arXiv:2602.08954v1 [math.CT] 9 Feb 2026

由可分性产生的融合范畴的等价定义

左振邦

Abstract. 对于具有左对偶的半单多环范畴，我们证明：单位对象是简单的，当且仅当由任意非零代数给出的张量函子是可分的（相应地，忠实的、Maschke 的、对偶 Maschke 的、保守的）。由此得到融合范畴的一系列等价定义。作为应用，我们借助张量函子的可分性来描述一类弱霍普夫代数的连通性。我们还考虑简单性在单位对象、半单不可分解模范畴与 Grothendieck 环之间传递的应用。

1. Introduction

可分函子的概念是在 [13]中作为环的可分性的推广而引入的。某些特定函子的可分性往往提供范畴中对象或态射的信息。例如，考虑一个幺半范畴 $\mathcal{C}$，使得 $\mathbf{1}$ 是一个左 $\otimes$-生成元。代数 A 在 $\mathcal{C}$ 中是可分的，当且仅当遗忘函子 $F\colon \mathcal{C}_A \to \mathcal{C}$ 是可分函子，见 [6, 命题 4.3]。

可分函子的对偶概念称为自然满函子，最早在 [2] 中引入。 [1], 中引入的半可分函子，起到了连接可分函子与自然满函子的桥梁作用。可分函子和自然满函子都是半可分的。更准确地说，函子是可分的（分别地，自然满的），当且仅当它是忠实的（分别地，满的）且半可分，参见 [1, 命题 1.3]。此外，函子是可分的，当且仅当它是半可分且满足 Maschke 条件；当且仅当它是半可分且满足对偶 Maschke 条件；当且仅当它是半可分且保守，参见 [1, 推论 1.9]。

多融合范畴是一类重要的阿贝尔幺半范畴。融合范畴是单位对象为简单对象的多融合范畴，参见 [8], [9]。粗略地说，根据定义，我们知道单位对象的简单性从整体角度控制着该范畴的某些信息。例如，分支子范畴分解 $\mathcal{C} = \oplus_{i,\ j\in I}\mathcal{C}_{ij}$ 是平凡的，也就是说，指标集 I 仅含一个元素，当且仅当单位对象是简单对象，参见 [8, 注 4.3.4、定理 4.3.8]。

本文的主要结果表明，可分性可以直接提供信息 y
在范畴层面，通过单位对象。更具体地说，对于 a

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 18M20；次要分类 18A22。
Key words and phrases. 融合范畴、可分函子。

半单多环范畴 $\mathcal{C}$ 具有左对偶， $\mathcal{C}$ 当且仅当对于任意非零代数 A 在 $\mathcal{C}$ 函子 $-\otimes A:\mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 是可分的时，它是环范畴。我们还证明，在具有双正合张量积的半单阿贝尔幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中，函子 $-\otimes A:\ \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 总是半可分的，见命题3.4。因此，利用半可分性，我们的结果还可进一步推广到忠实的、Maschke、对偶 Maschke 和保守的情形，见命题4.3。这导出了融合范畴的等价定义列表，见命题4.4。

从另一个角度看，对于具有左对偶的多环范畴，若它不是环范畴，则函子 $-\otimes A:\mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 的可分性取决于代数 A。这促使我们研究代数的结构。根据多环范畴的分量子范畴分解，参见 [8, 注记 4.3.4], ，我们知道 $\mathcal{C}=\oplus_{i,j\in I}\mathcal{C}_{ij}$。对于 I 的任意非空子集 J，记 $\mathcal{C}_J:=\oplus_{i,j\in J}\mathcal{C}_{ij}$ 为 $\mathcal{C}$ 的全子范畴，且 $1_J:=\oplus_{i\in J}1_i$。我们证明，若 A 是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数，则$A_J:=1_J\otimes A\otimes 1_J$ 是 $\mathcal{C}_J$ 中的一个代数，参见命题 5.10。因此， A_J 是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数，参见推论 5.11。此外， $\mathcal{C}$ 中的任意非零代数 A 必具有形式 A_J，其中 $J=\{i\in I|A_{ii}\neq 0\}$，参见命题 5.12。虽然 $-\otimes A:\mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 可能不可分，但我们证明 $-\otimes A_J:\ \mathcal{C}_J\to(\mathcal{C}_J)_{A_J}$ 是可分的，其中 $J=\{i\in I|A_{ii}\neq 0\}$，参见命题 5.15。
由于主要结果给出了基本定义的等价刻画，因此可以由此得到许多应用。本文重点讨论以下代表性应用：弱霍普夫代数（小节 6.1）、单位对象之间简单性的传递（小节6.2）、半单不可分解模范畴（小节 6.3）以及 Grothendieck 环（小节6.4）。

本文结构安排如下。第 2 节回顾一些基本定义和有用结果。第 3 节研究函子 $-\otimes A:\mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 在半单阿贝尔幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中的可分性（命题 3.3 ）和半可分性（命题 3.4 ）。第 4 节证明，在具有左对偶的半单多环范畴 $\mathcal{C}$ 中，单位对象是简单的，当且仅当对于 A 中任意非零代数，函子 $-\otimes A:\mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 可分；这也等价于其他若干刻画，见命题 4.3。此外，等价定义列表由命题 4.4 给出。第 5 节研究具有左对偶的多环范畴中代数的结构。第 6 节给出一些应用与示例。

记号。 本文中，我们始终假设幺半范畴是严格的。函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 表示协变函子。对于幺半范畴 $\mathcal{C}$，我们将$\otimes$ 记作张量积，将 1 记作单位对象。 $\mathcal{C}$ 中的代数子范畴和余代数子范畴分别记为 Alg($\mathcal{C}$) 和 Coalg($\mathcal{C}$)。对于幺半范畴 $\mathcal{C}$中的代数 A ，我们将其乘法和单位分别记为 m_A 和 u_A，并将${}_A\mathcal{C}$ （分别为 $\mathcal{C}_A$）记作 A上的左（分别为右）模范畴。对于幺半范畴 $\mathcal{C}$中的余代数 C ，我们将其余乘法和余单位分别记为 Δ_C 和 ε_C ，并将 ${}^C\mathcal{C}$ （分别为 $\mathcal{C}^C$）记作 C上的左（分别为右）余模范畴。此外，设 $\Bbbk$ 为代数闭域。

2. Preliminaries

设 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 为一个函子，并考虑自然变换

$$\mathcal{F}:\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F-,F-),$$

通过对任意 $f\colon X\to X'$ in $\mathcal{C}$ 定义 $\mathcal{F}_{X,X'}(f)=F(f)$。若存在自然变换 $\mathcal{P}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F-,F-)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)$，使得

- $\mathcal{P}\circ\mathcal{F}=\mathrm{Id}$, then F 称为可分 [13];
- $\mathcal{F}\circ\mathcal{P}=\mathrm{Id}$, then F 称为自然满 [2];
- $\mathcal{F}\circ\mathcal{P}\circ\mathcal{F}=\mathcal{F}$, then F 称为半可分 [1]。

本文关注由代数或余代数诱导的张量函子。更确切地说，设 $\mathcal{C}$ 为幺半范畴。对于 $\mathcal{C}$ 中的代数 (A,m_A,u_A)，由 A 诱导的张量函子定义为 $-\otimes A:\mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$，其作用为 $M\mapsto(M\otimes A,M\otimes m_A)$,$f\mapsto f\otimes A$。注意，存在伴随对 $(-\otimes A,F)$，其中 $F\colon \mathcal{C}_A\to\mathcal{C}$ 是遗忘函子。伴随的单位 $\eta:\mathrm{Id}\to F(-\otimes A)$ 定义为 $\eta_M=M\otimes u_A:M\to M\otimes A$，对 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 M 均如此；而余单位 $\epsilon:F(-)\otimes A\to\mathrm{Id}$ 定义为 $\epsilon_N=\mu_N^A\colon F(N)\otimes A=N\otimes A\to N$，对 $\mathcal{C}_A$ 中的每个对象 (N,μ_N^A) 均如此。类似地，对于 $\mathcal{C}$ 中的余代数 C，张量函子 $-\otimes C\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}^C$，其定义为 $M\mapsto(M\otimes C,M\otimes\Delta)$ 和 $f\mapsto f\otimes C$，是遗忘函子 $F\colon \mathcal{C}^C\to\mathcal{C}$ 的右伴随。对于每个 $(N,\rho_N)\in\mathcal{C}^C$ by$\eta_{(N,\rho_N)}=\rho_N$，单位 η 定义为 $N\to N\otimes C=F(N)\otimes C$；而对于任意 $M\in\mathcal{C}$，余单位 ϵ 定义为 $\epsilon_M=M\otimes\varepsilon\colon F(M\otimes C)=M\otimes C\to M$，参见例如 [12, 第 2] 节。回顾一下，$-\otimes A\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 和 $-\otimes C\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}^C$ 的半可分性可由以下方式刻画。

命题 2.1. [5, 命题 3.20] 设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半范畴，且 A 是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数。则以下断言等价。

(i) 单位 $u_A:1\to A$ 作为 $\mathcal{C}$ 中的态射是正则的（分别为分裂单态射、分裂满射）。(ii) 张量函子 $-\otimes A\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 是半可分的（分别为可分的、自然满的）。(iii) 张量函子 $A\otimes-\colon\mathcal{C}\to{}_A\mathcal{C}$ 是半可分的（分别为可分的、自然满的）。

命题 2.2. [5, 命题 4.16] 设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半范畴，且 C 是 $\mathcal{C}$ 中的一个余代数。则以下断言等价。

(i) 余单位 $\varepsilon_C:C\to1$ 作为 $\mathcal{C}$ 中的态射是正则的（分别为分裂满射、分裂单态射）。(ii) 张量函子 $-\otimes C\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}^C$ 是半可分的（分别为可分的、自然满的）。(iii) 张量函子 $C\otimes-\colon\mathcal{C}\to{}^C\mathcal{C}$ 是半可分的（分别为可分的、自然满的）。

定义 2.3。 [8, 定义 1.5。1] 设 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔范畴。若非零对象X 在 $\mathcal{C}$ 中的子对象只有0和 X，则称其为简单对象。若对象 X 在 $\mathcal{C}$ 中被称为

半单对象，若它是简单对象的直和；若 $\mathcal{C}$ 中的每个对象都是半单对象，则称 $\mathcal{C}$ 为半单范畴。

本文中，阿贝尔幺半范畴是指具有加性张量积的阿贝尔范畴。

定义 2.4。 [8, 定义 4.1.1，定义 4.2。3]

(1) 在 $\Bbbk$ 上的多环范畴 $\mathcal{C}$ 是一个局部有限的 $\Bbbk$-线性阿贝尔幺半范畴，其张量积是双线性且双正合的。如果进一步有 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(1) = \Bbbk$，则称其为环范畴。*(2)* 在 $\Bbbk$ 上的多张量范畴 $\mathcal{C}$ 是一个局部有限的 $\Bbbk$- 线性阿贝尔刚性幺半范畴，其张量积是双线性的。如果进一步有 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(1) = \Bbbk$，且 $\mathcal{C}$ 不可分解，即 $\mathcal{C}$ 不等价于非零多张量范畴的直和，则称 $\mathcal{C}$ 为张量范畴。*(3)* 多融合范畴是有限半单的多张量范畴。融合范畴是满足 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(1) = \Bbbk$ 的多融合范畴，即有限半单张量范畴。

事实上，多张量范畴的张量积总是双正合的，见 [8, 命题 4.2.1]。这意味着多张量范畴总是多环范畴。

3. Semiseparability in a semisimple abelian monoidal category

本节中，我们研究函子 3.3 的可分性（命题 3.4）和半可分性（命题 $- \otimes A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$，其中 A 是 $\mathcal{C}$ 中任意代数 $\mathcal{C}$的函子；这里 f 是一个张量积双正合的半单阿贝尔幺半范畴。首先，回顾一下，若存在态射 g 使得 $f \circ g \circ f = f$，则称态射 f 为正则态射。

引理 3.1。 阿贝尔幺半范畴 $\mathcal{C}$ 是半单的，当且仅当 $\mathcal{C}$ 中的每个态射都是正则的。

证明。 $\Rightarrow$ 对 f 中的任意态射 $X \to Y : \mathcal{C}$，考虑$f = \varphi \circ \psi$的像分解，其中 $\psi : X \to \mathrm{Im}(f)$ 是一个满态射，而 $\varphi : \mathrm{Im}(f) \to Y$是一个单态射。由于 $\mathcal{C}$ 是半单的，存在态射 $\psi' : \mathrm{Im}(f) \to X$ 和$\varphi' : Y \to \mathrm{Im}(f)$，使得 $\psi \circ \psi' = \mathrm{Id}_{\mathrm{Im}(f)} = \varphi' \circ \varphi$。因此，$f\psi'\varphi' f = \varphi\psi\psi'\varphi'\varphi\psi = \varphi\psi = f$，即 f 是正则的。

$\Leftarrow$ 假设 $\mathcal{C}$ 中的每个态射都是正则态射。于是每个单态射都是分裂单射，每个满态射都是分裂满射。因此，$\mathcal{C}$ 是半单的。□

注记 3.2. 在集合范畴集合范畴 中，每个态射都是正则态射这一要求等价于选择公理，参见 [1, 例 3。9]。然而，集合范畴 不是阿贝尔范畴。

命题 3.3. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有双正合张量积的半单阿贝尔幺半范畴，且其单位对象是简单的。则，

(1) 对 $\mathcal{C}$ 中的任意非零代数 A，张量函子 $-\otimes A\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 与 $A\otimes -:\mathcal{C}\to{}_A\mathcal{C}$ 是可分的；(2) 对 $\mathcal{C}$ 中的任意非零余代数 C，张量函子 $-\otimes C\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}^C$ 与 $C\otimes -:\mathcal{C}\to{}^C\mathcal{C}$ 是可分的。

证明。(1) 由于单位对象 1 是简单对象，$u_A:\ 1\to A$ 是单态射。注意，$\mathcal{C}$ 是半单的，这意味着 u_A 是分裂单态射。根据命题 2.1，$-\otimes A$ 和 $A\otimes -$ 是可分的。(2) 根据命题 2.2，可类似于 (1) 得出结论。□

命题 3.4。设 $\mathcal{C}$ 是一个张量积双正合的半单阿贝尔幺半范畴。那么，

(1) 对于 $\mathcal{C}$中的任意代数 A，张量函子 $-\otimes A\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 和 $A\otimes -\colon\ \mathcal{C}\to{}_A\mathcal{C}$都是半可分的；(2) 对于 $\mathcal{C}$中的任意余代数 C，张量函子 $-\otimes C\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{C}^C$ 和 $C\otimes -\colon\ \mathcal{C}\to{}^C\mathcal{C}$ 都是半可分的。

证明。（1）由引理 3.1，u_A 是正则的。由命题 2.1，$-\otimes A$ 和 $A\otimes -$ 是半可分的。（2）由命题 2.2，可类似于（1）得出结论。□

我们的下一个目标是研究命题3.3的逆命题。更具体地说，假设对于任意非零（余）代数，张量函子都是可分的，我们想知道单位对象是否简单。

引理 3.5。设 $\mathcal{C}$ 是一个半单阿贝尔幺半范畴，且单位对象1 具有有限长度。设 X 是1的一个非零子对象。假设满足以下条件之一：

（1） X 是 $\mathcal{C}$中的一个代数，且对于任意非零代数 $A\in\mathcal{C}$，张量函子 $-\otimes A:\ \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 是可分的；（2） X 是 $\mathcal{C}$中的一个余代数，且对于任意非零余代数 $C\in\mathcal{C}$，张量函子 $-\otimes C\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{C}^C$ 是可分的。

那么，X 同构于1。

证明。(1) 由于 $\mathcal{C}$ 是半单对象，且 1 具有有限长度，因此 1 是有限个简单对象的直和。由于 X 是 1 的子对象，X 同构于 1 的简单子对象的直和，其中每个简单对象的重数均不大于 1 的直和分解中相应对象的重数。根据命题 2.1，$u_X:\ 1\to X$ 是分裂单态射，这意味着 1 是 X的子对象。因此，1 与 X 的直和分解中简单对象的重数完全相同。由此，$u_X:\ 1\to X$ 是同构。(2) 根据命题 2.2，可类似地由 (1) 得出。□

利用这一引理并结合前面的命题，我们可以直接得到以下结果。

命题 3.6. 设 $\mathcal{C}$ 是一个半单阿贝尔幺半范畴，且单位对象 1 具有有限长度。考虑以下断言：

(1) 单位对象是简单的。(2) 对于 $\mathcal{C}$ 中任意非零代数 A，张量函子 $-\otimes A:\mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 是可分的。(3) 单位对象在 $\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$ 中是简单的。

那么，(1)蕴含(2)，而(2) 蕴含(3)。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)：这是命题 3.3。(2) $\Rightarrow$(3) 假设 X 是 $\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$ 中 1 的一个非零子对象。由引理3.5， X 与 1 同构。因此，单位对象在 $\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$ 中是简单的。□

同样，我们也可以考虑余代数的情形。

命题 3.7。设 $\mathcal{C}$ 是一个半单阿贝尔幺半范畴，且单位对象 1 具有有限长度。考虑以下断言：

(1) 单位对象是简单的。(2) 对于 $\mathcal{C}$ 中任意非零余代数 C，张量函子 $-\otimes C:\mathcal{C}\to\mathcal{C}^C$ 是可分的。(3) 单位对象在 $\mathrm{Coalg}(\mathcal{C})$ 中是简单的。

那么，(1)蕴含(2)，而(2) 蕴含(3)。

我们的动机是寻找使得 (2) 蕴含 (1) 的环境。现在我们知道 (2) 蕴含 (3)。这意味着我们必须着重研究 1 的子对象。是否存在这样一种环境，使得 1 的所有子对象既是代数又是余代数？在下一节中，我们将把注意力转向多融合范畴。

4. Multifusion category

设 $\mathcal{C}$ 是一个具有左对偶的多环范畴。根据 [8, 定理 4.3.8 (ii)], ， $\mathcal{C}$ 的单位对象 1 是半单的，且它是两两不同构的简单对象 1_i的直和。事实上，设 $\{p_i\}_{i\in I}$ 是代数 End(1) 的本原幂等元， 1_i是 p_i的像。下文中，我们记 $1=\oplus_{i\in I}1_i$，并分别用 $i_i:1_i\to 1$ 和 $p_i:1\to 1_i$表示典范单射与投影。另请注意，对于 $i\neq j$，有 $1_i\otimes 1_j=0$，参见 [8, 练习 4.3.3]。此外，根据 [8, 注记 4.3.4], ，存在分解 $\mathcal{C}=\oplus_{i,j\in I}\mathcal{C}_{ij}$ 其中 $\mathcal{C}_{ij}=1_i\otimes\mathcal{C}\otimes 1_j$，且范畴 $\mathcal{C}_{ii}$ 是以 1_i为单位对象的环范畴。

引理 4.1. 对于 $i\in I$， 1_i 在 $\mathcal{C}$ 中既是代数也是余代数。

证明。将典范同构记为 τ: $1_i\otimes(\oplus_{j\in I}1_j)\to\oplus_{j\in I}(1_i\otimes 1_j)$ 和σ: $\oplus_{j\in I}(1_j\otimes 1_i)\to(\oplus_{j\in I}1_j)\otimes 1_i$，并将典范投影记为 p_j^r: $\oplus_{j\in I}(1_i\otimes 1_j)\to 1_i\otimes 1_j$和 p_j^l: $\oplus_{j\in I}(1_j\otimes 1_i)\to 1_j\otimes 1_i$，其中任意 j均属于 I。由于 $1_i\otimes 1_j=0$适用于 $i\neq j$，我们有 p_i^r: $\oplus_{j\in I}(1_i\otimes 1_j)\to 1_i\otimes 1_i$和 p_i^l: $\oplus_{j\in I}(1_j\otimes 1_i)\to 1_i\otimes 1_i$是同构。事实上，可以看出，对于 $j\neq i$， p_j^l 和 p_j^r 始终为零。此外，由于 $p_i^r\tau=\mathrm{Id}_{1_i}\otimes p_i$且 $p_i^l=(p_i\otimes\mathrm{Id}_{1_i})\sigma$，我们得到 $\mathrm{Id}_{1_i}\otimes p_i=p_i^r\tau=p_i^l(p_i^l)^{-1}p_i^r\tau=(p_j\otimes\mathrm{Id}_{1_i})\sigma(p_i^l)^{-1}p_i^r\tau$。

对于 $i \neq j$，由于 $1_i \otimes 1_j = 0$，我们有 $i_i \otimes i_j = 0 = i_j \otimes i_i$。因此，

$$\begin{aligned} i_i \otimes \mathrm{Id}_1 &= i_i \otimes \sum_{j\in I}(i_j p_j) = i_i \otimes i_i p_i = (i_i \otimes i_i)(\mathrm{Id}_{1_i} \otimes p_i) \\ &= (i_i \otimes i_i)(p_i \otimes \mathrm{Id}_{1_i})\sigma(p_i^l)^{-1} p_i^r \tau = (i_i p_i \otimes i_i)\sigma(p_i^l)^{-1} p_i^r \tau \\ &= (\sum_{j\in I}(i_j p_j) \otimes i_i)\sigma(p_i^l)^{-1} p_i^r \tau = (\mathrm{Id}_1 \otimes i_i)\sigma(p_i^l)^{-1} p_i^r \tau. \end{aligned}$$

因此，由单位约束的自然性，我们有 $i_i r_{1_i} = r_1(i_i \otimes \mathrm{Id}_1) = l_1(\mathrm{Id}_1 \otimes i_i)\sigma(p_i^l)^{-1} p_i^r \tau = i_i l_{1_i}\sigma(p_i^l)^{-1} p_i^r \tau$，这意味着 $r_{1_i} = l_{1_i}\sigma(p_i^l)^{-1} p_i^r \tau$。

我们断言，1_i 是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数，其乘法和单位定义为 $m_{1_i} := r_{1_i}\tau^{-1}(p_i^r)^{-1} = l_{1_i}\sigma(p_i^l)^{-1} \colon 1_i \otimes 1_i \to 1_i$ 以及 $u_{1_i} := p_i \colon 1 \to 1_i$。首先，我们要验证 $m_{1_i}(\mathrm{Id}_{1_i} \otimes m_{1_i}) = m_{1_i}(m_{1_i} \otimes \mathrm{Id}_{1_i})$。注意到 m_{1_i} 是一个同构，只需证明 $\mathrm{Id}_{1_i} \otimes m_{1_i} = m_{1_i} \otimes \mathrm{Id}_{1_i}$。由于我们采用严格假设，显然 $\mathrm{Id}_{1_i} \otimes l_{1_i} = r_{1_i} \otimes \mathrm{Id}_{1_i}$。又因为 $\tau^{-1}(p_i^r)^{-1} = (\mathrm{Id}_{1_i} \otimes p_i)^{-1} = \mathrm{Id}_{1_i} \otimes i_i$ 且 $\sigma(p_i^l)^{-1} = (p_i \otimes \mathrm{Id}_{1_i})^{-1} = i_i \otimes \mathrm{Id}_{1_i}$，所以我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_{1_i} \otimes m_{1_i} &= \mathrm{Id}_{1_i} \otimes l_{1_i}\sigma(p_i^l)^{-1} = (\mathrm{Id}_{1_i} \otimes l_{1_i})(\mathrm{Id}_{1_i} \otimes i_i \otimes \mathrm{Id}_{1_i}) \\ &= (r_{1_i} \otimes \mathrm{Id}_{1_i})(\tau^{-1}(p_i^r)^{-1} \otimes \mathrm{Id}_{1_i}) = r_{1_i}\tau^{-1}(p_i^r)^{-1} \otimes \mathrm{Id}_{1_i} = m_{1_i} \otimes \mathrm{Id}_{1_i}. \end{aligned}$$

此外，$m_{1_i}(\mathrm{Id}_{1_i} \otimes u_{1_i}) = r_{1_i}\tau^{-1}(p_i^r)^{-1}(\mathrm{Id}_{1_i} \otimes p_i) = r_{1_i}\tau^{-1}\tau = r_{1_i}$，类似地 $m_{1_i}(u_{1_i} \otimes \mathrm{Id}_{1_i}) = l_{1_i}\sigma(p_i^l)^{-1}(p_i \otimes \mathrm{Id}_{1_i}) = l_{1_i}\sigma\sigma^{-1} = l_{1_i}$。因此，$(1_i,\ m_{1_i},\ u_{1_i})$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数。

类似地，我们声称 1_i 是 $\mathcal{C}$ 中的一个余代数，其余乘法和余单位定义为 $\Delta_{1_i} := p_i^r \tau r_{1_i}^{-1} = p_i^l \sigma^{-1} l_{1_i}^{-1} \colon 1_i \to 1_i \otimes 1_i$ 和 $\varepsilon_{1_i} := i_i \colon 1_i \to 1$。事实上，$\Delta_{1_i} = m_{1_i}^{-1}$，因此 $(\Delta_{1_i} \otimes \mathrm{Id}_{1_i})\Delta_{1_i} = (\mathrm{Id}_{1_i} \otimes \Delta_{1_i})\Delta_{1_i}$ 自动成立。此外，$(\mathrm{Id}_{1_i} \otimes \varepsilon_{1_i})\Delta_{1_i} = (\mathrm{Id}_{1_i} \otimes i_i) p_i^r \tau r_{1_i}^{-1} = \tau^{-1}(p_i^r)^{-1} p_i^r \tau r_{1_i}^{-1} = r_{1_i}^{-1}$ 且 $(\varepsilon_{1_i} \otimes \mathrm{Id}_{1_i})\Delta_{1_i} = (i_i \otimes \mathrm{Id}_{1_i}) p_i^l \sigma^{-1} l_{1_i}^{-1} = \sigma(p_i^l)^{-1} p_i^l \sigma^{-1} l_{1_i}^{-1} = l_{1_i}^{-1}$。因此，它确实是 $\mathcal{C}$ 中的一个余代数。□

引理 4.2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有左对偶的多环范畴。若满足以下任一条件，

(1) 对于任意非零代数 $A \in \mathcal{C}$，张量函子 $- \otimes A \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$ 是可分的，(2) 对于任意非零余代数 $C \in \mathcal{C}$，张量函子 $- \otimes C \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^C$ 是可分的，

则 $\mathcal{C}$ 的单位对象是简单的。

证明。(1) 假设 $\mathbf{1}$ 有一个非零简单子对象 1_i。由引理 4.1，1_i 是 $\mathcal{C}$中的一个代数。由给定假设和命题 2.1，$- \otimes 1_i$ 是可分的，因此 u_{1_i} 是分裂单态射。注意，$u_{1_i} = p_i \colon 1 \to 1_i$ 是一个分裂满态射。这意味着 $\mathbf{1}$ 与 1_i同构。(2) 以类似于 (1) 的方式可证。□

现在，我们可以考虑本文中的主定理。回顾一下，函子 $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$被称为 Maschke 函子，如果它反射分裂单态射，即对 $\mathcal{C}$ 中的每一个态射i，若 Fi 是分裂单态射，则 i 是分裂单态射。类似地，F 是对偶 Maschke

函子，如果它反射分裂满态射。一个函子被称为保守的，如果它反射同构。

命题 4.3. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有左对偶的半单多环范畴。那么，以下条件等价:

(1) 单位对象是简单的，即 $\mathcal{C}$ 是一个环范畴。*(2)* 对于 $\mathcal{C}$中的任意非零代数 A，函子 $-\otimes A\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 是可分的。*(3)* 对于 $\mathcal{C}$中的任意非零余代数 C，函子 $-\otimes C\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}^C$ 是可分的。*(4)* 对于 $\mathcal{C}$中的任意非零代数 A，函子 $-\otimes A\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 是忠实的。*(5)* 对于 $\mathcal{C}$中的任意非零余代数 C，函子 $-\otimes C\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}^C$ 是忠实的。*(6)* 对于 $\mathcal{C}$中的任意非零代数 A，函子 $-\otimes A\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 是 *Maschke* 的。*(7)* 对于 $\mathcal{C}$中的任意非零余代数 C，函子 $-\otimes C\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}^C$ 是 *Maschke* 的。*(8)* 对于 $\mathcal{C}$中的任意非零代数 A，函子 $-\otimes A\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 是对偶 *Maschke* 的。*(9)* 对于 $\mathcal{C}$中的任意非零余代数 C，函子 $-\otimes C\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}^C$ 是对偶 *Maschke* 的。*(10)* 对于 $\mathcal{C}$中的任意非零代数 A，函子 $-\otimes A\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 是保守的。*(11)* 对于 $\mathcal{C}$中的任意非零余代数 C，函子 $-\otimes C\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}^C$ 是保守的。*(12)* 对于 $\mathcal{C}$中的任意非零代数 A，其单位 $u_A\colon 1\to A$ 是单态射。*(13)* 对于 $\mathcal{C}$中的任意非零余代数 C，其余单位 $\varepsilon_C\colon C\to 1$ 是满态射。*(14)* $\mathcal{C}$ 中的任意非零代数态射 $f\colon 1\to A$ 都是单态射。*(15)* $\mathcal{C}$ 中的任意非零余代数态射 $f\colon C\to 1$ 都是满态射。

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2) 和 (1) $\Rightarrow$ (3) 可由命题 3.3推出。(2) $\Rightarrow$(1) 和 (3) $\Rightarrow$ (1) 可由引理 4.2 推出。因此，(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3)
根据命题 3.4，在多融合范畴中，张量函子 $-\otimes A$ 和 $-\otimes C$ 总是半可分的。回顾一下，一个函子可分，当且仅当它半可分且忠实，参见 [1, 命题 1。3]。因此，(2) $\Leftrightarrow$(4) 和 (3) $\Leftrightarrow$(5)。

此外，根据 [1, 推论 1，9], 一个函子可分，当且仅当它半可分且满足 Maschke 条件；当且仅当它半可分且满足对偶 Maschke 条件；当且仅当它半可分且保守。因此，(2) $\Leftrightarrow$(6) $\Leftrightarrow$ (8) $\Leftrightarrow$ (10)，且 (3) $\Leftrightarrow$ (7) $\Leftrightarrow$(9) $\Leftrightarrow$(11)。

(1) $\Rightarrow$ (12) 因为 Ker(u_A) 是 1 的一个子对象，而 1 是简单的，且 u_A 非零，所以 Ker(u_A) $=0$。类似地可证明 (1) $\Rightarrow$(13)、(14) 和 (15)。(12) $\Rightarrow$(1) 和 (13) $\Rightarrow$ (1) 由引理 4.1 得出，因为 $u_{1_i}\colon 1\to 1_i$ 是单态射或 $\varepsilon_{1_i}\colon 1_i\to 1$ 是满态射都会推出 $1=1_i$。(14) $\Rightarrow$ (12) 和 (15) $\Rightarrow$(13) 显然成立。因此，(1) $\Leftrightarrow$ (12) $\Leftrightarrow$(13) $\Leftrightarrow$ (14) $\Leftrightarrow$(15)。□

应用命题 4.3 于多融合范畴，可得到融合范畴的等价定义。

命题 4.4。 设 $\mathcal{C}$ 是一个多融合范畴。那么，以下条件等价 *t:*

(1) 单位对象是简单的，即 $\mathcal{C}$ 是一个融合范畴。(2) 对于 $\mathcal{C}$中的任意非零代数 A，函子 $-\otimes A\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 是可分的。(3) 对于 $\mathcal{C}$ 中的任意非零余代数 C，函子 $-\otimes C\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}^C$ 是可分的。(4) 对于 $\mathcal{C}$中的任意非零代数 A，函子 $-\otimes A\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 是忠实的。

(5) 对于 $\mathcal{C}$中的任意非零余代数 C，函子 $-\otimes C\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}^C$ 是忠实的。*(6)* 对于 $\mathcal{C}$中的任意非零代数 A，函子 $-\otimes A\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 具有 *Maschke* 性质。*(7)* 对于 $\mathcal{C}$中的任意非零余代数 C，函子 $-\otimes C\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}^C$ 具有 *Maschke* 性质。*(8)* 对于 $\mathcal{C}$中的任意非零代数 A，函子 $-\otimes A\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 具有对偶 *Maschke* 性质。*(9)* 对于 $\mathcal{C}$中的任意非零余代数 C，函子 $-\otimes C\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}^C$ 具有对偶 *Maschke* 性质。*(10)* 对于 $\mathcal{C}$ 中的任意非零代数 A，函子 $-\otimes A\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 是保守的。*(11)* 对于 $\mathcal{C}$中的任意非零余代数 C，函子 $-\otimes C\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}^C$ 是保守的。*(12)* 对于 $\mathcal{C}$中的任意非零代数 A，其单位 $u_A\colon 1\to A$ 是单态射。*(13)* 对于 $\mathcal{C}$中的任意非零余代数 C，其余单位 $\varepsilon_C\colon C\to 1$ 是满态射。*(14)* 任意非零代数态射 $f\colon 1\to A\in\mathcal{C}$ 都是单态射。*(15)* 任意非零余代数态射 $f\colon C\to 1\in\mathcal{C}$ 都是满态射。

注 *4.5.* 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有左对偶的半单多环范畴。回顾一下，对于任意半可分函子 $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$，都有一个相应的幂等自然变换 $e\colon Id_{\mathcal{C}}\to Id_{\mathcal{C}}$，见定义 *1.*5]。由命题 *3.4* 可知，对于 $\mathcal{C}$ 中的代数 A，张量函子 $-\otimes A\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 是半可分的。正如 [6, 第 730]，页所指出的，归纳函子 $u_A^*=-\otimes_1 A\colon \mathcal{C}_1\to\mathcal{C}_A$ 就是张量函子 $-\otimes A\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$。因此，根据 [5, 注 *3.*6],， $-\otimes A\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 对应的幂等自然变换为

$$e_M=\nu_M\circ\eta_M=\nu_M^1(\mathrm{Id}_M\otimes\psi'\varphi' u_A)=r_M^1(\mathrm{Id}_M\otimes\psi'\varphi'\varphi\psi)=\mathrm{Id}_M\otimes\psi'\psi,$$

其中 $u_A=\varphi\psi$ 是像分解，ψ'、φ' 是态射，满足 $\psi\circ\psi'=Id_{\mathrm{Im}(f)}=\varphi'\circ\varphi$，如引理 *3.1* 的证明中所示。根据 [1, 推论 *1.*7]，$-\otimes A\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 是可分的，当且仅当 $e=Id$。注意，$e=Id$ 当且仅当 $\psi'\psi=Id_1$，，而这又当且仅当 $\psi\colon 1\to Im(u_A)$ 是同构。现在，假设 $\mathcal{C}$ 的单位不是简单对象。由于 $1=\oplus_{i\in I}1_i$，我们知道 1_i 与 *1* 不同构。根据引理 *4.1*，1_i 是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数，其单位为 $u_{1_i}=p_i\colon 1\to 1_i$。由于 $Im(u_{1_i})$ 是 1_i 的一个子对象，$\psi\colon 1\to Im(u_{1_i})$ 不是同构。因此，$-\otimes 1_i$ 不可分。这一观察支持命题 *4.3*。

注记 *4.6.* 我们可以问：如果对 $\mathcal{C}$ 中任意非零代数 A，函子 $-\otimes A\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 都是自然满的，会发生什么？根据命题 *2.1*，这等价于说，对于 $\mathcal{C}$ 中任意非零代数 A，u_A 都是分裂满射。若 $\mathcal{C}$ 是非零阿贝尔幺半范畴，这不可能。事实上，$u_{1\oplus 1}=\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_1\\ Id_1\end{pmatrix}\colon 1\to 1\oplus 1$ 不是满态射，因为 $(Id_1\ -Id_1)\begin{pmatrix}Id_1\\ Id_1\end{pmatrix}=Id$，而 $(Id_1\ -Id_1)\neq 0$。此外，若 $\mathcal{C}$ 是具有左对偶的多环范畴，则 $u_A\colon 1\to A$ 是满态射意味着 A 与 $\oplus_{i\in J}1_i$ 同构，其中 J 是 I 的某个子集。

注 *4.7.* 将遗忘函子记为 $F\colon \mathcal{C}_A\to\mathcal{C}$。我们关注 $-\otimes A\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 的可分性与 $F\circ(-\otimes A)\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 的可分性之间的关系。根据 [7, 命题 46],，如果 $F\circ(-\otimes A)$ 是可分的，那么 $-\otimes A\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 是可分的。反之，如果 F 和 $-\otimes A$ 都是可分的，那么 $F\circ(-\otimes A)$ 是可分的。因此，问题变为：在什么条件下 F 是可分的？ [6, 命题 *4.*3] 给出了答案：设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半范畴，使得 *1* 是 $\otimes$ 的左 $\mathcal{C}$-生成元。如果 A 是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数，那么 A 是可分的，当且仅当遗忘函子$F\colon \mathcal{C}_A\to\mathcal{C}$ 是一个可分函子。

5. Algebras in multiring category

设 $\mathcal{C}$ 是一个具有左对偶的多环范畴。由引理 4.2，我们知道， $\mathcal{C}$ 中单位对象的简单性由 $\mathcal{C}$中代数的性质决定，而命题 4.3 表明，如果 $\mathcal{C}$ 是半单的，那么这一性质也由单位对象的简单性决定。这促使我们进一步探究 $\mathcal{C}$中代数的结构。在本节中，我们将考察 $\mathcal{C}$ 中的代数与分量子范畴 $\mathcal{C}_{ii}$中的代数之间的关系。

由于 $\mathcal{C}=\oplus_{i,\ j\in I}\mathcal{C}_{ij}$，为简洁起见，对于任意对象$X$，其中 $X_{ij}=1_i\otimes X\otimes 1_j$ 属于 $\mathcal{C}_{ij}$，记作 $X=\oplus_{i,\ j\in I}X_{ij}$。分别用 $p_{X_{ij}}:=p_i\otimes\mathrm{Id}_X\otimes p_j\colon\ X\to X_{ij}$ 和 $i_{X_{ij}}:=i_i\otimes\mathrm{Id}_X\otimes i_j\colon\ X_{ij}\to X$ 表示典范投影和典范单射。

引理 5.1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有左对偶的多环范畴。那么，对于 $i\neq i'$ 或 $j\neq j'$，从 $\mathcal{C}_{ij}$ 中的对象到 $\mathcal{C}_{i'j'}$ 中的对象只有零态射。

证明. $\mathcal{C}_{ij}$ 或 $\mathcal{C}_{i'j'}$ 为零的情形是显然的。我们只需考虑它们均非零的情形。设 X_{ij}、$X_{i'j'}$ 分别是 $\mathcal{C}_{ij}$、$\mathcal{C}_{i'j'}$ 中的非零对象。假设存在态射 $f\colon\ X_{ij}\to X_{i'j'}$，那么对所有属于 I 的 s、t，都有 $1_s\otimes f\otimes 1_t=0$。由于存在同构 $\tau\colon(\oplus_{s\in I}1_s)\otimes X_{ij}\otimes(\oplus_{t\in I}1_t)\to\oplus_{s,t\in I}(1_s\otimes X_{ij}\otimes 1_t)$，我们可以写作 $f=f\tau^{-1}\tau=\sum_{s,t\in I}f\tau^{-1}i_{st}p_{st}\tau$，其中 $i_{st}\colon 1_s\otimes X_{ij}\otimes 1_t\to\oplus_{s,t\in I}(1_s\otimes X_{ij}\otimes 1_t)$ 和 $p_{st}:\oplus_{s,t\in I}(1_s\otimes X_{ij}\otimes 1_t)\to 1_s\otimes X_{ij}\otimes 1_t$分别是典范单射和典范投影。由于 $\tau^{-1}i_{st}=i_s\otimes\mathrm{Id}_{X_{ij}}\otimes i_t$，我们有 $f\tau^{-1}i_{st}=(1\otimes f\otimes 1)(i_s\otimes\mathrm{Id}_{X_{ij}}\otimes i_t)=(i_s\otimes\mathrm{Id}_{X_{ij}}\otimes i_t)(1_s\otimes f\otimes 1_t)=0$。因此，$f=\sum_{s,t\in I}f\tau^{-1}i_{st}p_{st}\tau=0$。
□

根据引理 5.1，任意态射 $f\colon\ X\to Y$都可以写成 $f=\oplus_{i,\ j\in I}f_{ij}$，其中 $f_{ij}=\mathrm{Id}_{1_i}\otimes f\otimes\mathrm{Id}_{1_j}\colon\ X_{ij}\to Y_{ij}$。
考虑分支子范畴分解 $\mathcal{C}=\oplus_{i,\ j\in I}\mathcal{C}_{ij}$。对于 I 的任意非空子集 J，我们用 $\mathcal{C}_J:=\oplus_{i,\ j\in J}\mathcal{C}_{ij}$ 表示 $\mathcal{C}$ 和 $1_J:=\oplus_{i\in J}1_i$ 的全子范畴。我们还用 $p_J\colon\ 1\to\oplus_{j\in J}1_j$ 和 $i_J\colon\ \oplus_{j\in J}1_j\to 1$ 分别表示典范投影和含入。

命题 5.2。 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有左对偶的多环范畴。对于 I 的任意非空子集 J，$\mathcal{C}$ 的子范畴 $\mathcal{C}_J$ 也是一个具有左对偶的多环范畴。

证明。显然， $\mathcal{C}_J$ 是一个具有零对象的加法范畴。对于 $\mathcal{C}_J$中的两个对象$X=\oplus_{i,\ j\in J}X_{ij}$，我们知道 $X_{ij}\oplus Y_{ij}=(1_i\otimes X\otimes 1_j)\oplus(1_i\otimes Y\otimes 1_j)\cong 1_i\otimes(X\oplus Y)\otimes 1_j$是 $\mathcal{C}_{ij}$中的一个对象。因此，$X\oplus Y=\oplus_{i,j\in J}(X_{ij}\oplus Y_{ij})$属于 $\mathcal{C}_J$。设 $f\colon\ X\to Y$是 $\mathcal{C}_J$中的一个态射。假设 $\mathrm{Ker}(f)=\oplus_{i,j\in I}\mathrm{Ker}(f)_{ij}$不属于 $\mathcal{C}_J$。那么，存在 I 中的 s,t，但其中至少一个不属于 J，使得 $\mathrm{Ker}(f)_{st}\neq 0$。因此，典范嵌入 $\mathrm{Ker}(f)_{st}\to\mathrm{Ker}(f)\to X$的复合是一个单态射。这与引理 5.1矛盾。因此，$\mathrm{Ker}(f)$属于 $\mathcal{C}_J$。类似地，$\mathrm{Coker}(f)$和 $\mathrm{Im}(f)$也属于 $\mathcal{C}_J$。因此， $\mathcal{C}_J$ 是一个阿贝尔范畴。 $\mathcal{C}_J$ 的局部有限性和 $\Bbbk$-线性立即由 $\mathcal{C}$ 继承。

$\mathcal{C}_J$ 是一个幺半范畴，其张量积继承自 $\mathcal{C}$ ，单位为1_J。对于 $\mathcal{C}$中的任意对象X ，单位约束由$l_X^J = i_J \otimes \mathrm{Id}_X$和$r_X^J = \mathrm{Id}_X \otimes i_J$给出。 $\mathcal{C}_J$ 中张量积的线性和正合性也继承自$\mathcal{C}$。此外，对于 $\mathcal{C}_J$中的对象$X = \oplus_{i,j\in J} X_{ij}$，可以验证$X^* = \oplus_{i,j\in J} X_{ij}^*$。根据 [8, 注 4.3.4 (4)],，每个 X_{ij}^*都属于 $\mathcal{C}_J$。因此， X^*属于 $\mathcal{C}_J$。□

推论 5.3. 设 $\mathcal{C}$ 是一个多张量范畴。对于 I的任意非空子集 J， $\mathcal{C}$ 的子范畴 $\mathcal{C}_J$ 也是一个多张量范畴。

证明。 类似于命题 5.2，可以证明 $\mathcal{C}_J$中对象的右对偶也属于 $\mathcal{C}_J$。 □

推论 5.4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个多融合范畴。对于 I的任意非空子集 J， $\mathcal{C}$ 的子范畴 $\mathcal{C}_J$ 也是一个多融合范畴。

证明。 注意， $\mathcal{C}_J$ 中的对象是简单对象，当且仅当它是 $\mathcal{C}$中的简单对象。因此， $\mathcal{C}_J$ 有有限多个简单对象的同构类，因为 $\mathcal{C}$ 也如此。此外，对于 $\mathcal{C}_J$中的任意简单对象 S，根据引理5.1，投射覆盖 $P(S)$在 $\mathcal{C}$中的S属于 $\mathcal{C}_J$。事实上， $P(S)$也是 S的投射覆盖，$\mathcal{C}_J$。因此， $\mathcal{C}_J$有足够多的投射对象。

对于任意对象 X in $\mathcal{C}_J$，我们知道 X 是$\mathcal{C}$中的若干简单对象的直和。由于 X属于 $\mathcal{C}_J$，这些简单对象也属于 $\mathcal{C}_J$。因此， X 是 $\mathcal{C}_J$ 中的若干简单对象的直和。这意味着 $\mathcal{C}_J$ 是半单的。因此， $\mathcal{C}_J$ 是一个多融合范畴。□

给定幺半范畴 $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ 和 $(\mathcal{D}, \otimes, 1')$，回顾一下，函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$称为松幺半函子，参见例如 [3, 定义 3.1],，若存在一个自然变换ϕ^2，其分量为 $F(X) \otimes F(Y) \to F(X \otimes Y)$，以及一个态射 $\phi^0\colon 1' \to F(1)$，使得

$$\phi^2_{X,Y\otimes Z}(\mathrm{Id}\otimes\phi^2_{Y,Z}) = \phi^2_{X\otimes Y,Z}(\phi^2_{X,Y}\otimes\mathrm{Id}),$$
$$l_{F(X)} = F(l_X)\phi^2_{1,X}(\phi^0\otimes\mathrm{Id}), \quad r_{F(X)} = F(r_X)\phi^2_{X,1}(\mathrm{Id}\otimes\phi^0),$$

其中 l, r 是所述范畴的左、右单位约束。对偶地，可以定义余松幺半函子，参见例如 [3, 定义 3.2]。此外，若函子 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 配备了松幺半结构（ϕ, ϕ_0）和余松幺半结构（ψ, ψ_0），则称其为可分 Frobenius 幺半函子

使得对每个 $X, Y, Z \in \mathcal{C}$，下列图表

$$\begin{array}{ccc} F(X\otimes Y)\otimes F(Z) & \xrightarrow{\psi_{X,Y}\otimes \mathrm{Id}} & F(X)\otimes F(Y)\otimes F(Z) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_{X\otimes Y,Z}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}\otimes\phi_{Y,Z}} \\ F(X\otimes Y\otimes Z) & \xrightarrow[\psi_{X,Y\otimes Z}]{} & F(X)\otimes F(Y\otimes Z) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} F(X)\otimes F(Y\otimes Z) & \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\psi_{Y,Z}} & F(X)\otimes F(Y)\otimes F(Z) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_{X,Y\otimes Z}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{X,Y}\otimes\mathrm{Id}} \\ F(X\otimes Y\otimes Z) & \xrightarrow[\psi_{X\otimes Y,Z}]{} & F(X\otimes Y)\otimes F(Z) \end{array}$$

是交换的，并且$\phi_{X,\,Y}\psi_{X,\,Y} = \mathrm{Id}_{F(X\otimes Y)}$。关于可分 Frobenius 幺半函子的定义，读者可参阅 [15, 定义 6。1]本文采用 [6,定义 6。中的记号。

定义包含函子 $L_J\colon\ \mathcal{C}_J \to \mathcal{C}$为：对任意对象 X 和态射 f in $\mathcal{C}_J$，令 $L_J(X) = X$，以及 $L_J(f) = f$。我们声称，对于 I 的每个非空子集 J，包含函子 $L_J\colon\ \mathcal{C}_J \to \mathcal{C}$ 是一个可分 Frobenius 幺半函子。

命题 5.5。 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有左对偶的多环范畴。包含函子$L_J\colon\ \mathcal{C}_J \to \mathcal{C}$ 是一个可分 *Frobenius* 幺半函子。

证明。对于 $\mathcal{C}_J$ 中的任意对象 X、 Y，通过恒等态射定义 $\phi_{X,\,Y}\colon\ L_J(X)\otimes L_J(Y) \to L_J(X\otimes Y)$ 以及$\psi_{X,\,Y}\colon\ L_J(X\otimes Y) \to L_J(X)\otimes L_J(Y)$。定义 $\phi_0 \colon = p_J\colon\ 1 \to 1_J$ 和 $\psi_0 \colon = i_J\colon\ 1_J \to 1$。由于 $\mathcal{C}_J$ 中的左、右单位同构分别由$l_X^J = l_X(i_J\otimes \mathrm{Id}_X)$、$r_X^J = r_X(\mathrm{Id}_X\otimes i_J)$ 给出，只需证明 $l_X^J(p_J\otimes \mathrm{Id}_X) = l_X$ 和 $r_X^J(\mathrm{Id}_X\otimes p_J) = r_X$。

注意，对于任意对象 Xin $\mathcal{C}_J$，存在一个典范同构 $\alpha\colon\ X\otimes(\oplus_{j\in I}1_j) \to \oplus_{j\in I}(X\otimes 1_j)$。由于 X属于 $\mathcal{C}_J$，我们知道，对于任意 $j \notin J$，都有 $X\otimes 1_j = 0$。由此可知，典范投影 $p_X^J\colon\ \oplus_{j\in I}(X\otimes 1_j) \to \oplus_{j\in J}(X\otimes 1_j)$ 是一个同构。由于 $\mathrm{Id}_X\otimes p_J = \beta p_X^J\alpha$，其中 $\beta\colon\ \oplus_{j\in J}(X\otimes 1_j) \to X\otimes 1_J$是典范同构，因此我们知道 $\mathrm{Id}_X\otimes p_J$ 是一个同构，其逆为 $\mathrm{Id}_X\otimes i_J$。因此，$r_X^J(\mathrm{Id}_X\otimes p_J) = r_X(\mathrm{Id}_X\otimes i_J)(\mathrm{Id}_X\otimes p_J) = r_X$。同理，可以证明$l_X^J(p_J\otimes \mathrm{Id}_X) = l_X$。□

设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为幺半范畴。众所周知，松幺半函子 $(F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}, \phi, \phi_0)$ 将代数 (A, m_A, u_A) 映为代数 $(F(A)\ F(m_A)\circ\phi_{A,A}, F(u_A)\circ\phi_0)$，而余松幺半函子 $(F\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{D}, \psi, \psi_0)$ 将余代数 $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ 映为余代数 $(F(C)\,\psi_{C,C}\circ F(\Delta_C)\ \psi_0\circ F(\varepsilon_C)$，参见例如 [3, 命题 3.29]。因此，命题 5.5 得到以下结果。

命题 5.6。 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有左对偶的多环范畴。

(1) 设(A, m_A, u_A)是 $\mathcal{C}_J$ 中的一个代数，其中 $u_A\colon 1_J \to A$。那么，(A, m_A, u_Ap_J)是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数。*(2)* 设$(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$是 $\mathcal{C}_J$ 中的一个余代数，其中 $\varepsilon_C\colon\ C \to 1_J$。那么，$(C, \Delta_C, i_J\varepsilon_C)$是 $\mathcal{C}$ 中的一个余代数。

注记 5.7. 设 $\mathcal{C}$ 中的单位对象不是简单对象。设 A是 $\mathcal{C}_J$中的一个代数，其中 J是 I 的真子集。我们注意到 $-\otimes A\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 不是忠实的。事实上，对于任意态射 f属于$\mathcal{C}_{j,\ j}$其中 j属于 I但不属于 J，都有 $f\otimes A=0$。这一观察支持命题 *4.3*。

对于任意对象 X 以及 $\mathcal{C}$中的任意态射 f，记 $X_J:=1_J\otimes X\otimes 1_J$和$f_J$:
$=1_J\otimes f\otimes 1_J$。定义投影函子 $R_J\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}_J$，使得 $R_J(X)=X_J$和$R_J(f)=f_J$。
我们声称，投影函子 R_J是松幺半且余松幺半函子。

命题 5.8. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有左对偶的多环范畴。投影函子$R_J:\mathcal{C}\to\mathcal{C}_J$ 是松幺半且余松幺半函子。

证明. 对于 $\mathcal{C}$中的任意对象 X,Y，我们定义 $\phi_{X,Y}\colon R_J(X)\otimes R_J(Y)\to R_J(X\otimes Y)$ 如下:

$$\phi_{X,Y}:=\mathrm{Id}_{1_J\otimes X}\otimes i_J\otimes i_J\otimes\mathrm{Id}_{Y\otimes 1_J},$$

并且 $\psi_{X,Y}\colon R_J(X\otimes Y)\to R_J(X)\otimes R_J(Y)$ 定义如下:

$$\psi_{X,Y}:=\mathrm{Id}_{1_J\otimes X}\otimes p_J\otimes p_J\otimes\mathrm{Id}_{Y\otimes 1_J}.$$

由于 $R_J(1)=1_J\otimes 1\otimes 1_J$，我们也定义 $\phi_0:\ 1_J\to R(1)$ 与 $\psi_0:\ R(1)\to 1_J$ 为 $\phi_0=\mathrm{Id}_{1_J}\otimes\mathrm{Id}_1\otimes p_J$和 $\psi_0=\mathrm{Id}_{1_J}\otimes\mathrm{Id}_1\otimes i_J$，即典范同构。因此,

$$\begin{aligned}
&\phi_{X\otimes Y,Z}(\phi_{X,Y}\otimes\mathrm{Id}_{R_J(Z)})\\
=&(\mathrm{Id}_{1_J\otimes X\otimes Y}\otimes i_J\otimes i_J\otimes\mathrm{Id}_{Z\otimes 1_J})(\mathrm{Id}_{1_J\otimes X}\otimes i_J\otimes i_J\otimes\mathrm{Id}_{Y\otimes 1_J}\otimes\mathrm{Id}_{R_J(Z)})\\
=&\mathrm{Id}_{1_J\otimes X}\otimes i_J\otimes i_J\otimes\mathrm{Id}_Y\otimes i_J\otimes i_J\otimes\mathrm{Id}_{Z\otimes 1_J}\\
=&(\mathrm{Id}_{1_J\otimes X}\otimes i_J\otimes i_J\otimes\mathrm{Id}_{Y\otimes Z\otimes 1_J})(\mathrm{Id}_{1_J\otimes X\otimes 1_J}\otimes\mathrm{Id}_{1_J\otimes Y}\otimes i_J\otimes i_J\otimes\mathrm{Id}_{Z\otimes 1_J})\\
=&\phi_{X,Y\otimes Z}(\mathrm{Id}_{R_J(X)}\otimes\phi_{Y,Z}),
\end{aligned}$$

并且类似地可以得到 $(\psi_{X,Y}\otimes\mathrm{Id}_{R_J(Z)})\psi_{X\otimes Y,Z}=(\mathrm{Id}_{R_J(X)}\otimes\psi_{Y,Z})\psi_{X,Y\otimes Z}$。剩下要证明单位性。因为在任意幺半范畴 $l_1=r_1$ 中，参见例如 [8,推论 2.2.5],我们将其应用于 $\mathcal{C}_J$ 并得到 $i_J\otimes\mathrm{Id}_{1_J}=l^J_{1_J}=r^J_{1_J}=\mathrm{Id}_{1_J}\otimes i_J$，其中$l^J$ 和 r^J 是 $\mathcal{C}_J$ 中的单位约束。此外，类似于命题 5.5 的证明，我们有 $\mathrm{Id}_{1_J}\otimes i_J$是一个同构，其逆为 $\mathrm{Id}_{1_J}\otimes p_J$。因此,

$$\begin{aligned}
R_J(l_X)\phi_{1,X}(\phi_0\otimes\mathrm{Id}_{R_J(X)})=&(\mathrm{Id}_{1_J}\otimes i_J\otimes i_J\otimes\mathrm{Id}_{X\otimes 1_J})(\mathrm{Id}_{1_J}\otimes p_J\otimes\mathrm{Id}_{R_J(X)})\\
=&\mathrm{Id}_{1_J}\otimes i_J\otimes\mathrm{Id}_{X\otimes 1_J}=i_J\otimes\mathrm{Id}_{1_J}\otimes\mathrm{Id}_{X\otimes 1_J}=l^J_{R_J(X)}.
\end{aligned}$$

此外，由于 $i_J\otimes\mathrm{Id}^{1_J}=\mathrm{Id}_{1_J}\otimes i_J$，我们有

$$\begin{aligned}
&R_J(r_X)\phi_{X,1}(\mathrm{Id}_{R_J(X)}\otimes\phi_0)=(\mathrm{Id}_{1_J\otimes X}\otimes i_J\otimes i_J\otimes\mathrm{Id}_{1_J})(\mathrm{Id}_{R_J(X)}\otimes\mathrm{Id}_{1_J}\otimes p_J)\\
=&(\mathrm{Id}_{1_J\otimes X}\otimes i_J\otimes\mathrm{Id}_1\otimes\mathrm{Id}_{1\otimes 1_J})(\mathrm{Id}_{1_J\otimes X}\otimes\mathrm{Id}_{1_J}\otimes i_J\otimes\mathrm{Id}_{1_J})(\mathrm{Id}_{R_J(X)}\otimes\mathrm{Id}_{1_J}\otimes p_J)\\
=&(\mathrm{Id}_{1_J\otimes X}\otimes i_J\otimes\mathrm{Id}_{1_J})(\mathrm{Id}_{1_J\otimes X}\otimes\mathrm{Id}_{1_J}\otimes\mathrm{Id}_{1_J}\otimes i_J)(\mathrm{Id}_{R_J(X)}\otimes\mathrm{Id}_{1_J}\otimes p_J)\\
=&\mathrm{Id}_{1_J\otimes X}\otimes i_J\otimes\mathrm{Id}_{1_J}=\mathrm{Id}_{1_J\otimes X}\otimes\mathrm{Id}_{1_J}\otimes i_J=r^J_{R_J(X)}.
\end{aligned}$$

类似地，可以证明 $l^J_{R_J(X)}(\psi_0\otimes\mathrm{Id}_{R_J(X)})\psi_{1,X}=R_J(l_X)$，以及 $r^J_{R_J(X)}(\mathrm{Id}_{R_J(X)}\otimes\psi_0)\psi_{X,1}=R_J(r_X)$。因此，$R_J\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}_J$是一个松幺半且余松幺半函子。□

注记 *5.9.* 回忆一下，弗罗贝尼乌斯对 (F, G) 是一对函子 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$和 $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$，满足 G 同时是 F的左伴随和右伴随。我们断言 (L_J, R_J) 是一个弗罗贝尼乌斯对。事实上，对于任意对象 B属于 $\mathcal{C}_J$，以及 A属于$\mathcal{C}$，由引理 *5.1* 可得，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A_{jk}) = 0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_{jk}, B)$，除非 j, k属于 J。由于 I 是一个有限集，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L_J(B), A) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, \oplus_{j,k\in I} A_{jk}) \cong \oplus_{j,k\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A_{jk}) \\ &= \oplus_{j,k\in J}\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A_{jk}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, \oplus_{j,k\in J} A_{jk}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_J}(B, R_J(A)),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, L_J(B)) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\oplus_{j,k\in I} A_{jk}, B) \cong \oplus_{j,k\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_{jk}, B) \\ &= \oplus_{j,k\in J}\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_{jk}, B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\oplus_{j,k\in J} A_{jk}, B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_J}(R_J(A), B).\end{aligned}$$

事实上，上述两个同构都是通过函子 R_J与恒等映射 $R_J L_J = \mathrm{Id}$共同得到的，因此它们在 A 和 B上是自然的。因此，(L_J, R_J) 是一个弗罗贝尼乌斯对。这意味着，按照 [4, 定义 3.5。2]的意义，$\mathcal{C}_J$既是反射子范畴，也是余反射子范畴。

借助投影函子，我们得到 A_J 在 $\mathcal{C}_J$中的代数结构 .

命题 5.10。设 $\mathcal{C}$ 是一个具有左对偶的多环范畴。

(1) 设 (A, m_A, u_A) 是 $\mathcal{C}$中的一个代数。那么， A_J是 $\mathcal{C}_J$中的一个代数，其乘法 m_{A_J} 和单位 $u_{A_J}: 1_J \to A_J$ 满足 $i_{A_J} m_{A_J} = m_A(i_{A_J} \otimes i_{A_J})$ 和 $i_{A_J} u_{A_J} p_J = u_A$，其中 $i_{A_J} := i_J \otimes \mathrm{Id}_A \otimes i_J: 1_J \otimes A \otimes 1_J \to A$是典范嵌入。*(2)* 设 $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ 是 $\mathcal{C}$中的一个余代数。那么， C_J是 $\mathcal{C}_J$中的一个余代数，其余乘法 Δ_{C_J}和余单位 $\varepsilon_{C_J}: C_J \to 1_J$ 满足 $\Delta_{C_J} p_{C_J} = (p_{C_J} \otimes p_{C_J})\Delta_C$ 和 $i_J \varepsilon_{C_J} p_{C_J} = \varepsilon_C$，其中 $p_{C_J}: = p_J \otimes \mathrm{Id}_C \otimes p_J: C \to 1_J \otimes C \otimes 1_J$ 是典范投影。

证明。 (1) 根据命题 5.8 和 [3, 命题 3.29], ，我们知道 $A_J = R_J(A)$ 是 $\mathcal{C}_J$ 中的一个代数，其乘法为 $R_J(m_A)\phi_{A,\,A}$，单位为 $R_J(u_A)\phi_0$。因此，我们有

$$\begin{aligned}i_{A_J} R_J(m_A)\phi_{A,A} &= (i_J \otimes m_A \otimes i_J)(\mathrm{Id}_{1_J \otimes A} \otimes i_J \otimes i_J \otimes \mathrm{Id}_{A \otimes 1_J}) \\ &= m_A(i_J \otimes \mathrm{Id}_A \otimes i_J \otimes i_J \otimes \mathrm{Id}_A \otimes i_J) = m_A(i_{A_J} \otimes i_{A_J}),\end{aligned}$$

and

$$i_{A_J} u_{A_J} p_J = i_{A_J} R_J(u_A)\phi_0 p_J = (i_J \otimes u_A \otimes i_J)(p_J \otimes p_J) = u_A.$$

(2) 由命题 5.8和 [3, 命题 3.29], 可知， C_J 是 $\mathcal{C}_J$中的一个余代数，其乘法为 $\psi_{C,\,C} R_J(\Delta_C)$，单位为 $\psi_0 R_J(\varepsilon_C)$。由此可得

$$\begin{aligned}\psi_{C,\,C} R_J(\Delta_C) p_{C_J} &= (\mathrm{Id}_{1_J \otimes C} \otimes p_J \otimes p_J \otimes \mathrm{Id}^{C \otimes 1_J})(\mathrm{Id}_{1_J} \otimes \Delta_C \otimes \mathrm{Id}^{1_J})(p_J \otimes C \otimes p_J) \\ &= (p_J \otimes \mathrm{Id}_C \otimes p_J \otimes p_J \otimes \mathrm{Id}_C \otimes p_J)\Delta_C = (p_{C_J} \otimes p_{C_J})\Delta_C,\end{aligned}$$

and

$$i_J \varepsilon_{C_J} p_{C_J} = i_J \psi_0 R(\varepsilon_C) p_{C_J} = (i_J \otimes \varepsilon_C \otimes i_J)(p_J \otimes C \otimes p_J) = \varepsilon_C.$$

□

推论 5.11。 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有左对偶的多环范畴。

(1) 设 (A, m_A, u_A) 是 $\mathcal{C}$中的一个代数。那么， A_J是 $\mathcal{C}$中的一个代数，并且 i_{A_J}: $A_J \to A$ 是一个代数态射。*(2)* 设 $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ 是 $\mathcal{C}$中的一个余代数。那么， C_J 是 $\mathcal{C}$中的一个余代数，并且 p_{C_J}:$C \to C_J$ 是一个余代数态射。

证明。 (1) 根据命题 5.10，我们知道 A_J 是 $\mathcal{C}_J$ 中的一个代数，且满足 $i_{A_J} m_{A_J} = m_A(i_{A_J} \otimes i_{A_J})$ 和 $i_{A_J} u_{A_J} p_J = u_A$。根据命题 5.6，$(A_J, m_{A_J}, u_{A_J} p_J)$ 是 $\mathcal{C}$中的一个代数。这两个等式表明 $i_{A_J} : A_J \to A$ 是一个代数态射。(2) 类似可证。 □

下面的命题证明， $\mathcal{C}$ 中的任意非零代数 $A = \oplus_{i,j \in I} A_{ij}$ 必定具有如下形式： A_J，其中 $J = \{i \in I | A_{ii} \neq 0\}$。

命题 5.12. 设 $\mathcal{C}$是一个具有左对偶的多环范畴，且(A, m_A, u_A) 是 $\mathcal{C}$中的一个代数。假设对于 I中的 l ，有 $A_{ll} = 0$ 。那么，对于所有 I中的 j ，有 $A_{lj} = A_{jl} = 0$ 。因此，对于 $J = \{i \in I | A_{ii} \neq 0\}$，有 $A = A_J$。

证明。 由于 $1 = \oplus_{i \in I} 1_i$，我们知道 1 属于 $\oplus_{i \in I} \mathcal{C}_{ii}$。因此，根据引理 5.1，Im$(u_A)$ 属于 $\oplus_{i \in I} \mathcal{C}_{ii}$。我们可以写作 Im$(u_A)$ $= \oplus_{i \in I}$Im$(u_A)_{ii}$ ，其中 Im$(u_A)_{ii}$ 属于 $\mathcal{C}_{ii}$，对每个 $i \in I$均如此。因此，

$$\mathrm{Im}(u_A) \otimes A_{lj} = (\oplus_{i \in I} \mathrm{Im}(u_A)_{ii}) \otimes A_{lj} \cong \oplus_{i \in I} (\mathrm{Im}(u_A)_{ii} \otimes A_{lj}) = \mathrm{Im}(u_A)_{ll} \otimes A_{lj},$$

并且类似地， $A_{jl} \otimes$Im(u_A) $\cong A_{jl} \otimes$ Im$(u_A)_{ll}$。注意，Im(u_A) 是 A 的子对象。因此，Im(u_A) $_{ii}$ 是 A_{ii}的子对象，这意味着 Im$(u_A)_{ll} = 0$ 作为 $A_{ll} = 0$。因此，Im(u_A) $\otimes A_{lj} \cong$Im(u_A) $_{ll} \otimes A_{lj} = 0$且 $A_{jl} \otimes$Im$(u_A) \cong A_{jl} \otimes$Im$(u_A)_{ll} = 0$。由此可得， $u_A \otimes$Id$^{A_{lj}} =$ Id$_{A_{jl}} \otimes u_A = 0$。于是

$$i_{A_{lj}} = m_A(u_A \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_1 \otimes i_{A_{lj}}) = m_A(\mathrm{Id}_A \otimes i_{A_{lj}})(u_A \otimes \mathrm{Id}_{A_{lj}}) = 0$$

and

$$i_{A_{jl}} = m_A(\mathrm{Id}_A \otimes u_A)(i_{A_{jl}} \otimes \mathrm{Id}_1) = m_A(i_{A_{jl}} \otimes \mathrm{Id}_A)(\mathrm{Id}_{A_{jl}} \otimes u_A) = 0.$$

因此， $A_{lj} = A_{jl} = 0$。 □

注记 5.13. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有左对偶的多环范畴。对于任意代数 A属于$\mathcal{C}$ 且满足 $J = \{i \in I | A_{ii} \neq 0\}$ 至少包含两个元素的情形，可以观察到 $^{u_{A_{jj}}}$： $1 \to A_{jj}$ 对于任意 $j \in J$ 都不是单态射。事实上，对于任意 $k \neq j$，$u_{A_{jj}} i_k$ 是从 $\mathcal{C}_{kk}$ 到 $\mathcal{C}_{jj}$的一个态射，根据引理 *5.1*，它为零。这个观察也支持命题 *4.3*。此外，很容易观察到 u_A 是单态射当且仅当 $J = I$。

命题 5.14. 设 $\mathcal{C}$是一个具有左对偶的多环范畴，并且 (A, m_A, u_A) 是 $\mathcal{C}$中的一个代数。设 $J = \{i \in I | A_{ii} \neq 0\}$。那么， u_{A_J}： $1_J \to A_J$ 是一个单态射。

证明。 注意，Ker(u_{A_J}) 属于 $\oplus_{i \in J} \mathcal{C}_{ii}$，因为它是 1_J 的子对象。因此，我们可以写成

$$\text{核}(u_{A_J}) = \oplus_{i \in J} \text{核}(u_{A_J})_{ii} = \oplus_{i \in J} (1_i \otimes \text{核}(u_{A_J}) \otimes 1_i) \cong \oplus_{i \in J} \text{核}(1_i \otimes u_{A_J} \otimes 1_i)$$

$$= \oplus_{i\in J} \text{核}(1_i \otimes 1_J \otimes u_A \otimes 1_J \otimes 1_i) \cong \oplus_{i\in J} \text{核}(1_i \otimes u_A \otimes 1_i)。$$

对于任意 i中的 J，因为 Ker$(1_i \otimes u_A \otimes 1_i)$ 是 1_i的子对象，且 1_i是简单对象，所以我们知道 Ker$(1_i \otimes u_A \otimes 1_i)$ 同构于 1_i 或 0。由于 $A_{ii} \neq 0$，根据命题 5.10 我们知道 A_{ii} 是 $\mathcal{C}_{ii}$中的非零代数，这意味着 $u_{A_{ii}} \neq 0$。因此， $1_i \otimes u_A \otimes 1_i$ 非零。这意味着 Ker$(1_i \otimes u_A \otimes 1_i) = 0$。因此，Ker$(u_{A_J}) = 0$。 □

命题 5.15。 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有左对偶的半单多环范畴，且(A, m_A, u_A) 是 $\mathcal{C}$中的一个代数。设 $J = \{i \in I | A_{ii} \neq 0\}$。则，函子 $-\otimes A_J : \mathcal{C}_J \to (\mathcal{C}_J)^{A_J}$ 是可分的。

证明。由命题 3.1，我们知道 $u_{A_J} : 1_J \to A_J$ 是正则的。由于 u_{A_J} 是单态射，见命题 5.14，我们得到 u_{A_J} 是一个分裂单态射。因此，由命题 2.1，我们得到 $-\otimes A_J : \mathcal{C}_J \to (\mathcal{C}_J)^{A_J}$ 是可分的。 □

注 *5.16.* 回顾一下，对于幺半范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 以及 $\mathcal{C}$中的代数 A，若 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个松幺半函子，且 ϕ_0 是分裂满射，那么 $-\otimes A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$ 是半可分的，蕴含 $-\otimes F(A) : \mathcal{D} \to \mathcal{D}_{F(A)}$ 是半可分的，见 [5, 命题 *3*.25]。根据命题 *3.4*， $-\otimes A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$ 是半可分的。因此，命题 *5.15* 表明， $-\otimes F(A) : \mathcal{D} \to \mathcal{D}_{F(A)}$ 可能是可分的，其中 $F = R_J$根据命题 *5.8* 是一个松幺半函子。此外，回顾一下，若 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个全忠实松幺半函子，且 ϕ_0 是满态射，那么 $-\otimes F(A) : \mathcal{D} \to \mathcal{D}_{F(A)}$ 是可分的，蕴含 $-\otimes A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$ 是可分的，见 [5, 命题 *3*.26]。在命题 *5.15* 中，函子 $F = R_J$ 并不忠实。这说明[5,命题 *3*.26] 中的忠实性条件不可或缺。

6. Applications and examples

本节分为两个部分：应用与示例。我们主要关注命题 4.4的应用与示例。为简洁起见，我们只提及命题4.4中的等价条件 (2)。事实上，也可以使用其他等价条件得到类似结果。

6.1. 弱 Hopf 代数的应用。现在，我们考虑命题 4.4 在某一类弱 Hopf 代数中的应用。回顾一下 [10], [16], 另见[9, 推论 2.22] ，任意多融合范畴 $\mathcal{C}$ 都等价于某个（不唯一的）正则半单弱 Hopf 代数的有限维表示范畴。该弱 Hopf 代数是连通的，当且仅当 $\mathcal{C}$ 是融合范畴。事实上，该弱 Hopf 代数可由 $H = \text{End}(F)$给出，参见例如[9, 2.5], 其中 $F : \mathcal{C} \to R\text{–Bimon}$ 是一个纤维函子。由命题 4.4 可知， $\mathcal{C}$是融合范畴，当且仅当对任意非零的 H-模代数 A，函子$-\otimes A : \text{Rep}(H) \to \text{Rep}(H)_A$是可分的。因此，我们建立了 H 的连通性与可分性之间的对应关系。

命题 6.1。 H 是连通的，当且仅当对于任意非零的 H-模代数A，函子 $-\otimes A : \text{Rep}(H) \to \text{Rep}(H)_A$ 是可分的。

我们也可以将命题 5.15 应用于 Rep(H)。假设 $\mathcal{C}$，因此 Rep(H) 是多融合范畴，但不是融合范畴。考虑 Rep(H) $:= \oplus_{i,j\in I}$Rep(H)$_{ij}$。对于非零的 H-模代数 A，令 $J = \{i \in I | A_{ii} \neq 0\}$。根据命题 5.15，$-\otimes A_J$: Rep($H$)$_J \to$(Rep($H$)$_J$)$_{A_J}$是可分的，其中 Rep($H$)$_J :=\oplus_{i,j\in J}$Rep($H$)$_{ij}$是 Rep($H$) 中由 $i, j \in J$ 标记的分支子范畴的直和。根据推论 5.4，我们知道 Rep(H)$_J$ 是多融合范畴。因此，Rep(H)$_J$等价于某个（不唯一的）正则半单弱 Hopf 代数的有限维表示范畴。这个弱 Hopf 代数可由$H' =$ End(F')给出，其中 F': Rep(H)$_J \to R'$–Bimon 是一个纤维函子。因此，我们可以用 Rep(H')替换 Rep(H)$_J$ 。

命题 6.2。对于非零的 H-模代数 A，令 $J = \{i \in I | A_{ii} \neq 0\}$。将该等价记为 E: Rep(H)$_J \to \mathrm{Rep}(H')$。则函子 $-\otimes E(A_J)$: Rep(H') $\to (\mathrm{Rep}(H'))_{E(A_J)}$ 是可分的。

注 6.3。设 $\mathcal{C}$ 为具有左对偶的多环范畴。对于任意等价 G: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 及其拟逆 F: $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$，我们知道存在自然同构$\eta$: $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to FG$ 和 η' : $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \to GF$。为简便起见，我们滥用记号 1表示 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$中的单位。定义自然变换

$$1_J \otimes \eta \otimes 1_J : 1_J \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \otimes 1_J \to 1_J \otimes FG \otimes 1_J$$
$$1_J \otimes \eta' \otimes 1_J : 1_J \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \otimes 1_J \to 1_J \otimes GF \otimes 1_J$$

by

$$(1_J \otimes \eta \otimes 1_J)_X := 1_J \otimes \eta_X \otimes 1_J : 1_J \otimes X \otimes 1_J \to 1_J \otimes FG(X) \otimes 1_J$$
$$(1_J \otimes \eta' \otimes 1_J)_Y := 1_J \otimes \eta'_Y \otimes 1_J : 1_J \otimes Y \otimes 1_J \to 1_J \otimes GF(Y) \otimes 1_J$$

对于 X 属于 $\mathcal{C}$ 且 Y 属于 $\mathcal{D}$。容易观察到，$1_J \otimes \eta \otimes 1_J$ 和 $1_J \otimes \eta' \otimes 1_J$是自然同构。因此，$1_J \otimes G \otimes 1_J$： $1_J \otimes \mathcal{C} \otimes 1_J \to 1_J \otimes \mathcal{D} \otimes 1_J$ 是一个等价。这意味着 $\mathcal{C}_J$ 与 $\mathcal{D}_J$ 等价。在本小节中，我们可以用 $\mathrm{Rep}(H)$替换 $\mathcal{D}$ ，从而得到 $\mathcal{C}_J$ 与 $\mathrm{Rep}(H)_J$等价。

6.2. **简单性的传递的应用**。本小节中，我们考察幺半函子对单位对象简单性的传递。首先，回顾以下结果。

命题 6.4。 [5, 命题 3。26] 设($\mathcal{C}, \otimes, 1$)和($\mathcal{D}, \otimes, 1'$) 为幺半范畴，A 是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数，其单位为 u_A : $1 \to A$。设(F: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}, \phi^2, \phi^0$) 是一个全忠实宽幺半函子。若 ϕ^0 是满态射，且 $-\otimes F(A)$: $\mathcal{D} \to \mathcal{D}_{F(A)}$ 是半可分（分别地，可分、自然满），那么 $-\otimes A$: $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$ 也是半可分（分别地，可分、自然满）。

再次回顾，松幺半函子 (F : $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, ϕ^2, ϕ^0) 将 $\mathcal{C}$中的代数 (R, m_R, u_R) 映射为 $\mathcal{D}$中的代数 ($F(R)$ $F(m_R)\phi^2_{R,\,R}$, $F(u_R)\phi^0$)，例如参见命题 3.29]。

命题 6.5。 设$(\mathcal{C},\otimes,1)$是一个具有左对偶的半单多环范畴，且$(\mathcal{D},\otimes,1')$是一个张量积双正合、单位对象简单的半单阿贝尔幺半范畴。假设存在一个全忠实松幺半函子$(F:\mathcal{C}\to\mathcal{D},\phi^2,\phi^0)$，使得 ϕ^0 是一个满态射。那么， $\mathcal{C}$ 是一个环范畴。

证明。 对于任意非零代数 A 在 $\mathcal{C}$中，我们知道 $F(A)$ 是 $\mathcal{D}$中的一个代数。由命题3.3，我们得到 $-\otimes F(A)\colon\ \mathcal{D}\to\mathcal{D}_{F(A)}$是可分的。由命题6.4， $-\otimes A\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$是可分的。因此，由命题 4.3，我们得到 $\mathcal{C}$是一个环范畴。 □

这一结果可应用于具有左对偶的半单多环范畴和多融合范畴，从而立即得到以下推论。

推论 6.6。 设$(\mathcal{C},\otimes,1)$、$(\mathcal{D},\otimes,1')$是具有左对偶的半单多环范畴（分别为多融合范畴）。假设 $\mathcal{D}$ 是一个环范畴，且存在一个全忠实宽幺半函子$(F:\ \mathcal{C}\to\mathcal{D},\phi^2,\phi^0)$，使得 ϕ^0 是一个满态射。那么， $\mathcal{C}$ 也为一个环范畴（分别为融合范畴）。

6.3. **在半单不可分解模范畴中的应用**。 张量范畴上的模范畴理论对于理解张量范畴的结构至关重要。 [8, 第 7]章建立了一套系统理论。在本小节中，我们重点讨论半单不可分解模范畴。

关于不可分解模范畴的定义，参见 [14, 定义 2.6、2.7]。更确切地说，幺半范畴 $\mathcal{C}$ 上的模范畴 $\mathcal{M}$是一个范畴，并配有一个正合双函子 $\otimes\colon\ \mathcal{C}\times\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 以及函子性的结合同构和单位同构$m_{X,Y,M}\colon (X\otimes Y)\otimes M\to X\otimes(Y\otimes M)$, $l_M\colon\ 1\otimes M\to M$，其中任意 $X,Y\in\mathcal{C}$, $M\in\mathcal{M}$都满足 $(\mathrm{Id}_X\otimes m_{Y,Z,M})m_{X,Y\otimes Z,M}(a_{X,Y,Z}\otimes\mathrm{Id}_M)=m_{X,Y,Z\otimes M}m_{X\otimes Y,Z,M}$以及$(\mathrm{Id}_X\otimes l_M)m_{X,1,Y}=r_X\otimes\mathrm{Id}_M$。如果一个模范畴不等价于两个非平凡模范畴的直和，则称其为不可分解的。接下来，我们将命题 4.4 应用于这一情形。

设 $\mathcal{C}$ 为融合范畴， $\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{C}$ 上的半单不可分解模范畴。根据 [14, 定理 3.1]， $\mathcal{M}$ 等价于 $\mathcal{C}_A$，其中 $A:=\mathrm{Hom}(M,M)$， M 是 $\mathcal{M}$ 中的固定对象。另请回顾，等价是可分的，参见例如 [7, 推论 9]。根据命题 4.4，函子 $-\otimes A\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$ 是可分的。因此，根据 [7, 命题 46]，它们的复合 $\mathcal{C}\to\mathcal{C}_A\to\mathcal{M}$ 仍是可分函子。由此得到以下命题。

命题 6.7。 设 $\mathcal{C}$ 为融合范畴。对于其上的任意半单不可分解模范畴 $\mathcal{M}$ ，上述复合 $\mathcal{C}\to\mathcal{C}_A\to\mathcal{M}$ 是一个从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{M}$ 的可分函子。

6.4. **Grothendieck 环的应用**。 首先，我们回顾 $\mathbb{Z}_+$-环的定义，参见例如 [8, 定义 3.1.1]。令 $\mathbb{Z}_+$ 表示非负整数构成的半环。令 A 为一个作为 $\mathbb{Z}$-模的自由环。 A 的一个 $\mathbb{Z}_+$-基是满足 $b_ib_j=\sum_{k\in I}c_{ij}^kb_k$ 的基 $B=\{b_i\}_{i\in I}$，其中 $c_{ij}^k\in\mathbb{Z}_+$。 $\mathbb{Z}_+$-环是一个带有固定 $\mathbb{Z}_+$-基的环

，其单位 1 是基元素的非负线性组合。含幺 $\mathbb{Z}_+$-环是满足 1 为基元素的 $\mathbb{Z}_+$-环。

设 A 是一个 $\mathbb{Z}_+$-环，并令 I_0 为满足 b_i 出现在 1 的分解中的所有 $i \in I$ 所构成的集合。令 $\tau: A \to \mathbb{Z}$ 表示由下式定义的群同态：若 $i \in I_0$，则$\tau(b_i) = 1$；若 $i \neq j^*$，则 $\tau(b_i) = 0$。若存在 I 上的一个对合 $i \mapsto i^*$，使得其诱导映射 $a = \sum_{i\in I} a_i b_i \mapsto a^* = \sum_{i\in I} a_i b_{i^*}$ 是环 A的反对合，并且若 $i = j^*$，则 $\tau(b_i b_j) = 1$；若 $i \neq j^*$，则 $\tau(b_i b_j) = 0$，则称具有基 $\{b_i\}_{i\in I}$的 $\mathbb{Z}_+$-环 A为基环，参见例如 [8, 定义 3.1.3]。回顾一下，对于给定的$\mathbb{Z}_+$-环 A，成为（含单位的）基环是一种性质，而非额外结构，参见例如 [8, 习题 3.1.5 (ii)]。
设 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔 $\Bbbk$-线性范畴，其中对象具有有限长度。回顾一下，$\mathcal{C}$ 的格罗滕迪克群 Gr($\mathcal{C}$) 是由 $\mathcal{C}$ 中简单对象的同构类生成的自由阿贝尔群，参见例如 [8, 定义 1.5.8]。现在，设 $\mathcal{C}$ 是一个多环范畴。$\mathcal{C}$ 上的张量积在 Gr($\mathcal{C}$) 上诱导出自然的乘法。因此，Gr($\mathcal{C}$) 是一个以 [1], 为单位的 $\mathbb{Z}_+$-环，称为 Grothendieck 环，参见例如 [8, 定义 4.5.2]。此外，多融合环是有限秩基环，而融合环是有限秩含幺基环，参见例如 [8, 定义 3.1.7]。现在，我们回顾一个将（多）融合范畴与（多）融合环联系起来的著名结果。

命题 6.8。 [8, 命题 4.9。1] 如果 $\mathcal{C}$ 是一个半单多张量范畴，那么$\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ 是一个基环。如果 $\mathcal{C}$ 是一个（多）融合范畴，那么$\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ 是一个（多）融合环。

基于这一命题，我们的结果揭示了融合环与可分性之间的新联系。

命题 6.9. 设 $\mathcal{C}$ 是一个多融合范畴。那么，$\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ 是融合环，当且仅当对任意非零代数 A（属于 $\mathcal{C}$），函子 $-\otimes A\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$ 是可分的。

证明. ($\Rightarrow$) 假设 Gr($\mathcal{C}$) 是一个融合环。根据融合环的定义，我们知道单位对象 1 在 $\mathcal{C}$ 中的同构类 [1] 是一个基元素。这意味着单位对象 1 在 $\mathcal{C}$ 中是一个简单对象。因此，$\mathcal{C}$ 是一个融合范畴。根据命题 4.4，对任意非零代数 A（属于 $\mathcal{C}$），函子 $-\otimes A: \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$ 是可分的。

($\Leftarrow$) 假设对任意非零代数 A（属于 $\mathcal{C}$），函子 $-\otimes A\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$是可分的。根据命题 4.4，$\mathcal{C}$ 是一个融合范畴。于是，根据命题 6.8，Gr($\mathcal{C}$) 是一个融合环。

□

6.5. **例子**。

例 6.10. 众所周知，范畴Vec有限维 $\Bbbk$-向量空间是一个融合范畴，参见例如 [8,例 4.1。2]。由命题*4.4*可知，对于任意非零代数 A 属于Vec，函子 $-\otimes A: \mathrm{Vec} \to \mathcal{M}_A$ 是可分的，其中 $\mathcal{M}_A$ 是右 A-模范畴。此外，正如在 [6,例

3.22)], $\Bbbk$ 是 *Vec* 中的左 $\otimes$-生成元Vec。因此，由注记4.7可知，若 A 是可分代数，则 $F\circ(-\otimes A):\mathrm{Vec}\to\mathrm{Vec}$ 是可分的，其中 $F:\mathcal{M}_A\to\mathrm{Vec}$ 是遗忘函子，而 $-\otimes A:\mathrm{Vec}\to\mathcal{M}_A$。

注 *6.11.* 设 $G:Vec\to Vec$ 是一个右正合函子。根据 [11, 定理 2.4],G，$Vec\to Vec$ 自然同构于 $-\otimes G(\Bbbk):Vec\to Vec$。由于 $G(\Bbbk)$ 是一个有限维向量空间，它自然带有逐点乘法所赋予的代数结构。根据例 *6.10*，如果 $G(\Bbbk)$ 是一个可分代数，那么 $-\otimes G(\Bbbk):Vec\to Vec$ 是可分的，这意味着 $G:Vec\to Vec$ 是可分的。特别地，如果 G 满足 $G(\Bbbk)\cong\Bbbk$，即 $G(\Bbbk)$ 是一个一维代数，那么 $G(\Bbbk)$ 是一个可分代数。

例 6.12. 设 H 是定义在 $\Bbbk$上的半单有限维霍普夫代数。根据重构定理，例如参见 [8, 定理 5.3。12], 我们知道，表示范畴$\mathrm{Rep}(H)$ 是 H 的一个融合范畴。根据命题 4.4，我们知道，对于 A 中任意非零代数 $\mathrm{Rep}(H)$，即 H-模代数，相应的函子 $-\otimes A:\mathrm{Rep}(H)\to\mathrm{Rep}(H)_A$ 是可分的。

例 6.13. 设 A 是 $\Bbbk$上的半单有限维代数。设 $\mathcal{C}$ 是有限维 A-双模范畴。已知 $\mathcal{C}$ 是多融合范畴，且 $\mathcal{C}$ 是融合范畴当且仅当 A 是简单的，参见例如 [8,例 4.1。3]。因此，由命题4.4可知，A 是简单的当且仅当对任意非零代数 A' 在 $\mathcal{C}$中，$-\otimes A':\mathcal{C}\to\mathcal{C}_{A'}$ 是可分的。

致谢。作者感谢 A. Ardizzoni 提出的富有意义的建议与意见，并衷心感谢中国国家留学基金管理委员会通过博士生奖学金（编号 202406190047）所提供的支持。本文撰写时，作者为“代数与几何结构及其应用国家研究组”（GNSAGA-INdAM）的成员。本工作部分得到欧盟 - NextGenerationEU 在 NRRP、任务 4 组成部分 2 CUP D53D23005960006 下资助的项目的支持——意大利大学与研究部 2022 年 2 月 2 日的 2022 年 PRIN 第 104 号征集；项目 2022S97PMY箭图、代数与表示的结构（*SQUARE*）。

References

[1] *Semiseparable functors* **638** 2024 862 917 1, 3, 4, 8, 9 Ardizzoni A., Bottegoni L., .
[2] *Naturally full functors in nature* 《代数杂志》 (), – . Ardizzoni A., Caenepeel S., Menini C., Militaru G., .《数学学报（英文版）》 **22** 2006 1, 233 250 1, 3 (), no. –. Aguiar M., Mahajan S., , *species and Hopf algebras.* CRM 专著丛书，29. 美
[3] *Monoidal functors* 国数学会，罗得岛州普罗维登斯， 2010 +784 11, 12, 14, 17 . lii pp. Borceux
[4] *Handbook of categorical algebra. 1. Basic category theory.* F.,《数学及其应用百科全书》， **50** 1994 14 . 剑桥大学
[5] *Semiseparability of induction functors in a monoidal category.* 出版社，剑桥，. Bottegoni L., Zuo Z. 预印本arXiv: 2602 03739 3, 9, 16, 17 .. Bulacu D., Torrecillas B.,
[6] *On Frobenius and separable algebra extensions in monoidal categories: applications to wreaths.* **9** 2015 3, 707 774 1, 9, 12, 20 《非交换几何杂志》 (), no. – .

[7] Caenepeel S., Militaru G., Zhu S., *Frobenius and separable functors for generalized module categories and nonlinear equations* **1787** 2002 . 《数学讲义》，. 施普林 9, 18
格出版社，柏林，.[8] Etingof P., Gelaki S., Nikshych D., Ostrik V., *Tensor categories.* 数学调查与专著，205 美国数学会，
罗得岛州普罗维登斯，2015, +343 1, 2, 3, 4, 6, 11, 13, 18, 19, 20
[9] *On fusion categories.* 1, 16 2 162 2005
xvi pp. Etingof P., Nikshych D., Ostrik V.,《数学年刊》 ( ) ( ), no. 2, 581 642– . [10] Hayashi T.,
A canonical Tannaka duality for finite seimisimple tensor categories. 预印本 arXiv:math/ 9904073 16 .
[11]
Ivanov S. O., *Nakayama functors and Eilenberg-Watts theorems.* Zap. Nauchn. Sem. S.- Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 388 (2011), Voprosy Teorii Predstavleniĭ Algebr i Grupp.
21, 179 188, 311 183 2012 5, 675 680 20 – ; 译载于《数学科学杂志》（纽
[12] *Heavily separable cowreaths* 583 2021 153 186
约版）( ), no. – Menini C., Torrecillas B., .《代数杂志》 ( ), – . 3
[13] *Separable functors applied to graded rings*Năstăsescu C., Van
den Bergh M., Van Oystaeyen F., .《代数杂志》 **123** 2 1989 397 413 1, 3 () (), –. Ostrik V., ,
[14] *Module categories*
weak Hopf algebras and modular invariants.《变换群》8 (2003 2, 177 206 18), no. –. Szlachanyi K.,
[15]
Adjointable monoidal functors and quantum groupoids. 非交换几何与物理中的霍普夫代数，291–307.《纯数学与应用数学讲 2003 12
义》，239. Marcel Dekker公司，纽约，[16] Szlachanyi, K.,
Finite quantum groupoids and inclusions of finite type. Fields Inst. Commun., 30 美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2001年，
393–407. 16

University of Turin, Department of Mathematics "G. Peano", via Carlo Alberto 10, I-10123 Torino, Italy

Email address: zhenbang.zuo@edu.unito.it