))$的截面具有 $u_0^i q$ 的形式，其中 q 是$\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k-i, im+a)$的一个整体截面。由于根据假设，对于每个 $j<k-i$，还有 $s_j=0$，我们只需证明 $a\ge 0$的情形即可。

证明将对 k 使用归纳法。若 $k=0$，则 $|\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(0,a)|$ 中的任意除子都对应于 a 个 π 的纤维之和。因此，由于 $s_0 \le a+1$，要求它经过 s_0 个点会对 $H^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(0,a))$ 施加独立条件。

请注意，即使某些点以重数 >1 出现，它们仍会对直线施加独立条件，因为要求在给定点以重数 n 消失，需要 n 个纤维重合。

现在令 $k\ge 1$，并假设命题对 $k-1$ 成立。定义 $\nu(Z) := \mathrm{Max}(i \mid s_i \neq 0)$。若 $\nu(Z)=0$，则无需证明。现在假设命题对每个 $\nu' < \nu(Z)$ 都成立，令 Z' 为由满足 $i<k$ 的 D_i-s 的并所定义的子概形。根据构造，$\nu(Z') < \nu(Z)$。因此，由归纳法可得 $h^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{I}_{Z'}(k,a)) = h^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a)) - \sum_{i<k} s_i$。现在取 Γ 为 Z' 与 C_k 的并，便得到如下正合列：

$$0 \to \mathcal{I}_\Gamma(k,a) \to \mathcal{I}_{Z'}(k,a) \to \mathcal{O}_{C_k}(k,a) \to 0$$

现在，如果 $H^1(\mathbb{F}_m, \mathcal{I}_\Gamma(k,a)) \neq 0$，在 C_k 上消失所施加的条件将少于 $h^0(C_k, \mathcal{O}_{C_k}(k,a))$ 个，作用于 $H^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{I}_{Z'}(k,a))$。特别地，$h^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{I}_{Z'}(k-1,a)) \ge h^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{I}_{Z'}(k,a)) - km - a$。然而，根据归纳假设，有：

$$h^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{I}_{Z'}(k-1,a)) = h^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k-1,a)) - \sum_{i<k} s_i = h^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a)) - km - a - 1 - \sum_{i<k} s_i$$

因此，映射 $H^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{I}_{Z'}(k,a)) \to H^0(C_k, \mathcal{O}_{C_k}(k,a))$ 必须是满射。特别地，要使结论成立，只需证明经过 s_k 个点会对 $H^0(C_k, \mathcal{O}_{C_k}(k,a))$ 施加独立条件。现在，这立即由关于 s_k 的条件得出，因为 $\mathcal{O}_{C_k}(k,a)$ 的整体截面对应于两个变量的 $km+a$ 次齐次多项式。

□

如果我们改为允许自己选取一般截面及其上的一般点，就可以去掉对截面数量以及 s_i 上界的假设。事实上，我们有：

引理3.4。设 $C_1, \ldots\ldots, C_u$ 是 $\pi: \mathbb{F}_m \to \mathbb{P}^1$ 的一般截面，并且对于每个 $i=1, \ldots\ldots, u$，S_i 是 C_i 中满足 $s_1 \ge \cdots \ge s_u > 0$ 的一组 s_i 个一般点。那么，若对于每个 $i=1, \ldots\ldots, u$，

$$\sum_{j\le i} s_j \le \sum_{j\le i} \mathrm{Max}\{(k-j)m + a + 1, 0\} \qquad (*)$$

经过 S_i 的截面对 $|\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a)|$ 施加独立条件。

证明。如注 2.1 所述，$\pi: \mathbb{F}_m \to \mathbb{P}^1$ 的截面对应于形式为 $u_1 - hu_0$ 且满足 $h \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m))$ 的多项式。因此，给出 π 的一般截面 $C_1, \ldots\ldots, C_u$，等价于给出 $\pi(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m))$ 的一般元素 $h_1, \ldots\ldots, h_u \in H^0$。现在，对每个 $i=1, \ldots u$，令 $S_i = \{p_{i,1}, \ldots p_{i,s_1}\}$，并令 $T_i := \pi(S_i) = \{q_{i,1}, \ldots, q_{i,s_1}\}$。定义

$$ev_{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{h}} : V_n := \prod_{i=0}^{k} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(im+a)) \to \bigoplus_{j=l}^{k} \Bbbk^{\oplus s_j}$$

$$(f_i)_{i=0}^k \longmapsto \left(\left(\sum_{i=0}^{k} f_i(q_{j,t}) h_j^{k-i}(q_{j,t}) \right)_{t=1}^{s_j} \right)_{j=1}^{u}$$

根据构造， $Ker(ev_{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{h}})$ 是 $H^0(\mathbb{F}_m,\ \mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,\ a))$ 中在每个 S_i 上都消失的整体截面所构成的子空间。因此，若定义 δ 为 s_i 之和，并且

$$\mathcal{K}_n := \{(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m))^u \times (\mathbb{P}^1)^\delta \times V_n |\ \boldsymbol{v} \in Ker(ev_{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{h}})\}$$

引理的证明归结为求投影的一般纤维的维数。

$$p_1 : \mathcal{K}_n \to H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m))^u \times (\mathbb{P}^1)^\delta$$

还要注意，由于纤维维数的半连续性，一旦找到一个$\boldsymbol{h}$ 和一个$\boldsymbol{q}$ 使得 $ev_{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{h}}$ 具有最大秩，一般纤维的维数便是预期值。

还要注意，选取 $\{t_{0,j}, t_{1,j}\}_{j=1}^{\delta}$ 作为$(\mathbb{P}^1)^\delta$上的坐标，并相对于 $H^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a))$上的标准单项式基， $ev_{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{h}}$由下列矩阵表示

$$\begin{array}{l}
s_1 \left\{ \right. \\
\\
\\
\\
s_u \left\{ \right.
\end{array}
\left(
\begin{array}{cccccc}
t_{0,1}^{km+a} & \dots & t_{1,1}^{km+a} & h_1 t_{0,1}^{(k-1)m+a} & \dots & h_1^k t_{1,1}^a \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
t_{0,s_1}^{km+a} & \dots & t_{1,s_1}^{km+a} & h_1 t_{0,s_1}^{(k-1)m+a} & \dots & h_1^k t_{1,s_1}^a \\
\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\\
t_{0,\delta-s_u+1}^{km+a} & \dots & t_{1,\delta-s_u+1}^{km+a} & h_u t_{0,\delta-s_u+1}^{(k-1)m+a} & \dots & h_u^k t_{1,\delta-s_u+1}^a \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
t_{0,\delta}^{km+a} & \dots & t_{1,\delta}^{km+a} & h_u t_{0,\delta}^{(k-1)m+a} & \dots & h_u^k t_{1,\delta}^a
\end{array}
\right)$$

现在将对 u使用归纳法进行证明。注意，根据我们对 s_i的假设，若$u = 1$，则由引理 3.3 得出定理。现在假设该引理对每个 $u' < u$都成立，来证明它对 u也成立。

再次根据我们对 s_i的假设，存在一个置换 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\{1, \dots, k+1\})$以及将 $\{k+2, \dots, u\}$ 划分为 $k+1$ 个子集 $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{k+1}$的一个划分，使得对每个 $i \le k+1$定义$s_i' := s_{\sigma(i)} + \sum_{j \in \Lambda_i} s_j$后，这些 s_i'仍满足(∗)。

因此我们可以假设 $1 < u \le k+1$。事实上，若 $u > k+1$，则取 h_1'、.....、h_{k+1}'为 $H^0(\mathbb{P}^1,\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m))$ 中的一般元素，并且 $h_j := h_\ell'$ 只要 $j = \sigma(\ell)$ 或 $j \in \Lambda_\ell$，根据归纳假设，存在一个$\boldsymbol{q}$，使得 $ev_{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{h}}$ 具有最大秩，因为表示 $ev_{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{h}}$ 的矩阵在对行进行置换后，与表示 $ev^{\boldsymbol{h}'}{}_{\boldsymbol{q}}$ 的矩阵相对应。

现在注意，令 $D_c[s, \ell] :=$对角矩阵 $\left(\prod_{i=0}^{c-1}(h_c - h_i)(t_{0,\ j},\ t_{1,\ j})_{j=s+1}^{\ell}\right)$，并令 $A_i[s,l]$ 为其行由 $H^0(\mathbb{F}_m,\ \mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}((k-i)m+a))$ 的标准基构成、以变量 $t_{0,\ j},\ t_{1,\ j}$（其中 $s < j \le \ell$）表示的矩阵。通过初等列变换，可以得到如下形式的分块矩阵：

$$\left(
\begin{array}{cccccccc}
A_0[0,s_1] & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
A_0[s_1, s_1+s_2] & (D_1A_1)[s_1, s_1+s_2] & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & & \dots & & & \\
A_0[\delta - s_u, \delta] & (D_1A_1)[\delta - s_u, \delta] & (D_2A_2)[\delta - s_u, \delta] & \dots & (D_uA_u)[\delta - s_u, \delta] & 0 & \dots & 0 \\
\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\
\\
A_0[\delta - s_u, \delta] & (D_1A_1)[\delta - s_u, \delta] & (D_2A_2)[\delta - s_u, \delta] & \dots & (D_uA_u)[\delta - s_u, \delta] & 0 & \dots & 0
\end{array}
\right) \tag{4}$$

现在引入一些新变量 λ_1，……，λ_u，令 $h_i = \lambda_i t_0^m$，并在 $\Bbbk[\lambda_1, t_{0,1}, t_{1,1}, \ldots, t_{0,\delta}, t_{1,\delta}][\lambda_2, \ldots, \lambda_u]$ 的单项式上选取字典序项序。注意，一旦证明在这一选择的 $\boldsymbol{h}$ 下，令 E 为上述矩阵前 δ 列构成的 $\delta \times \delta$ 子矩阵，$|E|$ 中项序可能最大的单项式的系数非零，我们就完成了证明。此外注意，在 $u = 1$ 的情形下，这显然成立，因为 $|E|$ 只是一个范德蒙德矩阵的行列式。因此，我们可以继续用归纳法证明，不仅有 $|E| \neq 0$，而且在对 h_i 进行这一选择时，$|E|$ 中项序可能最大的单项式的系数在 $\Bbbk[\lambda_1, t_{0,1}, t_{1,1}, \ldots, t_{0,\delta}, t_{1,\delta}]$ 中非零。

令 $\delta' := \delta - km - a - 1$，并用 $\mathcal{P}_{\delta'}$ 表示 $\{s_1 + 1, \ldots, \delta\}$ 中所有基数为 δ' 的子集所构成的集合。

对于每个 $J \in \mathcal{P}_{\delta'}$，用 E_J 表示 E 的子矩阵，该子矩阵由 δ' 列（即紧随前 $km + a + 1$ 列之后的列）中行指标属于 J 的元素构成；用 A_J 表示由前 $\delta - \delta'$ 列中行指标不属于 J 的元素构成的子矩阵。Calling $sgn(J) := (-1)^{\delta'(\delta - \delta') + \binom{\delta' + 1}{2} + \sum_{j \in J} j}$，根据拉普拉斯展开公式，有 t:

$$|E| = \sum_J sgn(J) |A_J| |E_J|$$

现在，对于每个 $i \geq 2$，令 S_i' 为 S_i 的子集，由 S_i 的前 m_i 个元素构成，其中

$$m_i := \operatorname{Min} \left\{ s_i, (k - i + 1)m + a + 1 + \sum_{2 \leq \ell < i} [(k - \ell + 1)m + a + 1 - m_l] \right\}$$

$$r_0 := \operatorname{Max} \left\{ j \mid \sum_{2 \leq i \leq j} m_i < \delta' \right\}$$

并令 M 为 $i \leq r_0$ 中 S_i' 的指标与 S_{r_0+1}' 的前 $\delta' - \sum_{2 \leq i \leq r_0} m_i$ 个指标所构成的集合。由 **(4)** 得，

$$E_M = \operatorname{Diag}\left(((h_j - h_0)(t_{0,\ell}, t_{1,\ell}))_{\ell \in M} \right) E(\boldsymbol{h}', \boldsymbol{q}')$$

其中，$\boldsymbol{h}' = \{h_2, \ldots, h_{r_0+1}\}$ 和 $\boldsymbol{q}'$ 由 S_i' 中的 δ' 点给出。根据构造，$\boldsymbol{q}'$ 满足（$*$），因此由归纳假设，对于一般的 $\boldsymbol{h}$，该式非零。由于这是一个行互异的范德蒙德矩阵的行列式，$|A_M|$ 也同样非零。

现在，给定 $J \in \mathcal{P}_{\delta'}$，定义 $J_i := \{j \in J \mid \sum_{l<i} s_l < j \leq \sum_{l \leq i} s_l\}$，并在 $\mathcal{P}_{\delta'}$ 上定义偏序 $\succcurlyeq$：当且仅当存在某个 $2 \leq j \leq i_0$ 使得 $J_j \supsetneq J_j'$，且对于每个 $i < j$，都有 $J_i = J_i'$ 时，规定 $J \succcurlyeq J'$。令

$$\mathcal{P} := \{J \in \mathcal{P}_{\delta'} \mid \text{for each } i,\ \sum_{\ell \leq i} \# J_\ell \leq \sum_{\ell \leq i} ((k - \ell - 1)m + a + 1)\}$$

注意，由（**4**）中给出的块结构可知，若 $J \notin \mathcal{P}$，则 $|E_J| = 0$。由归纳假设，还可知对于每个 $J \in \mathcal{P}$，都有 $|E_J| \neq 0$。根据构造，上述定义的 M 相对于 $\succcurlyeq$ 在 $\mathcal{P}$ 中是极大的。

断言：对于任意满足 $\sum_{2 \leq \ell \leq i} s_\ell \leq \delta'$ 的 i，

$$\sum_{2 \leq \ell \leq i} (s_\ell - m_\ell) \leq (i - 1)m \tag{5}$$

事实上，选取 ℓ_1，...，ℓ_t 作为满足如下条件的指标：对于每个 $i<\ell_1$，$m_i\neq s_i$，

$$\sum_{2\leq\ell\leq i}(s_\ell-m_\ell)=0$$

对于每个 $\ell_1\leq i<\ell_2$，

$$\sum_{2\leq\ell\leq i}(s_\ell-m_\ell)=s_{\ell_1}-m_{\ell_1}:=\sum_{2\leq\ell\leq\ell_1}[s_\ell-((k-\ell+1)m+a+1)]\leq km+a+1-s_1$$

不过，由于 $s_{\ell_1}\leq s_1$ 且 $m_{\ell_1}\neq s_{\ell_1}$ 蕴含 $s_{\ell_1}\geq(k-\ell_1+1)m+a+1$，上述内容蕴含：

$$\sum_{2\leq\ell\leq i}(s_\ell-m_\ell)\leq(\ell_1-1)m\leq(\ell-1)m$$

现在考虑带有 $j>1$ 的 $l_j\leq i<l_{j+1}$。根据假设，

$$m_{\ell_j}=(k-\ell_j+1)m+a+1+\sum_{2\leq\ell<\ell_j}[(k-\ell+1)m+a+1-m_\ell]$$

$$m_{\ell_{j-1}}=(k-\ell_{j-1}+1)m+a+1+\sum_{2\leq\ell<\ell_{j-1}}[(k-\ell+1)m+a+1-m_\ell]$$

将两者结合起来，可得

$$m_{\ell_j}=(k-\ell_j+1)m+a+1+\sum_{\ell_{j-1}<\ell<\ell_j}[(k-\ell+1)m+a+1-s_\ell]$$

因此：

$$s_{\ell_j}-m_{\ell_j}=\sum_{\ell_{j-1}<\ell\leq\ell_j}[s_\ell-((k-\ell+1)m+a+1)]$$

将所有内容结合起来，可得

$$\sum_{u\leq j}(s_{\ell_u}-m_{\ell_u})=\sum_{2\leq\ell\leq\ell_j}[s_\ell-((k-\ell+1)m+a+1)]\leq km+a+1-s_1\leq(\ell_j-1)m$$

由此，断言的证明得以完成。

另请注意，

$$m_{r_0}=\delta'-\sum_{2\leq\ell\leq r_0}m_\ell<s_{r_0}\leq s_1$$

并且对每个 $j>r_0$，都有 $M_j=\emptyset$。

请注意，根据定义以及我们在$k[\lambda_1,t_{0,1},t_{1,1},\ldots,t_{0,\delta},t_{1,\delta}][\lambda_2,\ldots,\lambda_u]$上对项序的选择，$\mathcal{P}$ 中相对于 $\preceq$ 而言的极大元素，恰好是那些对应于$|E|$ 中各个加项的指标，而这些加项在 $\lambda_2,\ldots,\lambda_u$ 中具有项序最大的单项式。因此，为了证明该引理，我们只需将注意力集中在这些元素上。

对于每个 $i=1,\ldots,m_{r_0}$ j_i，令其为 M_{r_0} 的第 i 个元素，并将 $|E|$ 限制为：对每个 $i=1,\ldots,m_{r_0}$，取 $t_{1,j_i}=t_{1,i}$；对每个 i，取 $t_{0,i}=1$。这一限制使 $|E|$ 的拉普拉斯展开中所有指标对应的 J 不包含 M_{r_0} 的项都变为零。现在，对每个 $i<r_0$，令 $N_i=\{l_1,\ldots,l_{s_i-m_i}\}$ 为 $\{\sum_{\ell<i}s_\ell+1,\ldots,\sum_{\ell\leq i}s_\ell\}$ 中 M_i 的补集，并定义

$$p:=\prod_{i<r_0}\prod_{j\leq s_i-m_i}t_{\ell_j}^{km+a+1-\sum_{l<i}\#N_l-j}$$

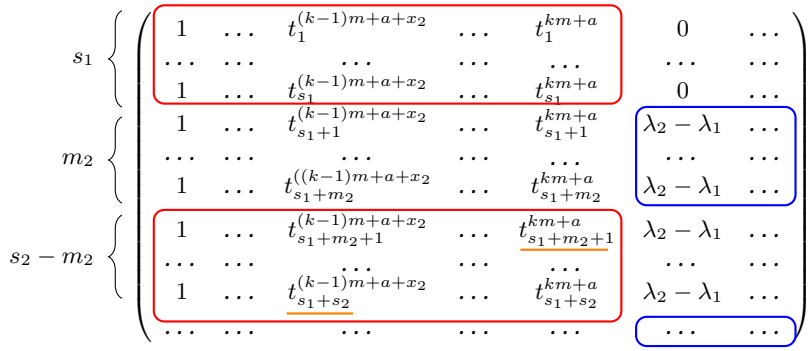

图1. 记 $x_2 := m-(s_2-m_2)+1$，该图展示了上述过程如何从 $|E|$ 的展开式中选取一个加项

结合 4 和 5 可知， $|A_M||E_M|$ 是 $|E|$ 中唯一一个乘以 $\lambda_2,\dots,\lambda_u$ 中按项序最大的单项式、系数为单项式 p 且指标包含 M_{r_0} 的项。由于将 $|E|$ 限制为：对每个 i，取 $t_{0,i}=1$；对每个 $i=1,\dots,m_{r_0}$，取 $t_{1,j_i}=t_{1,i}$ 后，拉普拉斯展开中没有其他项能够抵消这个单项式，因此引理的证明至此完成。

□

注意，使用与引理3.4相同的记号，式 (4) 中矩阵的结构还可更一般地用于计算， S_i-s 中经过这些点的条件对 $|\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a)|$ 施加了多少个条件，即使条件 $(*)$ 不成立时也是如此：

推论3.5。 沿用引理*3.4*中的记号，对每个 $0\le i\le j\le u$ 定义，

$$\sigma_k(i,j) := \sum_{i<t\le j} \mathrm{Max}\{(k-i)m+a+1,0\} - s_i$$

令 $i_0 := 0$，并递归定义 $i_t := \mathrm{Min}\{j>i_{t-1} \mid \sigma_{k-i_{t-1}}(i_{t-1},j) < 0\}$。接着，令 Z 为由 S_i 的并构成的 $\mathbb{F}_m$ 的 $\mathcal{I}_Z$ 维子概形，其理想层为

i) if $i_t > k+1$ for some t, then $h^0(\mathbb{F}_m,\mathcal{I}_Z(k,a))=0$;

ii) otherwise, $h^0(\mathbb{F}_m,\mathcal{I}_Z(k,a)) = h^0(\mathbb{F}_m,\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a)) - \sum_{i\le u} s_i - \sum_t \sigma_{k-i_{t-1}}(i_{t-1},i_t)$.

证明。 推论的 *i)* 部分可由以下观察立即得到：将表示求值态射的矩阵写成与式 (4) 类似的形式后，核中唯一的元素是 0。

类似地，通过将表示求值态射的矩阵写成与式 (4) 类似的形式，并注意到当 i_t 有定义时，其秩会下降 $\sigma_{k-i_{t-1}}(i_{t-1},\ i_t)$，即可得到第 *ii)* 部分，因为此时矩阵为分块对角矩阵，且每个分块的秩为

$$\sum_{i_{t-1}<\ell\le i_t} (k-l)m+a+1$$

□

4 计算卷曲不变量

感谢前面各节中证明的引理，我们现在可以开始证明前两个定理：

定理 *1.2* 的证明。 首先注意到，由于 $\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_m,(k,a))^{bir}$ 不可约，已证明对于 $\mathcal{H}ilb^{\delta}(\mathbb{F}_m)$ 中的一般点 S，存在某个 $f\colon C\to\mathbb{F}_m$，属于 $\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_m,(k,a))^{bir}$，其像仅在 S 处奇异。于是，应用引理 3.1 和注 3.2 进行计算，即可得到该定理:

$$f(n):=h^0(\mathcal{I}_S(k-2,m+a-1-n)-h^0(\mathcal{I}_S(k-2,m+a-1-n)$$

现在取如上所述的 S。根据假设， $3\delta\leq\binom{k+1}{2}m+(k+1)(a+1)-1=|\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a)|$。因此，由于在一点处奇异对 $|\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a)|$至多施加 3 个独立条件，由那些在 S 上奇异的曲线组成的子线性系 $\Sigma\subseteq|\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a)|$ 非空。

现在，若存在某个不包含准线的 $D\in\Sigma$，将其不可约分支记为 $D_1,\dots,D_r$，则对每个 j，$K_{\mathbb{F}_m}\cdot D_j<0$。因此，根据 [AC81], 的命题 4.1，要么 Σ 的一般元素不可约，要么存在一条亏格为 1 E 的光滑不可约曲线，使得 $\Sigma\subseteq|2E|$。在后一种情况下，若记为 (a,b)，使得 $[E]=a\zeta+b\xi$，则需要

$$1=\binom{a}{2}m+(a-1)(b-1)$$

这反过来意味着 $(m,\ k,\ a)\in\{(2,\ 4,\ 0),\ (1,\ 6,\ 0),\ (1,\ 4,\ 2),\ (0,\ 4,\ 4)\}$，这与我们的假设矛盾。特别地，令 $\mathcal{S}$ 表示参数化 $\mathbb{F}_m$ 中类为 $(k,\ a)$、几何亏格为 g 的不可约节点曲线的塞韦里簇，则映射:

$$\mathrm{Sing}\mathcal{S}\to\mathcal{H}ilb^{\delta}(\mathbb{F}_m)\mid\Gamma\mapsto\mathrm{Sing}(\Gamma)$$

是占优的。

因此，唯一尚待证明的是 Σ 不以 Δ 为固定分量。首先注意到，由于假设 S 是一般的，我们可以假设 S 中没有点落在 Δ 中。此外，我们还可以假设 $m\geq 2$ as，因为如果 $m\leq 1$，$\Delta\cdot K_{\mathbb{F}_m}<0$，那么以准线为一个分量并不会妨碍应用前面的推理。

反设 Σ 以 Δ 为固定分量，且其重数为 r。令 Σ' 表示 $|\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k-r,\ rm+a)|$ 的子线性系，其中的曲线在 S 上方是奇异的。根据假设，存在一个元素 $D\in\Sigma'$ 不以准线为分量。因此，我们可以应用 [AC81] 的命题 4.1，得到一个 $D'\in\Sigma'$，它要么是仅在 S 上方奇异的不可约节点曲线，要么是被计数两次的光滑椭圆曲线。由于 $m\geq 2$，后一种情况不可能发生，因此 D' 是仅在 S 上方奇异的不可约节点曲线。取 D'' 为 $D'\cup\Delta$，于是可得到 $|\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k-(r-1)\ a+(r-1)m)|$ 的子线性系中的一个元素，其中的曲线在 S 上方是奇异的。由于 D'' 是连通的（因为 $a+rm>0$），与 S 的交仅包含在一个分量中，并且:

$$\dim|D'+\Delta|:=\dim|\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k-r,a+rm)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(1,-m)|=$$

$$=\binom{k-r+2}{2}m+(k-(r-1)+1)(a+(r-1)m+1)-1=$$

$$=\binom{k-r+1}{2}m+(k-r+1)(a+rm+1)+a+(r-1)m>|D'|=|D'|+|\Delta|$$

可以重复 [AC81] 中命题 4.1 证明里的步骤 II 的证明，从而找到一个 S 上不可约且奇异的元素 $D_0\in|\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k-r+1,a+(r-1)m)|$。特别地，若取 D_1 为 D_0 与 $(r-1)$ 乘以 Δ 的并，则 D_1 属于 Σ，且准线是其重数为 $r-1$ 的一个不可约分支，由此得到所需的矛盾。 □

注记 4.1. 注意，由于 $\dim(\mathcal{H}ilb^{\delta}(\mathbb{F}_m)) = 2\delta$，条件 $3\delta \leq |\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a)|$ 实际上是映射 $\mathcal{S} \to \mathcal{H}ilb^{\delta}(\mathbb{F}_m)$ 具有支配性的必要条件。上述证明表明，它也是充分条件。

例 4.1. 例如，取 C 为一条亏格为 8、次数为 6 的一般曲线 Γ 的正规化（位于 $\mathbb{P}^2$中），则相对于从 Γ 外一点作出的投影，其卷曲不变量为 (1，2，3，3，4)。这是因为它可以看作 F_1中一条几何亏格为 8、类为 (6，0) 的一般曲线的正规化。

注意，这些确实是覆盖的不变量，而不是曲线的不变量。事实上，从曲线上的一点作投影会得到 (2， 3，3， 4)，而从一个节点作投影则会得到 (3，4，4)；分别将它们视为 F_1中的几何亏格为 8、类为 (5，1)（分别为 (4， 2)）的一般曲线的正规化即可看出这一点。

作为推论，由于一般的 k :1 覆盖 $\mathbb{P}^1$ 的 Tschirnhausen 丛是平衡的（例如参见 [Bal89]），可得如下结论：

推论 4.2。设 $f : C \to \mathbb{P}^1$ 是 $\mathbb{P}^1$ 的一般 $k : 1$ 覆盖。那么，若 f 可分解为：

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\nu} & \mathbb{F}_m \\ & \searrow^{f} & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

ν 的像的类为 (k, a)，其中 $a \geq \binom{g}{k-1} + 1 - m$。

注意，由于根据前一个定理的证明，满足定理 1.2 假设的 $\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_m, (k,a))$ 的一般点 $f : C \to \mathbb{F}_m$ 的像是一条节点处于一般位置的不可约节点曲线，我们可以使用引理 3.1 来计算$\mathcal{O}_C(\Delta)$ 的分裂型。接下来我们也可以证明推论 1.3：

推论 ***1.3*** 的证明。唯一尚待求出的是 $\mathcal{O}(\Delta)$ 的分裂型。将 (3) 中的正合列张量乘以 $\mathcal{O}(-\Delta)$，并取上同调，可得：

$$0 \to H^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{I}_S(k-3, 2m+a-2-n)) \to H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{A}^{\otimes -n} \otimes \nu^* \mathcal{O}(-\Delta)) \to$$

$$\to H^1(\mathbb{F}_m, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(-3, 2m-2-n)) \to H^1(\mathbb{F}_m, \mathcal{I}_S(k-3, 2m+a-2-n))$$

现在应用 Leray 谱序列，可得 $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(-3, 2m-2-n)) \cong H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m-2-n))$。若 $n \leq m-2$，根据我们对 δ 的假设，有：

$$h^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k-3, 2m+a-2-n)) = \binom{k-1}{2} m + (a+m-1-n)(k-2) \geq \delta$$

因此，由引理 3.1， $h^1(\mathbb{F}_m, \mathcal{I}_S(k-3, 2m+a-2-n)) = 0$，这意味着：

$$h^0(C, \omega_C(-\Delta) \otimes \mathcal{A}^{\otimes -n}) = m - 1 - n + \binom{k-1}{2} m + (a+m-1-n)(k-2) - \delta$$

令 $n = 0$，并使用黎曼–罗赫定理可得 $h^0(C, \mathcal{O}_C(\Delta)) = 1$。利用上述方程可知， m 是满足下列条件的最小 n：

$$h^0(C, \omega_C(-\Delta) \otimes \mathcal{A}^{\otimes -n+1}) - h^0(C, \omega_C(-\Delta) \otimes \mathcal{A}^{\otimes -n}) < k - 1$$

由于 $\mathcal{O}_C(\Delta)$ 的分裂型 $(g_1, \ldots\ldots, g_k)$ 对每个 $i \leq k-1$ 和 $\sum_i g_{i+1}+e_i = a$ 都满足 $g_{i+1} \geq -e_i$，前一定理告诉我们，对于每个 $i > 1$， $g_{i+1} = -e_i$。现在很容易看出，对于定理 1.2 中的 l， d, j，采用相同的记号，有：

$$h^1(C, \mathcal{E}nd(\nu_*\mathcal{O}_C(\Delta))) = h^1(C, \mathcal{E}nd(\nu_*\mathcal{O}_C)) + (k-3)a$$

$$h^1(C, \mathcal{H}om(\nu_*\mathcal{O}_C, \nu_*\mathcal{O}_C(\Delta))) = h^1(C, \mathcal{E}nd(\nu_*\mathcal{O}_C)) - a$$

$$h^1(C, \mathcal{H}om(\nu_*\mathcal{O}_C, \nu_*\mathcal{O}_C(\Delta))(m)) = h^1(C, \mathcal{E}nd(\nu_*\mathcal{O}_C)) + \binom{k}{2}m - \binom{2}{2}m - dl - j - (k-1) - a$$

利用 $g = \binom{k}{2} + (k-1)(a-1) - \delta = \binom{k}{2} + (k-1)(a-1) - \binom{l}{2}m - dl - j$，即可得到该推论的陈述。 □

下面的命题是 [Cop21] 中定理 1 的自然推广。尽管在某些一般性条件下，它是定理 1.4 的一个特例，但我们仍将其列出，因为它描述了所有节点按这种方式排列的节点曲线的卷曲不变量。

命题 *4.3.* 设 C 是类为 (k, a) 的不可约节点曲线 $\Gamma \subseteq \mathbb{F}_m$ 的正规化，且 $S := Sing(\Gamma)$。对每个 $i = 1$，设 $\ldots k-1$, $C_i \subseteq \mathbb{F}_m$ 是 π 的截面： $\mathbb{F}_m \to \mathbb{P}^1$ 不同于 $\mathbb{F}_m$ 的直母线，并假设 $S = S_1 \cup \cdots \cup S_{k-1}$，其中对每个 i， S_i 是 C_i 上次数为 s_i 的除子，且 $s_i \leq Max(0, s_{i-1} - m)$ 和 $s_1 \leq (k-1)m + a + 1$。设 $j_1 := \lfloor \frac{s_\ell}{m} \rfloor$ 且 $i_1 = \#\{t \geq 0 \mid s_{1+t} = s_1 - tm\}$。那么， C 的卷曲不变量为：

$$e_i = \begin{cases} im + a & if\ 1 \leq i \leq j_1 \\ (k-1)m + a - s_1 & if\ j_1 < i < j_1 + i_1 \end{cases}$$

其余的是类为 $(k - i_1, a)$ 且奇异轨迹包含于 $S' := S_{i_1+1} \cup \cdots \cup S_{k-1}$ 的曲线的最后 $k - j_1 - i_1$ 个卷曲不变量

证明。首先注意到，由于情形 $m = 0$ 已在 [Cop21], 中证明，我们只需证明情形$m > 0$。根据假设，若 $s_1 \leq (k-2)m + a + m - 1 - n$，则对每个 i，都有 $s_i \leq (k-i)m + a - 1 - n$。因此，对任意这样的 n，由引理 3.3 可得：

$$h^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{I}_S(k-2, m+a-2-n)) = h^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k-2, a+m-2-n)) - \delta$$

对于每个 $i \leq (k-1-\frac{s_1+1}{m})$， C的卷曲不变量因此与 $\mathbb{F}_m$中类为 (k, a) 的光滑曲线的不变量相同。

若 $n \geq (k-1)m + a - s_1$，则 $A^\bullet(\mathbb{F}_m)$ 上的交配对表明， $\mathcal{I}_S(k-2, a+m-2-n)$ 的任意整体截面都在 $C_1, \ldots, C_{i_1}$ 上消失。事实上，令 σ 为任意这样的截面，并令 ℓ_0 为满足 $C_{\ell_0} \not\subseteq V(\sigma)$ 的第一个指标，则有

$$C_{\ell_0}.V(\sigma) := \zeta \cdot ((k-1-\ell_0)\zeta + (m+a-n-2)\xi) < s_1 - (\ell_0 - 1)m := s_{\ell_0}$$

因此， $\mathcal{I}_S(k-2, a+m-2-n)$的整体截面由$\mathcal{I}_{S'}(k-2-i_1, a+m-2-n)$的整体截面决定，其中 S'由 S中不属于 $C_1, \ldots, C_{i_1}$的所有点的并集给出。特别地，对于任意 $n > (k-1)m + a - s_1$， $f(n)$与一条类为（$k - i_1, a$）且其奇异轨迹满足引理假设的曲线之正规化的相同。

由此可知，确定 $f((k-1)m + a - s_1)$ 后，可以通过归纳法计算 C 的卷曲不变量。根据以上论述，有：

$$f((k-1)m + a - s_1) = h^0(\mathbb{F}_m, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k-2, s_1 - (k-2)m - 1)) - \delta +$$

$$-(h^0(\mathbb{F}_m,\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k-2-i_1,s_1-(k-2)m-2))-(\delta-\sum_{1\le i\le i_1}s_i))=$$

$$h^0(\mathbb{F}_m,\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k-2,s_1-(k-2)m-1))-h^0(\mathbb{F}_m,\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k-2-i_1,s_1-(k-2)m-2))-\sum_{1\le i\le i_1}s_i$$

它等于 j_1+1-i_1 if $s_1\neq j_1m$ or j_1+2-i_1 if $s_1=j_1m$。请注意，这里的差异仅仅是因为在第一种情况下，$(k-j_1-1)m+a$（根据归纳法，这是满足引理假设的 $\mathbb{F}_m$ 上类为 $(k,\ a)$ 的曲线的第 $(k-j_1-1)$ 个不变量）等于 $(k-1)m+a-s_1$。

□

例4.2。例如，取 $k=7$, $s_1=3m+\alpha_1$, $s_2=m+\alpha_2$，其中 $\alpha_1,\ \alpha_2<m$则奇异轨迹包含于 2 个截面之并的曲线的卷曲不变量为 $C_1,\ C_2$ 属于 $\pi\colon \mathbb{F}_m\to\mathbb{P}^1$，其中 s_1 个点位于 C_1，而 s_2 个点位于 C_2：

$$(a+m,a+2m,a+3m-\alpha_1,a+3m,a+4m-\alpha_2,a+4m)$$

不过请注意，由于对任意 $\delta>m+1$，位于类 ζ 曲线上的条件在 $\mathcal{H}ilb^\delta(\mathbb{F}_m)$ 中定义一个除子，因此若 $m>0$，本命题就无法描述一般曲线在 $\mathbb{F}_m$中的正规化的不变量。这远弱于 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 在 [Cop21] 中的情形，因为那里只讨论了 $m=0$，所以可以取 $\delta\le(k-1)$。本文的第二个定理旨在弥合上述情形与曲线在塞韦里簇中一般时的情形之间的差距：

定理 ***1.4*** 的证明。同样，我们的思路是对任意的 n计算 $h^0(\mathcal{I}_S(k-2,\ m+a-2-n))$，利用引理3.4和推论3.5即可轻松完成。还请注意，我们只需对 $n\le n_1$ 计算，因为按照推论3.5的证明方法可以看出，如果

$$\sum_{i\le\ell}s_i>\sum_{i\le\ell}\mathrm{Max}\{(k-i)m+a-1-n,0\}$$

式 (4) 中的矩阵不满秩，并取 i_1 为这种情况首次出现时的整数，那么可以看出，任何在这样的 S 上消失的截面，都由一个在 S' 上消失的$\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k-2-i_1,\ m+a-2-n)$ 的截面确定，其中 S' 是 S 的子集，由那些对于 $i<k-1-i_1$满足位于 C_i 中的点组成。特别地，在这种情况下，其秩以及相应的$h^0(\mathbb{F}_m,\ \mathcal{I}_S(k-2,\ m+a-2-n))$，都可以通过归纳法确定。

如上一命题所述，每当经过 S 对 $|\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,\ a)|$，$f^S_{k,\ a}=f^\emptyset_{k,\ a}$施加独立条件时。因此，为证明该定理，剩下唯一要做的是计算$f^S_{k,\ a}(n_1)$。由引理3.4和推论3.5，这等于：

$$h^0(\mathbb{F}_m,\mathcal{I}_S(k-2,a+m-1-n_1))-h^0(\mathbb{F}_m,\mathcal{I}_S(k-2,a+m-2-n_1))=$$

$$\big(h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k-2,a+m-1-n_1))-h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k-2,a+m-2-n_1))\big)+\sum_t\sigma_{k-i_{t-1}}(i_{t-1},i_t,n_1)$$

现在，由于对每个 $i=1,\ \ldots\ldots,\ k-1$，类为$(k,\ a)$的光滑曲线的第 i个卷曲不变量为 $im+a$，选取 r_1 使得 $r_1m+a\le n_1<(r_1+1)m+a$,

$$h^0(\mathbb{F}_m,\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k-2,a+m-1-n_1))-h^0(\mathbb{F}_m,\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k-2,a+m-2-n_1)=k-r_1$$

这进而表明，卷曲不变量正是定理陈述中所描述的那些不变量。

□

备注 4.4. 注意，如果我们取 $\delta \leq \mathrm{Min}(p_a(k,a)\ \frac{1}{3}h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a)))$，并对每个$s_i \leq m+1$ 进行选择，就会得到类为 (k,a)、几何亏格为 $p_a(k,a)\ -\delta$的一般曲线正规化后的卷曲不变量。这与我们在定理 1.2 中证明的结果一致，因为在这些亏格假设下，此类曲线的节点处于一般位置。

特别是，推论3.5弥合了定理 1.2与命题 4.3之间的差距。

例 4.3. 例如，取 $(k,a)\ =(9,4)$，$(s_1,\dots,s_u)\ =(18,18,10,6,2)$。按照证明中展示的步骤，可得 $n_1=16$, $r_1=3$, $j_1=i_1=2$, $\delta_1=2$。因此，前5个卷曲不变量为8,12,16,16,16。其余不变量可通过考察一条具有 $(k_2,a_2)\ =(7,4)$ 和 $(s_1',\dots,s_u')\ =(10,6,2)$ 的曲线来计算。在这种情况下重复证明中的推理，可得 $n_2=18$, $r_2=0$, $j_2=3$, $\delta_2=3$。因此，这样一条曲线的卷曲不变量为：

$$(8,12,16,16,16,18,18,18)$$

注意，对于此类且具有给定几何亏格的一般曲线，其正规化的不变量则为：

$$(8,12,16,17,17,17,17,18)$$

5 Fm 中具有指定位置节点的曲线

最后，我们通过证明 $\mathbb{F}_m$ 中存在节点位置如定理 1.4 所指定的曲线来结束本文。将讨论限制在 $m=0$ 的情形，可大幅改进 [Cop21] 的命题 1 以及 [Bal02] 的第三断言中给出的亏格界。下文中，我们假设 $k\geq 5$。若 $k\leq 4$，则可仿照 [Cop21] 中定理 2 的证明，得到定理 1.5 陈述中所需的 g 界。

引理 5.1. 设 $u\geq 0$，且 $s_1\geq\cdots\geq s_u$ 是一个非递增整数序列。那么，对于任意的 $\ell\geq 1$、$k\geq \ell-1$、$a\geq \lceil \frac{u}{\ell}\rceil s_1+s_u^-$ 以及 $\pi\colon\ \mathbb{F}_m\to\mathbb{P}^1$、$C_1$、.....、$C_u$ 的一般截面，取 s_i 个一般点的一个子集 $S_i\subseteq C_i$，并记 $S\colon=S_1\cup\cdots\cup S_u$，线性系 $|\mathcal{I}_S(k,\ a))|$ 不含固定分量。

证明。我们首先证明，对于 π 的一般截面以及这些截面上的一般点，$\Sigma:=|\mathcal{I}_S(u,\ a))|$ 不含类为 (1，0) 或 (0，1) 的固定分量。

如果存在类为 (1，0) 的不可约分支，它必定是截面 C_i 之一。现在，这意味着，任选 C_i 中两个不同于 S_i 中那些点的点，它们不会对 $\Sigma:=|\mathcal{I}_S(k,\ a)|$ 施加任何条件。特别地，我们只需证明，在每个截面上选取两个一般点时，这些点会对 Σ 施加 $2u$ 个条件。同样，要做到这一点，只需给出一个例子。

取 $\lambda_1,\dots,\lambda_u\ \in\Bbbk$ 以及 $h_i\ =\ \lambda_i t_0^m$。选取坐标 $\left(([t_{0,i,j}\colon t_{1,i,j}])_{i=1}^{s_j+2}\right)_{j=1}^{u}\left(\mathbb{P}^1\right)^{s+2u}$ 并定义：

$$ev_S:\prod_{i=0}^{u}H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}((k-i)m+a))\to\Bbbk^{\oplus s+2u}$$

$$(f_k,\dots,f_0)\mapsto\left(\left(\sum_{i=0}^{k}f_i(t_{0,\ell,j},t_{1,\ell,j})h_\ell(t_{0,\ell,j},t_{1,\ell,j})^i\right)_{j=1}^{s_i+2}\right)_{l=1}^{u}$$

根据构造，固定 $\boldsymbol{q} \in \left(\mathbb{P}^1\right)^{s+2u}$ 此映射对应于在 $S(\boldsymbol{q})$ 处对 $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,a)$ 的截面求值：$=\bigcup_{i=1}^{u} S(\boldsymbol{q})_i$ 其中 $S(\boldsymbol{q})_i$ 是 $C_i := V(x_1 - h_i x_0)$ 中映射到 $\{q_{j,i}\}_{j=1}^{s_i+2}$ 的点集。因此，我们只需证明，对于某些 $\lambda_1, \ldots, \lambda_u$，$[t_{0,i,j} : t_{1,i,j}]$ ev_S 具有最大秩。为 $\ell = j \ mod \ \ell + 1$ 选取 $\lambda_\ell = \lambda_j$，由引理 3.3 可直接得到结论。

类似地，如果 Σ 有一个类为 $(0,\ 1)$ 的固定分量，它就会是一条经过 S 中某个点的直线。现在，像上面那样选取 λ-s 和 h_i-s，令 $\lambda \in \Bbbk$ 不同于这些 λ_i-s，$h := \lambda t_0^m$，并对每个 $(b,\ c) \in \{(i,\ j) \mid 1 \le i \le s_j,\ 1 \le j \le u\}$ 考虑：

$$ev_S^{b,c} : \prod_{i=0}^{k} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}((k-i)m + a)) \to \Bbbk^{\oplus s+1}$$

$$(f_k, \ldots, f_0) \mapsto \left(\left(\left(\sum_{i=0}^{k} f_i(t_{0,\ell,j}, t_{1,\ell,j}) h_l(t_{0,\ell,j}, t_{1,\ell,j})^i \right)_{j=1}^{s_i} \right)_{\ell=1}^{u}, \sum_{i=0}^{k} f_i(t_{0,b,c}, t_{1,b,c}) h(t_{0,b,c}, t_{1,b,c})^i \right)$$

如上所述，$ev^{b,\ _S{}^c}$ 对应于整体截面 $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(k,\ a)$ 在 S 处以及位于与 C_c 上第 b 个点共线的某一点处的取值。因此，按照上述推理，对于 λ-s 的一般选取以及 S 中点的一般选取，$ev^{b,\ _S{}^c}$ 具有最大秩。由于 $(b,\ c)$-s 的集合是有限的，这就意味着，对于 S 和这些截面的一般选取，Σ 不会有类型为 $(0,\ 1)$ 的固定分量。

现在，若 Σ 有固定分量，由于它不可能属于 $(0,\ 1)$ 或 $(1,\ 0)$ 型，因此它会与铅笔 $\{C_\lambda := V(x_1 - \lambda t_0^m x_0)\}_{\lambda \in \Bbbk}$ 的一般成员横截于一个或多个点。

注意：我们必须排除该不可约分支属于 $(1,\ 0)$ 型的情形，才能同时处理 $m = 0$ 的情形。还要注意，固定分量不可能是 $\mathbb{F}_m$ 的准线，因为根据假设，没有 S 中的点落在其上。

按照上述推理，这意味着对于一般的 $\lambda \in \mathbb{A}^1_{\Bbbk}$，存在 t_0，t_1，使得下列矩阵不具有最大秩：

$$\begin{pmatrix}
t_{0,1,1}^{um+a} & \ldots & t_{1,1,1}^{um+a} & \lambda_1 t_{0,1,1}^{(u-1)m+a} & \ldots & \lambda_1^u t_{1,1,1}^a \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
t_{0,s_1,1}^{um+a} & \ldots & t_{1,s_1,1}^{um+a} & \lambda_1 t_{0,s_1,1}^{(u-1)m+a} & \ldots & \lambda_1^u t_{1,s_1,1}^a \\
t_{0,1,2}^{um+a} & \ldots & t_{1,1,2}^{um+a} & \lambda_2 t_{0,1,2}^{(u-1)m+a} & \ldots & \lambda_2^u t_{1,1,2}^a \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
t_{0,s_k,k}^{um+a} & \ldots & t_{1,s_k,k}^{um+a} & \lambda_k t_{0,s_k,k}^{(u-1)m+a} & \ldots & \lambda_k^u t_{1,s_k,k}^a \\
t_0^{um+a} & \ldots & t_1^{um+a} & \lambda t_0^{(u-1)m+a} & \ldots & \lambda^u t_1^a
\end{pmatrix}$$

特别地，对于任意 λ，上述矩阵的 $(s+1) \times (s+1)$ 子式都有一个公共根。因此，例如根据 [HY21]，的定理 8，它们的 0 次次结式作为关于 λ 的多项式恒等于 0。此时，在 $i = j \ mod \ \ell$ 的条件下将情形特化为 $\lambda_i = \lambda_j$，并按照之前的推理，即可得到所需的矛盾。 □

注 5.2. 前一个引理的证明也表明，对于一般的 $p \in \mathbb{F}_m$，$h^1(\mathcal{I}_{S \cup p}(k,a)) = 0$。

由此可得以下推论：

推论 5.3. 沿用前一引理中的记号，对于一般的 $C_1, \dots, C_u$, $\ell \geq 1$, $k \geq \ell - 1$和 $a \geq \left(\left\lceil \frac{u}{\ell} \right\rceil + 1\right) s_1$, 线性系 $\Sigma := |\mathcal{I}_S(k, a)|$ 在 S之外没有基点，且其一般成员不可约。

证明。 注意到，根据前一个引理，该线性系没有固定分量。现在，由于该线性系不是由一支铅笔复合而成的（基于维数的理由，可以找到一个以直线为分量的线性系元素，从而找到一个其不可约分支具有非成比例数值类的成员），根据 [Kle98], 的定理 5.3， Σ 的一般成员是不可约的。特别地，由于 $\Bbbk$ 是无限域，因而 $\Bbbk(t_1, \dots, t_{\dim \Sigma})$ 具有希尔伯特性；又令 X_η 为 Σ 上普适曲线的一般纤维，则对于 $c \gg 0$， $\deg(\mathcal{I}_p(1, c)|_{X_\eta})$ 大于 $\#S + \deg(\omega_{X_\eta})$，因此 Σ 的一般点上方的纤维：

$$p_1 : \Phi_C := \{(f, q) \in \Sigma \times C \mid f(q) = 0\} \to \Sigma$$

是不可约的（例如，参见 [Kol+23] 中的引理 8.6.13）。因此，对于一般的 $C \in |\mathcal{I}_p(1, c)|$， Φ_C 也如此。

任取这样一个光滑的 C，则第二投影 $p_2 : \Phi_C \to C$ 是从一个簇到一条非奇异曲线的支配态射，因此是平坦的。特别地，其纤维的维数是常数。因此，由于根据前一个引理，一般点 $q \in C$上的纤维具有预期维数，其他所有纤维也如此。 □

还要注意，由于引理 3.3 不仅可用于证明，在 C_i-s 中经过某些点会对 $|\mathcal{O}_{\mathbb{F}_m}(l, a)|$ 施加独立条件，也可用于证明在这些点处具有与 C_i-s 相同的喷流也会施加独立条件，因此可以类似地证明：

推论 5.4. 沿用前述推论的记号，线性系 $|\mathcal{I}_S(k, a)|$ 的一般成员是光滑的。

备注 5.5. 上述推论并未给出关于 a 的精确界，因为只需检视引理 5.1 的证明，便可轻易得到更好的界。

上述推论使我们能够改进[Bal02]中引理 1 的证明里的步骤 I 和 II。

引理 5.6. 设 u 为一个非负整数，并设 $C_1, \dots, C_u$ 为 $\mathbb{F}_m \to \mathbb{P}^1$的一般截面。对每个 i，设 S_i 为 C_i 中一组满足 $s_1 \geq \cdots \geq s_u$的 s_i 个一般点。设 $S^{(1)}$ 为 S在 $\mathbb{F}_m$中的一阶加厚：$= S_1 \cup \cdots \cup S_u$。那么，对每个 $a \geq 2(\lceil \frac{2u}{k} \rceil + 1)s_1$, $\ell \geq k$

$$h^1(\mathbb{F}_m, \mathcal{I}_{S^{(1)}}(\ell, a)) = 0$$

证明。 设 C_0为一条经过 S、类为 $(\lceil \frac{k}{2} \rceil - 1, (\lceil \frac{2u}{k} \rceil + 1)s_1)$ 的一般曲线。根据前一个推论，$S^{(1)}$ 关于 C_0 的余式概形为 S。这意味着以下序列正合：

$$0 \to \mathcal{I}_S\left(\ell - \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 1, a - \left(\left\lceil \frac{2u}{k} \right\rceil + 1\right) s_1\right) \to \mathcal{I}_{S^{(1)}}(\ell, a) \to \mathcal{I}_{2S, C_0}(\ell, a) \to 0$$

现在， $2S$ 是 C_0上的次数为 2δ 的Cartier除子。根据定义，有：

$$\deg(\mathcal{I}_{2S, C_0}(\ell, a)) = C_0.(\ell\zeta + a\xi) - 2\sum_{i \leq u} s_i =$$

$$= \left(\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1\right) \ell m + \left(\left\lceil \frac{2u}{k} \right\rceil + 1\right) \ell s_1 + \left(\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1\right) a - 2\sum_{i \le u} s_i \ge$$

$$\ge \left(\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1\right) km + \left(\left\lceil \frac{2u}{k} \right\rceil + 1\right) ks_1 + 2\left(\left\lceil \frac{2u}{k} \right\rceil + 1\right) s_1 \left(\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1\right) - 2us_1 \ge$$

$$\ge 2\binom{\lceil \frac{k}{2} \rceil - 1}{2} m + 2\left(\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1\right)\left(\left(\left\lceil \frac{2u}{k} \right\rceil + 1\right) s_1 - 1\right)$$

并且，根据伴随公式， C_0 的典范除子的次数为

$$2\binom{\lceil \frac{k}{2} \rceil - 1}{2} m + 2\left(\left(\left\lceil \frac{2u}{k} \right\rceil + 1\right) s_1 - 1\right)\left(\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 2\right) - 2,$$

the line bundle $\mathcal{I}_{2S,C_0}(\ell\ a)$ i非特殊的 s ial. I^{n} 参数ticular, $h^1(\mathcal{I}_{2S,C_0}(l\ a)) \quad 0$

=。注意到，由于 $\ell \ge k$, $a \ge 2(\lceil \frac{2u}{k} \rceil + 1)s_1$，我们也有 $h^1(\mathcal{I}_S(\ell = \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1, a - (\lceil \frac{2u}{k} \rceil + 1)s_1))$ 的消失，引理便得证。 □

前一个引理的直接推论如下。证明沿用了 [Bal02] 中步骤 II 的思路。为完整起见，我们决定将其列出：

推论 5.7. 沿用上一引理中的记号，设 p 是 S 的一个点，并设 $p^{(2)}$ 是 p 在 $\mathbb{F}_m$中的二阶加厚。那么，对每个 $a \ge 2(\lceil \frac{2u}{k} \rceil + 1)s_1 + 1$, $\ell \ge k$:

$$h^1(\mathcal{I}_{S^{(1)} \cup p^{(2)}}(\ell, a)) = 0$$

证明. 设 L 是经过 p的纤维 $\pi : \mathbb{F}_m \to \mathbb{P}^1$。根据构造， $S^{(1)} \cup p^{(2)}$ 关于 L 的余式概形是 $S^{(1)}$。因此我们有一个正合列：

$$0 \to \mathcal{I}_{S^{(1)}}(\ell, a-1) \to \mathcal{I}_{S^{(1)} \cup p^{(2)}}(\ell, a) \to \mathcal{I}_{3p,L}(\ell, a) \to 0$$

由上述引理， $h^1(\mathcal{I}_{S^{(1)}}(\ell, a-1)) = 0$。由于 $k \ge 3$，我们也有 $h^1(\mathcal{I}_{3p,L}(\ell, a)) = 0$。 □

多亏了上述引理，我们现在可以继续证明定理 1.5：

定理 ***1.5*** 的证明。设 $S^{(1)}$ 是 S 在 $\mathbb{F}_m$中的一阶加厚。根据定义，$C \in |\mathcal{I}_{S^{(1)}}(k, a)| := \Sigma$ 当且仅当它在 S处奇异。另定义：

$$\Sigma_1 := \left|\mathcal{I}_S\left(\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1, \left(\left\lceil \frac{2u}{k} \right\rceil + 1\right) s_1\right)\right| \qquad \Sigma_2 := \left|\mathcal{I}_S\left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1, \left(\left\lceil \frac{2u}{k} \right\rceil + 1\right) s_1\right)\right|$$

选取 L_1、.....、 $L_{a-2(\lceil \frac{2u}{k} \rceil + 1)s_1}$ 个 π的 $\mathbb{F}_m \to \mathbb{P}^1$纤维：根据构造可知 t

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \sum_{i \le a - 2(\lceil \frac{2u}{k} \rceil + 1)s_1} L_i \le \Sigma$$

推论 5.3 和 5.4 保证， Σ 的一般成员仅在 S 上是奇异的。推论 5.7 现在表明， Σ 的一般成员的奇异性仅为节点。

最后，由于 Σ_1 和 Σ_2 的维数均为正， Σ没有固定分量。根据 [Kle98], 的定理 5.3，如果 Σ 的一般成员可约，那么 Σ 就由一支铅笔复合而成。由于对一般的 $C_1 \in \Sigma_1$, $C_1 \cup C_2 \cup L_1 \cup \cdots \cup L_{a-2(\lceil \frac{2u}{k} \rceil + 1)s_1}$的分支具有不成比例的数值类，因此不可能如此。因此,一Σ的一般成员是不可约的、节点型的，且仅在 S 上奇异。 □

由此，完全按照 [Bal02] or 主定理的证明（或者等价地，按照 [Cop21] 定理 2 的证明）进行推导，即可得到推论 1.6 的证明。

注记 5.8. 请注意，尽管在推论 1.6 中，我们成功得到了一个关于 k 呈线性依赖的亏格，但这种依赖仍然限制了我们仅利用 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 中节点曲线的正规化所能获得的归一化卷曲不变量。事实上，对上述任意曲线，令 $e_i := \frac{e_i}{g+k-1}$，

$$\overline{e}_{k-1} - \overline{e}_1 = \frac{d}{g+k-1} < \frac{d}{(6d+1)(k-1)}$$

参考文献

[AC81] Enrico Arbarello 和 Maurizio Cornalba：《Beniamino Segre 论文的补注。（一般 d 重覆盖曲线上 g^1_d的数目，以及 4 重覆盖曲线和 5-重覆盖曲线的 Hurwitz 空间的单有理性）》。载于：Math. Ann. 256（1981），第 341–362 页。 ISSN：0025-5831。[Bal89] E. Ballico：《关于一般 k 重覆盖曲上线性级数的一点评论》。载于：Boll. Unione Mat. Ital., VII. Ser., A 3.2（1989），第 195–197 页。 ISSN：0392-4033。[Bal02] E. Ballico：《光滑射影曲线的卷曲不变量》。载于：J. Pure Appl. Algebra 166.3（2002），第 239–246 页。 ISSN：0022-4049。[CE96] G. Casnati 和 T. Ekedahl：《代数簇的覆盖。I：一般结构定理、3 次和 4 次覆盖以及 Enriques 曲面》。载于：J. Algebr. Geom. 5.3（1996），第 439–460 页。 ISSN：1056-3911。[CHT23] Karl Christ、Xiang He 和 Ilya Tyomkin：《论任意特征下的塞维里问题》。载于：Publ. Math., Inst. Hautes ´Étud. Sci. 137（2023），第 1–45 页。 ISSN：0073-8301。[CJ22] Kaelin Cook-Powell 和 David Jensen：《Hurwitz–Brill–Noether 理论中的热带方法》。载于：Adv. Math. 398（2022）。编号 108199，第 42 页。 ISSN：0001-8708。[Cop21] Marc Coppens：《在光滑二次曲面上具有节点模型且节点位于少数几条直线上的 K重覆盖曲线的卷曲不变量》。载于：Rend. Semin. Mat., Univ. Politec. Torino 79.2（2021），第 45–53 页。 ISSN：0373-1243。[CLV24] Izzet Coskun、Eric Larson 和 Isabel Vogt：《Tschirnhausen 丛的稳定性》。载于：Int. Math. Res. Not. 2024.1（2024），第 597–612 页。 ISSN：1073-7928。[Cox95] David A. Cox：《托里克簇的齐次坐标环》。载于：J. Algebr. Geom. 4.1（1995），第 17–50 页。 ISSN：1056-3911。[FFR25] Gavril Farkas、Soheyla Feyzbakhsh 和 Andr´es Rojas：《通过 K3 曲面和稳定性条件研究 Hurwitz–Brill–Noether 理论》。载于：arXiv 预印本（2025）。 URL：https: //arxiv.org/abs/2505.19890。[FK19] Gavril Farkas 和 Michael Kemeny：《具有给定覆盖次数的曲线的线性 Syzygy》。载于：Adv. Math. 356（2019）。编号 106810，第 39 页。 ISSN：0001-8708。[Ful93] William Fulton：《托里克簇导论》。1989 年 William H. Roever 几何讲座。第 131 卷。Ann. Math. Stud. 新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社，1993。 ISBN：0-691-00049-2。[Ful98] William Fulton：《交理论》。第 2 版。第 2 卷。Ergeb. Math. Grenzgeb., 3. Folge。柏林：Springer，1998。 ISBN：3-540-62046-X。[HY21] Hoon Hong 和 Jing Yang：《若干单变量多项式的次结式》。载于：arXiv 预印本（2021）。 URL：https://arxiv.org/abs/2112.15370。

[Kle98] Steven L. Kleiman：《Bertini 及其两个基本定理》。载于：现代数学史研究。III。巴勒莫：巴勒莫数学学会，1998，第 9–37 页。[Kol+23] J´anos Koll´ar、Max Lieblich、Martin Olsson 和 Will Sawin：《什么决定了一个代数簇？》第 216 卷。Ann. Math. Stud. 新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社，2023。 ISBN：978-0-691-24680-2；978-0-691-24681-9；978-0-691-24683-3。 DOI：10. 1515/9780691246833。[LLV25] Eric Larson、Hannah Larson 和 Isabel Vogt：《Hurwitz 空间上的全局 Brill-Noether 理论》。载于：Geom. Topol. 29.1（2025），第 193–257 页。 ISSN：1465-3060。[LV24] Hannah Larson 和 Sameera Vemulapalli：《平面及 Hirzebruch 曲面上的光滑曲线的 Brill–Noether 理论》。载于：arXiv 预印本（2024）。 URL：https: //arxiv.org/abs/2408.12678。[Lar21] Hannah K. Larson：《Hurwitz 空间上的精细 Brill-Noether 理论》。载于：I nvent. Math. 224.3（2021），第 767–790 页。 ISSN：0020-9910。[Mar46] Arturo Maroni：《三重覆盖曲线上的特殊线性级数》。意大利语。载于：Ann. Mat. Pura Appl. (4) 25（1946），第 343–354 页。 ISSN：0373-3114。[Mir85] Rick Miranda：《代数几何中的三重覆盖》。载于：Am. J. Math. 107（1985），第 1123–1158 页。 ISSN：0002-9327。[Pfl17] Nathan Pflueger：《 k重覆盖曲线的 Brill-Noether 簇》。载于：Adv. Math. 312（2017），第 46–63 页。 ISSN：0001-8708。[Sch86] Frank-Olaf Schreyer：《典范曲线和特殊线性级数的 Syzygy》。载于：Math. Ann. 275（1986），第 105–137 页。 ISSN：0025-5831。[Str87] Stein Arild Strømme：《Grassmann 簇中的参数化有理曲线》。《空间曲线》，会议论文集，意大利罗卡迪帕帕，1985，Lect. Notes Math. 1266，251–272（1987）。1987。[VV25] Ravi Vakil 和 Sameera Vemulapalli：《射影直线覆盖的 Tschirnhausen 丛》。载于：arXiv 预印本（2025）。 URL：https://arxiv.org/abs/2410.22531。

现地址：柏林洪堡大学，菩提树下大街*6*号，*10117* 柏林 电子邮件地址：
riccardo.redigolo@hu-berlin.de