arXiv:2602.09031v1 [physics.comp-ph] 29 Jan 2026

受热冲击作用脆性材料的完备相场断裂模型

Bo Zeng，John E. Dolbow

杜克大学机械工程与材料科学系，美国北卡罗来纳州达勒姆，*27708*

摘要

遭受热冲击的脆性材料会经历强烈的温度梯度，进而产生足以诱发断裂的巨大机械应力。本文提出了一种用于耦合热-力学问题的完备相场断裂模型，其中块体材料性质、材料强度和断裂韧度彼此独立地指定。本文在广泛的热-力学断裂情形下评估了该模型的能力，涵盖从大型预存裂纹的扩展到空间均匀应力状态下的裂纹萌生。具体而言，我们重新研究了玻璃板的受控淬火，并展示了该模型如何在一系列热载荷下捕捉实验观测到的裂纹形态。本文还考察了遭受红外辐射的陶瓷圆盘，模型再现了带缺口试样中的直裂纹以及完整试样中的分叉现象。最后，本文研究了经受快速功率脉冲的陶瓷芯块，模型解释了实验中芯块由完整到断裂的转变，以及材料强度所发挥的重要作用。结果表明，完备相场模型统一了热冲击下不同断裂情形的处理，超越了经典方法，从而能够更可靠地预测极端环境中的脆性断裂。

关键词：断裂相场、材料强度、成核、热致断裂、动态分叉

1. 引言

一个多世纪以来，理解和预测承受大温度梯度的材料的行为，一直是科学家和工程师孜孜以求的基本课题。从因突然受热而碎裂的古代陶器，到现代涡轮叶片、炉衬和热障涂层，热冲击下的材料断裂始终是许多行业面临的关键问题。例如，在热冲击过程中，温度的快速变化会产生巨大的机械应力，导致材料意外开裂。尽管技术取得了显著进步 [1, 2, 3], 但要准确预测脆性材料在极端加热和骤然冷却下的响应，仍是一项尚未解决的科学挑战。为应对这一挑战，人们已确定了支配各类断裂过程的若干关键因素，为构建具有预测能力且可靠的模型奠定了基础。

在本研究中，我们将 Lopez-Pamies 及其合作者提出的断裂完整模型 [4,5, 6] 扩展至热-力学问题。迄今为止，完整模型是唯一将三个关键因素作为独立宏观材料性质纳入考量的断裂模型，即：弹性、断裂韧度和强度。这与经典变分相场模型形成对比，后者无法预测裂纹萌生 [7]。相比之下，完整模型已能够再现并解释弹性脆性材料中一系列复杂的断裂问题，包括

电子邮箱：jdolbow@duke.edu (John E. Dolbow)

硬和软 [8, 9]。在此，我们通过将模型应用于热-力学问题，再次说明强度与能量学如何相互竞争并支配裂纹萌生。

具体而言，我们考虑三个热-力学断裂问题，涵盖从大型预存裂纹扩展到材料本体中裂纹萌生的广泛情形。第一个问题涉及玻璃板的受控淬火。该实验主要考察大型预存裂纹如何在热-力载荷作用下扩展。在此类条件下，通常假定其行为由格里菲斯能量学支配。自 Yusa 和 Sano 首次提出这一问题以来 [10], , 人们已通过实验 [11, 12, 13]和数值方法对其进行了广泛研究。研究者曾采用尖锐裂纹模型 [14, 15, 16] 和正则化模型 [17, 18, 19, 20, 21]对该实验进行仿真。这些仿真在有限范围的条件下再现了裂纹形态，涵盖从相对温和的热冲击到较高热载荷的情形。相比之下，本文将证明，完整模型能够捕捉各种热载荷下的完整断裂行为范围，并将以往的研究整合到同一框架中。此外，我们还将表明，即使在这一典型的大裂纹扩展问题中——其名义上由格里菲斯能量学主导——材料强度仍是一个重要影响因素。

第二个问题涉及受红外辐射的陶瓷圆盘。该实验最初旨在测量材料的温度相关强度和温度相关临界能量释放率 [22, 23, 24]。为此，研究人员对该材料的带缺口圆盘和完整圆盘进行红外加热。有趣的是，这两种实验方案产生了截然不同的裂纹形态。在带缺口工况下，裂纹萌生后笔直地贯穿试样，将其一分为二。相比之下，完整情形会产生裂纹分叉。已有多项研究尝试使用相场断裂模型重现实验结果 [25, 26, 27, 28, 29]。值得注意的是，在这些研究中，常常使用带缺口几何形状来模拟带缺口圆盘和完整圆盘的裂纹形态。与此不同，我们将展示，通过实现完整模型，可以依据原始实验配置重现全部实验结果。

最后一个问题涉及一组实验：核燃料芯块在裂变过程的副作用下承受了极大的热-力载荷 [30]。具体而言，芯块经历了两种不同的功率脉冲。所有芯块都经受住了低功率脉冲，而较高功率的脉冲则导致部分芯块发生断裂。尽管此前已有一些建模研究尝试分析这类燃料发生断裂的可能性 [31], , 但 [30] 中描述的早期实验从未得到复现。本文将展示完整模型复现实验观测的能力，并说明材料强度在核燃料应用中的重要性。

需要强调的是，陶瓷圆盘和燃料芯块这两个问题所产生的热力场在空间上都相当均匀。在此前的工作中 [32], , 我们已证明，在材料强度场中引入空间随机性，是复现实验观测所必需的。这种扰动与强度测量结果完全一致，因为实验观测通常表明，单轴强度、双轴强度等测量值存在一定变化。Zeng 等人 [32] 研究了材料强度场的两种表示方式：一种是具有可控相关长度的平移模型，另一种是简单的随机镶嵌场（无空间相关性）。本研究再次采用后一种方法，以帮助正则化各种实验的模型。

本文结构安排如下：第2节首先介绍相场断裂的完整模型及其时空离散方案。第3节展示上述三个示例问题中完整模型的建模能力。最后，第4节总结本研究的主要发现。

2. 问题 formulation

本节介绍本研究采用的物理模型。首先依次描述热模型、力学模型和断裂模型，随后讨论求解耦合非线性方程组的离散策略及相关实现细节。

考虑一个有界域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，其边界为 $\partial\Omega$，外向单位法向量$\mathbf{n}$，受到热-机械载荷作用。系统在时间 $t \in (0,T]$ 内的状态由三个独立变量定义：

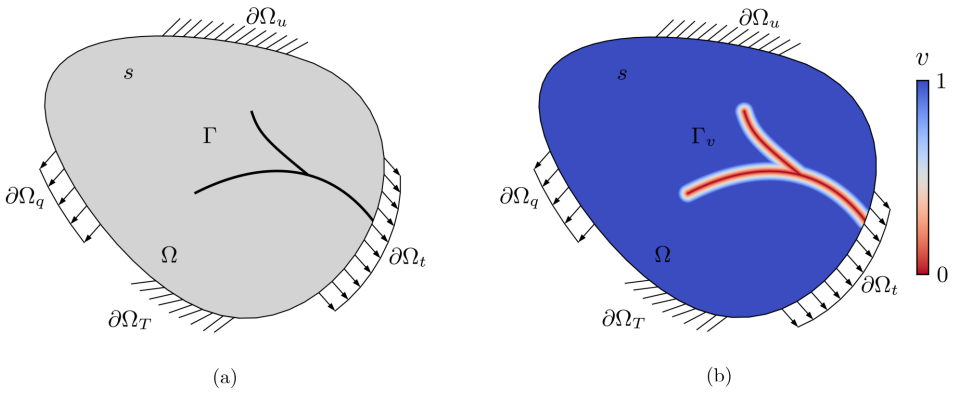


图1：尖锐裂纹模型（a）和一般相场断裂模型（b）的示意图。

位移场 $\boldsymbol{u}(\mathbf{X}\ t)$、温度场 $T(\mathbf{X}\ t)$以及相场变量 $v(\mathbf{X}\ t)$，其中 $\mathbf{X}$表示区域内的材料点。以下各小节将介绍支配这些场的物理模型，并参照图 1a中的示意图。

2.1. 热问题公式

对于热载荷，边界分为狄利克雷部分和诺伊曼部分。在狄利克雷边界 $\partial\Omega_T$上，给定温度 T；而在边界的诺伊曼部分 $\partial\Omega_q$上，给定热通量 $\bar{q}$。

在本文中，ρ 表示密度，c_p 表示比热容，$\boldsymbol{\kappa}$表示热导率张量[1]，，s 表示体积热源。热方程为

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + s, \quad (\mathbf{X}, t) \in \Omega \times [0, \mathsf{T}], \tag{1}$$

边界条件为

$$T = \bar{T}, \quad (\mathbf{X}, t) \in \partial\Omega_T \times [0, \mathsf{T}], \tag{2a}$$
$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \bar{q}, \quad (\mathbf{X}, t) \in \partial\Omega_q \times [0, \mathsf{T}], \tag{2b}$$

初始条件为

$$T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega. \tag{3}$$

热流密度$\mathbf{q}$ 由下式给出

$$\mathbf{q} = -\kappa \cdot \nabla T \tag{4}$$

在本研究中，温度场与位移场耦合，但不与相场耦合。假设热学性能与相场无关，这意味着热量穿过正则化裂纹时不会受到干扰。有关在正则化框架下耦合热效应与断裂效应的进一步讨论及其他表述方式，请参阅 [33]。

[1]我们注意到，一般而言，热学性能会随位置和温度变化。为简洁起见，这些依赖关系未予显式表示。

2.2. 力学问题表述

从时间 $t \in (0, \mathrm{T}]$, 内，区域中材料点的位置从$\mathbf{X}$ 移动到$\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \boldsymbol{u}(\mathbf{X}, t), \tag{5}$$

其中， $\boldsymbol{u}(\mathbf{X}\ t)$为位移场。假设变形和变形梯度较小，则变形可由无穷小应变张量描述

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T). \tag{6}$$

应变的力学部分$\mathbf{E}_m$ 为

$$\mathbf{E}_m(\boldsymbol{u}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{u}) - \mathbf{E}_T, \tag{7}$$

其中，热应变$\mathbf{E}_T$ 由热膨胀系数（CTE） α 和当前温度 T 与参考温度 T之间的温度差˜给出:

$$\mathbf{E}_T = \alpha\Big(T(\mathbf{X}, t) - \tilde{T}\Big)\mathbf{I}, \tag{8}$$

其中$\mathbf{I}$ 为单位张量。

退化柯西应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 的本构关系为

$$\boldsymbol{\sigma} = g(v)\frac{\partial \psi_{ela}}{\partial \mathbf{E}_m}\big(\mathbf{E}_m(\boldsymbol{u})\big). \tag{9}$$

采用二次退化函数 [34]

$$g(v) = v^2, \tag{10}$$

以及储能函数

$$\psi_{ela}\big(\mathbf{E}_m(\boldsymbol{u})\big) = \frac{1}{2}\lambda\big(\operatorname{tr}\mathbf{E}_m(\boldsymbol{u})\big)^2 + \mu\mathbf{E}_m(\boldsymbol{u}) : \mathbf{E}_m(\boldsymbol{u}), \tag{11}$$

其中 $\mu > 0$ 和 $\lambda > -2/3\mu$ 为拉梅常数。

线动量平衡方程为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{b} = \rho\ddot{\boldsymbol{u}}, \quad (\mathbf{X}, t) \in \Omega \times [0, \mathrm{T}], \tag{12}$$

边界条件为

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}}, \quad (\mathbf{X}, t) \in \partial\Omega_u \times [0, \mathrm{T}], \tag{13a}$$
$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\boldsymbol{\tau}}, \quad (\mathbf{X}, t) \in \partial\Omega_\tau \times [0, \mathrm{T}], \tag{13b}$$

wit其中 h $\boldsymbol{b}$ 表示体力， $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ 表示表面牵引力。初始条件为

$$\boldsymbol{u}(\mathbf{X}, 0) = \boldsymbol{u}_0, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \tag{14a}$$
$$\dot{\boldsymbol{u}}(\mathbf{X}, 0) = \dot{\boldsymbol{u}}_0, \quad \mathbf{X} \in \Omega. \tag{14b}$$

2.3. 相场断裂模型

机械载荷和/或热载荷会引起变形，并可能导致裂纹萌生和扩展。尖锐裂纹 Γ 由弥散裂纹 Γ_v近似表示, 如图1所示。它由相场描述

$$v = v(\mathbf{X}, t), \tag{15}$$

其中 $v=0$ 表示完全断裂材料， $v=1$ 表示完整材料，如图 1b 所示。微力平衡的控制方程为：

$$\begin{cases} -g'(v)\psi_{ela}+\frac{3\delta G_c}{8\ell}(1+2\ell^2\Delta v)+c_e(\boldsymbol{u},v)=0 & \text{if } \dot{v}(\mathbf{X},t)<0 \\ -g'(v)\psi_{ela}+\frac{3\delta G_c}{8\ell}(1+2\ell^2\Delta v)+c_e(\boldsymbol{u},v)\geq 0, & \text{if } \dot{v}(\mathbf{X},t)\geq 0 \\ \dot{v}(\mathbf{X},t)=0, & \text{if } v(\mathbf{X},t)=0 \end{cases} ,(\mathbf{X},t)\in\Omega\times[0,\mathsf{T}]. \tag{16}$$

满足边界条件

$$\nabla v\cdot\mathbf{n}=0,\quad (\mathbf{X},t)\in\partial\Omega\times[0,\mathsf{T}], \tag{17}$$

并满足初始条件

$$v(\mathbf{X},0)=v_0(\mathbf{X}),\quad \mathbf{X}\in\Omega. \tag{18}$$

其中， G_c 表示断裂韧度（亦称临界断裂能量释放率）， ℓ 表示正则化参数（单位为长度）。

该模型通过在断裂控制方程 [35, 5, 6, 36]中加入外部微力 c_e ，纳入了任意材料强度面。 $c_e(\boldsymbol{u},\ v)$的具体形式取决于所采用的强度面 $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma})=0$ 。本文采用由下式确定的德鲁克-普拉格 [37] 强度面

$$\hat{\mathcal{F}}(I_1,J_2)=\sqrt{J_2}+\frac{\sigma_{ts}}{\sqrt{3}(3\sigma_{hs}-\sigma_{ts})}I_1-\frac{\sqrt{3}\sigma_{hs}\sigma_{ts}}{3\sigma_{hs}-\sigma_{ts}}=0, \tag{19}$$

其中， σ_{hs} 和 σ_{ts} 分别表示静水强度和单轴抗拉强度， I_1 和 J_2 是退化柯西应力 $\boldsymbol{\sigma}$的不变量：

$$I_1=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}, \tag{20}$$

$$J_2=\frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{\sigma}-\frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}\Big):\Big(\boldsymbol{\sigma}-\frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}\Big), \tag{21}$$

为将式（19）纳入完备相场模型，外部驱动力 c_e 的形式为 [36, 9]:

$$c_e(I_1,J_2;\ell)=\beta_2\sqrt{J_2}+\beta_1 I_1+v\Big(1-\mathrm{sgn}(I_1)\Big)\psi_{ela}, \tag{22}$$

with

$$\beta_1=-\frac{1}{\sigma_{hs}(\mathbf{X})}\frac{\delta G_c}{8\ell}+\frac{2\psi_{hs}}{3\sigma_{hs}(\mathbf{X})},\quad \beta_2=-\frac{\sqrt{3}\Big(3\sigma_{hs}(\mathbf{X})-\sigma_{ts}(\mathbf{X})\Big)}{\sigma_{hs}(\mathbf{X})\sigma_{ts}(\mathbf{X})}\frac{\delta G_c}{8\ell}-\frac{2\psi_{hs}}{\sqrt{3}\sigma_{hs}(\mathbf{X})}+\frac{2\sqrt{3}\psi_{ts}}{\sqrt{3}\sigma_{ts}(\mathbf{X})}, \tag{23}$$

and

$$\psi_{ts}=\frac{\sigma_{ts}^2(\mathbf{X})}{2E},\quad \psi_{hs}=\frac{\sigma_{hs}^2(\mathbf{X})}{2K}, \tag{24}$$

其中， E 和 K 分别表示杨氏模量和体积弹性模量。本文通常认为材料强度在空间上存在变化。

强度面（19）给出的单轴抗压强度为：

$$\sigma_{cs}=\frac{2\sigma_{hs}\sigma_{ts}}{3\sigma_{hs}+\sigma_{ts}}. \tag{25}$$

参数 δ 经过设计，使模型能够恢复类 Griffith 裂纹扩展。其表示为 [9]

$$\delta = \frac{\sigma_{ts} + (1+2\sqrt{3})\sigma_{hs}}{(8+3\sqrt{3})\sigma_{hs}} \frac{3G_c}{16\psi_{ts}\ell} + \frac{2}{5}. \tag{26}$$

正则化长度 ℓ 应小于控制方程中的最小材料特征长度；更多详情请参见 [36] 。通常采用的上界为 $\ell < \frac{3G_c E}{8\sigma_{ts}^2}$。对于有限的正则化长度，该模型会产生一个有效强度面，其表达式为

$$\hat{\mathcal{F}}^{\ell}(I_1, J_2) = \frac{J_2}{\mu} + \frac{I_1^2}{9K} - c_e(I_1, J_2; \ell) - \frac{3\delta G_c}{8\ell} = 0. \tag{27}$$

当 $\ell \to 0$趋于极限时，该近似面趋近于 Drucker-Prager 强度面（19）（见图 2）。

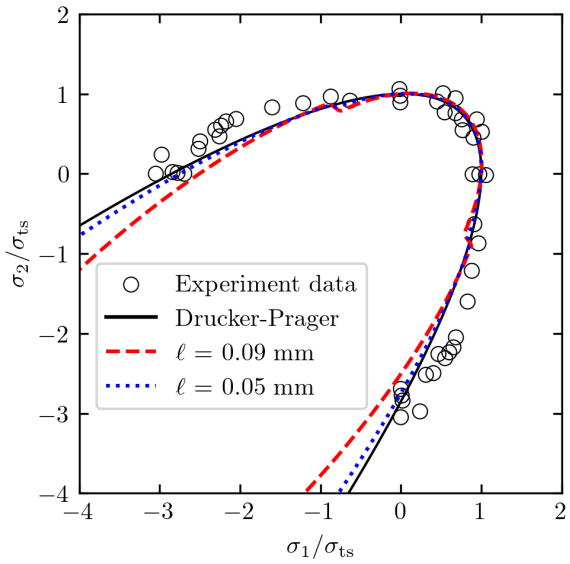


图 2：Sato 等人对石墨的实验强度与 [38], Drucker-Prager强度面（19）（定义为 $\sigma_{ts} = 27$ MPa 和 $\sigma_{hs} = 27.72$MPa）以及近似强度面（27）的比较。随着正则化长度 ℓ 减小，近似强度面（虚线）渐近趋近于 Drucker-Prager 强度面。

控制方程的完整列表见框1。

热:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + s, \qquad (\mathbf{X}\ t) \in \Omega \times [0, \mathrm{T}],$$

$$q = -\kappa \cdot \nabla T, \qquad (\mathbf{X}\ t) \in \Omega \times [0, \mathrm{T}],$$

$$T = \bar{T}, \qquad (\mathbf{X}\ t) \in \partial\Omega_T \times [0, \mathrm{T}],$$

$$\bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} = q, \qquad (\mathbf{X}\ t) \in \partial\Omega_q \times [0, \mathrm{T}],$$

$$T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \qquad \mathbf{X} \in \Omega,$$

力学:

$$\nabla \cdot \left(v^2 \frac{\partial \psi_{ela}}{\partial \mathbf{E}_m} (\mathbf{E}_m(\boldsymbol{u})) \right) + \boldsymbol{b} = \rho \ddot{\boldsymbol{u}}, \qquad (\mathbf{X}\ t) \in \Omega \times [0, \mathrm{T}]$$

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}}, \qquad (\mathbf{X}\ t) \in \partial\Omega_u \times [0, \mathrm{T}],$$

$$\left(v^2 \frac{\partial \psi_{ela}}{\partial \mathbf{E}_m} (\mathbf{E}_m(\boldsymbol{u})) \right) \cdot \mathbf{n} = \bar{\boldsymbol{\tau}}, \qquad (\mathbf{X}\ t) \in \partial\Omega_\tau \times [0, \mathrm{T}],$$

$$\boldsymbol{u}(\mathbf{X}, 0) = \boldsymbol{u}_0(\mathbf{X}), \qquad \mathrm{x} \in \Omega,$$

$$\dot{\boldsymbol{u}}(\mathbf{X}, 0) = \dot{\boldsymbol{u}}_0(\mathbf{X}), \qquad \mathrm{x} \in \Omega,$$

断裂:

$$-g'(v)\psi_{ela} + \frac{3\delta G_c}{8\ell}(1 + 2\ell^2 \Delta v) + c_e(\boldsymbol{u}, v) = 0 \qquad \text{如果 } v(\mathbf{X}\ t) < 0 \quad (\mathbf{X}\ t) \in \Omega \times [0, \mathrm{T}],$$

$$-g'(v)\psi_{ela} + \frac{3\delta G_c}{8\ell}(1 + 2\ell^2 \Delta v) + c_e(\boldsymbol{u}, v) \geq 0, \qquad \text{如果 } v(\mathbf{X}\ t) \geq 0 \quad (\mathbf{X}\ t) \in \Omega \times [0, \mathrm{T}],$$

$$\dot{v}(\mathbf{X}\ t) = 0, \qquad \text{如果 } v(\mathbf{X}\ t) = 0 \quad (\mathbf{X}\ t) \in \Omega \times [0, \mathrm{T}],$$

$$\nabla v \cdot \mathbf{n} = 0, \qquad (\mathbf{X}\ t) \in \partial\Omega \times [0, \mathrm{T}],$$

$$v(\mathbf{X}, 0) = v_0(\mathbf{X}), \qquad \mathbf{X} \in \Omega。$$

框 1

2.4. 空间与时间离散

为求解前几小节所述方程组的近似解，我们在空间上采用标准有限元，在时间上采用有限差分。位移、温度和相场采用标准四节点四边形单元进行二维问题的近似，并采用八节点六面体单元进行三维问题的近似。

本文中，热子问题与力学子问题采用单向耦合，而力学子问题与相场子问题则完全耦合。在每个时间步开始时，更新温度场并将其保持不变。随后采用交错格式 [39]，在力学子问题与相场子问题之间迭代求得最优解。相场参数 v 的不可逆性约束采用原始-对偶活动集策略 [40]施加。实际上，只有当 v 低于阈值时才施加不可逆性约束，换言之，当 $v \leq v_{\mathrm{th}}$时。在本文中，$v_{\mathrm{th}} = 0.05$。

对于时间离散，力学子问题和热子问题采用不同的积分器。热学求解采用一阶隐式方法进行离散。对于力学子问题，仅在考虑惯性效应时才需要进行时间离散。在这些情况下，采用 HHT-α 格式 [41] 对弹性动力学子问题进行离散。具体而言，HHT-α格式采用参数（$\alpha^{hht} = -0.3$，$\beta^{hht} = 0.4225$，$\gamma^{hht} = 0.8$），该方法具有二阶精度且无条件稳定。对于热子问题，采用一阶隐式欧拉法

格式。虽然在考虑惯性效应时，当然可以采用二阶格式，以确保与位移更新保持一致，但对于本文所研究的问题，为获得足够精确的结果，并未发现有此必要。

采用完整的相场断裂模型后，已证实离散断裂韧度会受到网格尺寸的影响。为抵消这一影响，我们在 δ 的表达式中引入了网格相关修正：

$$\delta = \left(1 + \frac{3\mathrm{h}}{8\ell}\right)^{-2} + \frac{\sigma_{ts} + (1+2\sqrt{3})\sigma_{hs}}{(8+3\sqrt{3})\sigma_{hs}} \frac{3G_c}{16\psi_{ts}\ell} + \left(1 + \frac{3\mathrm{h}}{8\ell}\right)^{-1} \frac{2}{5}. \tag{28}$$

该修正是针对线性三角形单元和四面体单元推导的，但已证明其对本研究中使用的单元类型也有良好的适用性。

所有情况下，结果均通过在 RACCOON [42], 中实现获得。RACCOON 是一款基于 MOOSE框架 构建的开源、大规模并行有限元代码 [43, 44, 45]。

3. 数值算例

为评估完整相场断裂模型在热-力耦合条件下的能力，我们考虑了三个具有代表性的问题，涵盖多种断裂成核情形：从大型预存裂纹扩展、近乎均匀的应力下成核，以及局部化和分布式应力场并存的中间情形。这些算例共同覆盖了广泛的加载条件、试样几何形状和应力状态，使我们能够评估模型对断裂起始和演化过程的预测性能。在以下小节中，我们将介绍各项模拟结果对应的实验配置、建模假设和离散化细节，并比较模拟与观测到的断裂模式[2]。这些案例研究不仅展示了模型的多功能性，也凸显了在脆性断裂建模中将材料强度作为独立属性纳入考虑的重要性。

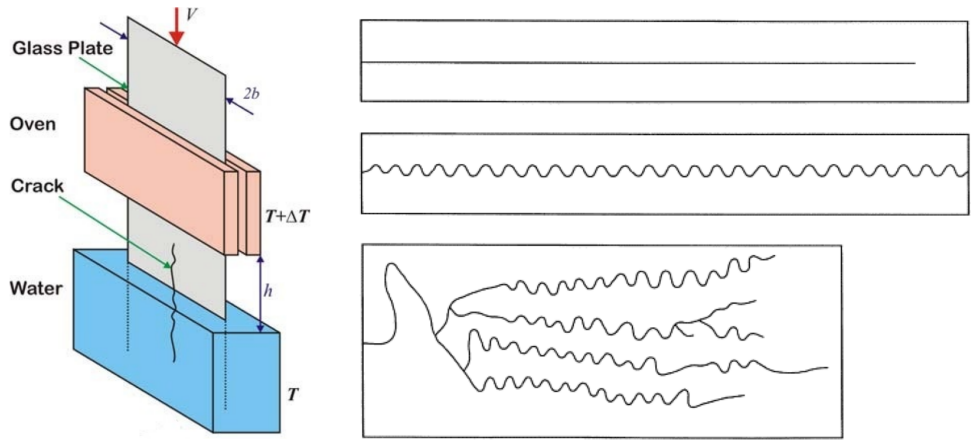
3.1. 玻璃板渐进淬冷

本节考察完整模型能否捕捉经历突然但经过精心控制的冷却的玻璃板中的裂纹演化模式。这个问题很有意思，因为传统观点认为，这种现象可由受能量学支配的裂纹扩展来解释。然而，接下来我们将展示新结果，说明强度始终是一个影响因素。

如第 1 节所述，多位研究者通过实验和计算研究了这一类问题。尽管玻璃板几何形状的某些方面存在差异，但加载条件大多遵循图 3a 所示的标准设置。在实验中，一块宽度为 $2b$ 、前缘带有初始裂纹的细长玻璃试样以恒定速度移动V。试样首先经过烘箱，并被加热至所需的均匀温度 T_H。前缘离开烘箱后不久，便进入温度为 T_C 的冷浴。随着板继续移动，新的热材料不断浸入浴槽中，模拟淬冷过程。从温热的烘箱过渡到冷浴会产生骤然的温度梯度，进而形成热力应力场。

实验观察发现，板前缘处大型预存裂纹的演化受多个因素支配，例如板的几何形状、材料属性、施加的速度，以及烘箱与浴槽之间的间隙。粗略地说，随着载荷幅值增大，裂纹形态会发生转变。载荷较小时，初始裂纹仅沿其初始方向直线扩展，如图 3b 顶部图所示。随着载荷增大，这种形态会转变为振荡模式，如图 3b 中间图所示。最后，当载荷足够大时，还会观察到裂纹回跳

[2]附录中还提供了实验包络之外参数的其他仿真结果。



(a) (b)

图3：(a) 实验装置示意图 [18] ，用于玻璃板渐进淬冷，以及 (b) 一组来自 [46, 15], 的实验裂纹形貌照片，分别给出直线裂纹扩展、规则振荡扩展和混沌扩展各一例。

以及更不规则的扩展模式。图 3b 底部图所示的模式就是一个例子。

本文重点研究板厚为 e、烘箱与浴槽间隙为 h、热扩散长度为 D/V 且满足 $e < D/V < h$的实验构型，其中 D 为板的热扩散系数。此类构型可确保温度场沿厚度方向均匀，且速度方向上的温度场是比值 D/V的函数。关于实验装置各方面对所得热场影响的进一步讨论，见 [11]。

我们从推导板内温度场的解析表达式入手，开始分析该构型。我们假设扩散长度远小于浴槽与烘箱之间间隙的尺寸，从而可忽略二者之间发生的任何冷却。沿板的长度方向，温度场可分为三个区段，如图4所示。大致而言，它们包括完全浸入冷浴中的板段、完全位于烘箱中的板段，以及其间温度场逐渐形成梯度的区域。

为便于具体说明，我们定义一组坐标轴 $\mathbf{e}_x$，$\mathbf{e}_y$ ，使其方向分别与板的速度方向和板的高度方向一致，如图 4所示。冷浸入前沿的位置记为 x_C，因此在 $x \le x_C$ 的位置处，温度假定等于浴槽温度 $T_C = 23℃$。冷浸入前沿与均匀加热区域之间的温度演化可由平流-扩散方程描述

$$V\frac{dT}{dx} = D\frac{d^2T}{dx^2}. \tag{29}$$

具有移动冷前沿的一维热平流问题的解析解为

$$T(x,t) = T_H - (T_H - T_C)\exp\left(\frac{-V}{D}(x - V \times t)\right), \tag{30}$$

如图 4 中紫色所示 V/D 。本质上，随着该比值增大，浸入前沿附近温度场中的梯度变得更加陡峭。下文中的所有结果均假定温度场采用这种函数形式生成。

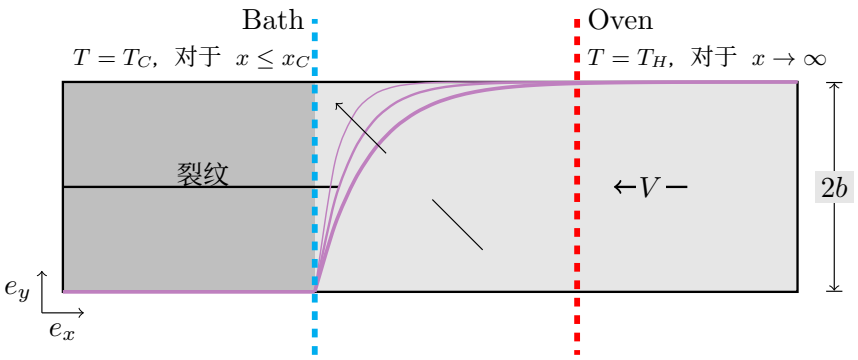
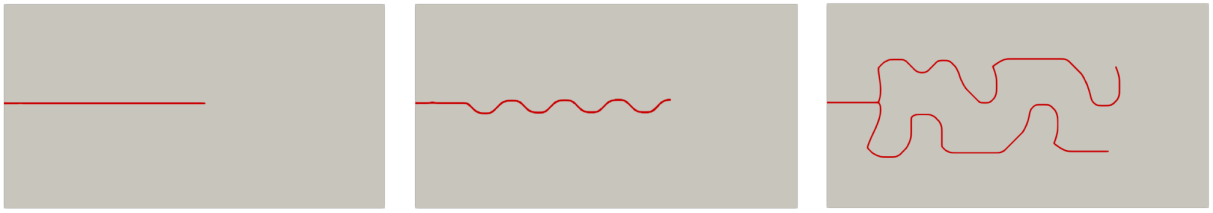


图 4：模拟几何结构示意图。温度场随热区与冷锋之间的 V/D 变化的过程如紫色曲线所示。

表 1：玻璃材料属性 [12]

	符号（单位）	R.T.
杨氏模量	E（GPa）	70
泊松比	ν	0.22
密度	ρ (10^3千克米$^{-3}$)	2.5
临界应力强度因子	K_c (MPa·m$^{0.5}$)	0.76
断裂韧度	G_c (Nm^{-1})	8.25
热导率	κ (Wm^{-1}K^{-1})	1.08
热扩散率	D(10^{-6}分钟^{2}秒$^{-1}$)	0.47
比热容	c_p (Jkg^{-1}K^{-1})	921
CTE	α (10^{-6}/K)	7.7
抗拉强度	σ_{ts} (MPa)	150
抗压强度	σ_{cs}	$7\sigma_{ts}$

模型所使用的材料属性见表 1。模拟针对半宽度为 $b = 8$ mm、初始裂纹长度为 5 mm 的板进行。正则化长度 ℓ 设为 0.03 mm，并采用了自适应细化网格，其最小网格尺寸为 $h = \ell/5$ 。为引入微小的对称破缺扰动，将初始裂纹沿 y方向均匀偏移 $+0.25$ mm。由于裂纹扩展速度相比材料的体波波速较慢，因此在这些仿真中忽略了惯性效应，并将位移子问题作为准静态结果求解。



(a) $\Delta T = 107°\mathrm{C}$　(a) $\Delta T = 147°\mathrm{C}$　(a) $\Delta T = 307°\mathrm{C}$

图 5：以 $V = 0.4$mm/s 获得的代表性裂纹形态及选取的温度跃变 ΔT。（a）直线裂纹扩展，（b）规则振荡扩展，（c）回跳和分叉，随后出现混沌振荡扩展。

我们首先展示对观测到的裂纹形态趋势的定性再现。图5中，

展示了采用 $V = 0.4$ mm/s 并选取温度跃变 ΔT 得到的一系列裂纹形态。当温度为 $\Delta T < 47$°C 时，未观察到裂纹扩展。在 67°C $\leq \Delta T \leq 127$°C 的范围内，裂纹沿完全笔直的路径扩展。温度跃变增至 147–167°C 时，裂纹沿规则的振荡轨迹扩展。随着 ΔT 进一步增加，裂纹会发生分叉。在 $\Delta T = 307$°C 时，初始裂纹先发生回跳，随后继续向前扩展，呈现不规则波浪形态。

基于在不同配置下开展的多项实验，人们提出了两个无量纲量，用于描述各种断裂响应类型 [17, 16]。第一个是佩克莱数，即对流效应与扩散效应之比：

$$P = \frac{bV}{D}. \tag{31}$$

本研究关注对流主导区域，其中 $P > 1$。第二个无量纲量是热冲击与断裂阻力之比：

$$R = \frac{\alpha E \Delta T \sqrt{b}}{K_c}, \tag{32}$$

其中，α 为热膨胀系数，E 为杨氏模量，ΔT 为温度跃变。上述的 K_c 指临界应力强度因子，在平面应力条件下，它与断裂韧度 G_c 的关系为：

$$G_c = \frac{K_c^2}{E}. \tag{33}$$

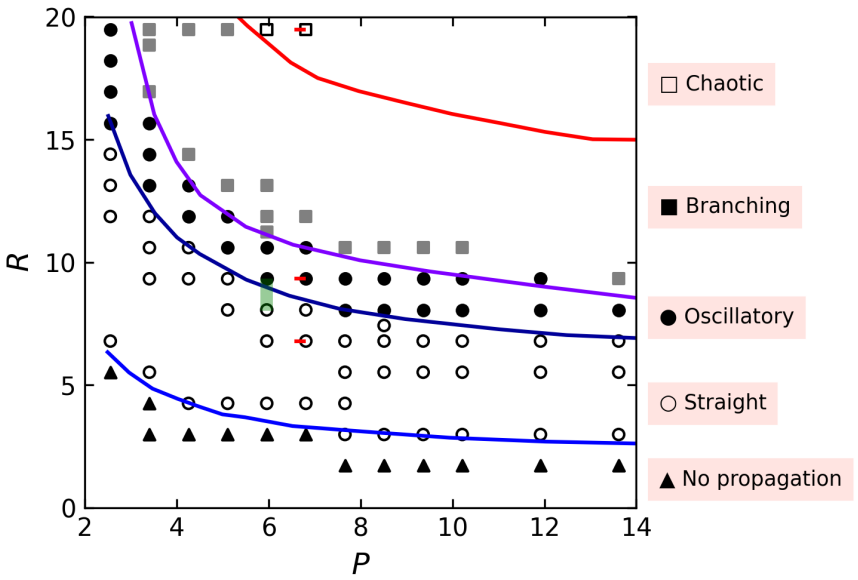


图 6：由无量纲参数 P和 R刻画的断裂模式相图。曲线为汇总自一系列实验观测和先前模拟结果的裂纹形态边界。从下至上，每条曲线分别提取自 [11], [47], [16], 和 [48]。关于这些曲线的详细说明，请参见 [16]。标记表示使用完整模型得到的相场建模结果。每个带有红色左侧刻痕的标记对应于图5所示的裂纹形态。绿色阴影区域对应于图8中的结果。

为了探究裂纹形态的形成与演变，我们在相空间中的规则网格上计算了多条裂纹路径 $(P,\ R)$，如图6所示。相空间分为五个区域，每个区域对应一种不同的断裂响应。这些区域之间的边界由

通过实验观测或文献中已有的模拟结果确定的转变构成（见图注）。使用完整模型得到的模拟结果以标记表示。尽管相空间中的计算网格相对稀疏，但不同标记类型之间的转变与先前研究确定的边界高度吻合。



(a) 25% strength, #1　(b) #2　(c) #3



(d) 100% strength, #1　(e) #2　(f) #3

图 7：相同温度跃变下、不同强度面对应的裂纹扩展快照。(a)–(c) 强度面相对于原始值缩减至 25% 的材料的扩展形态。(d)–(f) 采用原始玻璃强度的试样，具体数值见表 1。

长初始裂纹的扩展通常被视为能量主导过程，其响应由势能与断裂韧度之间的 Griffith型竞争所支配。然而，借助完整模型，我们现在证明，材料强度也会产生影响，甚至能够决定最终的裂纹形态。图7展示了两组在不同材料强度下获得的裂纹演化快照：一组采用表 1所列的强度，另一组则作为对比，将强度降低至 25%。在第一帧中，两种情况下已有裂纹均向下扩展，并在试样上半部形成弯曲拐角。在第二帧中，较弱材料在弯曲拐角处产生的应力状态超过其强度，导致第二分支成核，最终形成音叉形模式。相比之下，较强材料能够承受弯曲拐角处的载荷，裂纹沿单一振荡路径扩展。这些结果清楚表明，即使对于涉及大裂纹扩展的问题，准确表征材料强度也至关重要。

在直线断裂模式与振荡断裂模式之间的相边界处（图6），存在一个渐变过渡区。图8 展示了佩克莱数 P固定时的一系列裂纹形态，这些形态对应断裂驱动数 R逐渐增大的取值（从下到上）。当 R 取值较小时（图8a-c），裂纹会发生几次振荡，振幅逐渐减小，随后回到中心线。随着 R 增大（图8d），振荡次数增加。超过这个过渡区后，路径振荡趋于稳定，但振荡形式会发生变化，如下文所述。

图9 给出了相图中完全处于振荡区内的三个典型案例的结果。图中包含裂尖位置、断裂模式和裂尖速度的信息。为便于比较，结果采用与 [16], 中的（图15）类似的呈现方式。利用相场模型获得结果时，根据 $v = 0.05$ 等值线确定裂尖位置。随后，根据两个时间步内移动的总距离计算裂纹尖端速度。

得到的裂纹路径 $P = 6.9$ $R = 8$ （图 9a）呈现正弦波形，每个周期的前半段

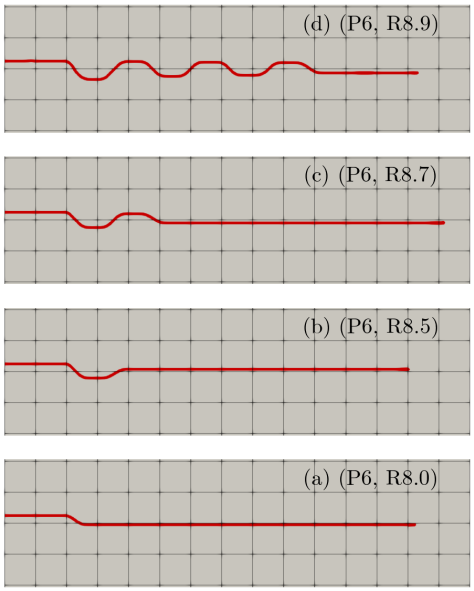


图 8：裂纹路径振荡且振幅逐渐衰减的示例。(a)-(d) 为相应（P, R）区域的相场模型结果，呈现出振幅逐渐衰减的趋势。网格尺寸为 $0.25b \times 0.25b$。

和后半段彼此对称，扩展方向平滑变化。可以看出，裂纹尖端速度保持相对恒定，与浸入速度相当。

相比之下， $P = 6.9$ $R = 10.9$ （图 9b）中得到的裂纹形态显示，裂纹尖端速度随时间变化，并在一个周期内间歇性停滞。停滞后，裂纹首先沿 x 方向扩展，然后平滑地转向 y 方向，速度略有增加，从而形成由平直转为圆弧的路径。在一段几乎沿 y 方向延伸的短距离末端，裂纹再次停滞。下一个半周期重复这一行为，但转向相反方向。裂纹尖端停滞使浸入前沿得以追上，并在附近提供足够的能量和适当的应力状态，使裂纹继续扩展。

最后，得到的裂纹形态对应于 $P = 3.5$ $R = 13.1$ （图9c），其裂尖速度变化幅度超过一个数量级。与前一个示例类似，在停滞点之后，裂纹首先几乎沿着 x 方向，以接近浸入速度的速度扩展。随后，裂纹沿曲线路径扩展，速度显著增加。曲线末端是一段几乎垂直于浸入方向的部分，期间有些阶段会出现轻微回跳。每个“半周期”都在一个停滞点结束，之后下一个“半周期”从该点开始，并急转近90°。

3.2. 热冲击下的薄圆盘断裂

本节考察完整模型再现并解释一系列陶瓷圆盘辐射加热实验所报告断裂模式的能力。该实验装置最初由Awaji等人设计 [49, 50]，随后由Honda等人改进 [22, 23, 24]。这些实验被提出作为传统淬冷热冲击测试方法的替代方案，因为它们无需使用冷却介质。圆盘中的裂纹会因空间分布相当均匀的应力状态而萌生，也会从V形缺口处的局部应力集中位置萌生。

Honda等人开展的系列实验 [22, 23, 24] 涉及材料类型、圆盘尺寸和初始温度的变化。本研究聚焦于其中以半径为15 mm、厚度为1 mm且初始温度为室温的氧化铝圆盘进行的实验。在这些实验中，圆盘的中心表面区域（半径为7.5 mm）涂覆了石墨，以增强红外辐射吸收。测试了两种样品：完整圆盘和带缺口圆盘，缺口

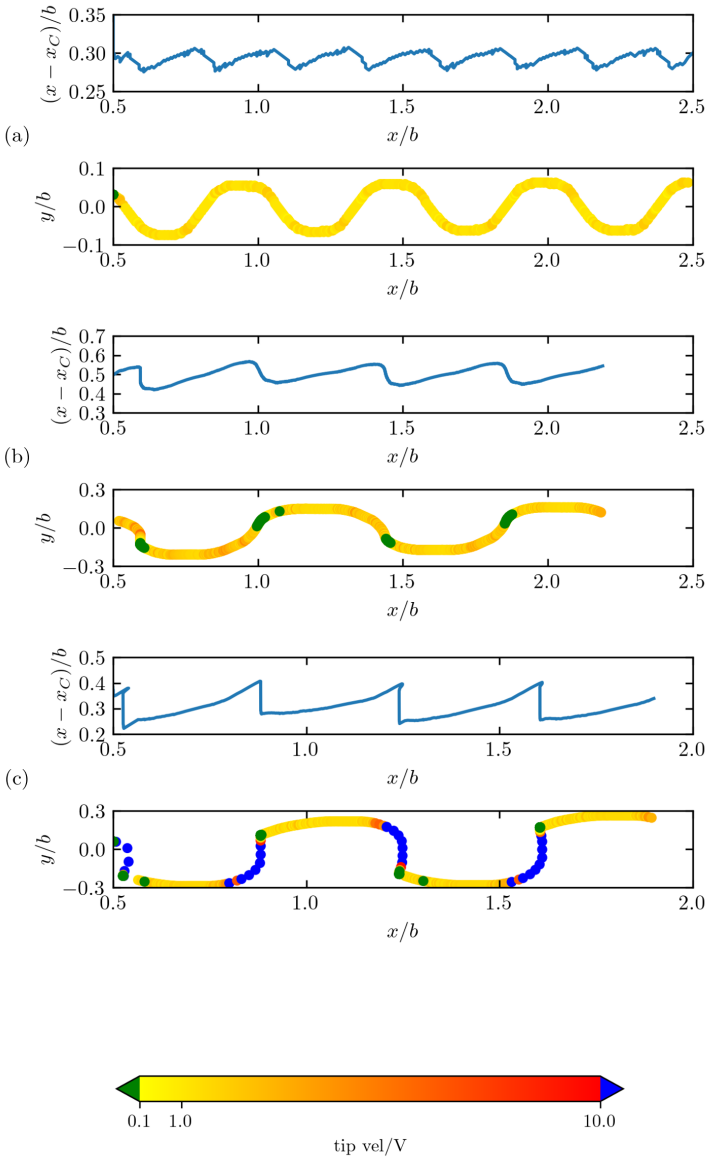


图 9：在 (a) ($P = 6.9$, $R = 8.0$)、(b) ($P = 6.9$, $R = 10.9$)和 (c) ($P = 3.5$, $R = 13.1$)条件下获得的裂纹尖端位置和速度剖面示例。每种情况下，底部图显示裂纹尖端位置序列，各点根据瞬时裂纹尖端速度（以浸入速度归一化）着色。顶部图给出了相应的裂纹尖端位置随其与浸入前沿距离变化的关系。这三种剖面分别代表文献 [16] 中此前报告的典型行为。

长度为 2 mm。样品几何形状的详细示意图见图 10a。每个圆盘均放置在一台定制仪器中，如图10b所示。移除两侧阻挡红外辐射的挡板后，圆盘的涂层区域迅速升温。由此产生的温度梯度引发了足以导致断裂的热机械应力。使用声发射探测器记录挡板打开的时刻（即加热开始的时刻）以及裂纹萌生的时刻。一对位于距试样中心10 mm处的热电偶记录温度。报告的断裂瞬间温度为36。5±12.3°C和

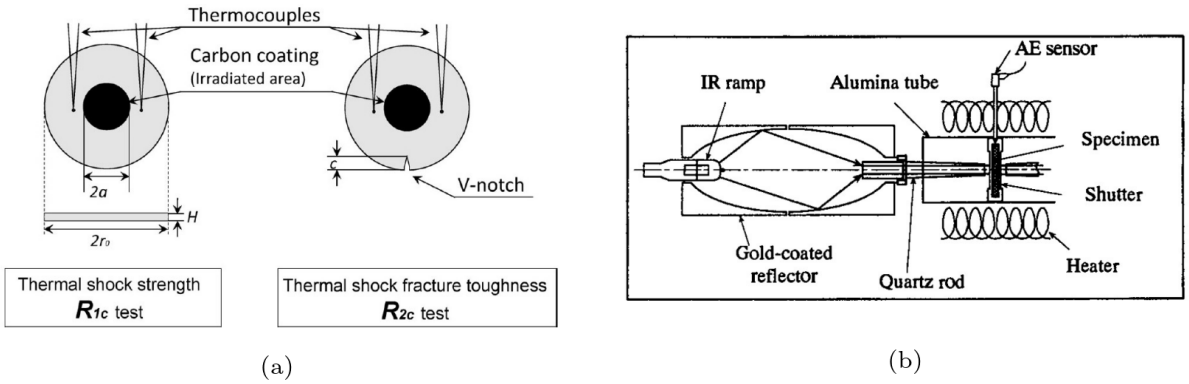


图10：（a）用于断裂“强度测试”（左）和断裂“韧性测试”（右）的实验样品示意图（转载自 [24]）。（b）用于快速加热中心碳涂层区域的实验装置，转载自 [22]。

带缺口和完整试样的温度分别为 91.5±18°C。

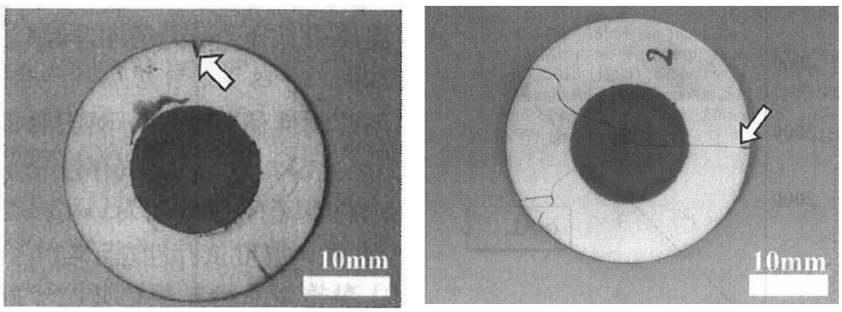


图 11：典型裂纹形态：（a）带缺口圆盘 [22], 和（b）完整圆盘 [23]。箭头指示了各情况下裂纹萌生的位置。

这两项实验在许多方面有所不同，其中或许最引人关注的是观察到的断裂模式。对于带缺口样品，一条直裂纹从缺口处贯穿整个圆盘，如图11a所示。相比之下，对于完整样品，裂纹在距边缘约 2–3 mm 处萌生，随后径直向圆盘中心扩展，接着分叉并弯曲，最终到达对边，如图11b所示。

对于以下模拟结果，采用了若干建模假设。由于试样较薄且两面均受热，因此将问题近似为处于平面应力条件下的二维圆盘。假设材料在室温（R.T.）23°C时无应力。就热载荷而言，忽略了试样与周围空气及夹具接触造成的热损失。将辐射加热近似为作用于石墨涂层表面对应区域内恒定且空间均匀的体积热源。为使模型与实验相校准，在一系列体积热源强度 γ 取值下进行了热模拟。尽管此次校准并不全面，但发现取值为 $\gamma = 0.6\mathrm{GW/m^3}$ 时，热电偶所在位置的温度落在完整圆盘实验观测到的范围内。

模型所用的材料属性见表 2。在所考察的温度范围内

表2：氧化铝的热学和力学性能取自 [23] ，强度性能取自 [51]。

性质/参数	符号（单位）	R.T.	200°C	400°C	600°C	800°C
杨氏模量	E（GPa）	380				
泊松比	ν	0.22				
密度	ρ (10^3千克米$^{-3}$)	3.90				
断裂韧度	G_c (Nm^{-1})	27				
热导率	κ (Wm^{-1}K^{-1})	27.7	21.0	14.8	10.2	9.0
比热容	c_p (Jkg^{-1}K^{-1})	888	962	1116	1376	1256
CTE	α (10^{-6}/K)	4.5	6.6	8.8	11.0	13.3
平均单轴抗拉强度	$\bar{\sigma}_{ts}$ (MPa)	240 [51]				
抗压强度	σ_{cs}	$10\times\sigma_{ts}$				

，氧化铝的热学性能变化显著。为考虑这一点，依据实验报告的数据拟合了与温度相关的属性。采用正则化长度 ℓ 0.03 mm 和自适应细化网格进行仿真，最细网格尺寸设为 $h = \ell/5$。相对于体波波速，这些问题中的裂纹扩展速度非常快，因此纳入了惯性效应。初始时间步设为 0.05s，并一直采用至断裂发生；此时将时间步减小至 1×10^{-7}s，以解析动态裂纹扩展。仅对于带缺口圆盘的情况，利用问题的对称性，仅对区域的一半进行显式建模。

为简化起见，我们首先报告断裂开始前的结果。图中给出了带缺口圆盘和完整圆盘的模拟温度场随时间和径向位置的变化情况12。对于带缺口工况，图中曲线对应穿过缺口的径向线。在两种情况下，温度场均表明试样中心温度在早期大幅升高，这与预期一致。随着时间推移，热扩散使整个试样逐渐升温。热场会在区域内产生应力。图中给出了环向和径向应力分量随径向位置的变化情况12。热量在中心迅速积聚时，试样内部最初会承受压应力，而外部区域则以环向拉应力为主。

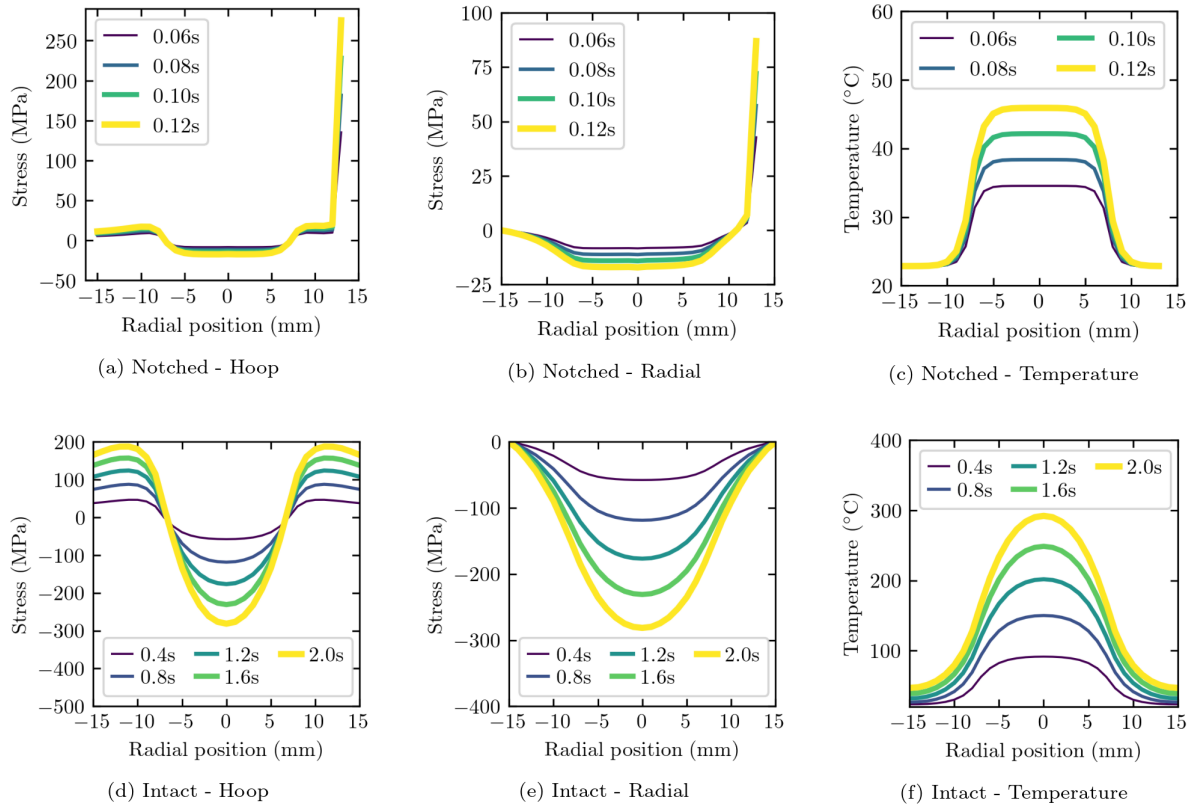
对于带缺口圆盘，缺口会使应力场集中。缺口尖端的环向应力呈现奇异性，因此其有限元近似与网格相关。值得注意的是，尽管材料强度很快就被超过，裂纹并不会立即从缺口尖端萌生。

相比之下，对于完整圆盘，应力分布相对于圆盘中心高度对称。事实上，完整圆盘的结果（图12d-f）代表了穿过区域中心的任意径向线上的情况。值得注意的是，在断裂开始之前，最大拉伸环向应力出现在距边缘约 3mm 的位置。该位置恰好与完整情形下报告的裂纹萌生位置一致。

表3：断裂前一刻，距中心 10 mm 处测得的温度（以 [22] 报告）与模拟温度的比较。

样品类型	带缺口	完整
实验	36.5 ± 12.3°C	91.5 ± 18.0°C
模拟	30.6°C	78.4°C

两种工况下热力场的差异导致了截然不同的裂纹萌生时间，这并不令人意外。表3 比较了断裂时探头位置处实验记录的温度与模拟温度。需要指出的是，体积热源的大小经过标定，以便使完整情形下的模拟温度与实验温度良好吻合。值得注意的是，对于带缺口工况，模拟得到的热电偶位置温度同样处于实验结果的范围内。下文将详细介绍随后发生的断裂过程



(a) Notched - Hoop (b) Notched - Radial (c) Notched - Temperature

(d) Intact - Hoop (e) Intact - Radial (f) Intact - Temperature

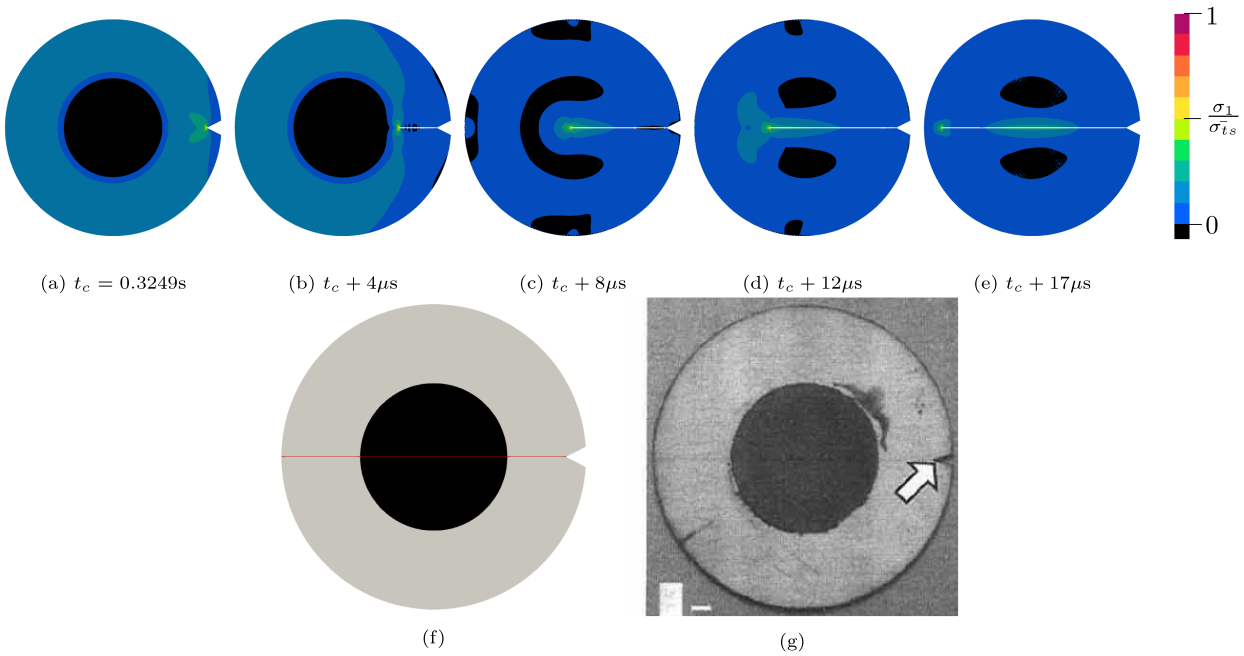
图12：裂纹萌生前，沿陶瓷圆盘直径的模拟应力分量（环向和径向）及温度分布。结果由功率为0.6GW/m^{3}的中心热源获得。缺口尖端位于13mm处。

分别针对两种情况的响应。

3.2.1. 带缺口圆盘断裂

就断裂结果而言，我们首先介绍较为简单的带缺口试样工况。图13a-e给出了一系列第一主应力的快照。如前所述，缺口会产生应力奇异性，缺口尖端处的应力场很快就会超过材料强度。需要指出的是，违反强度面是裂纹萌生的必要条件，但并非充分条件。尽管奇异应力场取决于网格，但裂纹萌生时间对网格分辨率相对不敏感。事实上，在采用完整模型进行的所有仿真中，裂纹均在缺口尖端处约0.3s时萌生。

采用完整模型得到的结果进一步表明，缺口尖端处的裂纹随后立即开始扩展，发生在 $t \approx 324$ms。裂纹径直穿过内部区域，尽管该区域处于双轴压缩应力状态，最终到达圆盘的对边，将其分成两块。如图13f-g 所示，这些结果与关于裂纹路径的实验观测一致。模拟预测，带缺口工况从开始加热到完全断裂的总时长约为 325ms。值得注意的是，整个裂纹扩展过程发生得相当快，仅持续 20μs。图13b-e 所示快照中的时间戳进一步突显了这一点。



(a) $t_c = 0.3249$s (b) $t_c + 4\mu$s (c) $t_c + 8\mu$s (d) $t_c + 12\mu$s (e) $t_c + 17\mu$s

(f) (g)

图13：带缺口圆盘的模拟结果。(a)-(e) 最大主应力演化快照。(f) 最终裂纹形态，加热区域以黑色标示，裂纹路径（经 $v < 0.5$ 筛选）以红色标示。为便于比较，(g) 中展示了实验结果。

3.2.2. 完整圆盘断裂

下面介绍完整圆盘断裂的建模。如上所述，由于试样几何形状和加载具有固有的对称性，完整情形下的应力状态仅沿径向变化。若不对模型施加任何扰动，模拟得到的裂纹成核形态显然并不真实。下文将介绍通过采用空间变化的强度场并将热源中心偏移 1mm，对完整情形的模型施加扰动后得到的结果。正如附录A.1所详述的，要得到与完整情形实验观测一致的结果，这两种扰动都必不可少。重要的是，这两种扰动在物理上都有合理依据。

使用完备相场模型得到的裂纹形态如图14f 所示，同时图14a-e 展示了一系列最大主应力演化快照。在不存在几何奇异性、因而无法集中应力的完整圆盘中，外缘的拉伸环向应力逐渐增大，并在 $t \approx 2$s 时超过强度面，右侧区域承受的拉力略高。在与带缺口工况相同的加热功率下，较长的受热时间会使更多应变能积聚，从而可在裂纹扩展过程中耗散。裂纹进入受压区域后，在圆盘中心附近分叉，并沿蜿蜒路径朝另一侧扩展。与实验观测一致，分支起始于中心区域。

尽管在裂纹接近外边界时，该模拟未显示出额外的裂纹分叉，但我们注意到，加热功率略有增加 γ 实际上会产生这一结果。为完整起见，该情况下的最终断裂形态如图14h所示。

3.2.3. 裂纹尖端速度剖面

为定量展示裂纹扩展，两个圆盘的裂纹长度与裂纹尖端速度演化如图15所示。裂纹尖端通过 $v = 0.05$ 相场等值线进行追踪。每3个时间步，在前一区间上计算平均裂纹尖端速度。对于带缺口工况，裂纹尖端速度首先在 ≈ 0.55 倍瑞利波速（$c_R = 5750 m/s$）处达到峰值，随后

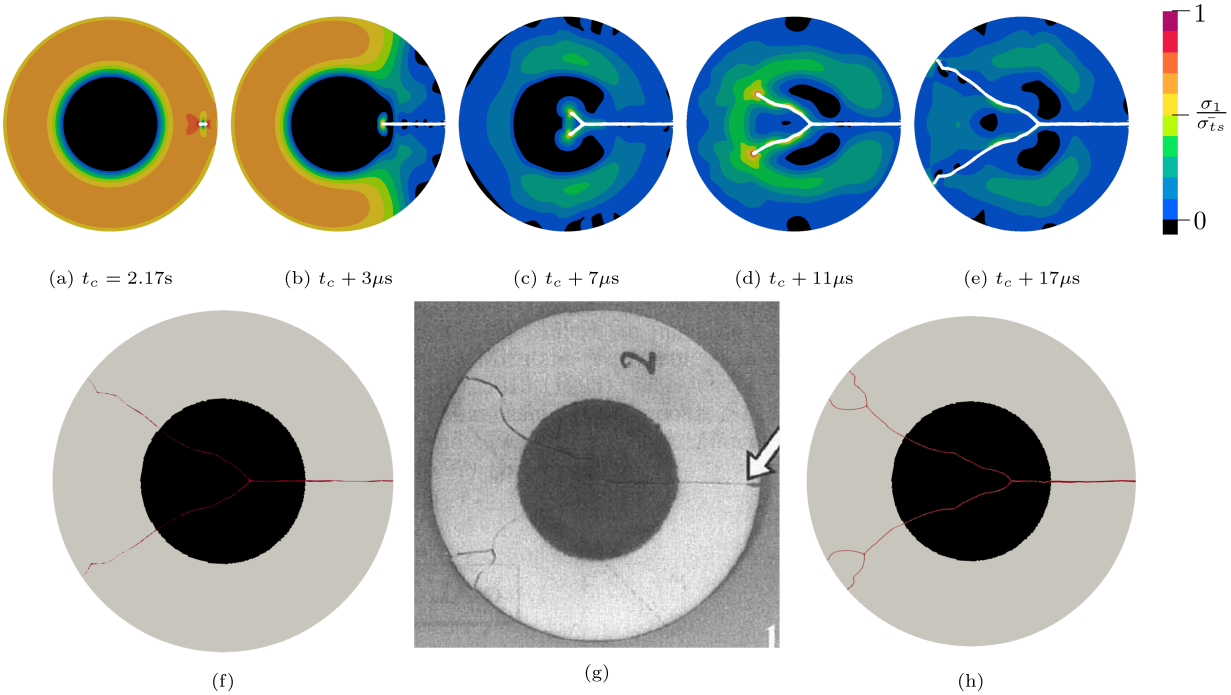


图14：完整圆盘的模拟结果。(a)–(e)为最大主应力演化的快照，对应于(f)中的最终裂纹形态。(f)和(h)是两种最终裂纹形态，其中(h)是在 γ 增加9%的条件下获得的；加热区域以黑色表示，裂纹路径（经 $v < 0.5$筛选）以红色表示。为便于比较，(g)中展示了实验结果。

降至 $0.2c_R$ 与 $0.3c_R$ 之间，并在穿过加热区域的过程中保持这一水平。刚离开加热区域后，速度升至约$0.5c_R$。相比之下，对于完整圆盘，裂纹尖端速度在起裂后不久、进入加热区域之前达到约$0.8c_R$ 的峰值。随后，裂纹在压缩区内迅速止裂，之后恢复并以约$0.2c_R$的速度继续扩展。值得注意的是，裂纹分叉发生时的裂纹尖端速度为$0.2c_R$。这一动态裂纹分叉速度远低于文献中通常报道的水平；传统观点认为，分叉发生在约$0.6c_R$的速度。我们注意到，在本问题中，分叉发生在显著受压的区域内，这与更常研究的拉伸工况不同。

我们还注意到，对于带缺口工况，裂纹尖端速度对施加的加热功率相对不敏感。例如，采用估算实验功率的83%和50%进行的仿真，得到了几乎相同的裂纹速度剖面，除成核时间不同外。这些发现说明，在依据实验观测校准模型时务必谨慎。

3.3. 热-力加载下的陶瓷燃料断裂

本节聚焦于一系列针对核燃料芯块开展的热冲击断裂实验，详情见 J. L. Tills 的报告 [30]。这些实验由桑迪亚国家实验室开展，是环形堆芯研究反应堆（ACRR）分析工作的一部分。ACRR 是一种脉冲反应堆，可使各种测试对象处于光子与中子混合辐照环境中。

在脉冲操作期间，瞬发棒被弹出，以引发核裂变的瞬发超临界链式反应。在这一过程中，重原子核（U-235）吸收一个中子后发生裂变，释放出中子、伽马射线和高能裂变碎片。高速运动的裂变碎片在行进数微米后与附近原子碰撞，并将其动能高效地转化为原子振动，从而加热燃料。

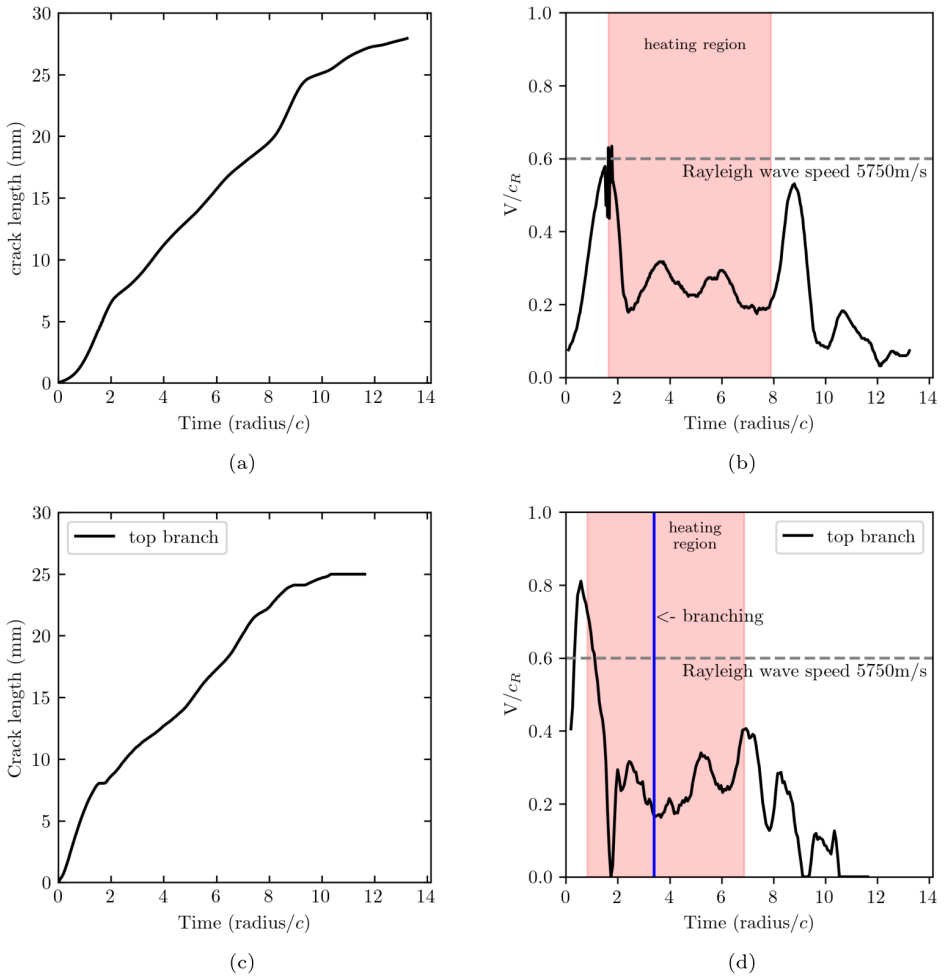


图15：完整模型预测的裂纹长度和裂纹尖端速度的演变。带缺口圆盘的模拟结果见(a)–(b)，完整圆盘的模拟结果见(c)–(d)。时间以特征弹性传播时间 R/c归一化，其中 R 为圆盘半径，$c = \sqrt{E/\rho}$ 为特征弹性波速。

为检验芯块在极端脉冲操作下的机械完整性，研究人员开展了一系列堆内实验。将燃料芯块堆（见图16a）置于两种能量水平的单脉冲辐照下进行冲击，并记录由此产生的断裂位置。

测试的固体燃料为氧化铍–UO_2，，含有6.9%的UO_2（按体积计），铀 ^{235}富集度为35%。实验中，使用两个不锈钢罐将总计24排芯块装在石墨支架内，如图16a所示。每排由一对外层芯块和一对内层芯块组成，如图16b所示。整个组件放置在反应堆中能量沉积最大的部位。对每组样品分别施加了两种脉冲能级。较低能级的脉冲对应于反应堆总能量沉积200兆焦，外层芯块的理论绝热外表面温度达到1400°C。较高能级的脉冲对应于总能量沉积247兆焦，外层芯块表面温度理论上达到1600°C。下文中，我们分别将这两种情况称为200兆焦脉冲和247兆焦脉冲。

据报道 [30], 所有内层芯块在脉冲作用后均保持完整。247兆焦脉冲作用后，25%的外层芯块断裂成两块。报告还提供了单裂纹位置的分布，以裂纹相对于芯块边缘的角度表示，如图16c所示。由于

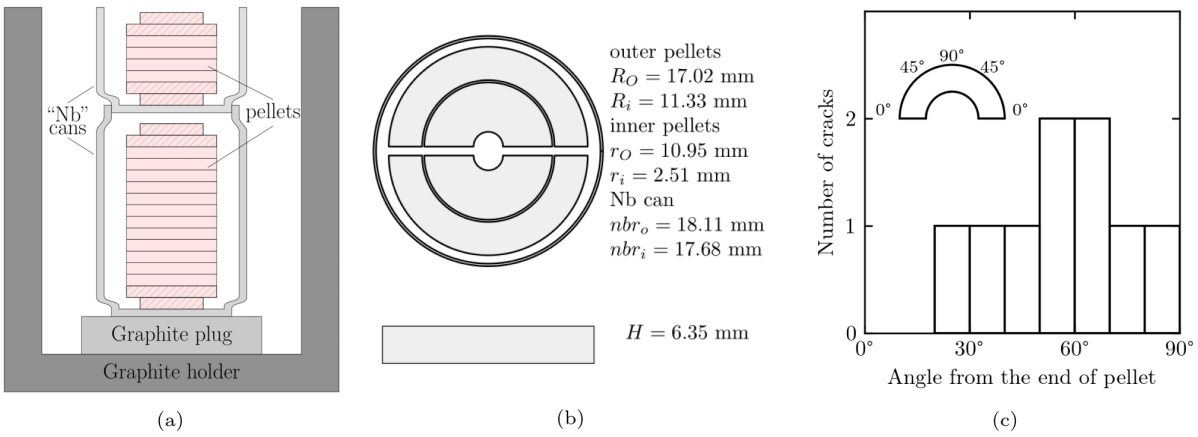


图16：单脉冲芯块断裂试验配置。(a) 容器和试样堆叠示意图。(b) 一排芯块的尺寸，包括一对外层芯块、一对内层芯块和铌包壳。(c) 报告的开裂外层芯块角度分布。(a) 中阴影所示的芯块层因其裂变分布未经验证而未纳入统计。

芯块具有对称性，因此报告中所有裂纹的角度均在20°至90°范围内。

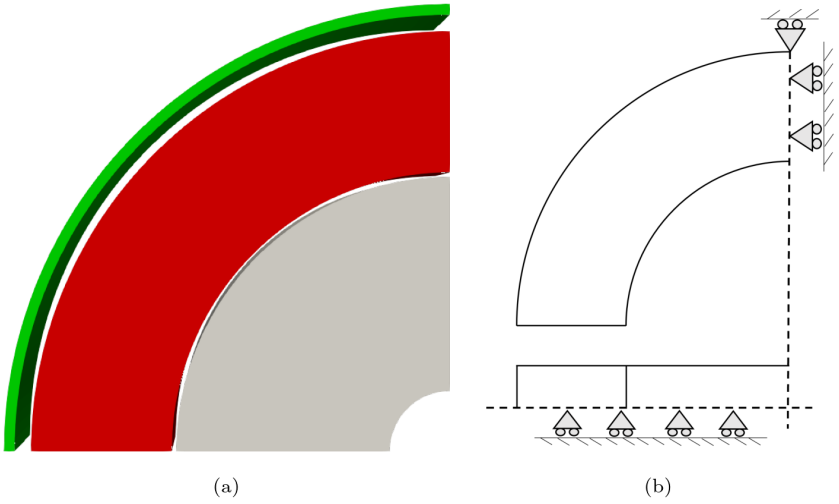


图17：建模几何示意图。(a) 三个组成部分分别为铌包壳（绿色）、外层芯块（红色）和内层芯块（灰色）。为简便起见，(b) 示出了外层芯块上的对称边界条件。

在下文中，我们考虑堆叠中的一组内层芯块和外层芯块，以及它们与铌容器之间的相互作用。忽略与上下芯块之间的相互作用。为降低计算成本，我们利用几何对称性，仅模拟一个芯块层的四分之一。在对称面上对位移场和温度场施加对称边界条件，因此只需对该层的四分之一（高度的一半和角度的一半）进行显式建模，如图17所示。假设所有部件均在径向居中，从而确保模拟过程中相邻部件之间不会发生机械接触。

假设体积热源 Q 是空间和时间的函数，具体如下：

$$Q = A \times \mathcal{P}(t) \times R(r), \tag{34}$$

其中 $\mathcal{P}(t)$ 是单次脉冲的反应堆功率曲线，而 $R(r)$ 是沿芯块半径方向的峰值/平均功率沉积。在此表达式中， A是放大因子，其经过调整，使反应堆在运行期间产生目标总能量沉积。其取值为 $A = 27/m^3$ （对应200兆焦脉冲）和 $A = 26/m^3$ （对应247兆焦脉冲） [30]。

Tills 提供的径向裂变分布 [30]为

$$R(r) = 0.79985971 + 0.34048928 \times r - 1.2141774 \times r^2 + 1.939536 \times r^3 - 1.2757009 \times r^4 + 0.32146363 \times r^5, \quad (35)$$

其中，半径 r 以厘米为单位。200兆焦脉冲在冲击期间提取的功率曲线（截取初始化至尾段之间的部分）为

$$\mathcal{P}(t) = \begin{cases} 10^{35.79} t^{22.59}, & 0.05 \le t \le 0.075 \\ 10^{-13.1} t^{-20.86}, & 0.075 < t \le 0.1, \end{cases} \quad (36)$$

w其中时间 t 以秒为单位。对于 247兆焦脉冲，功率曲线为：

$$\mathcal{P}(t) = \begin{cases} 10^{36.8} t^{23.37}, & 0.05 \le t \le 0.075 \\ 10^{-14.31} t^{-22.07}, & 0.075 < t \le 0.1. \end{cases} \quad (37)$$

径向上每一对内外表面之间的热传递均采用模型描述。热通量由间隙热导和辐射两部分组成：

$$q = q_{cond} + q_{rad}. \quad (38)$$

对于间隙导热，设 $\kappa^{gap}(T)$ 表示间隙中气体的热导率， $\delta^{gap}(x)$ 表示局部间隙宽度， T_i 表示表面温度，则热通量为

$$q_{cond} = \frac{\kappa^{gap}(T)}{\delta^{gap}(x)}(T_1 - T_2). \quad (39)$$

对于辐射热通量，设 f 为辐射因子， $\sigma = 5.6697 \times 10^{-8}\text{W/(m}^2\text{K}^4\text{)}$为斯特藩–玻尔兹曼常数，则通量为

$$q_{rad} = f\sigma(T_1^4 - T_2^4). \quad (40)$$

其中 ε_i 为表面的发射率系数，辐射因子为

$$f = (\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1)^{-1}. \quad (41)$$

该辐射模型将间隙辐射近似为两个平行平面之间的辐射传热，并假设能量不会从间隙边缘逸出。假设发射率为常数，各材料对应的数值列于表 4。

在这些实验中，燃料芯块的温度会达到很高水平。因此，需要仔细考虑各种材料属性对温度的依赖性。表 4列出了各项热力学和力学材料属性的表达式及其随温度的变化。燃料芯块的热膨胀系数、热导率、比热容、密度和杨氏模量，以及铌和氦的热学性能均取自 [30]。三种材料的发射率取自 [31]。为估算复合芯块材料的抗拉强度，我们首先指出，已有文献记载基体氧化铍的抗拉强度为 $\sigma_{ts} = 124\text{MPa}$ [52]。我们假设 UO_2 的存在会使抗拉强度降低约 10%，降至 $\sigma_{ts} = 114\text{MPa}$。

我们的仿真表明，外层芯块的温度远高于内层芯块。温度梯度较大也使外层芯块中的应力显著增高。例如，图 18a 展示了 247兆焦脉冲下外层芯块温度场的演变。

表4：芯块、铌和氦的材料属性随温度的变化 T [30, 52, 31].

属性/参数	符号（单位）	函数（T，单位为°C）
CTE	$\alpha(10^{-6}/K)$	$-1\times10^{-6}*T^2+4.288\times10^{-3}*T+5.715$
热导率	κ(W/(mK))	$913.9*T^{-0.107}-402.4$
比热容	c_p(Jkg^{-1}K^{-1})	$166.86*T^{0.2877}+398.54$
发射率	ε	0.37
密度	ρ(kg/(m^3))	3573
泊松比	ν	0.2
杨氏模量	E(Pa)	$-62.5\times10^6*T+4\times10^{11}$
断裂韧度	G_c(N/m)	44[a]
平均单轴抗拉强度	$\bar{\sigma}_{ts}$ (MPa)	114[b]
变异系数		0.03
单轴抗压强度	σ_{cs} (MPa)	$5\times\sigma_{ts}$
氦热导率	κ^{gap} (W/(mK))	$2.5\times10^{-4}T+5.715\times10^{-6}$
铌热导率	κ^{nb} (W/(mK))	$2\times10^{-3}*T+5$
比热容	c_p^{nb}(Jkg^{-1}K^{-1})	$5.29\times10^{-6}*T+264.61$
发射率	ε^{nb}	0.22

[a] 我们既没有找到 Tills 的报告中针对所测试样品的估算值，也没有找到关于一般氧化铍 - UO_2 复合材料的数据。其取值范围可参照常见陶瓷（氧化锆、氮化硅、氧化铝、碳化硅）的范围进行合理估算：10N/m 至 150N/m。[b] 采用该数值的原因将在下文说明。

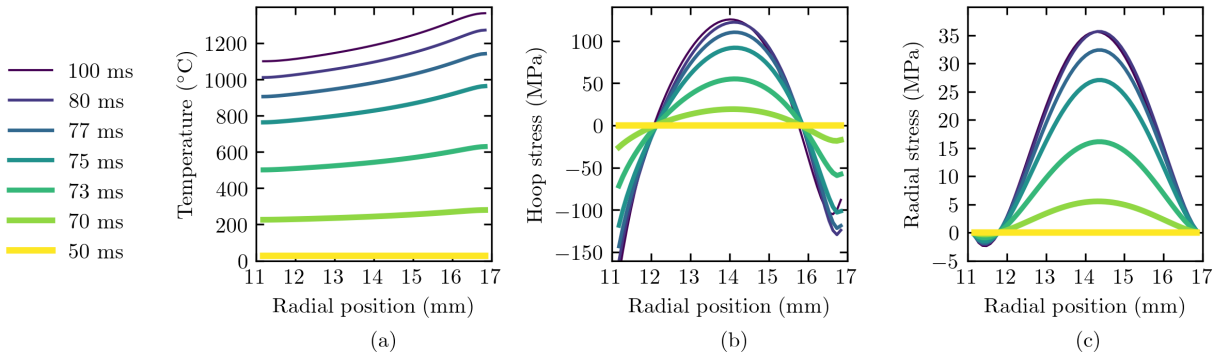


图 18：247兆焦脉冲下外层芯块的热力学结果。(a) 247兆焦脉冲下外层芯块沿径向的温度分布快照，(b) 相应的环向应力，以及 (c) 相应的径向应力。

反应在 $t=50$ ms 时开始，导致外层芯块的温度迅速升高。具体而言，到 $t=100$ms 时，外层芯块的温度从室温升至 1200°C 以上。值得注意的是，在每一时刻，温度剖面均从内环形表面到外表面单调递增。外层芯块外表面的最高温度达到 1320°C。

环形区域90°中心线上的环向应力和径向应力如图18b 和 c 所示。沿这条中心线，内部的环向应力呈显著拉伸状态，并逐渐向外过渡为压缩状态。径向应力大多呈拉伸状态，在中半径区域达到峰值，但总体上仍比环向应力小一个数量级。

现在给出耦合相场断裂的结果。每个数值样本都被赋予一个由不同随机种子生成的扰动强度场（一个示例见图20a）。每个脉冲水平下均模拟了 20 个样品。对于 200MJ 脉冲，没有芯块发生断裂，这与

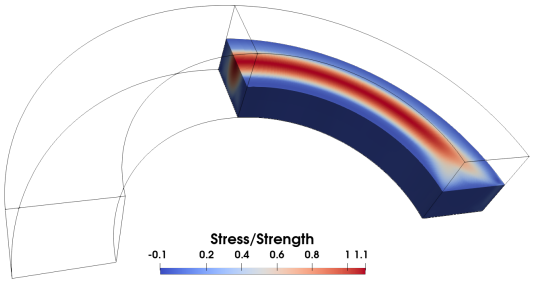


图19：247兆焦脉冲作用下100 ms时外层芯块的最大主应力云图，已按平均抗拉强度归一化。

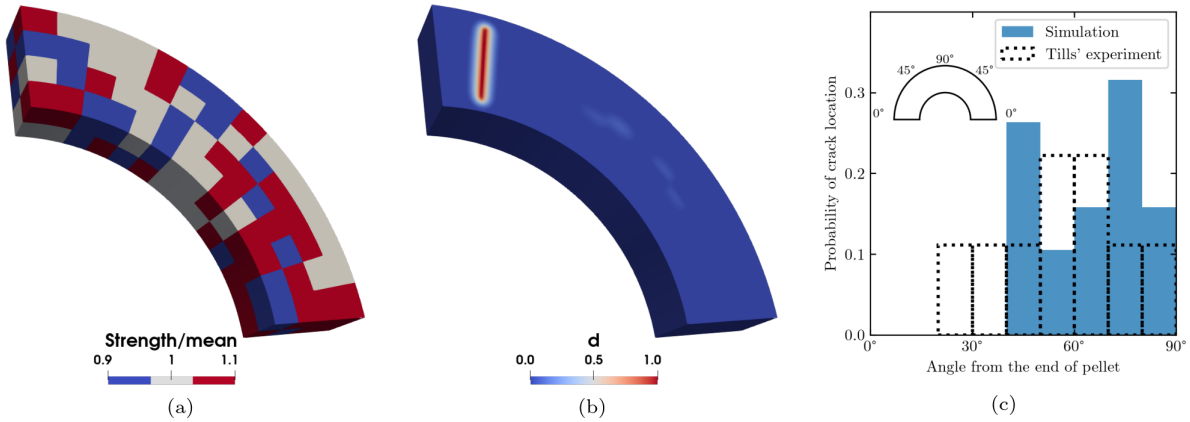


图 20：（a）斑块型扰动场示例。（b）断裂燃料芯块示例：在247兆焦脉冲作用下，一条贯穿裂纹贯穿了芯块的整个高度。（c）20个采用不同种子生成随机斑块的样品模拟结果与40个实验样品之间的裂纹分布对比。

实验观测[3]一致。相比之下，在 247兆焦脉冲下，有 15 个外层芯块发生断裂。其中，10 个样品出现单条裂纹局部化（示例见图 20b），另有 5 个样品出现两条裂纹局部化。裂纹的位置距芯块自由端°40 至 90° 之间。模拟与实验的裂纹角度分布对比如图 20c 所示。考虑到材料属性及其随温度变化的不确定性，结果吻合得相当不错。

4. 总结与结论

在本研究中，我们将完整相场断裂模型扩展到了热-力加载条件。该模型最初针对弹性、断裂韧度和材料强度彼此独立的纯力学问题建立。此次扩展保留了完整模型的关键特征：通过相场演化方程中的外部微观力项，将强度面作为独立的本构要素纳入模型。在这一框架下，热-力加载仅通过弹性应变能引入，而强度面控制断裂成核，断裂韧度则控制裂纹扩展。由此得到的公式能够统一处理承受剧烈热冲击的脆性固体中的断裂成核与裂纹扩展。

[3]这一结果显然对我们所选取的抗拉强度较为敏感。如果取值低得多，在较低的脉冲水平下就会产生断裂。

我们通过三类不同的问题检验了所得模型的能力，这些问题共同涵盖了典型的断裂情形：从较大的预存裂纹开始扩展、在近乎均匀的应力下成核，以及结合局部化和分布式应力场的中间状态。对于玻璃板渐进淬冷，完整模型能够再现实验观测到的裂纹形态，并给出与先前建立的相图一致的结果。重要的是，对材料强度开展的参数研究表明，即使对于传统上被认为由格里菲斯型裂纹扩展控制的问题，强度面仍然具有重要影响。

红外加热氧化铝圆盘提供了一种互补的研究场景：在不存在长预存裂纹的情况下，热-力载荷驱动断裂成核与分叉。采用强度面使我们能够独立地首先在原始几何形状下复现实验中的完整圆盘。完整模型所体现的强度与能量学之间的竞争，使我们首次得以解释该实验中出现的两种不同断裂模式。

燃料芯块断裂问题展示了该模型处理核材料中复杂且由应用需求驱动的热-力断裂问题的能力。在统计扰动的强度场中，中等脉冲（200 MJ）未导致外层芯块出现断裂，而较高脉冲（247 MJ）则使芯块发生断裂，其裂纹角度分布与已报道的实验结果较为吻合。这些结果表明，在名义加载条件相同的情况下，采用扰动材料强度是捕捉失效结果离散性的有效方法。

完备相场模型为预测材料在严重热冲击下的脆性断裂提供了一个框架。通过明确分离并独立设定弹性、断裂韧性和材料强度，该模型对经典断裂实验观测结果及复杂核燃料断裂试验均展现出了可靠的预测能力。

致谢

本研究部分经费由桑迪亚国家实验室与美国国家科学基金会（NSF）向杜克大学提供的合同及资助编号为 2132551 的项目支持。谨此致谢。作者还要感谢伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校的 Oscar Lopez-Pamies 博士提出的诸多宝贵意见并参与讨论。

附录 A. 关于陶瓷圆盘问题的进一步讨论

在本 附录中，我们给出并讨论陶瓷圆盘问题的一些补充结果 .

附录*A.1.* 模型的扰动

在裂纹萌生之前，对加热内部区域恰好位于中心的完整圆盘进行模拟，得到的热力场沿圆周方向均匀。换言之，在任意时间 $t < t_c$，温度场和应力场仅随径向坐标 r变化。沿任意角平分线的场分布都与图 12所示相同。在不对模型施加任何扰动的情况下，所得相场模式如表A.1a所示。从本质上说，裂纹会在圆盘圆周周围的多个位置同时萌生并局部化，随后短暂扩展后停止。

这种模式显然不同于实验观测：实验中，裂纹在圆盘边缘附近的单一位置萌生。一个合理的假设是，实验装置中存在随机因素，实际上造成了裂纹萌生的优先位置。下文将说明，为了生成图 14 所示的仿真结果，并使其与完整圆盘的实验观测高度吻合，必须引入两种不同的扰动。具体而言，我们考虑了：（i）空间分布不均匀的强度场；以及（ii）加热区域中心的轻微偏移。

我们首先介绍第一个扰动。为对材料强度施加扰动，引入了如图 A.1所示的镶嵌场。元素块被随机赋予以下材料强度之一：

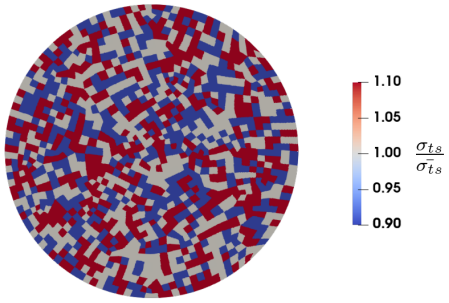


图 A.1：斑块扰动强度场的示例。

100%、110%或90% 的基准强度。[4] 每个斑块覆盖的区域具有约为$10 \times \ell$的特征尺寸。这种材料强度的随机性促进了圆盘周边裂纹萌生的不对称性。然而，如表 A.1c 所示，结果表明裂纹仍会在多个位置萌生。相比之下，实验观测表明，断裂通常从圆盘一侧开始，随后向中心扩展，并向对边分叉（见图 11）。这表明，可能存在某种其他扰动，使系统偏向于一个优先萌生位置。

对模型施加的最简单扰动，或许可以解释为何裂纹倾向于在试样的一侧萌生，这涉及热源的位置。具体而言，可以设想涂层表面区域并非理想的、位于中心且规整的圆形。如图10b 所示，尽管涂层区域的确切位置难以确定，但无论在单个样品内部还是不同样品之间，其形状均可见明显的不规则之处。这表明涂层工艺的精度可能有限。为了将这种不规则性纳入模型，我们将热源中心向区域右侧轻微偏移了 1 mm。结合马赛克扰动后，这一调整产生了与实验观测十分相似的裂纹形态，如表 A.1d 所示。作为比较，表 A.1b 展示了仅移动热源、未施加材料强度扰动时的模拟结果；多个裂纹在边界附近萌生，随后汇合为一条裂纹，并最终扩展和分支。

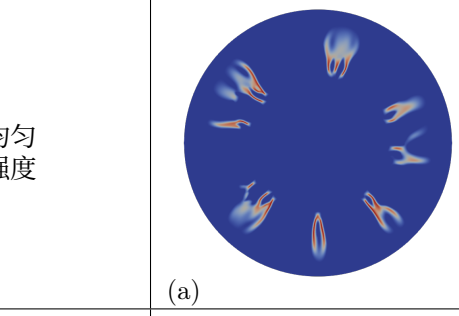
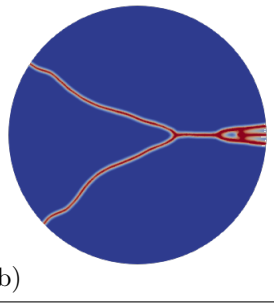
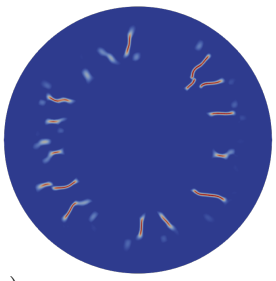
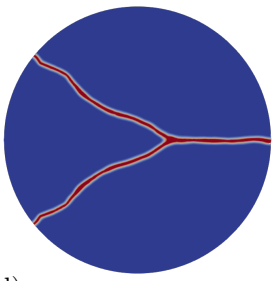
附录 *A.2.* 不恰当对称性假设的影响

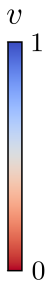
本附录和第 3.2节中完整情形下的断裂模式均采用完整圆盘几何获得。换言之，并未采用对称条件来降低计算成本，例如仅模拟区域上半部分的响应。这是因为我们的仿真表明，随后形成的裂纹形态在分叉之前就开始围绕水平轴发生轻微振荡，从而实际上破坏了问题的对称性。相比之下，仅使用区域的一半进行仿真显然会在构造上排除这种振荡，并且其结果与实验的吻合程度较低。

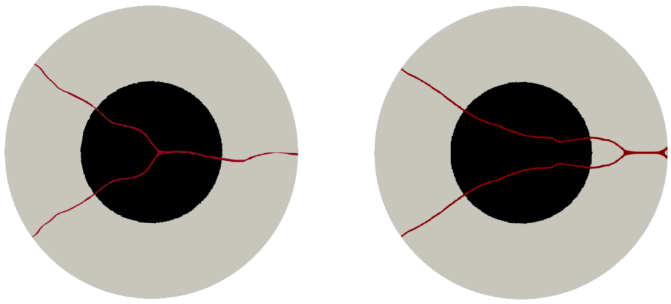
为了更好地阐明这一想法并突出差异，我们在图A.2中给出了两个模拟结果，其中加热功率 γ 提高了30%。当对整个圆盘进行显式建模时，圆盘右侧的初始裂纹扩展呈现出波动模式，如图A.2a所示。从定性上看，这种从直线扩展到振荡扩展的转变与其他问题中的行为一致，例如第3.1节所讨论的玻璃板渐进淬冷。重要的是，仅基于对称几何形状和加载条件而对断裂响应作出对称性假设，可能会遗漏波动扩展阶段。如图A.2b所示，当仅对一半几何

[4]通过修改控制 Drucker-Prager强度面的两个参数，调整了基准强度。

表 A.1：不同热源位置与材料强度场组合下获得的断裂模式。

	中心加热	偏置加热
均匀强度	 (a)	 (b)
扰动强度	 (c)	 (d)





(a) Whole disk simulation　　(b) Half disk simulation

图 A.2：完整圆盘在 130% 加热功率下的模拟断裂模式 γ。

采用对称边界条件进行建模时，早得多的分叉取代了波动行为。人们可能会得出结论：这是一个产生裂纹路径振荡而非早期分叉的问题，因为前者在能量上更为有利。

参考文献

[1] S. Manson，S，《热应力条件下材料的行为》，1954年。网址：https://ntrs.nasa.gov/citations/ 19930092197。[2] D. P. H. Hasselman，《脆性陶瓷热冲击断裂起始与裂纹扩展统一理论》，美国陶瓷学会会刊 52 (1969年) 600–604。网址：https://ceramics.onlinelibrary.wiley.com/doi/ 10.1111/j.1151-2916.1969.tb15848.x。DOI：10.1111/j.1151-2916.1969.tb15848.x。[3] Q. Meng、K. Zhang、R. He、Z. Qu，《陶瓷热冲击行为综述：基础理论、实验

方法与展望》，《国际应用陶瓷技术期刊》21 (2024年) 3789–3811。网址：https://ceramics.onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/ijac.14846。DOI：10.1111/ijac.14846。[4] A. Kumar、G. A. Francfort、O. Lopez-Pamies，《弹性体的断裂与愈合：相变理论与数值实现》，《力学与固体物理学杂志》112 (2018年) 523–551。网址：https://linkinghub.elsevier. com/retrieve/pii/S0022509617309481。DOI：10.1016/j.jmps.2018.01.003。[5] A. Kumar、B. Bourdin、G. A. Francfort、O. Lopez-Pamies，《重新审视脆性断裂相场方法中的成核问题》，《力学与固体物理学杂志》142 (2020年) 104027。网址：https://linkinghub.elsevier.com/ retrieve/pii/S0022509620302623。DOI：10.1016/j.jmps.2020.104027。[6] A. Kumar、K. Ravi-Chandar、O. Lopez-Pamies，《重新审视脆性断裂相场方法：压痕与缺口问题的应用》，《国际断裂力学杂志》237 (2022年) 83–100。网址：https://link.springer. com/10.1007/s10704-022-00653-z。DOI：10.1007/s10704-022-00653-z.[7] F. Kamarei、J. E. Dolbow、O. Lopez-Pamies，《断裂成核：反对经典变分相场模型的首象限证据》，《应用力学杂志》92 (2025年) 014502。网址：https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article/92/1/014502/1209202/Nucleation-of-Fracture-The-First-Octant-Evidence。DOI：10.1115/1.4067146.[8] A. Kumar、Y. Liu、J. E. Dolbow、O. Lopez-Pamies，《巴西劈裂断裂试验的强度》，《力学与固体物理学杂志》182 (2024年) 105473。网址：https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022509623002776。DOI：10.1016/j.jmps.2023.105473。[9] F. Kamarei、A. Kumar、O. Lopez-Pamies，《合成弹性体的筹码试验解析》，《力学与固体物理学杂志》188 (2024年) 105683。网址：https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/ S0022509624001492。DOI：10.1016/j.jmps.2024.105683。[10] A. Yuse、M. Sano，《淬冷玻璃板中裂纹形态的转变》，《自然》362 (1993年) 329–331。网址：https://www.nature.com/articles/362329a0。DOI：10.1038/362329a0。[11] O. Ronsin、F. Heslot、B. Perrin，《准静态脆性裂纹扩展实验研究》，《物理评论快报》75 (1995年) 2352–2355。网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.2352。DOI：10.1103/PhysRevLett.75.2352。[12] B. Yang、K. Ravi-Chandar，《淬冷玻璃板中的裂纹路径失稳》，《力学与固体物理学杂志》49 (2001年) 91–130。网址：https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022509600000223。DOI：10.1016/S0022-5096(00)00022-3.[13] S. Yoneyama、K. Sakaue、H. Kikuta、M. Takashi，《淬冷薄玻璃板中振荡裂纹尖端周围应力场的观测》，《实验力学》48 (2008年) 367–374。网址：https://doi.org/10.1007/s11340-007- 9078-0。DOI：10.1007/s11340-007-9078-0.[14] H.-A. Bahr、A. Gerbatsch、U. Bahr、H.-J. Weiss，《热裂纹中的振荡失稳：一种一级相变现象》，《物理评论E》52 (1995年) 240–243。网址：https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid =2 2 0 0013172217 =10 1103 2 52 240 =40 5=1 9911 25722 63 5 3 5 5 55665 10 -s . -&doi . % fPhysRevE. . &partnerID &md ea a d a e ad c e c。DOI：. 1103/PhysRevE.52.240。[15] Y. Sumi、Y. Mu，《脆性固体中热诱导的准静态波状裂纹扩展》，《材料力学》32 (2000年) 531–542。网址：https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167663600000223。DOI：10.1016/S0167- 6636(00)00022-3.[16] M. M. Chiaramonte、B. E. Grossman-Ponemon、L. M. Keer、A. J. Lew，《淬冷板中裂纹路径失稳的数值分析》，《极端力学快报》40 (2020年) 100878。网址：https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/ S2352431620301577。DOI：10.1016/j.eml.2020.100878。[17] F. Corson、M. Adda-Bedia、H. Henry、E. Katzav，《热断裂作为准静态裂纹扩展的框架》，《国际断裂力学杂志》158 (2009年) 1–14。网址：http://link.springer.com/10.1007/s10704-009-9361-4。DOI：10.1007/s10704-009-9361-4.[18] B. Kilic、E. Madenci，《利用近场动力学理论预测淬冷玻璃板中的裂纹路径》，《国际断裂力学杂志》156 (2009年) 165–177。网址：http://link.springer.com/10.1007/s10704-009-9355-2。DOI：10.1007/s10704- 009-9355-2.[19] T. Menouillard、T. Belytschko，《加热条带中振荡裂纹扩展的分析与计算》，《国际断裂力学杂志》167 (2011年) 57–70。网址：http://link.springer.com/10.1007/s10704-010-9519-0。DOI：10. 1007/s10704-010-9519-0.[20] Z. Xu、G. Zhang、Z. Chen、F. Bobaru，《近场动力学中脆性材料的弹性涡旋与热驱动裂纹》，《国际断裂力学杂志》209 (2018年) 203–222。网址：http://link.springer.com/10.1007/s10704-017-0256-5。DOI：10.1007/s10704-017-0256-5.[21] W. Pan、R. Abdelmoula、J. Li、C. Cheng，《利用相场内聚区模型分析淬冷玻璃板中的裂纹路径失稳》，《材料与结构力学杂志》19 (2024年) 235–250。DOI：10.2140/jomms.2024.19. 235.[22] S. Honda、T. Suzuki、T. Nishikawa、H. Awaji、Y. Akimune、N. Hirosaki，《高热导率氮化硅热冲击性能的估算》，《日本陶瓷学会学报》110 (2002年) 38–43。网址：http://www.jstage.jst.go.jp/article/jcersj1988/110/1277/110_1277_38/_article/-char/ja/。DOI：10.2109/jcersj.110.38。[23] S. Honda、T. Nishikawa、H. Awaji、N. Hirosaki、Y. Akimune，《利用红外辐射技术估算热冲击抗力的温度依赖性》，《通过新测量、加工和标准改进陶瓷》(2002年) 127–132。[24] S. Honda、Y. Ogihara、T. Kishi、S. Hashimoto、Y. Iwamoto，《利用红外辐射加热法估算细孔氧化铝的抗热震性》，《日本陶瓷学会学报》117 (2009年) 1208–1215。网址：http://www.jstage.jst.go.jp/article/jcersj2/117/1371/117_1371_1208/_article。DOI：10.2109/jcersj2.117.1208。

[25] D. Chu, X. Li, Z. Liu, 采用相场建模研究热冲击载荷下脆性材料的动态裂纹路径，《国际断裂力学杂志》208 (2017) 115–130. URL: http://link.springer.com/10.1007/s10704-017-0220-4. doi:10.1007/s10704-017-0220-4.[26] H. Chen, S. Natarajan, E. T. Ooi, C. Song, 使用结合缩尺边界有限元法的自适应相场法对脆性固体中的热-力耦合裂纹扩展进行建模，《理论与应用断裂力学》129 (2024) 104158. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167844223004214. doi:10.1016/j.tafmec. 2023.104158.[27] Y. Li, T. Yu, C. Xing, S. Natarajan, 使用自适应等几何混合相场法对准静态与动态热弹耦合脆性断裂进行建模，《有限元分析与设计》224 (2023) 103993. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0168874X23000860. doi:10.1016/j.finel.2023.103993. [28] T. K. Mandal, V. P. Nguyen, J.-Y. Wu, C. Nguyen-Thanh, A. De Vaucorbeil, 热弹性固体的断裂：相场建模及高效整体求解器的新成果，《计算力学与工程方法》376 (2021) 113648. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782520308331. doi:10.1016/j.cma.2020.113648. [29] Y. Wang, X. Zhou, M. Kou, 脆性固体中热冲击裂纹分叉失稳的数值研究，《工程断裂力学》204 (2018) 157–184. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0013794418303990. doi:10.1016/j.engfracmech.2018.08.028. [30] T. J. L.，环形堆芯研究反应堆用氧化铍-二氧化铀燃料芯块的热/力学分析，阿尔伯克基，新墨西哥州 (1982). [31] E. Pelfrey，《环形堆芯研究反应堆燃料的瞬态热结构分析》，博士论文，新墨西哥大学，2019. URL: https://digitalrepository.unm.edu/me_etds/162/?utm_source= digitalrepository.unm.edu%2Fme_etds%2F162&utm_medium=PDF&utm_campaign=PDFCoverPages. [32] B. Zeng, J. Guilleminot, J. E. Dolbow, 使用完备断裂相场模型考察空间均匀应力状态下的裂纹萌生，《理论与应用断裂力学》140 (2025) 105170. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167844225003283. doi:10.1016/j.tafmec.2025.105170. [33] L. Svolos, C. A. Bronkhorst, H. Waisman, 使用相场断裂法建模的热-力耦合系统中裂纹处热导率劣化，《力学与固体物理学杂志》137 (2020) 103861. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022509619309317. doi:10.1016/j.jmps.2019.103861. [34] B. Bourdin, G. Francfort, J.-J. Marigo，重新审视脆性断裂的数值试验，《力学与固体物理学杂志》48 (2000) 797–826. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509699000289. doi:10.1016/S0022-5096(99)00028-9.[35] A. Kumar, K. Ravi-Chandar, O. Lopez-Pamies，弹性体中断裂与愈合成核和扩展的构形力观点：作为相变的过程，《国际断裂力学杂志》213 (2018) 1–16. URL: http: //link.springer.com/10.1007/s10704-018-0302-y. doi:10.1007/s10704-018-0302-y. [36] C. J. Larsen, J. E. Dolbow, O. Lopez-Pamies，具有材料强度的格里菲斯相场断裂变分公式，《国际断裂力学杂志》247 (2024) 319–327. URL: https://link.springer.com/10.1007/s10704- 024-00786-3. doi:10.1007/s10704-024-00786-3.[37] D. C. DRUCKER, W. PRAGER，土力学与塑性分析或极限设计，《应用数学季刊》10 (1952) 157–165. URL: http://www.jstor.org/stable/43633942. [38] S. Sato, H. Awaji, K. Kawamata, A. Kurumada, T. Oku，多轴应力下反应堆石墨的断裂准则，《核工程与设计》103 (1987) 291–300. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/ 0029549387903128. doi:10.1016/0029-5493(87)90312-8.[39] M. Hong, Z.-Q. Luo，交替方向乘子法的线性收敛性，《数学规划》162 (2017) 165–199. URL: http://link.springer.com/10.1007/s10107-016-1034-2. doi:10.1007/s10107-016- 1034-2.[40] T. Heister, M. F. Wheeler, T. Wick，用于采用相场方法计算裂纹扩展的原始-对偶活动集法与预测-校正网格自适应，《计算力学与工程方法》290 (2015) 466–495. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782515001115. doi:10.1016/j.cma.2015. 03.009.[41] H. M. Hilber, T. J. R. Hughes, R. L. Taylor，结构动力学时间积分算法中数值耗散的改进，《地震工程与结构动力学》5 (1977) 283–292. URL: https://doi.org/10.1002/eqe. 4290050306. doi:10.1002/eqe.4290050306. [42] D. Torres, B. Zeng, A. Costa, Y. Liu, W. Jiang, J. E. Dolbow, T. Hu，RACCOON：用于耦合场现象断裂变分方法的多功能框架，《工程软件进展》(2026). URL: https://github.com/hugary1995/raccoon. [43] G. Giudicelli, A. Lindsay, L. Harbour, C. Icenhour, M. Li, J. E. Hansel, P. German, P. Behne, O. Marin, R. H. Stogner, J. M. Miller, D. Schwen, Y. Wang, L. Munday, S. Schunert, B. W. Spencer, D. Yushu, A. Recuero, Z. M. Prince, M. Nezdyur, T. Hu, Y. Miao, Y. S. Jung, C. Matthews, A. Novak, B. Langley, T. Truster, N. Nobre, B. Alger, D. Andrš, F. Kong, R. Carlsen, A. E. Slaughter, J. W. Peterson, D. Gaston, C. Permann，3.0 - MOOSE：实现大规模并行多物理场模拟，《SoftwareX》26 (2024) 101690. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/ S235271102400061X. doi:https://doi.org/10.1016/j.softx.2024.101690. [44] D. R. Gaston, C. J. Permann, J. W. Peterson, A. E. Slaughter, D. Andrš, Y. Wang, M. P. Short, D. M. Perez, M. R. Tonks, J. Ortensi, L. Zou, R. C. Martineau，面向全堆芯核反应堆模拟的基于物理的多尺度耦合，《核能年鉴》84 (2015) 45–54. [45] A. Lindsay, R. Stogner, D. Gaston, D. Schwen, C. Matthews, W. Jiang, L. K. Aagesen, R. Carlsen, F. Kong, A. Slaughter,

等，MetaPhysicL中的自动微分及其在MOOSE中的应用，《核技术》(2021) 1–18. [46] A. Yuse, M. Sano，淬冷玻璃板中准静态裂纹形态的不稳定性，《物理学D：非线性现象》108 (1997) 365–378. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167278997000110. doi:10.1016/S0167- 2789(97)00011-0.[47] O. Ronsin, B. Perrin，定向裂纹扩展实验中的多裂纹扩展，《欧洲物理快报》(EPL) 38 (1997) 435–440. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1209/epl/i1997-00264-2. doi:10.1209/epl/i1997-00264-2.[48] L. B. Freund，《动态断裂力学》，剑桥力学专著丛书，剑桥大学出版社，剑桥，1990. URL: https://www.cambridge.org/core/product/4518586440239B156F0C8AD8911E2E3F. doi:10.1017/ CBO9780511546761.[49] H. Awaji, M. Ogawa, S. Sato，热冲击测试的新方法，《日本机械工程师学会学报A辑》59 (1993) 2941–2946. URL: https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-0027806042& doi=10.1299%2fkikaia.59.2941&partnerID=40&md5=b9d62a3225bd8081e4ab9a07c0c445be. doi:10.1299/kikaia.59.2941. [50] H. Awaji，陶瓷热冲击测试，《材料》/《日本材料科学学会志》48 (1999) 1– 9. URL: https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-33749279234&doi=10.2472%2fjsms.48.1&partnerID 40 5=0 9602 2 4664 3 0 54 0 6 6 10 2472 48 1 &md f e bc a bfd fa eab a f . doi: . /jsms. . . [51] A. A. Wereszczak, R. J. Caspe, J. J. Swab, S. F. Duffy, E. H. Baker，先进单体陶瓷的C形环强度，载于：W. M. Kriven, H.-T. Lin（编），《陶瓷工程与科学论文集》，第24卷，约翰·威立父子公司，霍博肯，新泽西州，美国，2003，页483–490. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/9780470294826.ch70. doi:10.1002/9780470294826.ch70.[52] J. Petrovic, C. Haertling，氧化铍（BeO）手册，技术报告 LA-UR–20-24561，1635499，2020. URL: https://www.osti.gov/servlets/purl/1635499/. doi:10.2172/1635499.