arXiv:2602.09010v1 [math.FA] 9 Feb 2026

齐性空间上的完整离散舍恩伯格-德尔萨特理论

SUJIT SAKHARAM DAMASE 和 JAMES ELDRED PASCOE

Abstract. 我们发展了部分定义的完全正性保持映射理论，将舍恩伯格的经典刻画推广到仅在离散子集或受约束定义域上定义的函数。我们通过算子系统上的完全正映射理论来构建这一扩展问题——我们刻画一般齐性空间上一般的部分定义的完全正定函数。我们将这一插值结果应用于受约束装填问题和德尔萨特理论；在这些问题中，人们利用齐性空间上的正定函数，得出各种装填问题的界。我们证明，对于受约束角码，能够证明某个码是最优的特定正定函数见证必须来自多项式。

Contents

1. 引言 2 1.1. 概述 4 2. 动机 5 2.1. 统计学与数值计算 5 2.2. 保守插值 6 2.3. 球堆积与舍恩伯格定理 6 2.4. Lov`asz θ 函数与舍恩伯格定理 9 2.5. 锥保持映射 11 3. 群表示理论与群上的正定函数 12 3.1. 齐性空间 12 3.2. 群表示理论 12

日期：2026年2月10日。2020 数学主题分类。43A35, 15B48, 46L07; 52C17, 47A20。关键词和短语。正定函数、正核、完全正映射、舍恩伯格定理、矩阵补全、球堆积、Delsarte 界、算子代数。我们感谢 SERB 的 J C Bose Fellowship JCB/2021/000041 对本研究的支持。

3.3. 群上的正定函数 16 3.4. 正定函数的延拓问题 17 3.5. I类表示 17 3.6. 非连续表示的存在性 19 3.7.$SO(\infty)$ 20 4. 离散 Schoenberg定理 20 4.1. 汉明立方 20 4.2. 汉明立方上的正定函数 21 4.3. 带球函数与 Krawtchouk 多项式 21 4.4. 极限 $n \to \infty$ 215. 完全正映射 23 5.1. Stinespring 表示定理 24 5.2. Arveson 延拓定理 24 5.3. 同态富山定理 24 5.4. 群代数上的完全正映射 25 6. 齐性空间上的不变完全正定函数 27 6.1. 归纳有限球面及其对 $SO(\infty)$ 的 I 类表示的推论 29 6.2. 除以具有性质 (T) 的子群的局部紧群 30 7. 齐性空间上的不变部分定义完全正定函数 31 7.1. 有限集上 $SO(n)$ 的插值 32 8. 约束角码与 Delsarte 界 34 9. 部分定义的完全正性保持映射 35 10. 一些总结性评论 36 10.1. Delsarte 幻觉 36 10.2. Olshanski 球对 36 10.3. 有限维问题 40 参考文献 42

1. Introduction

一个实数方阵 $[m_{ij}]_{i,\ j}$ 若满足**对称** 条件，则称其为**半正定** 矩阵。若一个实对称矩阵满足

$$\sum_{i,j} c_i c_j m_{ij} \geq 0$$

对于任意实数序列 c_1、……、 c_N.

Schoenberg [60] 将**保正性函数**刻画为连续函数 $f\colon\ [-1,1]\to\mathbb{R}$ 对于给定的一个, $_j$其元素属于 $[-1,1]$ 的半正定矩阵$[m_{ij}]_i$，矩阵 $[f(m_{ij})]_{ij}$仍为半正定矩阵，当且仅当它恰好 f 具有如下形式

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i x^i$$

其中 $a_i\geq 0$ 和 $\sum_{i=0}^{\infty}a_i<\infty$.

我们分析仅在 $X\subseteq[-1,1]$. 上定义的正定函数理论。此外，我们将经典理论扩展到“完全”情形，即扩展到算子值函数的情形。

部分定义矩阵是指某些条目未指定的矩阵。例如，矩阵

$$\begin{bmatrix}1 & ? & -1\\ ? & 2 & 1\\ -1 & 1 & ?\end{bmatrix}\tag{1.1}$$

如果存在一种方法，为未指定的条目赋值，使矩阵成为半正定矩阵，则称部分定义矩阵为半正定。也就是说，该部分定义矩阵有一个半正定**补全**。例如，上述矩阵 (1.1) 是半正定的，因为

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 17\end{bmatrix}\tag{1.2}$$

给出了一个半正定补全。

我们研究部分定义的半正定矩阵的保性问题。给定 $X\subseteq\mathbb{R}$，我们称 $f\colon\ X\to\mathbb{R}$为**部分定义的正性保持函数**，如果对于任意部分定义的半正定矩阵 $[m_{ij}]_{i,\ j}$ 都有 $[f(m_{ij})]_{i,\ j}$ 仍为部分定义的半正定矩阵，其中 f 未指定的条目仍保持未指定。注意，若 $f\colon\ [-1,1]\to\mathbb{R}$ 是正性保持函数，则它必然也是部分定义的正性保持函数，因为对于任意条目取自 $[-1,1]$, 的部分定义半正定矩阵，其任意一个补全的条目都取自 $[-1,1]$ ，因此可以将 f 应用于该补全，从而得到 $[f(m_{ij})]_{i,\ j}$. 的一个补全。例如，若我们的部分定义矩阵 $[m_{ij}]_{i,\ j}$ 由 (1.1) 给出，且 $f(x)=x^2$，则有

$[f(m_{ij})]_{i,\ j}$ 由下式给出

$$\begin{bmatrix} 1 & ? & 1 \\ ? & 4 & 1 \\ 1 & 1 & ? \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

它可以补全为半正定矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 289 \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

现在，我们可以陈述一般性结果的一个推论，从而证明 [48] 中提出的问题。

定理 1.1. 若 $\psi:\ \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ 是部分定义的正性保持函数，则

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

其中 $a_n \geq 0$ 且 上极限 $a_n^{1/n} = 0.$

事实上，我们将看到，可以用任意满足 $\sup X = \infty.$ 的集合 X 替代 $\mathbb{Z}$ 。当 X 有界甚至有限时，需要进行一些更细致的考量。我们还将看到，通过用 C^*-代数中的完全正性概念来表述上述定义，也可以用自伴算子空间替代值域 $\mathbb{R}$ 。

1.1. 大纲。 我们先在第 2 节介绍一些普遍易懂的基本动机。为了处理上述相当平常的问题，我们采用的进一步历史背景、基础知识和方法颇为多样，也相当丰富，其中包括球面码和装填问题的应用。我们需要在第 3 节建立对群表示理论以及群上的正定函数的一些基本认识，其中包括齐性空间理论、I 类表示、与性质 (T) 等其他群论性质的联系，以及拓扑群的不连续表示带来的一些棘手问题。第 4 节中，我们利用 Krawtchouk 多项式的估计，给出经典舍恩伯格定理的离散化证明。此外，为了完整地陈述并证明我们的结果，我们还需要借助完全正性理论中的一些概念；第 5 节将介绍这些内容，包括斯廷斯普林表示理论和 Arveson 延拓。第 6 节讨论齐性空间上的完全正定函数理论，以及它对

在自身的一个指标为 1 的副本上 $SO(\infty)$的 I 类表示。应用 Arveson 延拓类型的结果后，我们将在第 7 节探讨齐性空间上部分定义的完全正定函数理论。第 8 节介绍其在受约束角球面码中的应用。第 9 节则给出部分定义的完全正性保持映射的刻画。最后，第 10 节提出一些开放问题、反思及其他考量，其中包括 Delsarte 幻觉问题：Delsarte 方法得出一个整数，但不存在大小为该数的码。

2. Motivation

回顾一下，希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 是完备的内积空间。

以下内容给出了希尔伯特空间的自完备性质。

定理 2.1 (Riesz 表示定理)。设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间。设 $\lambda : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ 是一个连续线性映射。存在 $\lambda \in \mathcal{H}$，使得 $\lambda(f) = \langle f, \lambda \rangle$.

假设 $\mathcal{H}$ 是一个函数空间，且求值映射 $\lambda_x(f) = f(x)$ 是连续的，由此便得到再生核希尔伯特空间的概念。

定义 2.2 （再生核希尔伯特空间）。 假设 $\mathcal{H}$ 是一个函数空间，并且求值映射 $\lambda_x(f) = f(x)$ 是连续的。我们称 $\mathcal{H}$ 为再生核希尔伯特空间。

我们将满足 $f(x) = \langle f, k_x \rangle$ 的元素 k_x 称为核函数。

最后，还有基本的表示定理。

定理 2.3 （Aronszajn-Moore-Kolmogorov 型定理）。 设 X为一个集合。设 $K : X \times X \to \mathbb{C}$，满足 $[K(x_i, x_j)]_{i,j}$ 对每个有限集 $x_1, \ldots, x_d$. 均为半正定。存在映射 $\iota : X \to \mathcal{H}$，其中 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，并且

$$\langle \iota_x, \iota_y \rangle = K(x, y).$$

2.1. **统计学与数值计算**。 协方差矩阵描述了不同数据之间的统计关系，因此在现代社会中无处不在。对于大型协方差矩阵，人们往往想通过将其中较小的元素替换为 0 来稀疏化系统。无论这种做法看起来多么诱人，所得矩阵通常都不是半正定的。根本原因在于，具有正系数的幂级数在正输入处不可能有零点。然而，通过研究固定维数下的保性问题，或者

仅对较小的负元素进行阈值处理，就能为软阈值提供一种可行的框架。Rajaratnam 和 Guillot [27] 从 Schoenberg 理论及相关主题的角度阐述了软阈值的理论基础。Khare 和 Tao [33]利用舒尔多项式构造了固定维数下的保持映射。此外，矩阵补全问题自然地源于部分观测到的协方差矩阵，参见例如 [5]。

2.1.1. 浮点运算。 一个自然的问题是，Schoenberg 关于保正性函数的定理在浮点运算中是否仍然成立。（例如，在应用上述软阈值处理的自然情境中。）也就是说，通过离散化定义域，尚不清楚会出现多少新的保正性函数。在部分定义的保正性映射这一背景下，我们的定理 1.1 证明不会出现任何新情况。

2.2. **保守插值**。 一般的朴素插值方法会遭遇严重的不稳定性，例如龙格现象和吉布斯现象。从拉格朗日插值的经典估计 [61, 24] 中可以看出，插值确实高度不稳定。一种方法是改为从正规型族中选取，即选取一组具有足够紧性、从而能够保证稳定性的函数。

2.2.1. 奈望林纳-皮克插值。 例如，奈望林纳-皮克插值定理描述了何时存在一个从单位圆盘映到闭单位圆盘、并在特定点取规定值的解析函数。

定理 2.4 （皮克 [51], 奈望林纳 [42]）。 设 $z_1, \ldots\ldots, z_n \in \mathbb{D}$. 设$\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. 存在解析函数 $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 使得$\varphi(z_i) = \lambda_i$ 当且仅当矩阵

$$\left[\frac{1-\lambda_i\overline{\lambda_j}}{1-z_i\overline{z_j}}\right]_{i,j}$$

是半正定的。

人们可以将定理 1.1 重新解释为求解正定函数的一类插值问题，稍后我们将借助部分定义的完全正定函数，一般地解决完全正定函数的这一问题。

2.3. **球堆积与舍恩伯格定理**。 球堆积问题研究的是如何将球面以最密集的方式堆积在欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$ 中。也就是说，全等球在除边界外互不相交的条件下，能够覆盖 $\mathbb{R}^d$ 的多大比例?

这方面已有大量研究，例如 [10], [12], [13]„ 当然还有著名的 [65], [11]。

线性规划界是目前已知在这类问题中给出上界的最有力方法。具体而言， [32] 利用这一方法证明了高维球堆积密度的最佳已知界。不过， [32] 并不直接研究球堆积，而是通过球面码这一中间问题来处理。令 $\Delta_{\mathbb{R}^n}$ 表示最大堆积密度。

维数为 n 、最小角为 θ 的球面码 $\mathcal{C}$ ，是单位球面 S^{n-1} 上的一个点集，使得任意两点沿连接它们的大圆之间的夹角都不小于θ 。也就是说，$\langle x, y\rangle \leq \cos\theta$ 对所有不同的点对 $x, y \in \mathcal{C}$. 均成立。令 $A(n, \theta)$表示此类球面码的最大规模。

在 [15], 中，德尔萨特运用线性规划方法，在纠错码的背景下给出了堆积密度的上界。德尔萨特、Goethals 和 Siedel [16]以及 Kabitiansky 和列文斯坦 [32]分别构造了一个线性规划，用以证明 $A(n, \theta)$ 的上界。利用这一方法，Kabitiansky 和列文斯坦 [32]得到了 $A(n, \theta)$ 的一个上界，进而利用不等式

$$\Delta_{\mathbb{R}^n} \leq \sin^n(\theta/2) A(n+1, \theta).$$

这一不等式后来由 Cohn 和 Zhao [13]进一步改进。他们证明，对于所有 $\theta \in [\pi/3, \pi]$,

$$\Delta_{\mathbb{R}^n} \leq \sin^n(\theta/2) A(n, \theta).$$

现在，我们建立球面码界与舍恩伯格定理之间的联系。对于正定函数 g： $[-1, 1] \to \mathbb{R}$，定义 $\bar{g}$ 为其**平均值**，即

$$\bar{g} = \frac{\int_{-1}^{1} g(t)(1-t^2)^{(n-3)/2} dt}{\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{(n-3)/2} dt} = \mathop{\mathbb{E}}_{x,y \in S^{n-1}} g(\langle x, y\rangle).$$

也就是说， $\bar{g}$ 是当 x 和 y 从 S^{n-1}. 中独立且均匀随机选取时， $g(\langle x, y\rangle)$的期望。若函数 g： $[-1, 1] \to \mathbb{R}$满足：对于球面 S^{n-1} 上的任意N 以及任意 x_1、.....、 x_N，矩阵$(f(\langle x_i, \ x_j\rangle))_{1 \leq i, \ j \leq N}$半正定，则称其为球面上的**正定函数**。根据舍恩伯格定理，若 g： $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ 是球面 S^{n-1} 上的连续正定函数，则它可以表示为Gegenbauer 多项式 $C_k^{(n/2-1)}$ 的非负线性组合，其中 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 。Gegenbauer 多项式族或超球多项式族 $C_k^{(\alpha)}$ 是关于测度$(1-t^2)^{\alpha-1/2} dt$ 在 $[-1, 1]$上构成的正交多项式。对于 $\alpha = n/2 - 1$，该

测度可自然地（在相差一个比例因子的意义下）视为将 S^{n-1} 上的曲面测度正交投影到 x轴上所得的测度。

定理 2.5 (Delsarte—Goethals—Seidel [16], Kabatiansky—Levenshtein[32], Cohn–Zhao [13])。 设 $g:\ [-1,1]\to\mathbb{R}$ 是定义在 S^{n-1} 上的连续正定核，且具有以下性质:

- $g(t)\le 0,\ if\ t\in[-1,\cos\theta]$;
- $\bar{g}>0$.

Then

$$A(n,\theta)\le\frac{g(1)}{\bar{g}}.$$

为便于说明，我们将按照 [13]的方法给出该定理的证明。

证明。 设 $\mathcal{C}$ 是 S^{n-1} 中的任意球面码，最小角至少为θ, 设 μ 是 S^{n-1}上的曲面测度，并将其归一化为总测度 $\mathbf{1}$，且设

$$\nu=\sum_{x\in\mathcal{C}}\delta_x-|\mathcal{C}|\mu,$$

其中， δ_x 表示点 x处的狄拉克测度， $|\mathcal{C}|$表示码的大小。因此，

$$\iint_{S^{n-1}}g(\langle x,y\rangle)\varphi(x)\varphi(y)d\nu(x)d\nu(y)\ge 0,\ \text{for all}\ \varphi\in L^1(S^{n-1}).$$

将此特化为 $\varphi(x)$等于常函数 $\mathbf{1}$，可得，

$$-|\mathcal{C}|^2\bar{g}+\sum_{x,y\in\mathcal{C}}g(\langle x,y\rangle)\ge 0$$

根据定义，码 $\mathcal{C}$ 中的所有不同点之间的距离至少为θ，因此对所有 $x,\ y\in\mathcal{C}.$， $g(\langle x,y\rangle)\ \le 0,$。因此，

$$\sum_{x,y\in\mathcal{C}}g(\langle x,y\rangle)\le\sum_{x\in\mathcal{C}}g(\langle x,x\rangle)=g(1)|\mathcal{C}|.$$

将此代入上面的不等式，得到

$$|\mathcal{C}|\le\frac{g(1)}{\bar{g}}.$$

□

具体来说，可以将正定函数 g 视为诱导一个从 S^{n-1} 到某个高维乃至无限维球面的映射，使得任何最小角为锐角的码都会被映射为最小角严格为钝角（余弦为负）的某个码，而该码有一个与维数无关的绝对上界。（格拉姆矩阵各项之和

G 必须为正；因为如果所有非对角项都小于 $-\varepsilon$，那么 G.的大小就会受到限制）

2.4. Lov`asz θ 函数与舍恩伯格定理。我们陈述一些基于半定规划的可测色数下界，并给出证明，以供下一节使用。

定义 2.6。 $\mathbb{R}^n$的**色数**记为 $\chi(\mathbb{R}^n)$，，它是对 $\mathbb{R}^n$中的每个点进行着色所需的最少颜色数，并且距离为 1 的点必须着以不同颜色。

也就是说， $\chi(\mathbb{R}^n)$是如下图的色数：其顶点集为$\mathbb{R}^n$，当两个顶点之间的距离为 1 时，它们相邻。

定义 2.7。 $\mathbb{R}^n$的**可测色数**记为 $\chi_m(\mathbb{R}^n)$，它是满足以下条件的最小数 m： $\mathbb{R}^n$ 可以划分为 m 个勒贝格可测子集 C_1，$\cdots$，C_m，且每个 C_i 中都没有两点之间的距离为 1。

注意，可测色数至少等于色数。我们可以在球面 S^{n-1}.For$t \in (-1, 1)$，上定义类似的概念：考虑图 $G(n, t)$，其顶点是 S^{n-1} 的点，且两个点 x，y 相邻，当且仅当 $\langle x, y\rangle = t$.。 $G(n, t)$ 的（可测）色数定义与 $\mathbb{R}^n$， 的情形相同，记为 $(\chi_m(G(n, t)))$ $\chi_m(G(n, t))$。

Lov`asz 将有限图 $G = (V, E)$ 的 θ 函数定义如下：

$$\vartheta(G) = \max\left\{ \sum_{x\in V}\sum_{y\in V} K(x,y) : K \in \mathbb{R}^{V\times V} \text{ is positive semidefinite,} \right.$$
$$\left. \sum_{x\in V} K(x,x) = 1,\ K(x,y) = 0 \text{ if } xy \in E \right\}.$$

上述概念可推广至配备 Haar 测度的紧度量空间 $[2]$ (V, d) μ. 设 D 为距离函数 d. 的值域。那么，我们可以定义图 $G = G(V, D)$，其顶点集为V，边集为 $E = \{xy : d(x, y) \in D\}$. 现在，我们定义该图 G的 Lov`asz theta 函数

$$\vartheta(G) = \max\left\{ \iint_{V\times V} K(x,y)d\mu(x)d\mu(y) : K \in \mathcal{P}(V\times V), \right.$$
$$\left. \int_V K(x,x)d\mu(x) = 1,\ K(x,y) = 0 \text{ if } d(x,y) \in E \right\}.$$

参见 [2] 中的以下结果。

定理 2.8。θ 函数是稳定数的上界，即

$$\vartheta(G) \geq \alpha(G),$$

其中 $\alpha(G)$是对所有满足以下条件的子集 C 的测度取上确界： V中任意两个元素在 C 中都不相邻。

现在，我们转而考虑齐性空间 $V = S^{n-1}$，其上赋予 $\mathbb{R}^n$的欧几里得度量，因此 D 是一个单元素集。若 $D = \{\delta\}$和 $\delta^2 = 2 - 2t$, 使得 $d(x, y) = \delta$ 当且仅当 $\langle x, y\rangle = t$. 我们将 $G(V, D)$ 记作 $G(n, t)$。因此， $\Gamma = O(\mathbb{R}^n)$作用于球面 S^{n-1}，且此作用不会改变 θ 函数的值，由此得到如下刻画

$$\vartheta(G) = \max\Bigg\{ \iint_{S^{n-1}} K(x,y)d\omega(x)d\omega(y) : K \in \mathcal{P}(V) \text{ is } \Gamma\text{-invariant},$$
$$K(x,x) = 1/\omega_n \text{ for all } x,\ K(x,y) = 0 \text{ if } \langle x, y\rangle = t\Bigg\},$$

其中 w_n 是 S^{n-1} 的表面积， $d\omega$ 是 S^{n-1}. 上的 Haar 测度。根据舍恩伯格定理，可以将含有无限多个变量和无限多个约束的半定规划问题转化为以下线性规划问题，其优化变量为 a_k:

$$\vartheta(G) = \max\Bigg\{\omega_n^2 a_0 : a_k \geq 0, \text{ for } k = 0, 1, \cdots,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1/\omega_n,\ a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k P_k^{(n-3)/2} = 0\Bigg\}.$$

定理 2.9 （[2]）。设 m（t） 为 $P_k^{(n-3)/2}$ 对 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.的最小值，则上述方程的最优值等于

$$\vartheta(G) = \omega_n \frac{m(t)}{m(t) - 1}.$$

我们的定理 8.2 在更一般的情形下得到了上述结果。具体而言，它清楚地说明了为什么我们可以取最小值而不是下确界。

¯设 G为**补图**，若图 G,满足：它与 G 具有相同的¯顶点集，并且 G 中的两个顶点相邻，当且仅当它们在 G. 中不相邻。那么，对于 $G = (V, E)$，还有另一种 ϑ的定义（对有限图而言，这一定义与前者等价），如下：

$$\vartheta(\bar{G}) = \min\{\lambda : K \in \mathbb{R}^{V\times V} \text{ is PSD}, K(x,x) = \lambda - 1 \text{ for all } x \in V,$$

$$K(x,y) = -1 \text{ if } xy \in E\}.$$

¯及其推广，记作 $\vartheta(G(n,t))$，定义为

$$\begin{aligned}\bar{\vartheta}(G(n,t)) = \min\{\lambda : & K \in \mathcal{P}(V) \text{ is } \Gamma\text{-invariant}, \\ & K(x,x) = \lambda - 1, \text{ for all } x \in S^{n-1}, \\ & K(x,y) = -1 \text{ if } \langle x,y\rangle = t\}.\end{aligned}$$

这一 θ 函数的推广与德尔萨特的线性规划界 [15]密切相关。这种联系已在多处被观察到，例如参见 [2]。

考虑单位球面上的图，其中当两个不同点的内积属于开区间 $[-1,t]$.时，它们相邻。我们将此图记为 $G(n,[-1,t])$。该图的补图中的稳定集是有限的，并且由单位球面上角距离为 $\arccos(t)$的点组成。将上述推广应用于此图，我们得到

$$\begin{aligned}\bar{\vartheta}(G(n,[-1,t])) = \min\{\lambda : & K \in \mathcal{P}(V) \text{ is } \Gamma\text{-invariant}, \\ & K(x,x) = \lambda - 1, \text{ for all } x \in S^{n-1}, \\ & K(x,y) = -1 \text{ if } \langle x,y\rangle \in [-1,t]\}.\end{aligned}$$

现在，我们可以写出 [2][命题 10.1]。

定理 2.10。 设 $C \subseteq S^{n-1}$ 是一个球面码，满足

$$\langle x,y\rangle \in [-1,t], \ \textit{for all } x,y \in C.$$

¯则 C 的基数上界为 $\vartheta(G(n,[-1,t]))$。

我们在第 8 节讨论将 $[-1,t]$ 替换为一般有限集的理论。例如，如果有限集不包含 -1，则由定理 8.2 可知存在多项式 Delsarte 证书。

2.5. 锥保持映射。 最后，我们指出这与 [48] 中提出的一个相关问题有关：对于离散集，是否存在舍恩伯格定理的证明？我们基于部分定义的正定性给出的类比，为此提供了合理的解决方案。能否从我们的定义中去掉矩阵补全这一方面，从而得到类似的结果，这是一个关于最弱假设的开放性问题——不过，我们对此持怀疑态度。然而，第 4 节也实现了[48]的另一个目标，即给出舍恩伯格定理的一个“无需分析”的证明。

3. Group representation theory and positive definite functions on groups

3.1. 齐性空间。 设 G 是一个紧群。若 X是一个**二点齐性** G**空间**, 则称其满足以下三个性质:

(1) 存在一个 G-作用于 X; (2) X 是一个度量空间，其上定义了距离函数 d ; (3) d 在 G-作用下强不变：对于任意 x_1, x_2, y_1, $y_2 \in X$, $d(x_1, y_2) = d(x_2, y_2)$ 当且仅当存在一个元素 $g \in G$，使得 $g(x_1) = x_2$ 且 $g(y_1) = y_2$。

假设 (3) 意味着 G 在 X上具有传递作用。此外， G在不改变 X中各点之间距离 $d(x, y)$ 的前提下，尽可能接近双重传递。这会在 X 上诱导出唯一的不变测度 μ 。我们假设 μ 已归一化，使得$\mu(X) = 1$。

令 H 为 G 的一个子群，它固定一个元素 $x_0 \in X$。根据轨道-稳定子定理， X 可与左陪集 gH构成的空间 G/H 等同。这些假设意味着，如果 G是无限的，那么 X 是一个秩一紧黎曼对称空间 [67]。此外，这是 Gelfand 对（G, H）的一个特例。

这里的主要例子是： G 是特殊正交群$SO(n)$，以自然作用作用于 $X = S^{n-1}$ 。取 x_0 为第一个基向量 $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$，可得 $H = SO(n-1)$。在离散情形中，我们考虑带有汉明度量的汉明立方 $\{0,1\}^n$

$$d(x, y) = |\{i : x_i \neq y_i\}|$$

其等距群为花环积 $G = S_n \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$。基点可以取为 $x_0 = (0, \cdots, 0)$，从而得到稳定子$H = S_n$.

3.2. 群表示理论。

3.2.1. 紧群表示论。考虑圆$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$。对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，定义

$$e_n \colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C} \text{ by } e_n(t) = e^{2\pi i n t}.$$

傅里叶级数理论告诉我们， $\{e_n\}$是 $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$的标准正交基，这意味着我们可以将其直和分解为不可约表示

$$L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} e_n.$$

此外，每个子空间 $\mathbb{C}e_n$ 都是正则表示的不变子空间。因此，我们可以将正则表示分解为不可约表示的直和。此外，不难看出，S^1 的每个不可约表示在该表示中恰好出现一次。

更一般地，不难证明， S^1 的每个酉表示都是一维表示的直和。

下述定理将这一结论推广到了任意紧群。

定理 3.1 (彼得–魏尔定理)。 设 G 是一个带有（唯一）归一化 G 不变 *Haar* 测度 μ 的紧群。那么：

(1) G 的每个酉表示都(同构于) 不可约表示的直和。*(2)* G 的每个不可约表示都是有限维的。*(3)* G 是可数的。*(4)* 对于正则表示 $\big(\pi_{reg}, L^2(G)\big)$ 这一特殊情形，我们有

$$\pi_{reg} \cong \bigoplus_{(\pi,\mathcal{H})\in\widehat{G}} (\dim \mathcal{H}) \cdot \pi,$$

其中 $k\cdot\pi$ 表示 $\pi\oplus\cdots\oplus\pi$ 个 π 的直和，每个 π 出现 k 次。也就是说，每个不可约表示的重数等于其维数。

3.2.2. 超球多项式。在本节中，我们从不同角度考察超球多项式，这些视角将在后续各节中有用。 n维球面 S^{n-1} 上的超球/盖根鲍尔多项式 $\{P_k^{(n)}\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 可定义为关于曲面测度$(1-t^2)^{(n-3)/2}dt$ 在 $[-1,1]$上的投影的一族正交多项式。等价地， $P_k^{(n)}$ 关于该测度与所有次数小于 k 的多项式正交。

正交多项式具有许多优美的性质。我们在此指出其中一些性质，首先从三项递推关系开始。

定理 3.2. 设 $\{p_n\}$ 为一族正交多项式。则存在常数 A_n、 B_n 和 C_n ，且满足 A_n、 $C_n>0$ ，使得下列关系成立：

$$p_n(x) = (A_n x + B_n)p_{n-1}(x) - C_n p_{n-2}(x), \quad n = 2,3,4,\cdots.$$

此外，若将 $p_n(x)$ 的最高次项系数记为 k_n，则有

$$A_n = \frac{k_n}{k_{n-1}}, \qquad C_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{k_n k_{n-2}}{k_{n-1}^2}.$$

接下来，我们给出一个非常有用的正交多项式公式，它也用于球填充界，例如参见 [32]。

定理 3.3（克里斯托费尔-达布公式）。 采用上述记号，我们有

$$\sum_{i=0}^{n} p_n(x)p_n(y) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y}$$

令人惊奇的是，正交性这样一种深奥的性质，竟能为我们提供关于多项式零点集的大量信息：也就是说，正交多项式的所有根都是实数、单根，并且彼此交错。更准确地说，

定理 3.4. 设 $\{p_n\}_{n\in\mathbb{Z}\geq 0}$ 是关于区间 $[a,b].$ 上的测度 μ 的一组正交多项式。那么

(1) p_n 的零点均为实数、互不相同，且位于 (a,b) 内。*(2)* 设 p_n 的零点为 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$。那么每个区间 $[x_i, x_{i+1}]$，$i = 0, 1, 2, \cdots, n$ 中恰有一个 $p_{n+1}.$ 的零点。*(3)* 在 p_n 的两个零点之间，至少有一个 p_m，$m > n.$ 上的零点

这里，我们暂且绕道探讨正交多项式的一些更精细的性质，例如对这些多项式零点位置的更深入研究，以及用于渐近性的 Darboux 公式，它可证明测度集中类结果。我们先从以下关于正交多项式零点集的稠密性结果开始。

定理 3.5。 设 $\{p_n\}_{n\in\mathbb{Z}\geq 0}$ 是定义在有限区间 $[a,b]$ 上、关于测度 $\mu.$ 的一组正交多项式。设 $[c,d]$ 是 $[a,b]$ 的一个子区间，且满足 $\int_{[c,d]} d\mu(x) > 0.$。那么存在一个整数 n_0，使得对所有 $n \geq n_0$，都有 $Z(p_n(x)) \cap [c,d] \neq \emptyset$，其中 $Z(p_n(x))$ 表示多项式 p_n 的零点集。

注 3.6. 显然，对于任意 $\epsilon > 0$以及长度为 ϵ 的区间$[c,d] \subset [-1,1]$，积分 $\int_{[c,d]} d\mu(x) > 0$，其中 $d\mu(x) = (1-x^2)^{(n-3)/2}dx.$ 因此，Gegenbauer 多项式的零点集在 $[-1,1].$ 中稠密。

现在，我们可以得到关于所讨论多项式——参数为 α 和 β 的雅可比多项式——的零点分布的一些有意义的界：

定理 3.7. 设 α、$\beta > -1$，且 $0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n < \pi$ 是 $P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)$ 的零点。则

$$\theta_j = \frac{1}{n}(\pi j + \mathrm{O}(1)),$$

其中 $O(1)$ 对所有 $j = 1$、2、$\cdots$、n 和 $n \in \mathbb{N}.$ 均一致有界

最后，我们来讨论雅可比多项式渐近性的 Darboux 公式。

定理 3.8。 设 α 和 β 为任意实数。那么对于 $0 <\theta < \pi$,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = n^{-1/2}k(\theta)\cos\left(N\theta+\gamma\right) + O(n^{-3/2}),$$

其中

$$k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-1/2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-1/2}, \qquad N = n+\frac{\alpha+\beta+1}{2},$$

并且 $\gamma = (-\alpha+1/2)\pi/2$. 误差项的界在区间 $[\epsilon, \pi-\epsilon]$内一致成立，对每个 $\epsilon > 0$.

利用伽马函数的斯特林近似，我们可以得到 $P_k^{(\alpha,\beta)}$ (1) 的渐近式如下:

定理 3.9 (Szeg˝o [61])。 对于雅可比多项式 $P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{k+\alpha}{k} = \frac{\Gamma(2\alpha+k)}{\Gamma(2\alpha)k!} \sim \frac{1}{\Gamma(2\alpha)}k^{2\alpha-1}.$$

我们将使用球谐函数进一步说明超球多项式的性质。回想一下，作为 $O(n)$, 的一个表示，我们可以将 $L^2(S^{n-1})$ 分解为

$$L^2(S^{n-1}) = \overline{\bigoplus_{k\geq 0} W_k}^{L^2(S^{n-1})},$$

其中 W_k 是由次数为 k 的球谐函数构成的 $O(n)$ 的不可约表示。

对于 $x \in S^{n-1}$, 考虑将 $f \in W_k$ 映射到$f(x)$ 的求值泛函。根据希尔伯特空间对偶，存在唯一的再生核$w_{k,x} \in W_k$，即

$$f(x) = \langle f, w_{k,x}\rangle, \quad \text{for all } f \in W_k.$$

注 3.10。 再生核在 $O(n)$ 下的不变性 对于任意满足 $Tx = x$ 的正交矩阵 T，有 $Tw_{k,x} = w_{k,x}$。这是因为：对于所有 $f \in W_k$,

$$\langle f, w_{k,x}\rangle = f(x) = f(Tx) = (T^*f)(x) = \langle T^*f, w_{k,x}\rangle = \langle f, Tw_{k,x}\rangle$$

成立，因此 $w_{k,x} = Tw_{k,x}$.

前面的评论可以用内积的语言重新表述。也就是说，$w_{k,x}(y)$ 只取决于 x 与y之间的距离，因此，它必定只是 $\langle x, y\rangle$ 的函数。定义 $P_k^{(n)}$ 为

$$w_{k,x}(y) = P_k^{(n)}(\langle x, y\rangle).$$

利用再生核希尔伯特空间的性质，$P_k^{(n)}(\langle x,\ y\rangle) = \langle w_{k,\ x},\ w_{k,\ y}\rangle$.

3.3. 群上的正定函数。 在几类空间上，函数的正定性有许多不同的定义。但这些定义本质上都源于定理 2.3 中的概念，并结合了群不变性。我们先给出正定性的一个纯代数定义。

定义 3.11（正定函数）。设 G 为任意群。若复值函数 φ在 G 上满足：对于任意 n和 $g_1,\ \ldots, g_n$属于 G，矩阵 $(\varphi(g_i^{-1}g_j))$ 均为半正定，则称其为**正定（p.d.）**函数。

换言之，由 $K(h,\ g) = \varphi(g^{-1}h)$ 给出的核 $K\colon\ G \times G \to \mathbb{C}$，在定理 2.3 的意义下是正定的。严格来说，这是空间 G上的一个 G-不变正定核。20 世纪 30 年代，S. Bochner [7] 根据 $\mathbb{R}$上的正有限测度，对$\mathbb{R}$上的所有正定函数进行了分类。1940 年，Weil、Povzner 和 Raikov 同时将这一结果推广到任意局部紧阿贝尔群上的正定函数分类。随后，Godement [26]在 Gelfand 和 Raikov [25]的思想基础上，将其推广到了 Gelfand 对的情形。大约在同一时期，Schoenberg 在其 1942 年的论文 [60] 中致力于研究形式为 $f \circ \cos\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ 的正定函数，它们定义在单位球面 $S^{r-1} \subset \mathbb{R}^r$上，其中 $r \geq 2$。

注意，对于 $r \geq 2$，我们有 $\cos(d(x_j,\ x_k)) = \langle x_j,\ x_k\rangle$，因此 $\cos[(d(x_j,\ x_k))_{j,\ k}]$总会产生格拉姆矩阵。因此，$f[-]$ 会在半正定矩阵构成的集合上保持正性。Schoenberg 刻画的正是这类函数：

定理 3.12 (Schoenberg [60])。设 $f\colon\ [-1, 1] \to \mathbb{R}$ 连续，且 $r \geq 2$ 为整数。则以下条件等价：

(1) $(f \circ \cos)$ 在 S^{r-1} 上是正定的。*(2)* 函数 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k C_k^{((r-2)/2)}(x)$，其中 $c_k \geq 0$、$\forall k$ 和 $\{C_k^{((r-2)/2)}(x) : k \geq 0\}$ 表示 *Gegenbauer* 正交多项式族。

正如我们将看到的，这一结果可视为刻画球面 S^{n-1}, 上的 $SO(n)$-不变核，从而使我们能够运用两点齐性空间上的调和分析。

3.4. **正定函数的延拓问题**。 在其他基于卷积的方法框架中，部分定义的正定函数的延拓问题早已得到广泛研究，其历史可追溯至 Raikov [55], 克列因 [34], Devinatz [18], 鲁丁 [57],McMullen [36], Bakonyi-Timotin [3], Berezanskii-Gorbachuk [6], Nuss- baum [43], Jorgensen-Niedzialomski [31]。关于现代理论的概述，参见 Jorgensen [30]。基本思路是在集合 Γ 上取一个由集合 $\Gamma-\Gamma$ （即与自身卷积所得的集合）上的函数所诱导的部分定义核，并尝试将其延拓至整个空间。一般而言，分析过程颇为微妙，其中存在许多十分有趣的病态现象和延拓障碍。从完全正性的角度出发，则提供了一个根本不同的框架；由于完全正映射具有显著的刚性代数结构，例如斯廷斯普林表示、Arveson 延拓定理等，这一框架在一定程度上不易受到病态现象的影响。

对于我们所研究的具体实际问题，我们的插值概念很自然，也可能适用于其他情形。

3.5. **I 类表示**。 设 G 是一个带有左哈尔测度 dx 的局部紧群，设 $C_c(G)$ 为 G 上具有紧支撑的连续复值函数所构成的卷积代数。设 H 是 G 的一个带有归一化哈尔测度 dh 的紧子群，并用 $C_c^{\#}(G)$（或 $C_c(H\backslash G/H)$）表示 $C_c(G)$ 中关于 H 双不变的函数空间，即满足以下条件的函数 f

$$f(hxh')=f(x), \quad \text{for } x\in G; h,h'\in H.$$

空间 $C_c^{\#}(G)$ 是卷积代数 $C_c(G)$ 的子代数，且一般而言并非交换。

定义 3.13 （Gelfand 对）。 若卷积代数 $C_c(H\backslash G/H)$ 是交换的，则称这一对 (G,H) 为一个 **Gelfand 对**。

Gelfand 对的一个重要例子是：当 G 是任意局部紧阿贝尔群，且 H 只是单位子群时， $\{e\}$. 现在我们定义球函数的概念，它是特征标的推广。

定义 3.14 (球函数)。 设 (G,H) 是一个 Gelfand 对，且 φ 是 G 上的连续双-H-不变函数。函数

φ 称为**球函数**，如果由下式定义的泛函 χ

$$\chi(f) = \int_G f(x)\varphi(x^{-1})dx$$

在卷积代数 $C_c(H\backslash G/H)$上定义了一个非平凡特征，即对于所有 f, $g \in C_c(H\backslash G/H)$。， $\chi(f * g) = \chi(f)\chi(g)$

定义 3.15 (一类表示)。 G 的酉表示$(\pi, \mathcal{H})$称为一类表示，如果其 H-不变向量$\mathcal{H}_e$ 子空间非平凡。

通常，一类表示的概念默认指不可约表示，例如 van Dijk [64] 和 Dieudonn´e[19], 在定义中的处理便是如此；但我们需要将定义用于一般的酉表示。

定理 3.16. 设(G, H) 是一个 *Gelfand* 对。 G 上的正定球函数与 G 的一类不可约酉表示的等价类一一对应。

在定理 6.3 中，我们通过一个 Tomiyama 型定理，给出了一种替代方法来获得 I 类表示的双不变性；用 C^*-代数的语言来说，这本质上就是一种一次线性平凡性。一般而言，采用算子代数／量子信息理论的方法，能为正定函数提供清晰的视角。

3.5.1. 与相对性质的关系 (T)。 本节遵循 Brown–Ozawa [9] 。

定义 3.17。 设 G 是一个群，$(\pi, \mathcal{H})$ 是 G的酉表示。若向量 $h \in \mathcal{H}$ 满足 $G - invariant$ ，即$\pi(g)h = h$ 对所有 $g \in G$均成立，则称其为 $G - invariant$ 。若单位向量网 (h_n) 满足对每个 $g \in G$，$\lim \|\pi(g)h_n - h_n\| = 0$ ，则称其几乎不变。对于子集 $E \subset G$ 和$\epsilon > 0$， 若非零 $h \in \mathcal{H}$ 满足以下条件，则称其为 (E, ϵ)**-不变**

$$\sup_{g\in E} \|\pi(g)h - h\| < \epsilon\|h\|.$$

用 Fell 拓扑的语言来说，酉表示 π 存在非零不变向量，当且仅当平凡表示包含于 π；而 π 存在几乎不变向量，当且仅当平凡表示弱包含于 π。

定义 3.18。 设 $\Gamma \subseteq G$ 是一个子群。我们称包含映射$\Gamma \subseteq G$ 具有**相对性质 (T)** ，如果任何具有几乎 G-不变向量的 G的酉表示 $(\pi, \mathcal{H})$ 都有一个非零的 Γ-不变向量。若 G 到其自身的恒等包含映射具有相对性质 (T)，则称 G具有**Kazhdan 性质 (T)** 。

注意（或参见 [4][注 1.4。4]），如果拓扑群 G 的闭子群 H 具有性质 (T)，那么对 (G, H) 具有相对性质 (T)。

一个众所周知的事实是，每个紧致（李）群 G 都具有性质 (T)。一种证明方法如下：假设酉表示 $(\pi, \mathcal{H})$ 存在一个几乎不变的（单位）向量 v。也就是说，对某个 $\epsilon \in (0,1).$，$\sup_{g\in G} \|\pi(g)v - v\| < \epsilon,$。接下来考虑 Bochner 积分

$$v_0 = \int_G \pi(g)v \, d\mu(g),$$

其中 μ 是 G 上的（左）不变 Haar 测度。注意，

$$\begin{aligned}\|v - v_0\| &= \|v - \int_G \pi(g)v \, d\mu(g)\| \\ &\leq \int_G \|v - \pi(g)v\| \, d\mu(g) < \epsilon.\end{aligned}$$

因此，$\|v_0\| > 1 - \epsilon > 0$，即 v_0 非零。现在对任意 $h \in G$,

$$\begin{aligned}\pi(h)v_0 &= \pi(h) \int_G \pi(g)v \, d\mu(g) \\ &= \int_G \pi(hg)v \, d\mu(g) = \int_G \pi(g)v \, d\mu(h^{-1}g) \\ &= \pi(h) \int_G \pi(g)v \, d\mu(g) = v_0.\end{aligned}$$

因此，G 是一个 Kazhdan 群，或具有 Kazhdan 性质 (T)。结合这一事实与上述说明，我们看到 $(SO(n) \ SO(n-1))$ 具有相对性质 (T)。

我们将需要以下关于相对性质 (T) 的刻画：[9, 定理 12.1.7 (1) ⇔(3)]

定理 3.19 (Brown–Ozawa)。设 $\Gamma \subseteq G$ 是一个子群。以下条件等价：

(1) 包含关系 $\Gamma \subseteq G$ 具有相对性质 *(T)*；*(2)* G 上任意收敛到常值函数 1 的正定函数序列，在 Γ. 上都一致收敛

3.6. **非连续表示的存在**。我们提醒读者，一般而言，连通群 G 会有许多不连续的 I 类表示。例如，假设存在一个非常值的实值正定函数，使得 $f(1) = 1$，那么对 f 取幂的极限便会得到一个取值为 1，-1，0 的函数。

3.7. $SO(\infty)$。 设 $\mathcal{H}$ 是一个无限维可分希尔伯特空间。固定一个标准正交基 e_1， e_2，..... 通过令 $SO(n)$ 在前 n 个基向量上自然作用，并在其余向量上平凡作用，可以将其自然嵌入 $\mathbf{B}(\mathcal{H})$。此外，这些作用与从 $SO(n-1)$ 到 $SO(n)$ 的自然嵌入相互兼容，该嵌入由下式给出

$$\gamma \mapsto \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

将 $\bigcup SO(n)$ 自然地视为$\mathbf{B}(\mathcal{H})$ 的一个子集，可得一个群，记作 $SO(\infty)$。自然地，群 $SO(\infty)$ 具有归纳极限的结构；与归纳极限通常的情形一样，它在拓扑方面有些病态。因此，为了赋予 $SO(\infty)$ 局部紧群的结构（例如，这可确保存在忠实的、可能是无限维的表示），我们赋予它离散拓扑。群 $SO(\infty)$ 有一个自然的子群$SO(\infty)_+$，由以下元素给出

$$\gamma \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

陪集空间 $SO(\infty)/SO(\infty)_+ = S^\infty$ 称为**归纳有限球面**。每个双陪集 $SO(\infty)_+\gamma SO(\infty)_+$ 由 γ, 的 **11** 项确定，我们将其记作 γ_{11}.

4. Discrete Schoenberg's theorem

4.1. 汉明立方。 设 $X = \{-1, 1\}^n$ 为汉明立方。对于 $x, y \in X$，定义归一化内积:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

该内积的取值是离散的:

$$\langle x, y\rangle \in \left\{1, 1-\frac{2}{n}, 1-\frac{4}{n}, \ldots, -1\right\}.$$

海明距离 $d(x, y) = \#\{k : x_k \neq y_k\}$ 与内积的关系为:

$$\langle x, y\rangle = 1 - \frac{2}{n}d(x, y).$$

4.2. **汉明立方上的正定函数**。

定义 4.1。函数 $f\colon [-1,1]\to\mathbb{R}$ 在汉明立方上是**正定的**，如果对每个有限集 x_1、.....、$x_m\in X$，矩阵

$$(f(\langle x_i,x_j\rangle))_{i,j=1}^m$$

是半正定的。

4.3. **带球函数与 Krawtchouk 多项式**。汉明立方是一个 2 点齐性空间。带球函数是**Krawtchouk 多项式** $K_j^{(n)}(d)$，定义在$j=0,1,\ldots,n$上：

$$K_j^{(n)}(d)=\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{d}{k}\binom{n-d}{j-k}.$$

舍恩伯格定理的离散类比是：

定理 4.2. 函数 $f\colon [-1,1]\to\mathbb{R}$ 在汉明立方 $\{-1,1\}^n$ 上正定，当且仅当

$$f\left(1-\frac{2d}{n}\right)=\sum_{j=0}^{n}a_jK_j^{(n)}(d),\quad with\ a_j\geq 0.$$

4.4. **极限** $n\to\infty$。</style}汉明立方的无限类比需要稍作介绍。

人们可能会希望，自然的空间要么是所有有限比特串组成的集合，要么是所有无限比特串组成的列表。然而，若给定此类空间中任意一个含有无限多个零或一的序列，就可以通过置换有限多个项，使该序列在任意指定的有限多个位置上都为零。因此，存在一个趋于零的序列，使得任意正定函数在原序列处取值相同，因而也等于该函数在零序列处的取值。

取 $(X,\ \mathcal{A},\ \mu)$ 为一个概率空间，并令 Σ 为一群可测双射 $f\colon X\to X$，满足

- μ是无原子的。
- 若 A_1，.....，A_n 和 B_1，.....，B_n 是 X，的可测划分，使得 $\mu(A_i)=\mu(B_i)$，那么存在 $\sigma\in\Sigma$，使得 $\sigma(A_i)=B_i$，

称为**无限汉明立方体**。这里，比特串的对应物是可测集 $\mathcal{A}$，它们在对称补运算下构成一个群。因此，我们的底层双陪集空间是 $\mathcal{A}$ 对 Σ 作用的商。$[0,1]$. 中的实数恰好是 ..... 因此，内积由

$$\langle E,F\rangle=2-2\mu(E\Delta F),$$

对于测度比具有某个固定分母的集合，这在本质上与汉明内积一致。也就是说，对于每个分划 A_1，.....， A_n，使得 $\mu(A_i) = 1/n$，存在一个从 $\{0,1\}^n$. 出发的自然映射

我们考察 Krawtchouk 多项式在 $n \to \infty$ 时的渐近行为。我们使用由 $d = {}^{n}_{(1-u)\ 2}$ 定义的归一化坐标 $u \in [-1,1]$ 。

引理 4.3. 固定一个整数 $j \geq 0$。对于任意 $u \in [-1,1]$，设 d_n 是一个满足 $1 - 2d_n/n \to u$ 的序列。那么，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{j!}{n^j} K_j^{(n)}(d_n) = u^j.$$

证明。 我们首先利用以下显式公式，推导 Krawtchouk 多项式的渐近界：

$$K_j^{(n)}(d) = \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{d}{k}\binom{n-d}{j-k}.$$

对于任意变量 X 和固定整数 m，斯特林近似给出，$\binom{X}{m} = {}^{X^m}_{m\ !} + O(X^{m-1})$。代入 $d = {}^{n}_{(1-u)\ 2}$ 和 $n - d = \overline{n(1+u)2}$ ，

$$\begin{aligned}
\binom{d}{k} &= \frac{1}{k!}\left(\frac{n(1-u)}{2}\right)^k + O(n^{k-1}),\\
\binom{n-d}{j-k} &= \frac{1}{(j-k)!}\left(\frac{n(1+u)}{2}\right)^{j-k} + O(n^{j-k-1}).
\end{aligned}$$

将这些项相乘，首项的阶为 $n^k \cdot n^{j-k} = n^j$。涉及误差项的交叉项的阶为 $O(n^{j-1})$。因此

$$\binom{d}{k}\binom{n-d}{j-k} = \frac{n^j}{k!(j-k)!}\left(\frac{1-u}{2}\right)^k\left(\frac{1+u}{2}\right)^{j-k} + O(n^{j-1}).$$

代回求和式可得

$$K_j^{(n)}(d) = \sum_{k=0}^{j}(-1)^k\left[\frac{n^j}{k!(j-k)!}\left(\frac{1-u}{2}\right)^k\left(\frac{1+u}{2}\right)^{j-k} + O(n^{j-1})\right].$$

分离出 n^j 项并重新整理常数：

$$K_j^{(n)}(d) = n^j\left(\sum_{k=0}^{j}\frac{(-1)^k}{k!(j-k)!}\left(\frac{1-u}{2}\right)^k\left(\frac{1+u}{2}\right)^{j-k}\right) + O(n^{j-1}).$$

两边乘以 $j!/n^j$后，误差项变为 $O(n^{-1})$，当 $n \to \infty$ 时趋于零。因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{j!}{n^j} K_j^{(n)}(d) = \sum_{k=0}^{j} \frac{j!(-1)^k}{k!(j-k)!} \left(\frac{1-u}{2}\right)^k \left(\frac{1+u}{2}\right)^{j-k}.$$

现在我们将二项式定理应用于 $(A+B)^j$ 其中 $A = -\frac{1-u}{2}$ 且 $B = \frac{1+u}{2}$：

$$\text{Sum} = \left(-\frac{1-u}{2} + \frac{1+u}{2}\right)^j = \left(\frac{u-1+1+u}{2}\right)^j = u^j.$$

□

取分割大小为 $n!$ 的分割之极限（以得到公约数），我们看到，对于测度为有理数的可测集，这就确定了处处的取值。

推论 4.4. 当 $n \to \infty$ 时，函数 f 在无限汉明立方体上正定，当且仅当它有一个系数非负的幂级数展开：

$$f(u) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j u^j, \quad a_j \geq 0.$$

如果 $f(1) < \infty$，则该级数在 $[-1,1]$上一致收敛。

证明。 设 f 是一列正定函数的极限。那么 $f(u) = \sum a_j u^j$，其中 $a_j \geq 0$。在 $u = 1$ 处的值为 $f(1) = \sum a_j$。由于 $f(1) < \infty$，系数级数绝对收敛。根据阿贝尔定理（推广至非负系数的闭区间），幂级数 $\sum a_j u^j$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛，因为$\sum a_j \sup_{u\in[-1,1]} |u^j| = \sum a_j < \infty$。 □

除非连续统基数是实值可测基数，否则 $\mathcal{A}$ 不太可能是空间 [63] 的所有子集。稍后我们将通过 Arveson 延拓定理看到，自然内积可以延拓到整个空间，尽管这与测度结构并不总是一致。

5. Completely positive maps

回顾一下，巴拿赫代数是完备的赋范代数。AC^*-代数是具有共轭线性对合$X \mapsto X^*$ 的巴拿赫代数，使得 $\|X\|^2 = \|X^*X\|$. 设 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间。我们称$\pi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$为表示，如果它是代数同态

使得 $\pi(a)^* = \pi(a^*)$。Gelfand-Naimark-Segal 构造表明，任意 C^*-代数都有等距单射表示，因此我们可以自然地将 C^*-代数视为$B(\mathcal{H})$。的闭子代数。

如果存在 X 使得 $H = X^*X$.，则称元素 H 为半正定。

若线性映射 $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 满足：当且仅当 $[X_{ij}]_{ij}$ 为半正定时，$[\varphi(X_{ij})]_{i,\ j}$ 为半正定，则称其为完全正映射。

C^*-代数上的态构成完全正映射 $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ 的集合，且满足 $\varphi(1) = 1.$。这些态构成一个紧凸集，其极点称为纯态。

现在我们回顾 Dixmier 版本的 Glimm 引理。

定理 5.1 ([20]). 设 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数。设 Π 是 $\mathcal{A}$ 的一个表示族，使得这些表示的核的交集为0。$\mathcal{A}$ 上的任意纯态都是形如以下形式的态的弱* 极限

$$\varphi(g) = \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle$$

其中 $\pi \in \Pi$.

5.1. **斯廷斯普林表示定理**。以下内容给出了完全正映射的表示定理。

定理 5.2 (斯廷斯普林表示定理). 设 $\mathcal{M}$ 是一个 C^*-代数。映射 $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathbf{B}(\mathcal{H})$ 是完全正的，当且仅当$\varphi(x) = V^*\pi(x)V$ 其中 $\pi\colon \mathcal{M} \to \mathbf{B}(\mathcal{K})$ 是一个表示。

5.2. **Arveson 延拓定理**。算子系统是 C^*-代数的一个子集，该子集关于 $*$闭且包含单位元。完全正映射的定义与 C^*-代数上的定义类似，但要求所选的分块元素属于算子系统。存在一种自然的方法，可将算子系统上的完全正映射提升到整个 C^*-代数上。

定理 5.3 (Arveson 延拓定理)。设 $\mathcal{M}$ 是一个 C^* 代数。设 $X \subseteq \mathcal{M}$ 是一个算子系统。设 $\varphi\colon X \to \mathbf{B}(\mathcal{H})$ 是完全正的。则存在 $\tilde{\varphi}\colon \mathcal{M} \to \mathbf{B}(\mathcal{H})$ 使得 $\tilde{\varphi}|_X = \varphi$.

感兴趣的读者可参阅 Paulsen [50]。

5.3. **同态富山定理**。我们需要如下富山定理的同态版本 [62], （亦在[52]中分析过），如 [49] 所给出，它对完全正映射给出某种自动双模性。

定理 5.4（同态富山定理）。 设 $\mathcal{A}$ 为一个 C^*-代数，设 $B \subseteq A$ 为一个子代数。假设 $E\colon \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ 是完全正的，且 $E|_{\mathcal{B}}$ 是含幺同态。则，

$$E(b_1ab_2) = E(b_1)E(a)E(b_2)$$

对所有 $a \in \mathcal{A}$ 和 $b_1,\ b_2 \in \mathcal{B}$.

5.4. **群代数上的完全正映射**。

定义 5.5. 设 G 是一个局部紧群。我们将群代数 $\mathbb{C}[G]$ 定义为以下形式和的集合

$$\sum a_i g_i$$

其中 $g_i \in G$ 和 $a_i \in \mathbb{C}$. 在 $\mathbb{C}[G]$ 上有一个自然的对合，它满足 $g^* = g^{-1}$. 。 $\mathbb{C}[G]$ 有一个自然表示，定义为

$$\|\sum a_i g_i\| = \sup_{\Pi(G)} \|\sum a_i \pi(g)\|$$

其中 $\Pi(G)$ 是 $\mathbb{G}$.的所有连续酉表示的集合。我们将完备群代数 $\mathbb{C}[G]$ 定义为 $\mathbb{C}[G]$ 关于 $\|\cdot\|$.的完备化

我们注意到，一般来说，完备群代数 $\mathbb{C}[G]$ 与局部紧群的全群 C^*-代数 $C^*(G)$ 并非同一对象；后者是根据群上的连续函数定义的。当然，若该群是离散群，则情况除外。我们之所以必须处理群代数本身，直接源于稍后将要考虑的插值问题——我们希望理解在齐性空间 G/H 的某个（通常是有限的）子集上正定的函数，因此，我们的插值数据可能不足以在连续函数代数上定义一个映射。在大多数情况下，我们只需在 $\mathbb{C}[G]$ 本身中进行研究，而不必考虑其完备化。

Helton 和 McCullough 的下述定理对我们很有用。这类非交换平方和本身受到 Schm¨udgen [58, 59] 和 Putinar [53] 关于多个变量正多项式的研究启发，而该研究又受到 Fej´er [22] 和 Riesz [56] 的经典研究启发。

定理 5.6 (Helton, McCullough [29])。 设 $\mathcal{H}$ 是一个无限维可分希尔伯特空间。设 $\mathbb{C} < x_1, \dots, x_d, x_1^*, \dots, x_d^* >$表示关于变量 $x_1, \dots, x_d$ 及其伴随元 $x_1^*, \dots, x_d^*$. 的非交换多项式。设 $\mathcal{P}$ 是自伴元的一个子集，

$\mathbb{C} < x_1, \ldots, x_d, x_1^*, \ldots, x_d^* >$ 包含形如 $C_i - x_i^* x_i$ 的元素，其中 $C_i \in \mathbb{R}$. 设

$\mathcal{D}_{\mathcal{P}} = \{X \in \mathbf{B}(\mathcal{H})^d | p(X)$ 对所有 $p \in \mathcal{P}\}$ 均为半正定

元素 $p \in M_n(\mathbb{C} < x_1, \ldots, x_d, x_1^*, \ldots, x_d^* >)$ 在 $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$ 上正定，当且仅当

$$p = \varepsilon + \sum_{i=1}^{N} a_i^* a_i + \sum_{j=1}^{M} b_j^* p_j b_j$$

存在某些 $\varepsilon > 0, a_i, b_j \in M_{1n}(\mathbb{C} < x_1, \ldots, x_d, x_1^*, \ldots, x_d^* >)$ 以及 $p_i \in \mathcal{P}$.

严格来说，Helton-McCullough 正性定理要求变量有限。不过，适当的改述适用于任意多个不定元。

定理 5.7 (大型 Helton-McCullough 正性定理)。 设 $\mathbb{X}$ 是任意基数的形式字母集合。设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，其希尔伯特空间维数至少为 $|\mathbb{X} \times \mathbb{N}|$. 。令 $\mathbb{C} < \mathbb{X}, \mathbb{X}^* >$ 表示字母 $\mathbb{X}$ 及其伴随元 $\mathbb{X}^*$. 构成的非交换多项式。设 $\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{C} < \mathbb{X}, \mathbb{X}^* >$ 中自伴元的子集，其中包含形如 $C_x - x^* x$ 的元素，且 $C_x \in \mathbb{R}$ 对每个 $x \in \mathbb{X}$. 均成立。令

$\mathcal{D}_{\mathcal{P}} = \{X \in \mathbf{B}(\mathcal{H})^d | p(X)$ *is positive semidefinite for all* $p \in \mathcal{P}\}$

元素 $p \in M_n(\mathbb{C} < \mathbb{X}, \mathbb{X}^* >)$ 在 $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$ 上正定，当且仅当

$$p = \varepsilon + \sum_{i=1}^{N} a_i^* a_i + \sum_{j=1}^{M} b_j^* p_j b_j$$

对于某些 $\varepsilon > 0, a_i, b_j \in M_{1n}(\mathbb{C} < \mathbb{X}, \mathbb{X}^* >)$ 以及 $p_i \in \mathcal{P}$.

证明。假设 p 不是上述形式。将 $\mathbb{X}$ 的有限子集Λ 按包含关系排序。对于每个 Λ，令 $\mathcal{P}_\Lambda$ 表示仅使用来自 Λ. 的字母的$\mathcal{P}$ 子集。由于 p 不是上述形式，因此相应地，对包含 Λ中变量的变量子集而言，它也不具有这种形式。于是，根据 Helton-McCullough 正性定理，存在 $X_\Lambda \in \mathcal{D}_{\mathcal{P}_\Lambda}$，使得 $p(X_\Lambda)$不是正定的。也就是说，存在正交归一向量 v_1, ..., $v_n \in \mathcal{H}$，使得 $[\langle p_{ij}(X_\Lambda) v_i, v_j \rangle]_{i,j}$ 不是正定的。因此，由 $q \mapsto [\langle q(X_\Lambda) v_i, v_j \rangle]_{i,j}$ 给出的映射 σ_Λ，其定义域为 $\mathbb{C} < \Lambda, \Lambda^* >$，满足： σ_Λ 在 $\mathcal{P}_\Lambda$上是半正定的，并且对于任意选取的 q_i 和 σ_Λ， $[\sigma(q_i^* q_j)]_{i,j}$ 都是半正定的。**(1)** 是单位元。令 σ 为网 σ_Λ. 的一个聚点。注意， σ 是幺正的，并且 σ_Λ 在 $\mathcal{P}_\Lambda$. 上是半正定的。注意， $[\sigma(p_{ij})]_{i,j}$ 不是半正定的。因此，应用

对 σ 应用 Gelfand-Naimark-Segal 构造，可得一个 $X \in \mathcal{D}_{\mathcal{P}}$，使得$p(X)$不是正定的。□

令 $\mathcal{P}$ 为由所有 $g \in G$,–组成的自伴多项式集合，其中包含±($1 - x_g^* x_g$) ±($1 - x_g x_g^*$) –($x_g^* - x_{g^{-1}}$)*($x_g^* - x_{g^{-1}}$)，并遍历所有成对元素，我们立即得到以下结论。

引理 5.8. 设 G 为一个离散群。若 $p \in M_n(\mathbb{C}[G])$ 是正定的，则存在某个 $a_i \in M_{1n}(\mathbb{C}[G])$，使得 $p = \sum_{i=1}^{N} a_i^* a_i$。

Netzer 和 Thom [40]得到了群代数中平方和的其他结果。我们注意到，Mehta、Slofstra 和 Zhao [37]详细研究了群代数中平方和判定相关的不可判定性问题，这在某种程度上源于字问题的不可判定性。也就是说，Helton-McCullough 结果本质上是非构造性的。

下面给出了一个判定条件，用于判断由离散群的群代数上的映射是否为完全正。

引理 5.9。设 G 为一个离散群。映射 $\varphi : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}$是完全正的，当且仅当对于任意 g_1，……，g_N，矩阵$[\varphi(g_i^{-1} g_j)]_{i,\ j}$ 都是半正定的。

证明。 设 $M = [m_{ij}]_{i,\ j}$ 是 $\mathbb{C}[G]$ 上的正定矩阵。由于 M是正定的，根据引理 5.8， $M = \sum_{t=1}^{T} a_t^* a_t$，其中 A 是一个元素属于 $\mathbb{C}[G]$. 的长方矩阵。注意，我们可以同时写成

$$a_t = \begin{bmatrix} g_1 & \dots & g_N \end{bmatrix} A_t$$

其中 A_i是一个元素为复数的矩阵。因此 $M = \sum A_t^* [g_i^{-1} g_j] A_t$，从而 $\varphi(M) = \sum A_t^* [\varphi(g_i^{-1} g_j)] A_t$，根据假设这是正的。□

我们注意到，Ozawa [47], 以及随后 Netzer 和 Thom [41] 曾采用类似半定规划的方法来刻画性质 (T)。

6. Invariant completely positive definite functions on homogeneous spaces

现在我们定义完全正定函数的概念。它推广了经典的正定函数，同时也允许我们沿着 Bochner 的思路，借助完全正性进行高度简洁的处理。

定义 6.1. 设 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间。设 G 为局部紧群，且 H 为 $G.$ 的闭子群。若由函数 $\varphi : G/H \to \mathbf{B}(\mathcal{H})$ 诱导的线性映射满足 $g \mapsto \varphi(g/H)$，并且该映射在群代数 $\mathbb{C}[G]$ 上是完全正的，则称该函数为**完全正定**函数。

我们注意到，矩阵正定函数在具有多个半径的堆积中发挥着作用 [14]。事实上，要证明多个半径版本的科恩–埃尔基斯和卡巴坚斯基–列文施泰因对应结果，需要针对矩阵正定函数的舍恩伯格型结果。

我们首先注意到，任意完全正定函数 G/H 实际上都是 H-不变的，因此诱导出的完全正映射是双不变的。

命题 6.2。令 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间。令 G 为群，令 H 为 $G.$ 的子群。令 $\varphi\colon \ G/H \to \mathbf{B}(\mathcal{H})$ 为完全正定的。则，

$$\varphi(h \cdot x) = \varphi(x)$$

对于所有 $h \in H$ 和 $x \in G/H.$

证明。不失一般性，假设 $\varphi(e/H) = 1.$ 注意，诱导的完全正映射 $\hat{}\varphi$ 在 H 上为常值，因为 $h \mapsto \varphi(h/H) = \varphi(e/H) = 1.$ 设 $h \in H, x \in G/H$ 和 $\hat{}x \in G$ 满足 $\hat{}x/H = x.$ 因此，根据同态富山定理，我们有

$$\hat{\varphi}(h)\hat{\varphi}(\hat{x}) = \hat{\varphi}(h \cdot x)$$

因此

$$\varphi(h \cdot x) = \hat{\varphi}(h\hat{x}) = \hat{\varphi}(h)\hat{\varphi}(\hat{x}) = \varphi(h/H)\varphi(x) = \varphi(x).$$

□

现在我们给出一般情形下 $G/H.$ 上完全正定函数的表示定理

定理 6.3。设 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间。设 G 为群，且 H 为 $G.$ 的子群。设 $\varphi\colon \ G/H \to \mathbf{B}(\mathcal{H})$。映射 φ 是完全正定的，当且仅当存在 G 的一类表示 π 以及一个等距映射 V，使得 V 的值域是 π 的 H-不变向量所构成的子空间，并且

$$\varphi(g/H) = V^*\pi(g)V.$$

证明。令 $\hat{}\varphi$为诱导的完全正映射。根据 Stinespring 表示定理，存在 $\mathbb{C}[G]$ 的极小表示 π，使得 $\hat{}\varphi(g) = V^*\pi(g)V.$ 注意，$\pi(h)$ 限制在值域

V 上时是单位元，因为 $h \in H$，由极小性可知，形如$\pi(g)Vw$ 的向量张成该空间，并且对于任意 u，$w \in \mathcal{H}$，我们有

$$\begin{aligned}\langle \pi(h)Vu, \pi(g)Vw\rangle &= \langle V^*\pi(g)^*\pi(h)Vu, w\rangle \\ &= \langle V^*\pi(g^{-1}h)Vu, w\rangle \\ &= \langle \varphi(g^{-1}/H)u, w\rangle \\ &= \langle V^*\pi(g^{-1})Vu, w\rangle \\ &= \langle Vu, \pi(g)Vw\rangle,\end{aligned}$$

因此，$\pi(h)Vu = Vu$——也就是说，形如 Vu 的向量穷尽了 V 的值域，V 的值域在每个 $\pi(h)$. □ 下均保持不变

6.1.归纳有限球面及其对 $SO(\infty)$ 的 I 类表示的推论。 Christensen 和 Ressel 在 Schoenberg 的工作基础上，证明了以下定理。

定理 6.4。设 $\mathcal{H}$ 是一个无限维希尔伯特空间，设 S 是其单位球面。设 $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ 满足

(1) $f(1) = 1$，*(2)* $f(\langle x, y\rangle)$ 定义一个正核 $S \times S$，

那么 f 是一个正性保持函数，且具有如下形式

$$f(x) = a\chi(x = 1 \vee x = -1) + bx\chi(x = 1 \vee x = -1) + \sum c_i x^i$$

其中 a、b、$c_i \geq 0$、$a + b\sum c_i = 1$ 和 χ 是一个示性函数。

严格来说，我们需要的是他们关于归纳有限球面 S^∞ 的结果，它比 S. 稍小。不过，要使 $f(\langle x, y\rangle)$ 定义一个正核，只需对每个有限列表 x_1、…、$x_n \in S$，矩阵 $[f(\langle x_i, x_j\rangle)]_{i,j}$ 半正定即可；而且，由于我们可以选取一个酉 U，使得 Ux_i 具有有限支撑，并且 $[f(\langle x_i, x_j\rangle)]_{i,j} = [f(\langle Ux_i, Ux_j\rangle)]_{i,j}$，，因此可得以下推论

推论 6.5。设 S^∞ 为归纳有限球面。设 $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ 满足

(1) $f(1) = 1$, *(2)* $f(\langle x, y\rangle)$ 定义了一个正核 $S^\infty \times S^\infty$,

那么 f 是一个正性保持函数，且具有如下形式

$$f(x) = a\chi(x = 1 \vee x = -1) + bx\chi(x = 1 \vee x = -1) + \sum c_i x^i$$

其中 $a, b, c_i \geq 0, a + b\sum c_i = 1$ 和 χ 是一个示性函数。

现在，根据定理 6.3，我们看到， $\mathbb{C}[SO(\infty)]$ 上的任意完全正定函数都具有 $V^*\pi(g)V$，的形式，因此，与一个 $SO(\infty)$+-不变向量对应的任意极端态态都必须具有 γ_{11}^n 或 $\chi(\gamma_{11}=1\vee\gamma_{11}=-1)$ 或 $\gamma_{11}\chi(\gamma_{11}=1\vee\gamma_{11}=-1)$。的形式。

推论 6.6。 任意 $SO(\infty)$的不可约一类表示都由以下某个态导出：

(1) $\varphi(\gamma)=\gamma_{11}^n$*(2)* $\varphi(\gamma)=\chi($
$\gamma_{11}=1\vee\gamma_{11}=-1$*(3)* $\varphi(\gamma)=\gamma_{11}\chi($
$\gamma_{11}=1\vee\gamma_{11}=-1)$

我们赋予 $SO(\infty)$ 离散拓扑，这一点颇为令人惊讶。

6.2. **具有性质 (T) 的子群模掉后的局部紧群**。 现在我们将尝试证明，对于某些类型的齐性空间，可以将正定函数逼近为连续函数的逐点极限。首先，我们需要以下表示论引理。

引理 6.7。 设 G是一个局部紧群， H 是一个具有性质 *(T)* 的可数离散子群。那么，任何源自 G 关于 H 的 *I* 类表示的态，都是源自 G 关于 H.的连续 *I* 类表示的态的极限

证明。由于 H 的任何紧子集都是有限集，上文给出的 Dixmier 版本的 Glimm 引理，即定理 5.1，表明 G 上的任何纯态都是源自 G. 的连续表示的态的极限。因此，对 G 的每个有限子集，取一列态 $\sigma_{\Lambda,n}(g)=v_{\Lambda,n}^*\pi_{\Lambda,n}(g)v_{\Lambda,n}$ ，它们在 $H\cup\Lambda$. 上逐点收敛。由于 H 相对于自身具有性质 (T)，根据定理 3.19，这样的序列在 H 上均匀收敛于 1。因此，令 n 为满足$|\sigma-\sigma_{\Lambda,n}||_{H\cup\Lambda}\leq\frac{1}{|\Lambda|}$ 的最小指标，并取 $\tilde{v}_\Lambda$ 为由元素 H. 构成的闭凸包 $\mathfrak{C}_H$ 中范数最小的唯一元素。这样的 $\tilde{v}_\Lambda$ 的范数必定大于 $\sqrt{1-1/|\Lambda|}$. 。注意到 $h\tilde{v}_\Lambda\in\mathfrak{C}_H$, 且 $\|h\tilde{v}_\Lambda\|=\|\tilde{v}_\Lambda\|$ ，因此$h\tilde{v}_\Lambda=\tilde{v}_\Lambda$. 。所以 $\tilde{v}_\Lambda$ 是 H-不变的， $v_\Lambda=\tilde{v}_\Lambda/\|\tilde{v}_\Lambda\|$. 也因此如此。令$\sigma_\Lambda=v_\Lambda^*\pi_{\Lambda,n}(g)v_\Lambda$ ，并取关于按包含关系排序的有限子集 Λ 的一个弱* 聚点，即得证。□

利用上述引理可知，设 G 为一个局部紧群，且 H 为具有性质 (T) 的可数离散子群，则可以用连续正定函数逐点逼近。

定理 6.8. 设 G 为一个局部紧群，且 H 为具有性质 *(T)* 的可数离散子群。那么，任意正定函数 $f\colon G/H \to \mathbb{R}$ 都是连续正定函数的逐点极限。

7. Invariant partially defined completely positive definite functions on homogeneous spaces

定义 7.1。设 G 是一个群，H 是 $G.$的一个子群。设 $\Gamma \subseteq G/H.$。我们称 Γ 为**对称**的，当且仅当只要 $g/H \in \Gamma$，就有 $g^{-1}/H \in \Gamma.$。若 $e/H \in \Gamma.$，则称 Γ 为**阿基米德**的。

我们将 $\mathbb{C}[\Gamma] \subseteq \mathbb{C}[G]$ 定义为满足 $g/H \in \Gamma.$的 $g \in G$ 的张成空间。

现在注意到，$\mathbb{C}[\Gamma]$ 是一个算子系统。

命题 7.2。设 G 是一个群，H 是 $G.$的一个子群。设 $\Gamma \subseteq G/H.$。若 Γ 是对称且阿基米德的，则 $\mathbb{C}[\Gamma]$ 是一个算子系统。

证明。注意，阿基米德性质保证了 $1 \in \mathbb{C}[\Gamma].$注意，根据对称性，若 $g \in \mathbb{C}[\Gamma]$ 则有 $g^* = g^{-1} \in \mathbb{C}[\Gamma].$ □

现在我们描述一个映射 $\mathbb{C}[\Gamma]$ 为完全正映射的条件，该条件改编自引理 5.9。

引理 7.3。设 G 为离散群。设 $\Gamma \subseteq G$ 满足 $\Gamma = \Gamma^*, 1 \in \Gamma.$ 映射 $\varphi : \mathbb{C}[\Gamma] \to \mathbb{C}$ 是完全正映射，当且仅当对任意 $g_1, \ldots, g_N$，矩阵 $[\varphi(g_i^{-1}g_j)]_{i,\,j}$（其中满足 $g_i^{-1}g_j \notin \Gamma$ 的元素未指定）是部分定义的半正定矩阵。

证明。设 $M = [m_{ij}]_{i,j}$ 是一个元素来自 $\mathbb{C}[\Gamma].$ 的正定矩阵。由于 M 是正定的，根据引理 5.8，$M = \sum_{t=1}^{T} a_t^* a_t$，其中 A 是一个元素属于 $\mathbb{C}[G].$ 的长方矩阵。注意，我们也可以同时写成

$$a_t = \begin{bmatrix} g_1 & \ldots & g_N \end{bmatrix} A_t$$

其中，A_i 是一个元素为复数的矩阵。因此，$M = \sum A_t^* [g_i^{-1} g_j] A_t$，从而 $\varphi(M) = \sum A_t^* [\varphi(g_i^{-1} g_j)] A_t$，其中未指定的元素相互抵消。将矩阵 $[\varphi(g_i^{-1}g_j)]_{i,\,j}$ 补全为半正定矩阵，即可证明 $\varphi(M)$ 的正性. □

现在我们给出部分定义的完全正定函数的定义。

定义 7.4. 设 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间。设 G 为一个群，且 H 为 $G.$ 的一个子群。设 $\Gamma \subseteq G/H$ 对称且阿基米德。若诱导的线性映射 φ: $\Gamma \to \mathbf{B}(\mathcal{H})$ 满足群代数 $\mathbb{C}[\Gamma]$ 上的 $g \mapsto \varphi(g/H)$，且该映射是完全正的，则称其为**部分定义的完全正定函数**。

将 Arveson 延拓定理与我们对完全正定函数的刻画相结合，可以得到对部分定义的完全正定函数的刻画。

定理 7.5. 设 $\mathcal{H}$ 是希尔伯特空间。设 G 是一个群，$G.$ 的子群为 H。设 Γ 是对称且阿基米德的。设 φ: $\Gamma \to \mathbf{B}(\mathcal{H})$。映射 φ 是完全正定函数，当且仅当存在 G 的一类表示 π，以及一个等距映射 V，使得 V 的值域是 π 的 H-不变向量子空间，并且

$$\varphi(g/H) = V^*\pi(g)V.$$

证明。 设 $\hat{\varphi}$ 是诱导的完全正映射。根据 Arveson 延拓定理，$\hat{\varphi}$ 可延拓到整个 $\mathbb{C}[G]$，因此由定理 6.3 证毕。 □

7.1. 关于 $SO(n)$在有限集上的插值。 我们现在转而关注以下问题。设 $X \subseteq [-1, 1]$ 是一个包含1的有限集。设 f： $X \to \mathbf{B}(\mathcal{H})$。 $f(\gamma) = f(\gamma_{11})$ 何时定义一个部分定义的完全正定函数?

引理 7.6. 任意 $P_i^{(n)} P_{(n)\,j}$ 都位于由 $P_{(n)\,k}$ 对 $k \leq i + j.$ 生成的锥中

证明。 每一个 $P_{(n)\,i}$ 都有 $P_i^{(n)}(\gamma_{11})$ 在 $SO(n)/SO(n-1)$ 上是正定的。注意，由舒尔乘积定理， $P_i^{(n)}(\gamma_{11})P_{(n)\,j}(\gamma_{11})$ 是一个正定函数。因此，由舍恩伯格定理，它必为 $P_k^{(n)}(\gamma_{11})$ 的正线性组合。 注意，若在 $k > i+j$， $P_{(n)\,i}$ $P_{(n)\,j}$ $\perp P_k^{(n)}$， 则证毕。□

首先，我们希望证明以下定理。

引理 7.7。 设 $X \subseteq [-1, 1]$ 是一个包含 1 的有限集。固定 $n \geq 3.$ 令 $\hat{P}_i = \frac{P_i^{(n)}(1)|_X}{P_i^{(n)}}$ 存在一个 $N > 0$，它取决于 X，使得 $\hat{}$ $\hat{}$ 任意一个 P_i 都属于 $P_0, \ldots, P_N.$ 的凸包

证明。 不失一般性，假设 $X = -X.$。也就是说，我们假设 $-1 \in X.$

由于对于奇数 i 是奇函数，对于偶数 i 是偶函数；任何奇函数 P_i 都必须位于奇数 P_j 的凸包中，并且

偶函数的情形也类似。还要注意，根据引理 7.6，对于任意 $i,\ j\ P_iP_j$ 都是若干 P_k 的凸组合，其中 $k \le i+j$。注意，根据定理 3.8 给出的达布估计，$\lim \hat{}P^{(}i)(x) = 0$，其中 $x \neq \pm -1.$。因此，只需证明对于每个满足 $x > 0$ 的 $x \in X$，都存在函数 g_x，它们各自是如下形式的乘积的凸组合：$P_{i_1} \dots P_{i_n}$，其中 $\sum i_n$ 为偶函数，且 g_x 在 x 处为负，在每个 $y \in X \cap [0,1$ 处为 0；并且 $y \neq x,$。这样，g_x^2 就是偶函数，且在 $x,$ 处为正；任何在 $\{-1,1\}$ 之外足够小的偶函数都将位于这些函数的凸包中。类似地，对于奇函数，它们将位于 $\hat{}\ P_1 g_x$ 和 $\hat{}\ P_1 g_x^2.$ 的凸包中。

注意，对于偶数 i，族 $P_i^{(n)}(\sqrt{t})$ 本身就是一个正交多项式族。因此，定理 3.5 和定理 3.4 中给出的交错条件与稠密性条件意味着，对于每个 $\hat{}x \in X \cap [0,1$，都存在一个偶数 i_x，使得 $P_{i_x}(x) < 0.$ (注意，i_x 的选取可以仅取决于 x 与 1 的距离。) 现在定义

$$g_x = h_x \prod_{y \neq x, y \in X \cap [0,1)} \left(\frac{|e_{x,y}(y) h_y(y)| + e_{x,y} h_y}{|e_{x,y}(y) h_y(y)| + 1} \right)^2$$

其中，若 $h_y(x) \neq h_y(y)$，则 $e_{x,\ y} = 1$；否则 $e_{x,\ y} = \hat{}P_1^2$，至此便完成证明。

□

现在我们证明，在某个固定有限集 X 上的任意插值问题，都可以用一个固定的 Gegenbauer 多项式族来求解。

定理 7.8。设 X 是 $[-1,1]$ 的一个包含 1 的有限子集。存在一个依赖于 X 的 $N > 0$，使得对于任意 $f : X \to \mathrm{B}(\mathcal{H})\hat{}$，只要 $f(\gamma) = f(\gamma_{11})$，则 $SO(n)$ 上一个部分定义的完全正定函数，若可延拓为 $[-1,1]$ 上的连续完全正定函数，则属于由 $P_0^{(n)}$、.....、$P(n)\,N$ ·生成的锥。

证明。 不失一般性， $f(1)$ 是单位元。任何具有这种连续扩张的函数，其连续扩张必定具有 $\sum A_i P_i^{(n)}(x)$ 的形式，其中 $\sum A_i$ 在弱算子拓扑下收敛到单位元，并且每个 A_i 都是半正定的，因为对每个向量 $v \in \mathcal{H}$、$\langle fv$、$v\rangle$ 都满足定理 3.12，且定理 6.3 中得到的最小斯廷斯普林表示是唯一的。根据引理 7.7，我们于是可以将每个 $P_j^{(n)}$ 改写为 $P_{(n)\,0}$、.....、$P_N^{(n)}$ 的正组合，从而得到一个在插值点处取值相同的函数，证毕。□

8. Constrained angle codes and Delsarte bounds

令 $X \subseteq [-1,1)$。我们将**德尔萨特常数** g_X 定义为满足以下条件的最大值 $\bar{g} \geq 0$：存在 g： $[-1,1] \to \mathbb{R}$，使得 $g - \bar{g}$在 S^{n-1} 上正定，且满足 $g|_X \leq 0$ 和 $g(1) = 1.$。若 $\mathcal{C}$ 是一个**余弦值属于** X 的受约束角码，则称之为此类码；其中 $\mathcal{C}$ 中的所有向量对，其夹角的余弦值均属于 X.（此类码曾在 [16]中被研究。）

我们可以通过与原始德尔萨特估计相同的论证得到以下结论。

定理 8.1。令 $X \subseteq [-1,1)$。设 $\mathcal{C}$ 为一个余弦值属于 X. 的受约束角码。那么，$|\mathcal{C}| \leq \frac{1}{g_X}$.

证明留给读者，因为它与上文给出的经典证明完全相同。（参见定理 2.5 的证明。）

如果存在一个受约束角码，使得 $|\mathcal{C}| = \frac{1}{g_X}$.，则称集合 X 具有 **Delsarte 锐性**

定理 8.2。设 $X \subseteq (-1,1)$ 具有德尔萨特锐性。任何满足 $g - g_X$ 的函数 g 都是多项式，其中 $g - g_X$ 为正定，$g|_X \leq 0$ 且 $g(1) = 1$。

证明。令 X' 为与最优码相对应的有限集。注意，$g_{X'} = g_X.$。取 g 为 X 的最优函数，则它必定可以展开为标准化 Gegenbauer 多项式的级数；但对于充分大的指标，存在一个 $\varepsilon > 0$，使得每个 $P_i^{(n)}/P_i^{(n)}(1) - \varepsilon$ 在 X' 上正定。这些指标的系数必须为零，否则 $g_{X'} > g_X$，因为我们可以将最优候选函数取为 X，并将其限制到 X'. □

类似地，我们得到如下结果。我们称 X 为 **对踵 Delsarte 锐性**，如果 X 是 Delsarte 锐性的，且带有码 $\mathcal{C}$ 使得 $\mathcal{C} = -\mathcal{C}$.

定理 8.3. 设 $X \subseteq [-1,1)$ 为对踵 *Delsarte* 锐性，使得$X \cap -X = X \cap (-1,1)$。任意偶函数 g，若 $g - 2g_X$ 为正定，$g|_{X\setminus\{\pm 1\}} \leq 0$ 且 $g(1) = 1$ 是一个多项式。

例如，Sloane 和 Odlyzko 的码对应于其各自角集的德尔萨特尖锐码 [44]。三维和四维情形中，由于缺乏德尔萨特尖锐性，必须采用复杂精巧的替代论证；Musin [38, 39], 所做的正是如此。这显然类似于 8维球堆积的优雅与简易 24 [65, 11]，相较之下，Hales [28] 对艰难无比的三维情形所进行的逐案分析则堪称一场苦战。事实上，在尖锐德尔萨特情形中，低复杂度代数函数必定是见证，

而且唯一性或非唯一性可以通过有限线性规划得出；我们推测，球堆积领域中 Viazovska 函数具有低代数复杂度（以及或许受约束的唯一性）背后的深层原因是什么 [65, 11, 54]。近期，Kulikov、Nazarov 和 Sodin [35] 找到了充分条件，判定实数线上一对离散子集是否构成傅里叶变换意义下的唯一性对或非唯一性对。Adve [1]的一项未发表工作通过不同的方法将这一结果推广到了 $\mathbb{R}^n$ 。

9. Partially defined complete positivity preservers

定义 9.1。 设 $X \subseteq \mathbb{R}$. 设 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间。若对于任意部分定义的半正定矩阵 $[m_{ij}]_{ij}$， 都有$[f(m_{ij})]_{ij}$ 仍为部分定义的半正定矩阵，则称$f : X \to \mathbf{B}(\mathcal{H})$为部分定义的完全正性保持映射。

引理 9.2。 设 $X \subseteq [-1, 1]$ 使得 $1 \in X$. 设 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间。设 $f : X \to \mathbf{B}(\mathcal{H})$ 是部分定义的完全正性保持映射。设 G为带有离散拓扑的群。设 φ是 $\mathbb{C}[G]$上的一个态。设

$$\Gamma = \{\gamma \in G | \varphi(\gamma) \in X\}.$$

ˆ那么， $f(g) = f(\varphi(g))$ 是 Γ.上的部分定义的完全正定函数

证明。根据引理 7.3，只需证明对于任意选取的 ˆ$g_1, \dots g_N$， $[f(g_i^* g_j)]_{i,j}$是部分定义的半正定矩阵。注意， $[\varphi(g_i^* g_j)]$ 是部分定义的半正定矩阵，因此，由于 f是正性保持映射，可知 $[f(\varphi(g_i^* g_j))] =$ˆ$[f(g_i^* g_j)]_{i,j}$ 也同样如此。□

定理 9.3. 设 $X \subseteq [-1, 1]$ 满足 $1 \in X.$ ，令 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间。函数 f： $X \to \mathbf{B}(\mathcal{H})$ 是部分定义的完全正性保持映射，当且仅当

$$f(x) = a\chi(x = 1 \vee x = -1) + bx\chi(x = 1 \vee x = -1) + \sum c_i x^i$$

其中 a、 b、 $c_i \geq 0$、 $\sum c_i < \infty$ 和 χ 是示性函数。

证明。 在 $SO(\infty)$ 上赋予离散拓扑。令

$$\Gamma = \{\gamma \in SO(\infty) | \gamma_{11} \in X.\}$$

ˆ首先， f 通过引理 9.2，$f(\gamma) = f(\gamma_{11})$在 Γ 上诱导出一个完全正定函数 f 。根据定理 7.5， f可延拓为 $SO(\infty)/SO(\infty)_+$ 上的完全正定函数，因此其形式为.....推论 6.6对可能出现的第一类表示进行了分类，因此证明完毕。□

如果我们无法以足够恰当的方式包含端点，或者定义域在上方无界，那么只需考虑较小区间上的函数，就可以去除不连续极值点。

定理9.4. 设 $X \subseteq \mathbb{R}$ 满足以下条件之一

(1) 上确界 $X = \infty$,*(2)* 上确界 $X > 0$, 上确界 $X \geq -$

下确界 X 和 $\pm$ 上确界 $X \notin X$.

设 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间。当且仅当满足以下条件时，函数 $f : X \to \mathbf{B}(\mathcal{H})$ 是部分定义的完全正性保持映射

$$f(x) = \sum c_i x^i$$

其中 $c_i \geq 0, \sum c_i < \infty$.

10. Some concluding remarks

10.1. **Delsarte 幻觉**。寻找具有 Delsarte 锐性的特定有限集 X 颇有意思。我们的结果给出了一个有限线性规划，可以用来求出 X.的 Delsarte 常数。因此，人们会希望，如果算出的结果是整数，就能得到一个码。然而，判断是否存在由特定元素构成的格拉姆矩阵，是一个困难的组合矩阵补全问题；此外，还存在**Delsarte 幻觉**，即一些集合 X ，使得 g_X给出一个整数，但不存在大小为该整数的码。例如，对于 $X = \{-1, 1/2, -1/2, 1\}$， $n = 10$，我们得到上界 46，但感兴趣的读者会发现并不存在这样的码。

不过，这种方法也能产生一些真正的、颇具非平凡性的例子。例如，取 $X = \{1/3, -1/3, 1\}$，就存在一个有 10 个点的球面码，正如对 $n = 5$ 的估计所示；其构造方法是用彼得森图的顶点标记该码，并在没有边时赋予 $1/3$ 、有边时赋予 $-1/3$ 。彼得森图自然出现在关联方案理论中 [17], ，所以这或许并不特别令人意外；不过，它比方说某个极其重要且广为人知的格中的某个部分，要更为奇特。

10.2. **奥尔尚斯基球对**。近年来，奥尔尚斯基在**渐近调和分析**领域取得了一些新进展，研究了维数趋于无穷时齐性空间的归纳极限。更确切地说，奥尔尚斯基 [45] 建立了关于递增的 Gelfand 对序列 (G_n, K_n) 的归纳极限 (G, K) 的一般理论；这类序列称为球面对 [45] ；并研究了这类球对的球函数概念。此外，他还得到了一些逼近结果：归纳极限 (G, K) 的球函数可表示为 Gelfand 对的球函数的极限

(G_n, K_n) [46] （这样的序列称为**维尔希克–克里洛夫**序列）。我们将针对归纳极限球面 S^∞ 的不连续表示推导此类结果，并提出一些有限性猜想。尽管我们讨论的是球面的情形（它是一个秩一对称空间），但深入了解奥尔尚斯基的方法已被证明非常有益。更多详情请参见 Faraut [21]。

10.2.1. *Gelfand* 对。设 G 是一个局部紧群， K 是一个紧子群。 G 上双-K-不变可积函数构成的空间 $L^1(K\backslash G/K)$ 是一个卷积代数。回顾一下，如果 $L^1(K\backslash G/K)$ 是交换的，则称有序对 (G, K) 为一个 **Gelfand 对** 。如果一个非平凡连续函数 φ 满足

$$\int_K \varphi(xky)\, dk = \varphi(x)\varphi(y), \quad \text{for all } x, y \in G,$$

其中 dk 是 $K.$ 上的归一化 Haar 测度。注意，球函数是双-K-不变的，并且 $\varphi(e) = 1.$

令 $\mathcal{P}$ 表示 G 上连续的双-K-不变正定函数，并令 $\mathcal{P}_1$ 表示由 $\mathcal{P}$ 中满足 $\varphi(e) = 1.$ 的函数 φ 构成的凸基。下述定理可视为 GNS 定理的双不变版本：

定理10.1。 对于一个 *Gelfand* 对 (G, K) 以及 $\varphi \in \mathcal{P}_1$，以下条件等价：

(1) φ 是球面的。*(2)* $\varphi \in \mathrm{Ext}(\mathcal{P}_1)$，也就是说， φ 是凸集$\mathcal{P}_1$的一个极端点。*(3)* 与 φ相关联的*GNS*表示π_φ 是不可约的。

设Ω表示正型球函数的集合，因而也是 $\mathcal{P}_1.$ 的极点。一个值得注意的事实是，对于一个不可约酉表示（π， $\mathcal{H}$）， K-不变向量的子空间（记为 $\mathcal{H}^K$ ）的维数至多为1。

定义10.2. 我们称酉表示（π， $\mathcal{H}$）是一**类** 的或**球面** 的，如果子空间 $\mathcal{H}^K$ 是非平凡的，也就是说，$\dim \mathcal{H}^K = 1.$

因此，集合 Ω 也可以看作 $\mathcal{H}.$ 的一类表示的等价类集合。从这个意义上说，正型球函数的集合 Ω 概括了表示的特征标，因此 Ω 也称为该对 $(G,\ K)$ 的**球对偶**。注意，Ω 恰好是巴拿赫代数 $L^1($ $K\backslash G/K)$，的盖尔范德谱，因此在紧子集上的一致收敛拓扑下，它是局部紧的 G。

定理 10.3 (Bochner，Godement)。对于每个 $\varphi \in \mathcal{P}$，都存在唯一的正有界测度 μ，其定义在Ω 上，使得

$$\varphi(g) = \int_{\Omega} \chi(g)\ d\mu(\chi).$$

10.2.2. *Olshanski* 球对。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，设 $(G_n,\ K_n)$ 是一个 Gelfand 对，其中 G_n 是 G_{n+1} 的闭子群，K_n 是 K_{n+1} 的闭子群，并且 $K_n = G_n \cap K_{n+1}$. 定义

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n, \quad K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

我们可以在 G 上赋予归纳极限拓扑。于是 K 是 $G.$ 的闭子群。但是，一般而言，$G,\ K$ 不一定分别是局部紧和紧的。我们称 $(G,\ K)$ 为 Olshanski 球对（OSP）。设 $(G,\ K)$ 是上文定义的 OSP。现在，设 φ :$G \to \mathbb{C}$ 是一个连续的双-K-不变函数。若对于任意 $x,\ y \in G,$ ，则称 φ 为**球函数**

$$\lim_{n\to\infty} \int_{K_n} \varphi(xky)\ dk_n = \varphi(x)\varphi(y),$$

其中 dk_n 是紧群 $K_n.$ 上的归一化哈尔测度。与 Gelfand 对的情形一样，若 φ 是正型球函数，则存在 G 的一个 I 类表示 $(\pi,\ \mathcal{H})$（即不可约、酉，且 $\dim \mathcal{H}^K = 1$），使得

$$\varphi(x) = \langle \pi(x)v, v\rangle, \quad \text{where } v \in \mathcal{H}^K \setminus \{0\}.$$

10.2.3. 从奥尔尚斯基视角看舍恩伯格定理。设 $G_n = SO(n+1)$且 $K_n = SO(n)$。根据前文对两点齐性空间的讨论可知，(G, K)是一个 Olshanski 球对，其中

$$G = \bigcup_{n=0}^{\infty} SO(n+1), \quad K = \bigcup_{n=0}^{\infty} SO(n)$$

注意，K_n 可通过如下恒等关系实现为 G_n 的一个（紧）子群：对任意 $A \in SO(n)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \in SO(n+1).$$

令 $\{e_j\}$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$的标准基，即 $e_j(i) = \delta_{i,\ j}$.根据构造，$SO(n)$ 固定第一个基向量 e_1。现在，令 φ: $SO(\infty) \to \mathbb{C}$ 为一个连续的双-K-不变函数。则存在一个连续的ψ：$[-1, 1] \to \mathbb{C}$，使得

$$\varphi(g) = \psi\big(\langle \pi(g)e_1, e_1\rangle\big)$$

设 $x,\ y \in G$ 其中 $\langle \pi(x)e_1,\ e_1\rangle = \cos\alpha$ 且 $\langle \pi(y)e_1,\ e_1\rangle = \cos\beta$。根据 Funk-Hecke公式,

$$\int_{SO(n)} \varphi(xky)\ dk_n = \lambda_n \int_0^\pi \psi(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\theta) \sin^{n-1}\theta\ d\theta,$$

其中 λ_n 的定义使得 $\lambda_n sin^{n-1}\theta d\theta$ 是一个概率测度（序列）。事实上，$\lambda_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$。

引理10.4（参见引理5.4 [21]）。对于 $[0,\pi]$ 上的任意连续函数 f

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n \int_0^\pi f(\theta)\sin^{n-1}\theta\ d\theta = f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

证明。这由测度序列$\{\lambda_n \sin^{n-1}\theta\ d\theta\}$ 弱收敛到 $\delta_{\pi/2}$ 得出 □

利用引理10.4,

$$\int_{SO(n)} \varphi(xky)\ dk_n = \psi(\cos\alpha\cos\beta)$$

注意，如果 φ 是球面的，那么

$$\psi(\cos\alpha\cos\beta) = \psi(\cos\alpha)\psi(\cos\beta).$$

因此，函数 ψ 在 $[-1,1]$ 上是乘法性的。Banach/Sierpinski 的一个经典结果，加上球函数的正则性，表明这样的函数必定是幂函数，即

$$\varphi(g) = \langle \pi(g)e_1, e_1\rangle^k, \quad \text{where } k \in \mathbb{N}.$$

因此，球对偶与自然数同构，即 $\Omega \simeq \mathbb{N}$. 因此，克莱因-米尔曼定理表明，任意 $\varphi \in \mathcal{P}_1$ 都可以唯一地写成

$$\varphi(g) = \psi(\langle \pi(g)e_1, e_1\rangle),$$

其中

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

with

$$a_k \geq 0, \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1.$$

因此，任何连续的双-K-不变正定函数都具有上述形式，进而得到舍恩伯格定理。关于酉群的一个类似但非平凡的变体 $U(n)$

可见于 Voiculescu [66] 和 Olshanski–Borodin[8]的著作。

10.3. **有限维问题**。

10.3.1. 关于 S^1 的一些较易理解的病态现象。请注意

$$S^1 \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{Q}$$

作为 $S_1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. 选择这样一个同构，从而也为 $\mathbb{R}$ 作为一个在 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间选取一组基，我们得到以下子群

$$H_\Lambda = \left[\frac{1}{\lambda_{\mathbb{Z}}}\mathbb{Z}\right]/\mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{r\in\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda_r}\mathbb{Q}$$

现在，对于 $\mathbb{R}$ 的任意有限子集，在连续同态 z^{kn} 下， H_Λ 的生成元e_1、.....、 e_r 的闭包像（指标来自直积结构）在 $k =$固定为 0、1、2.....且 n 固定时，恰为 $(S^1)^r$. 。因此，从S^1 到 S^1 的任意同态都是连续同态的逐点极限。也就是说，在逐点收敛拓扑下，连续同态的闭包恰好就是所谓的 Bohr 紧化 [23]。反过来，$\mathbb{C}[S^1]$同构于 $\mathbb{C}[S^1_{disc}]$，其中 S^1_{disc} 是赋予非标准离散拓扑的 S^1，因为范数由各表示上的范数的上确界给出，而不连续的表示可以逐点逼近，因此稠密子集 $\mathbb{C}[S^1] = \mathbb{C}[S^1_{disc}]$ 上的范数相同。

作者尚不清楚 $\mathbb{C}[SO(n)] \cong \mathbb{C}[SO(n)_{disc}]$ 是否如此，或者其他一般群是否也如此。在试图判定一个映射是否为完全正时，这会造成一些病态现象，因为对于非离散群，我们失去了引理 5.9 所给出的检验条件。

也就是说，由于定理 5.1 中的 Glimm 型引理允许我们将任意态表示为由连续表示产生的态的极限，如果这两个对象同构，那么 $SO(n)$ 上 $SO(n-1)$ 中将只有两个不连续的 I 类表示（ $n > 3$ ），因为定理 3.8 中的 Darboux 型估计表明，相应的 Gegenbauer 多项式在单位区间内部趋于 0。

10.3.2. 有限球面上的正定函数及其对 $SO(n)$ 的 I 类表示的推论。为对有限球面上的正定函数进行分类，我们首先对表示进行分类。根据上文给出的定理 5.1，即 Dixmier 版本的 Glimm 引理，我们知道，$SO(n)$ 中任意一个在 $SO(n-1)$ 下不变的纯态，都是一列纯态构成的网的弱* 极限。如果我们知道这些态是

作为 $SO(n-1)$-不变纯态的极限，根据定理 3.8 中的 Darboux 型估计，任何病态的极限态都必须与 $SO(n)$ 相同。对逼近纯态进行对称化的简单尝试会失败，因为这会改变该单位元的值，也就是说，我们无法保证 that

$$\tilde{\sigma}(g) = \int_{SO(n-1)} \int_{SO(n-1)} \sigma(h_1^{-1} g h_2) dh_1, dh_2$$

仍具有某种幺正性，或是一个良好的近似。

以下是一个朴素的猜想。

猜想 10.1. 任意 $SO(n)$的不可约一类表示都来自以下某种态:

(1) $\varphi(\gamma) = P^{(n-1)}(\gamma_{11})$*(2)* $\varphi(\gamma) = \chi($
$\gamma_{11} = 1 \vee \gamma_{11} = -1)$*(3)* $\varphi(\gamma) = \gamma_{11}\chi($
$\gamma_{11} = 1 \vee \gamma_{11} = -1)$

因此，我们将立即得到定理 6.3 的以下推测性推论。该定理对球面上的正定函数进行分类，其中球面被视为由形如 $SO(n)/SO(n-1)$。的商给出的齐性空间。

猜想 10.2. 设 $n > 2$ 设 $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ 满足

(1) $f(1) = 1$,*(2)* $f(\gamma) = f(\gamma_{11})$ 在 $SO(n)/SO(n-1) \cong S^{n-1}$ 上定义一个正定函数，

那么 f 具有以下形式

$$f(x) = a\chi(x = 1 \vee x = -1) + bx\chi(x = 1 \vee x = -1) + \sum c_i P^{(n-1)}(x)$$

其中 a、 b、 $c_i \geq 0$、 $a + b\sum c_i = 1$ 和 χ 是示性函数。

注意，给定任意一列纯态 σ_n ，它们对应于 $SO(n)$的不连续表示，并且在$SO(n-1)$下不变， 那么 $SO(n)$上的极限态必定来自定理 6.6。

如果存在一个正定函数，它不是连续函数的逐点极限，就称齐性空间 G/H **是病态的** 。本质上，我们猜想 $SO(n)/SO(n-1)$并非病态；我们已知这一点对 $n = 2, \infty$. 成立。如果这样的商空间是病态的，就会发现有限受约束角码存在额外的非平凡估计。然而，这类函数必定不可测[20], ，这表明是否存在病态商空间可能

取决于集合论问题。不过，判定是否存在某个特定的受约束角码是一个有限问题，因此对于任何给定的上界，都可以通过穷举该上界内的情况给出手工证明。

References

[1] Anshul Adve. R^d 中傅里叶唯一性现象的密度判据。arXiv 电子预印本，页码 arXiv:2306.07475，2023 年 6 月。[2] Christine Bachoc、Gabriele Nebe、Fernando M´ario de Oliveira Filho 和 Frank Vallentin。可测色数的下界。《几何与泛函分析》，19(3):645–661，2009。[3] Mih´aly Bakonyi 和 Dan Timotin。可和群上正定函数的延拓。《加拿大数学通报》，54(1):3–11，2011。[4] Bachir Bekka、Pierre de la Harpe 和 Alain Valette。Kazhdan 性质 (T)，《新数学专著》第 11 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2008。[5] Emanuel Ben-David 和 Bala Rajaratnam。贝叶斯网络的正定补全问题。《SIAM 矩阵分析与应用杂志》，33(2):617–638，2012。[6] Yu. M. Berezanskiĭ 和 M. L. Gorbaˇcuk。两个变量的厄米正函数的延拓。《乌克兰数学杂志》，17(5):96–102，1965。俄文；英文译文见《乌克兰数学杂志》。[7] S. Bochner。希尔伯特距离与正定函数。《数学年刊》(2)，42:647–656，1941。[8]Alexei Borodin 和奥尔尚斯基。无限维酉群上的调和分析与行列式点过程。《数学年刊》(2)，161(3):1319–1422，2005。[9] Nathanial P. Brown 和 Narutaka Ozawa。C^*-代数与有限维逼近，《数学研究生教程》第 88 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008。[10] Henry Cohn 和 Noam Elkies。球堆积的新上界。I。《数学年刊》(2)，157(2):689–714，2003。[11] Henry Cohn、Abhinav Kumar、Stephen Miller、Danylo Radchenko 和 Maryna Viazovska。24维中的球堆积问题。《数学年刊》，185(3):1017–1033，2017。[12] Henry Cohn 和 Jeechul Woo。能量最小化的三点界。《美国数学会杂志》，25(4):929–958，2012。[13] Henry Cohn 和 Yufei Zhao。利用球面码得到的球堆积界。《杜克数学杂志》，163(10):1965–2002，2014。[14] David De Laat、Fernando M´ario de Oliveira Filho 和 Frank Vallentin。多个半径的球堆积上界。载于《数学论坛：西格玛》，第 2 卷，页码 e23。剑桥大学出版社，2014。[15] P. Delsarte。通过线性规划得到的无限制码界。《飞利浦研究报告》，27:272–289，1972。[16] P. Delsarte、J. M. Goethals 和 J. J. Seidel。球面码与设计。《几何学》，6(3):363–388，1977。[17] Philippe Delsarte 和 Vladimir I. Levenshtein。关联方案与编码理论。《IEEE 信息论汇刊》，44(6):2477–2504，2002。

[18] Allen Devinatz。关于正定函数的延拓。《数学学报》，102(1):109–134，1959。[19] Jean Dieudonn´e。Gelfand 对与球函数。《国际数学与数学科学杂志》，2(2):153–162，1979。[20] Jacques Dixmier。 C^*-代数，《北荷兰数学图书馆》第 15 卷。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹—纽约—牛津，1977。Francis Jellett 法译英。[21]Jacques Faraut。无限维调和分析与概率论。载于《群上的概率测度：近期发展与趋势》，第 179–254 页。塔塔基础研究所，孟买，2006。.. [22] Leopold Fej´er。关于三角多项式。《纯粹与应用数学杂志》，146:53–82，1916。[23] Gerald B Folland。《抽象调和分析教程》。CRC 出版社，2016。[24] Walter Gautschi。范德蒙矩阵逆矩阵的范数估计。《数值数学》，23(4):337–347，1974。[25] I. Gelfand 和 D. Raikov。局部双紧群的不可约酉表示。《数学文集》新系列，13/55:301–316，1943。[26] Roger Godement。正型函数与群论。《美国数学会汇刊》，63:1–84，1948。[27] Dominique Guillot 和 Bala Rajaratnam。阈值化矩阵中正定性的保持。《线性代数及其应用》，436(11):4143–4160，2012。[28] Thomas C Hales。球堆积，I。载于《开普勒猜想：Hales-Ferguson 证明》，第 379–431 页。施普林格，2011。[29] J. William Helton 和 Scott A. McCullough。非交换多项式的正定定理。《美国数学会汇刊》，356(9):3721–3737，2004。[30] Palle Jorgensen、Steen Pedersen 和 Feng Tian。正定函数的延拓。《数学讲义》，2160，2016。[31] Palle ET Jorgensen 和 Robert Niedzialomski。正定函数的延拓。《数学分析与应用杂志》，422(1):712–740，2015。[32] G. A. Kabatjanskiˇ i 和 V. I. Levenˇ steˇin。球面及空间中堆积的界。《信息传输问题》，14(1):3–25，1978。[33] Apoorva Khare 和 Terence Tao。固定维数下逐元素正性保持算子的符号模式。《美国数学杂志》，143(6):1863–1929，2021。[34] M. G. Krein。齐性空间上的厄米正核。I。《乌克兰数学杂志》，1(4):64–98，1949。俄文。[35] Aleksei Kulikov、Fedor Nazarov 和 Mikhail Sodin。傅里叶唯一与非唯一对。《数学物理分析与几何杂志》，21(1):84–130，2025。[36] John R. McMullen。《正定函数的延拓》，《美国数学会回忆录》第 117 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1972。[37] Arthur Mehta、William Slofstra 和 Yuming Zhao。自由代数张量积中的正性不可判定。arXiv 预印本 arXiv:2312.05617，2023。[38] Oleg R Musin。三维接吻问题。《离散与计算几何》，35(3):375–384，2006。[39] Oleg R Musin。四维接吻数。《数学年刊》，第 1–32 页，2008。

[40] Tim Netzer 和 Andreas Thom。实闭分离定理及其在群代数中的应用。《太平洋数学杂志》，263(2):435–452，2013。[41] Tim Netzer 和 Andreas Thom。通过半定优化研究 Kazhdan 性质 (T)。《实验数学》，24(3):371–374，2015。[42]Rolf Nevanlinna。关于有界函数在给定点取指定值。《芬兰科学院学报 A辑 1 数学论文集》，1919。[43] A. E. Nussbaum。非紧型秩为1的对称空间中正定函数的扩张及其用球函数表示。《数学年刊》，215(1):97–116，1975。[44] AM Odlyzko 和 NJA Sloane。接吻数的界。载于《球堆积、格与群》，第337–339页。施普林格，1988。[45] G. I. Olshanskii。无穷维对 (G, K) 的酉表示及 R. Howe 的形式体系。《苏联科学院通报》，269(1):33–36，1983。[46] G. I. Olshanskii。有限 R-秩无穷维典型群：表示的描述与渐近理论。《泛函分析与应用》，18(1):28–42，1984。[47] Narutaka Ozawa。Kazhdan 性质 (T) 的非交换实代数几何。《朱西厄数学研究所杂志》，15(1):85–90，2016。[48] James Eldred Pascoe。不变保结构函数及一种 Oka-Weil Kaplansky 型稠密性定理。《东北数学杂志》（第二辑），75(4):465–482，2023。[49]JE Pascoe 和 Ryan Tully-Doyle。由同态条件期望产生的 Cauchy变换对非交换Pick函数进行参数化。《数学分析与应用杂志》，472(2):1487–1498，2019。[50] Vern Paulsen。《完全有界映射与算子代数》，第78卷。剑桥大学出版社，2002。.[51] Georg Pick。关于由给定函数值所决定的解析函数的界。《数学年刊》，77(1):7–23，1915。[52]Robert Pluta 和 Bernard Russo。同态条件期望作为非交换收缩。《算子理论进展》，2(4):396–408，2017。[53] Mihai Putinar。紧半代数集上的正多项式。《印第安纳大学数学杂志》，42(3):969–984，1993。[54] Danylo Radchenko 和 Maryna Viazovska。实线上的 Fourier 插值。《高等科学研究所数学出版物》，129:51–81，2019。[55] D. A. Raikov。关于正定函数。《苏联科学院报告》（新辑），26:857–859，1940。.[56] Friedrich Riesz。关于 Carathéodory 先生的一个问题。《纯粹与应用数学杂志》，146:83–87，1916。[57] Walter Rudin。正定函数的扩张问题。《伊利诺伊数学杂志》，7(3):532–539，1963。[58] Konrad Schmüdgen。紧半代数集的 K-矩问题。《数学年刊》，289(2):203–206，1991。[59] Konrad Schmüdgen。非交换实代数几何：一些基本概念与初步想法。载于《代数几何的新兴应用》，第325–350页。施普林格，2008。

[60] I. J. Schoenberg。球面上的正定函数。《杜克数学杂志》，9:96–108，1942。[61] G´abor Szeg˝o。正交多项式，第XXIII卷，美国数学会专题讲座出版物第XXIII卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，第四版，1975。[62] Jun Tomiyama。关于 w-代数中的范数为1的投影。《日本学士院纪要》，33(10):608–612，1957。[63] StanislawMarcin Ulam。一般集合论中的测度论。Uniwersytet，数学研讨班，1930。[64] Gerrit van Dijk。调和分析与广义 *Gelfand*对导论，De Gruyter数学研究丛书第36卷。Walter de Gruyter公司，柏林，2009。[65] Maryna S Viazovska。8维中的球堆积问题。《数学年刊》，第991–1015页，2017。[66] Dan Voiculescu。´ $U(\infty)$ 的 II_1 型因子表示。《纯粹与应用数学杂志》（第*9*辑），55(1):1–20，1976。[67]王宪钟。两点齐性空间。《数学年刊》（第二辑），55:177–191，1952。

(S.S. Damase) Department of Mathematics, Indian Institute of Science, Bangalore 560012, India;电子邮箱地址：sujits@iisc.ac.in (J.E.Pascoe) Department of Mathematics, Drexel University, Philadelphia, PA 19104, United States;电子邮箱地址：jep362@drexel.edu