arXiv:2602.09114v1 [math.AG] 9 Feb 2026

群循环奇点与保持正规交叉的部分消奇

ANDRÉ BELOTTO DA SILVA 和 Edward Bierstone

Abstract. 本文研究保持代数簇或解析簇的正规交叉奇点的部分消奇 X（定义在 $\mathbb{C}$ 上，或定义在特征零的不可数代数闭域 $\mathbb{K}$ 上，代数情形如此）。我们的方法分为三个部分，涉及不同的技术：（1）针对满足一般分裂假设的正则函数或解析函数的形式分裂定理；（2）研究正规交叉轨迹闭包中的奇点，该研究基于 G-循环矩阵的组合学，其中 G是有限阿贝尔群，并由此导出化归至 *group-circulant normal form*的定理；（3）利用（1）、（2）以及对群循环奇点进行加权爆破，证明部分消奇定理。以往的结果针对保持简单正规交叉的部分消奇，或当 $\dim X \leq 4$ 时保持一般正规交叉的部分消奇。

Contents

1. 引言 1 2. 分裂定理 13 3. 群循环标准形 15 4. 群循环奇点的加权爆破与部分消奇 29 5. 正规交叉除以有限阿贝尔群的商 40 参考文献 45

1. Introduction

1.1. 概述。 本文研究代数簇或解析簇 X（$\mathbb{C}$ 上，或在特征为零的代数情形下，定义在不可数代数闭域 $\mathbb{K}$上）在保留正规交叉轨迹的同时进行部分消奇。我们的方法分为三个部分，分别涉及不同的技术；我们认为这些技术本身也可能具有独立的研究价值。

(1) 对满足一般分裂假设的正则函数或解析函数的形式分裂或因式分解定理（定理 1.1）。这可以视为

Date：2026年2月11日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：14B05、14E05、32S45；次要分类号：14E15、32S05。研究经费由法国国家研究署（ANR）项目 ANR-25-ERCC- 0003-01、ANR-22-CE40-0014（Belotto da Silva）以及加拿大自然科学与工程研究理事会发现基金 RGPIN-2017-06537（Bierstone）资助。

牛顿-普赛定理的多变量版本（参见 Macdonald [19], Soto- Vicente [24]），也可以视为 Abhyankar-Jung 定理的一种变体（参见 Parusi ´nski-Rond[22]）。

(2) 研究正规交叉轨迹闭包中的奇点，这些奇点是经典夹点或惠特尼伞的推广，研究依据是 G- 循环矩阵的组合学，其中 G 是一个有限阿贝尔群。定理 1.7 说明如何通过光滑爆破化为群循环标准形（定义 1.5），在本文中起着核心作用。根据 Kanemitsu 和 Waldschmidt [16], 的说法，群循环矩阵的概念源自 Dedekind [13]。“G-循环”一词由 Diaconis [14, 第 3]章提出。

(3) 利用 (1) 和 (2)，并结合对群循环奇点的加权爆破，得到一个保持正规交叉的部分消奇定理（定理 1.13）。一个正规交叉奇点（其阶为 k）由单项式方程 $x_1 \cdots x_k = 0$定义，其中 $x_1, \ldots, x_k$ 是形式或解析坐标；这与更严格的简单正规交叉概念不同，后者要求 $x_1, \ldots, x_k$ 构成正则参数系的一部分。（代数簇 X 上给定点处的正规交叉奇点，在某个 ´étale 邻域中是简单正规交叉。）我们采用 Abramovich、Temkin 和 W-lodarczyk[2], [26] 的技术，证明所需的加权爆破在整体上定义良好。W-lodarczyk 告知我们，他已通过不同的方法得到定理 1.13 (1)-(4)。

对于简单正规交叉，存在一个适当的双有理（或双亚纯）态射 $\sigma : X' \to X$，它由一系列保持 X的简单正规交叉轨迹的光滑爆炸构成，使得 X' 只有简单正规交叉奇点；参见 [5], [7, 第 12], [10, 节、第 3], [17], [25], 节以及注 1.8。

另一方面，对于一般的正规交叉，即使在维数 $\dim X = 2$ 的情形下，所能达到的最好结果也只是一个光滑爆破序列 $\sigma : X' \to X$，它保持 X的正规交叉轨迹，并使得 X' 只有正规交叉奇点或夹点奇点 [10]；特别是，若不修改正规交叉（nc）轨迹，就无法消除夹点。关于高维情形下类似结果的问题由 Koll´ar [17] 提出。X' 中必须纳入的奇点的完整清单，针对维数 $\dim X \leq 3$ 的情形见 [6]，而针对维数 $\dim X \leq 4$ 的情形则见最近的 [4]。在这些维数下，只有标准循环奇点会出现在 X的正规交叉轨迹在 X' 中的闭包内；这些奇点由 G 为有限循环群的 G-循环矩阵定义。

请注意，由于在前述结果中无法从 X' 中消除循环奇点，因此循环点小邻域内的任何奇点也都无法消除。在 ≤ 3 维中，保持 X 的正规交叉轨迹不变的双有理（或双亚纯）态射之后必须允许出现的奇点，完整列表包括循环奇点及其邻点。然而，四维还涉及一种新现象——必须允许出现一个额外的奇点，作为某些循环点邻域内奇点的极限。

本文证明，在任意给定维数下，存在一个适当的双有理（或双亚纯）态射 $\sigma : X' \to X$，它保持 X 的正规交叉轨迹，其中 X' 仅具有群循环奇点及其邻点，此外还有一份有限列表，列出若干可能出现的额外奇点，这些奇点可通过对群循环轨迹进行加权爆破来精确描述。态射 σ

由有限序列的加权爆破诱导（在解析情形下，适用于任意相对紧开子集）。

我们在定理5.4中给出了后者的公式，但这些公式不如 [4], 的公式明确；后者是通过组合性质的爆破得到的，用以消除循环点处特征除子上的奇点。即使在 $\dim X = 5$ 的情形下， [4] 的组合式消除技术也已不足够（例如例 3.9）。在更高维度下能否得到更明确的公式，仍是一个有趣的问题。

本文的三个主要部分将在引言的以下小节中作更精确的介绍，并在下文第 2–4 节中详细展开。我们的部分消奇总体策略与 [4]类似。上述（1）和（2）的特殊情形用于 [4], , 而（3）则基本上取代了 [4]的消除技术。定理 1.1 和 1.7 已在 [4, Rmk. 1.23]中公布。

我们通常假设基域 $\mathbb{K}$ 是 $\mathbb{C}$，不过，关于代数簇的所有结果都适用于任意不可数代数闭域 $\mathbb{K}$, 其特征为零。我们力求使本文本身易于阅读，但某些论证仍请参见 [4] ；此外，关于我们所用的奇点消解中的某些技巧，请参见 [4] 或消奇不变量速成课程 [10, 附录 A] 。

1.2. **分裂定理**。设 $X \subset Z$ 表示代数闭域 $\mathbb{K}$ （解析情形下为$\mathbb{K} = \mathbb{C}$）上嵌入的代数（或解析）超曲面。设 S 表示 X 中余维为k 的光滑闭子簇。如果 X 在 S上一般点处是正规交叉（k）（即阶为 k的正规交叉），那么 X 在 S 中的非正规交叉（k）点集是一个真闭代数（或解析）子集（参见[4, 引理 3.7]），通过奇点消解可将其变换为 $S \cap E$，其中 $E \subset Z$ 是与 S横截的有序简单正规交叉除子。

那么，给定 $a_0 \in S$，存在 a_0 在 Z中的一个 ´étale（或解析）邻域，其坐标为

$$(w, u, x, z) = (w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_q, x_1, \dots, x_{k-1}, z)$$

在该邻域中， $\{w_j = 0\}$、 $j = 1, \dots, r$是 E在 $a_0 = 0$处的分支， $S = \{z = x = 0\}$，且 X 的理想由一个函数生成

$$f(w, u, x, z) = z^k + a_1(w, u, x)z^{k-1} + \cdots + a_k(w, u, x), \tag{1.1}$$

其中系数 $a_i(w, u, x)$是正则（或解析）函数。这些假设意味着 f属于由 $x_1, \dots, x_{k-1}, z$生成的理想，并且 f在每个满足 $z = x = 0$, $w_1 \cdots w_r \neq 0$的点处形式分裂为k 个关于 z的一次因子。

定理 1.1。 设 $f(w, u, x, z)$ 表示一个函数(1.1)，其系数$a_i(w, u, x)$ 为正则（或解析）函数， f属于由 x_1、.....、x_{k-1}生成的理想，且 f在每个满足 $z = x = 0$, $w_1 \cdots w_r \neq 0$的点处形式分裂。假设 $\mathbb{K}$ 不可数。那么，经过有限次以如下形式的连续中心进行的爆破后

$$\{z = x = w_j = 0\}, \quad 1 \leq j \leq r, \tag{1.2}$$

我们可以假设 f 在 $\mathbb{K}[\![w^{1/p},u,x]\!]$上分裂，其中 p为某个正整数，且$w^{1/p}:=(w_1^{1/p},\dots,w_r^{1/p})$；也就是说，

$$f(w,u,x,z)=\prod_{i=1}^{k}\left(z+b_i(w^{1/p},u,x)\right), \tag{1.3}$$

其中每个 $b_i\ (w^{1/p},u,x)\ \in\mathbb{K}[\![w^{1/p},u,x]\!]$。

定理 1.1 在 [4, 定理 1.19] 中得到了证明，条件是 $q=0$ 且 $r=1$。

注 1.2。令 S' 表示 $S:=\{z=x=0\}$ 经过一次以形如 (1.2) 的中心为中心的爆破 σ 后的严格变换。那么 $S'\cong S$；此外，$S'=\{z=x=0\}$ 同样，在 σ的 w_j-坐标图表中，且 $a_0=0$ 提升为 S'中的 $a_0'=0$。定理中这一陈述的含义是，经过有限次以形如 (1.2) 的中心为中心的爆破后，X 的严格变换 X' 在 $a_0'=0$ 处由一个函数 f'给出，其分解如 (1.3) 所示。

例 1.3.（另见 [4, 例 1.18]。）设

$$f(w,x,z)=z^2+(w^3+x)x^2.$$

那么，f（即由 $f(w,\ x,\ z)\ =0$定义的$\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$的子簇 X）在 w-轴 $\{x=z=0\}$ 上每个非零点处都是正规交叉(2)。函数 f 在$\mathbb{C}[\![w,x]\!]$上不分裂，但我们可以写成

$$f(v^2,x,z)=z^2+v^6\left(1+\frac{x}{v^6}\right)x^2,$$

因此，$f(w,\ x,\ z)$ 在 $\mathbb{C}(w^{1/2})[\![x]\!][z]$ 中分裂，其中 $\mathbb{C}(w^{1/2})$ 表示 $\mathbb{C}[w^{1/2}]$ 的分式域。

考虑在 $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$中对原点进行爆破 σ。w-轴提升到 σ的 w-图表中，通过将 $(w,\ x,\ z)$ 替换为 $(w,\ wx,\ wz)$ 给出；X的严格变换在 w-图表中由 $f'=0$ 给出，其中

$$f'(w,x,z):=w^{-2}f(w,wx,wz)=z^2+w(w^2+x)x^2.$$

再对原点进行两次爆破后，我们得到

$$f'(w,x,z)=z^2+w^3(1+x)x^2,$$

使得 $f'(w,x,z)$ 在 $\mathbb{C}[\![w^{1/2},x]\!]$ 上分裂（或者说，$f'(v^2,x,z)$ 在原点的一个 ´étale 邻域中分裂）。

1.3. **群循环标准形**。令 G 表示一个有限阿贝尔群。令 $g_1,\dots,g_t$ 表示 G 中元素的任意一种枚举（其中 t 是 G 的阶 $|G|$），并令 X_{g_j}、$j=1,\dots,t$ 为不定元。我们定义 G-循环矩阵

$$C_G(X_{g_1},\dots,X_{g_t}) \tag{1.4}$$

为一个矩阵，其 ij 个条目中的第 ij 个为 $X_{g_jg_i^{-1}}$。矩阵 C_G 取决于 G 中元素的排列顺序。

另一方面，令

$$\Delta_G:=\det C_G\,;$$

那么，Δ_G和 C_G的特征值均与排序 g_1、.....、g_t无关，因为矩阵的第 i行和第 j行（分别为第 i列和第 j列）可分别通过左乘（右乘）互换

通过 $t \times t$ 矩阵 $E_{ij} = (a_{\alpha\beta})$，其中 $a_{ij} = a_{ji} = 1$、 $a_{\alpha\alpha} = 1$，当 $\alpha \neq i,\ j$时；否则为 $a_{\alpha\beta} = 0$。

C_G的特征值是由不定元 X_{g_1}、…、X_{g_t}线性组合而成的（参见下文的 (1.6) 和 (3.16)）。

例 1.4。若 $G = \mathbb{Z}_k$是阶为 k的（加法）循环群，那么 $C_{\mathbb{Z}_k} = C_k$ 就是（标准）循环矩阵

$$C_k(X_0, X_1, \dots, X_{k-1}) := \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & \cdots & X_{k-1} \\ X_{k-1} & X_0 & \cdots & X_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_0 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Phillip Davis 的著作 [12] 是关于循环矩阵的经典参考书。

循环矩阵 $C_k(X_0, X_1, \dots, X_{k-1})$ 的特征向量为

$$V_\ell = (1,\ \varepsilon^\ell,\ \varepsilon^{2\ell},\ \dots,\ \varepsilon^{(k-1)\ell}),$$

$\ell = 0, \dots, k-1$，其中 $\varepsilon = e^{2\pi i/k}$。相应的特征值为

$$Y_\ell = X_0 + \varepsilon^\ell X_1 + \cdots + \varepsilon^{(k-1)\ell} X_{k-1}, \quad \ell = 0, \dots, k-1. \tag{1.6}$$

令 $\Delta_k = \Delta_{\mathbb{Z}_k}$ 表示行列式 $\det C_k$。则

$$\begin{aligned} \Delta_k(X_0, \dots, X_{k-1}) &= Y_0 \cdots Y_{k-1} \\ &= \prod_{\ell=0}^{k-1} (X_0 + \varepsilon^\ell X_1 + \cdots + \varepsilon^{(k-1)\ell} X_{k-1}). \end{aligned} \tag{1.7}$$

给定不定元 $(w, x_0, \dots, x_{k-1})$，令

$$\begin{aligned} P_k(w, x_0, \dots, x_{k-1}) &:= \Delta_k(x_0,\ w^{1/k}x_1,\ \dots,\ w^{(k-1)/k}x_{k-1}) \\ &= \prod_{\ell=0}^{k-1} (x_0 + \varepsilon^\ell w^{1/k} x_1 + \cdots + \varepsilon^{(k-1)\ell} w^{(k-1)/k} x_{k-1}) \end{aligned} \tag{1.8}$$

那么 $P_k(w, x_0, \dots, x_{k-1})$ 是一个不可约多项式。按照 [4]，我们将由方程 $P_k(w, x_0, \dots, x_{k-1}) = 0$ 定义的簇 $X \subset Z = \mathbb{A}^{k+1}$ 在原点处的奇点称为循环奇点 $\mathrm{cp}(k)$（或循环点奇点）；也就是说，该奇点由方程定义

$$\Delta_k(x_0,\ w^{1/k}x_1,\ \dots,\ w^{(k-1)/k}x_{k-1}) = 0.$$

例如，$\mathrm{cp}(2)$ 是夹点，由 $P_2(w, z, x) = z^2 - wx^2$ 给出，而 $\mathrm{cp}(3)$ 则由下式给出

$$P_3(w, z, y, x) = z^3 + wy^3 + w^2x^3 - 3wxyz.$$

更一般地，乘积循环奇点 $\mathrm{cp}(k_1) \times \cdots \times \mathrm{cp}(k_m)$ 由一个多项式定义

$$P(w, x) = P_1(w, x^1) \cdots P_m(w, x^m),$$

其中 $x = (x^1, \dots, x^m)$、$x^\ell = (x^\ell_0, \dots, x^\ell_{k_\ell - 1})$、$\ell = 1, \dots, m$，并且对于每个 ℓ，

$$P_\ell(w, x^\ell) = \Delta_{k_\ell}(x^\ell_0,\ w^{1/k_\ell}x^\ell_1,\ \dots,\ w^{(k_\ell-1)/k_\ell}x^\ell_{k_\ell-1}),$$

（有一个共同变量 w）。

定义 1.5。 群循环奇点。 我们将由有限阿贝尔群 Γ 和正整数 r决定的、阶 为 k的群循环 或 Γ-循环奇点，定义为原点处一个不可约多项式的奇点

$$P(w,x) = P(w_1,\dots,w_r,x_0,\dots,x_{k-1}), \tag{1.9}$$

其中

$$P(w,x) = \Delta_\Gamma(X_{\ell_0}, X_{\ell_1},\dots,X_{\ell_{k-1}}) \tag{1.10}$$

并且以下条件 (1) 和 (2) 成立。

(1) $\{0=\ell_0,\ell_1,\dots,\ell_{k-1}\}$ 是 Γ中各元素的一个枚举，并且

$$X_{\ell_0} = x_0,$$
$$X_{\ell_j} = w^{\gamma_j}x_j, \quad j=1,\dots,k-1,$$

其中 $w^{\gamma_j} = w_1^{\gamma_{j1}}\cdots w_r^{\gamma_{jr}}$，并且对于每个 $i=1$、.....、r，存在一个整除 k 的正整数 p_i ，使得

$$\gamma_{ji} \in \frac{1}{p_i}\{0,\dots,p_i-1\}, \quad j=1,\dots,k-1,$$

$0 \neq \gamma_{ji} = \beta_{ji}/p_i$ 为既约形式，其中某个 j。

因此，每个 p_i 都是满足 $\gamma_{ji} \in \mathbb{Z}/p_i$, $j=1,\dots,k-1$ 的最小正整数。令 G 表示阿贝尔群 $\mathbb{Z}_{p_1}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{p_r}$。 那么， G 以显然的方式作用于 $\mathbb{C}[w_1^{1/p_1},\dots,w_r^{1/p_r},x]$。 由于 $P(w,x)$ 是 G-不变量，而 $P(w,x)$ 是 $C_\Gamma(X_{\ell_0},X_{\ell_1},\dots,X_{\ell_{k-1}})$ 的特征值 Y_j之积，因此可得到一个从G 到 $\{Y_j\}$的置换群的同态；又因为 P 不可约， G 在特征值集合上传递作用。

(2) $\Gamma = G/H$，其中 H 表示任一特征值 Y_j的稳定子群。

更一般地，乘积群循环奇点由多项式$P(w,x) = P_1(w,x^1)\cdots P_s(w,x^s)$ 定义，其中 $x=(x^1,\dots,x^s)$，并且对于每个 $h=1,\dots,s$， $x^h=(x_0^h,\dots,x_{k_h-1}^h)$， P_h 是不可约多项式 $P_h(w,x^h)$，而 P_h 定义如上所述的一个Γ_h-循环奇点，其中 Γ_h 和 $r_h \le r$ 适当选取（即，对于给定的 h，某些变量w_i 可以不出现在 P_h中）。阶 $k := k_1+\cdots+k_s$。

注记 1.6。 由定义 1.5 可知，在每个余维一层 $T_i := \{x=w_i=0,\ w_h\neq 0,\ h\neq i\}$（即在 $S := \{x=0\}$ 中余维为一）上的点处，(1.10) 导出标准乘积循环正规形 $\mathrm{cp}(p_i)\times\cdots\times\mathrm{cp}(p_i)$（含$k/p_i$ 个因子）；特别地，对于定义 1.5 中的每个 $j=0,\dots,k-1$, $\{\gamma_{ji}\colon\ j=0,\dots,k-1\}$，其由 k/p_i 个 q/p_i 副本组成；对于每个 $q=0,\dots,p_i-1$ （其中 $\gamma_{0i}=0$, $i=1,\dots,r$ ）。见定理 3.8。

于是还可得出，对于任意 $q<r$, Δ_Γ ，在余维为 q 的层 $\{x=w_{i_1}=\cdots=w_{i_q}=0$ 上的任意一点处， Δ_Γ 导出一个阶为 k 的乘积群循环奇点，且 $w_i\neq 0$, 若 $i\neq i_j$, $j=1,\dots q\}$，其中 $1\le i_1<\cdots<i_q\le r$。

标准循环奇点 $\mathrm{cp}(k)$ 是具有 $r=1$ 的唯一 $\mathbb{Z}_k$-循环奇点。（群循环奇点的同构类）并非由 Γ and r 唯一确定，即使在 $\Gamma=\mathbb{Z}_k$ if $r>1$ 的情况下也是如此；参见例 3.9）。

对于一般情形（即定义 1.5 中的稳定子子群 H 不一定是平凡的情形），我们将运用涉及庞特里亚金对偶 $G^* := \mathrm{Hom}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 的组合技巧（见 [23]），把例 1.4 中的简单构造推广到一般的群循环矩阵（第3.1、3.3节）。正交

补集 of H 在 G^* 中与 G/H（非典范地）同构。（对于 G 有限阿贝尔群，特征群 Hom($G, \mathbb{C}^*$) $\cong$ Hom($G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$）。

我们称代数簇或解析簇 X 在给定点 a 处具有一个群循环奇点，如果存在一个局部嵌入簇，使得 X 在a 处的理想由一个定义 1.5 中所述的群循环奇点生成，且相对于适当的 ´étale 或解析邻域中的坐标而言（特别地， X 在 a处不可约）。如果 X 在 a 处具有如 (1.10) 所示的群循环奇点，那么我们也称 X 的理想（或该理想的一个生成元）在 a处具有 Γ–循环正规形式 (1.10)。乘积群循环标准形的情形也类似。

下面这个关于通过保持正规交叉的光滑爆破约化为群循环标准形 的定理，说明了群循环奇点如何出现在部分消奇过程中，并且在定理 1.13 的归纳步骤（对 $p \le n+1$ 进行归纳）中也起着关键作用。

定理 1.7。 设 X 表示一个复代数簇或解析簇。设 n ： =维数 X，并设 p 表示一个正整数 $1 \le p \le n+1$。那么存在一个态射σ_p ： $X_p \to X$ ，它由有限序列的容许光滑爆破复合而成（在解析情形下，对 X的任意相对紧开子集进行），并保持正规交叉点的轨迹 $X^{\mathrm{nc}(p)}$ 中阶数为 $\le p$的点，使得 X_p仅有超曲面奇点，且最大阶为 $\le p$； S_p 中 X_p 的阶为 p 的点构成一个光滑子集，其维数为 $n-p+1$（除非为空）；并且X_p 在 S_p 的每一点都具有阶数为 p 的（乘积）群循环奇点（特别是， X_p 在 S_p上一般是正规交叉（p））。此外，

(1) 若 E_p 表示 σ_p的例外除子，则 E_p 与 S_p横截，$S_p \backslash E_p$ 对应于 X的正规交叉（p）轨迹，并且 X_p 在 $S_p \cap E_p$的每一点都具有一个（乘积）群循环奇点，其标准形（如定义 *1.5* 所述）所含参数 w_i 对应于 E_p的分支；*(2)* 若 G 是作用于 X上的一个群，则每次爆破的中心在 G的作用下保持不变，因此该作用经每次爆破提升，最终在 X_p 上得到一个与 σ_p交换的作用。

如果其中心光滑且与异常除子构成简单正规交叉，则称该爆破为容许的。群循环奇点无法在不修改X 正规交叉点的情况下被消除。

我们对定理 1.7 的证明使用了分裂定理 1.1 以及 [7] 的消奇化不变量，并结合基于 [4,定理1.22]的清理论证；见定理 3.15。

注1.8。在某点处，若 X_p具有 p 个不可约分支，则该点上的阶为 p 的乘积群循环奇点是简单正规交叉。因此，先前关于保持简单正规交叉的部分消奇结果（如 [5], [10]）都是定理 1.7 的直接推论，其中使用了关于 p 的归纳法（不需要定理 1.13）。

注记1.9。定理 1.7 可以通过以下几种方式得到加强，而这些加强对于我们的部分消奇定理 1.13 的归纳证明十分重要。

（1）我们还可以考虑嵌入簇 $X \hookrightarrow Z$（其中 Z 是光滑的）以及一个有序（约化）除子 $E \subset Z$（即，分支 E_i 是约化的，但不一定不可约）。如果 τ： $Z' \to Z$ 是一个双有理（或双亚纯）态射，那么 E 的变换 $E' \subset Z'$ 表示有序

除子 $E' = \sum_{i=1}^{t+1} E'_i$，其中 E'_i表示 E_i的严格变换，$i = 1, \ldots\ldots, t$，而 E'_{t+1}是 τ的例外除子。

如果 X 是一个嵌入簇，并带有一个与 S_p横截的简单正规交除子 E，那么定理成立，其中容许的意味着爆破的中心是光滑的，并且与（变换后的）除子构成简单正规交；此外，在此情形下，结论成立且 S_p 与最终除子 E_p横截。

（2）对于 X 连同一个除子 E，相对于对（X，E）的阶为 p 的正规交点，也有定理 1.7 的一个版本，其中后者意味着 $X \cup E$的阶为 p 的正规交。事实上，该版本归结为对$X \cup E$所陈述的定理。

（3）在（1）和（2）中，如果 X 以及 E 的所有分支关于群 G的作用都是不变量，那么定理成立，并附加以下条件：（该群提升到每一次爆破上，且）所涉及的每一次爆破的中心都是 G-不变量，从而该作用提升为 X_p 上的一个与 σ_p交换的作用，并且 E_p 的每个分支都是 G-不变量。

例1.10. 令 G 表示克莱因四元群 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$。考虑多项式 $P(w, x) = P(w_1, w_2, x_0, x_1, x_2, x_3)$，其定义如下：

$$P(w,x) = \prod_{i,j=0,1} \left(x_0 + w_1^{1/2} x_1 + w_2^{1/2} x_2 + w_1^{1/2} w_2^{1/2} x_3 \right),$$

其中 $\varepsilon_2 = e^{2\pi i/2}$。则 $X := V(P)$ 不可约，且 X 在余维一层 $T_i = \{x : w_i = 0, w_{3-i} \neq 0\}$, $i = 1, 2$ 的任意点处都有乘积循环奇点 cp(2) × cp(2)。令

$$\begin{aligned} Y_{ij} &:= x_0 + \varepsilon_2^i w_1^{1/2} x_1 + \varepsilon_2^j w_2^{1/2} x_2 + \varepsilon_2^i \varepsilon_2^j w_1^{1/2} w_2^{1/2} x_3, \\ X_{k\ell} &:= \frac{1}{4} \sum_{k,\ell=0,1} \varepsilon_2^{ki-\ell j} Y_{ij}, \end{aligned}$$

并按对的字典序对后者重新编号：$X_0 := X_{00}$，$X_1 := X_{01}$，$X_2 := X_{10}$，$X_3 := X_{11}$。

则 G-循环矩阵 $C_G(X_{00}, X_{01}, X_{10}, X_{11})$ 具有嵌套分块循环形式

$$C_G(X_0, X_1, X_2, X_3) = \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1 & X_0 & X_3 & X_2 \\ X_2 & X_3 & X_0 & X_1 \\ X_3 & X_2 & X_1 & X_0 \end{pmatrix}$$

（不是标准循环矩阵）以及

(1.11)
$$P(w,x) = \Delta_G(X_0, X_1, X_2, X_3) = (\det C_G) \left(x_0,\, w_1^{1/2} x_1,\, w_2^{1/2} x_2,\, w_1^{1/2} w_2^{1/2} x_3 \right).$$

G 循环矩阵的嵌套分块循环形式是一种普遍现象，本文不对此展开讨论，但它与定理 3.8 和 5.4 有关。G 循环奇点 (1.11) 具有光滑正规化，cp(k) 也是如此。

1.4. 部分消奇。 在本小节中，我们陈述并简要解释关于部分消奇的定理 1.13，该定理将在第 4 节中得到证明。我们的方法受到概述 §1.1 中所述低维结果的指导。

定理 1.13 通过递归证明；归纳步骤包括定理 1.7，随后对

层 S_p中的群循环点进行一系列加权爆破。对 X_p 进行这一系列加权爆破会产生一个轨形$\widetilde{\sim}$ $\widetilde{\sim}X_p \to X_{p,\ \mathrm{quot}} =: X'_p$ 以及双有理（或双亚纯）态射 $\tau\colon X'_p \to X_p$。$\widetilde{\sim}$这里，X_p 表示仿射轨形覆盖图的集合，而$X_p \to X_{p,\ \mathrm{quot}}$表示来自各图表的态射集合。$\widetilde{\sim}$ $\widetilde{\sim}$这一系列加权爆破的例外除子称为特征除子 $D_p \subset X_p$ 或$D_p \subset X'_p$（参见§1.1）。

一般而言，轨形 $Y \to Y_{\mathrm{quot}}$ 是由一组覆盖图表及覆盖某个簇 Y_{quot}的态射组成的集合，其中每个覆盖图表都带有一个有限阿贝尔群的作用，而从该图表到 Y_{quot} 的态射是商态射，随后接一个 ´étale映射（在解析情形下则为开嵌入）。另见 §4.1。

代数簇或解析簇 X 的加权爆破（或适当的加权爆破序列）确定了一个轨形 $X \to X_{\mathrm{quot}}$ 和一个交换图，

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & & \\ \downarrow & \searrow^{\widetilde{\sigma}} & \\ X' := \widetilde{X}_{\mathrm{quot}} & \xrightarrow{\sigma} & X\,, \end{array} \tag{1.12}$$

其中 $\sigma\colon X' \to X$ 是一个双有理（或双亚纯）态射，其他箭头表示从覆盖图表出发的一组态射。

构造所需的技术将在第 4 节中介绍。由于我们只使用标准膨胀（权重平凡的加权爆破）以及对群循环奇点进行的显式加权爆破，因此构造相对简单，相关技术也只会在所需的范围内加以发展。

对于群循环奇点的加权爆破，我们将采用 Abramovich、Temkin 和 W-lodarczyk [2] 的结果，特别是 [26]关于沿光滑加权中心进行余边界爆破的结果，从而在无需借助代数栈的情况下，得到一个定义良好的簇 X' 及显式双有理态射 $\sigma\colon X' \to X$（见 (1.12)）。这一论证也适用于复解析情形（在相对紧的开集上），主要借助 [3, 关于 Specan 的第 1] 章（参见 [1, §1.6]）。此外，在解析情形下，还可以通过直接粘合轨形商图来证明这一结果；相关内容将在后续文章中介绍。

我们先来看一个例子，说明在定理 1.13 中如何对群循环奇点进行加权爆破。为简单起见，本例采用标准的（即循环群）循环奇点；而一般的（乘积）群循环奇点情形将在第 4 节中以完全类似的方式处理。

处理群循环奇点的加权爆破时，为方便起见，我们将对 §1.3 中的记号稍作调整，因为轨形群在加权爆破中的出现方式如此：我们将把群 $G = \mathbb{Z}_{p_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_r}$ 的循环因子记为乘法循环群 μ_{p_i}，而非加法群 $\mathbb{Z}_{p_i}$，因此，对于定义 1.5 中与参数或坐标 (w_1、.....、 w_r) 相对应的部分，我们记作 $G = \mu_{p_1} \times \cdots \times \mu_{p_r}$。

例1.11. 我们考虑由$\Delta_k(x_0, w^{1/k}x_1, \ldots, w^{(k-1)/k}x_{k-1})$定义的循环循环奇点 cp($k$), 简写为 $\Delta(w^{j/k}x_j)$ ($j =$

$0, \dots, k-1$)。记 $\Delta = \Delta_k$。考虑与参数 (w, x_j) 相关联、权重为 $(k, k-j+1)$ 的原点加权爆破 σ。

加权爆破由 $k+1$ 个仿射图覆盖，对应于参数 w，x_j，$j = 0$，……，$k-1$。在轨形 w-图表中，σ 由以下代换给出

$$\begin{aligned} w &= t^k, \\ x_j &= t^{k-j+1}\dot{x}_j, \quad j = 0, \dots, k-1, \end{aligned}$$

群 μ_k 通过以下方式作用于图表

$$\varepsilon \cdot (t, \dot{x}_j) := (\varepsilon t, \varepsilon^{-(k-j+1)}\dot{x}_j) = (\varepsilon t, \varepsilon^{j-1}\dot{x}_j), \quad \text{where } \varepsilon \in \mu_k.$$

群作用在例外除子 $\{t = 0\}$ 之外是自由的（在下文定理 1.13 的讨论中将以 $\tilde{}$ 表示 D_k）。

同样，轨形 x_j-图表上也有 μ_{k-j+1}, $j = 0$，……，$k-1$ 的作用。

层 $S = \{x = 0\}$ 经 σ 的严格变换仅与 w-图表相交（作为不变光滑子簇），而 cp(k) 的拉回在此图表中由 $t^{k(k+1)}\Delta(\dot{x}_0$，……，$\dot{x}_{k-1})$ 给出，它具有正规交叉。

w图表对应的商由以下不变量的希尔伯特基 给出（即 μ_k-不变多项式代数的一组生成元）：

$$\begin{aligned} W &= t^k, \\ X_0 &= t\dot{x}_0, \\ X_1 &= \dot{x}_1, \\ X_j &= t^{k-(j+1)}\dot{x}_j, \quad 2 \le j \le k-1, \\ S_{\mu,\lambda} = S_{\mu,(\lambda_0,\dots,\lambda_{k-1})} &= t^\mu \prod_{j=0}^{k-1} \dot{x}_j^{\lambda_j}, \end{aligned}$$

其中 μ 和 λ_j 是非负整数，满足 $\lambda_1 = 0$ 并且

$$\mu + \lambda_0(k-1) + \sum_{j \ge 1} \lambda_j (j-1) = \nu k, \quad \nu = \nu_{\mu,\lambda} \ge 1.$$

（后面的这些不变量包含前面列出的不变量。）

$\{\Delta(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{k-1}) = 0\}$ 在前述商态射下的像，由以下生成元生成的理想给出：

$$W^{-2}\Delta(WX_0, W^{1+1/k}X_1, W^{j/k}X_j,\ j \ge 2) \tag{1.13}$$

（这只是 cp(k)，在对 $(X_0, \dots, X_{k-1})$ 进行置换后的标准形式），以及不变量之间的关系，其中尤其包括

$$\begin{aligned} \prod_{j \ne 1} X_j^{\lambda_j} &= t^{\lambda_0 + \sum_{j \ge 2} \lambda_j (k-j+1)} \prod_{j \ne 1} \dot{x}_j^{\lambda_j} \\ &= t^{\lambda_0 k + \sum_{j \ge 2} \lambda_j k - (\mu + \lambda_0(k-1) + \sum_{j \ge 2} \lambda_j (j-1))} t^\mu \prod_{j \ne 1} \dot{x}_j^{\lambda_j} \\ &= W^{\sum_{j \ne 1} \lambda_j - \nu} S_{\mu,\lambda}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

请注意，上述希尔伯特基包含 $S_{(0)} = \dot{x}_0^{\lambda_0}$，其中 $\lambda_0(k-1) = \nu_0 k$, $\nu_0 \ge 1$，$S_{(1)} = X_1 = \dot{x}_1$，以及 $S_{(j)} = \dot{x}_j^{\lambda_j}$，其中 $\lambda_j(j-1) = \nu_j k$, $\nu_j \ge 1$，对每个 $j \ge 2$都成立。因此，上述关系 (1.14) 包含 $X_0^{\lambda_0} = W^{\lambda_0 - \nu_0} S_{(0)}$ 和 $X_j^{\lambda_j} =$

$W^{\lambda_j-\nu_j}S_{(j)}$，对每个 $j \geq 2$ 都成立。因此，该商簇是循环超曲面 (1.13) 与由不变量之间的关系理想定义的托里克簇的交集。

我们将这个商称为对应于$\Delta(w^{j/k}x_j)$（$\mathrm{cp}(k)$）的轨形循环奇点 。一般的轨形群循环奇点见例4.9。

从商空间到原空间的诱导态射由下式给出

$$\begin{aligned} w &= t^k = W, \\ x_0 &= t^{k+1}\dot{x}_o = WX_0, \\ x_1 &= t^k\dot{x}_1 = WX_1, \\ x_j &= t^{k-j+1}\dot{x}_j = X_j, \quad j = 2, \ldots, k-1. \end{aligned}$$

在这个态射下， $\Delta(w^{j/k}x_j)$的拉回为（1.13） $\times W^2$。

备注 1.12。 注意，(1.14) 可以改写为

$$\frac{S_{\mu,\lambda}}{W} = W^{\nu-1}\prod_{j\neq 1}\left(\frac{X_j}{W}\right)^{\lambda_j},$$

它描述了关系式 (1.14) 在对 $\{(W、\ X_j、\ S_{\mu、\ \lambda}) =0\}$ 进行膨胀时如何变换（在 W-图表中）。因此，商簇经此爆破后变换为函数组 $S'_{\mu、\ \lambda}:=S_{\mu、\ \lambda}/W$ 的图中的超曲面 $\mathrm{cp}(k)$ (1.13)。该爆破本身是对关系理想进行的简单托里克奇点消解；参见第 8] 节中的 [8,。

接下来的部分消奇定理涉及一个正整数 p，与定理 1.7 中一样。我们主要关注 $p = \dim X + 1$ 的情形（此时， X 中阶至多为 p 的正规交叉点构成的开子集 $X^{\mathrm{nc}(p)}$ 与所有正规交叉点的轨迹 X^{nc} 重合），但涉及 p 的陈述有助于归纳法。

定理 1.13. 设 X 表示一个复代数簇或解析簇，并设 p 为正整数 $\leq$ 维数 $X+1$。那么存在一个轨形图 (1.12)，它由有限序列的加权爆破构成（在解析情形下，可在 X 的任意相对紧开子集上进行），并满足以下条件。

~ ~

(1) 令 E 表示 X 的例外除子（即每个覆盖图表中的例外除子集）。则 $\widetilde{\sigma}|_{\widetilde{X}\setminus\widetilde{E}}$ 在 $X^{\mathrm{nc}(p)}$上是 *´étale* 的，并诱导同构 $X'\setminus E' \to X^{\mathrm{nc}(p)}$。（轨形结构由$\widetilde{X}$的每个轨形坐标图表中的有限阿贝尔群作用给出，且该群作用在 $\widetilde{\sigma}^{-1}$（$X^{\mathrm{nc}(p)}$）上是自由的。）*(2)* X 仅具有阶数至多为 p的正规交叉奇点。*(3)* 诱导态射 σ ： $X' = X_{\mathrm{quot}} \to X$ 是适当的、双有理的（或双亚纯的），并保持 $X^{\mathrm{nc}(p)}$。

~ ~

(4) 对每个 $q = 1$，*.....*， p，令 S_q表示 X中阶数为 q的正规交叉点子集。（集合 $\{S_q\}$ 是 X的一个分层。）于是：

~ ~

(a) E 与每个层 S_q横截；

~ ~*(b)* 每个 S_q 和 E 的每个分支相对于轨形覆盖群的作用（在每个图表中）都是不变的，因此存在~ ~个诱导分层 $S_q := S_{q,\ \mathrm{quot}}$ 以及 X'中的诱导除子 $E' := E_{\mathrm{quot}}$；*(c)* S_q 是 $X'\setminus\bigcup_{q<r\le p} S_r$ 中 X的正规交叉（q）轨迹的闭包。

~ ~*(5)* 对于每个 $q = 1, \dots p$，都存在一个 特征除子 $D_q \subset E$，使得若 ~D_q 表示诱导的 特征除子 $D_{q,\ \mathrm{quot}} \subset X$’，则有：~ ~*(a)* 轨形覆盖群在 $X\setminus\sum_{q\le p} D_q$ 上自由作用；特别地，后者到 X' 的投影是 *´étale*；*(b)* X' 在 $S_q \cap D_q$ 中每个位于 $\sum_{q<r\le p} D_r$之外的点处都有轨形群循环奇点，而在 S_q中每个位于 $\sum_{q\le r\le p} D_r$之外的点处都有 正规交叉(q) 奇点。

群 G在 X 上的作用可唯一提升为群 G在 X'上的作用；相对于该作用，所有分层 S_q 和 E' 的所有分支均为不变量，并且 σ 是等变的。

~注记1.14。在递归构造中，特征除子 D_q, $q = p$， $p-1$，.....，1 是由对阶为 q 的群循环奇点进行加权爆破而产生的例外除子（参见例1.11）。为了与 §1.1 中回顾的低维结果进行比较，我们注意以下几点。

(1) 对于任意给定的 q，特征除子 D_q 上位于 $\sum_{q<r\le p} D_r$ 之外的点，是轨形群循环奇点 $S_q \cap D_q$ 的邻近奇点（nc(q) 除外）。

(2) $D_q \bigcap \sum_{q<r\le p} D_r$ 上的点是这些邻近奇点的极限。定理5.4给出了极限奇点的公式。我们注意到，这些极限奇点是在归纳构造中通过保持阶为 $< q$ 的正规交叉点的部分消奇算法得到的。

因此，对于给定的维数 n，存在有限多个彼此不同的 ´étale坐标图，它们在有限阿贝尔群的相应作用下保持不变，~足以覆盖 X，对任意 X均如此。因此，除正规交叉外，还需要有限种奇点形式来覆盖 X_{quot}，对任意 X均如此。此外，可以给出一个明确上界，该上界仅取决于 n 和 p，用于约束作用于轨形覆盖图上的有限阿贝尔群的阶；参见例4.9。

注1.15。定理1.13也可以按照注 1.9所示的方式加以加强。

定理1.13将在第 4 节中通过对 p使用归纳法，由定理1.7推出，具体如下。给定一个满足定理1.7的态射 σ_p： $X_p \to X$，我们按照例1.11中的做法，对层 S_p中（乘积）群循环奇点（尚非正规交叉的部分）的轨迹进行有限次加权爆破；此后，在 S_p的一个删去的~邻域内， X_p 只有阶为 $< p$的正规交叉。

每次加权爆破的中心支集均为 S_p 与例外除子某个分支的交；对于 S_p 中给定的群循环奇点，中心是注记 1.6 意义下的余维一层。

接下来，我们在 S_p的补集~ ~中应用归纳假设；爆破中心将与 S_p 隔离（因此是闭的）

~因为在~S_p的删去邻域中， X_p 已经是阶为 $< p$ 的正规交叉。尽管归纳假设是在 orbifold 覆盖图中应用的，我们将借助 [26] 证明，最终仍能得到商簇的双有理态射复合。

定理 1.13 的最终条件 (5)(b) 涉及分层 S_q of X', $q \leq p$ 中的轨形（乘积）群循环奇点；不过，通过按照注 1.12 进行简单的额外爆破，我们可以恢复定理 1.7 所给出的原始群循环奇点；这些爆破尤其能消解轨形图表的商所具有的环面奇点。

补充 1.16. 从定理 *1.13* 的态射 $\sigma : X' \to X$ 出发，对分层 S_q, $q \leq p$ 中的轨形群奇点进行一系列额外的（标准）爆破；之后，这些分层满足条件 *(5)(b)*，且其中只有群循环奇点。

论证也将在第 4 节给出。

2. Splitting theorem

本节证明分裂定理 1.1。我们采用 §1.2 中的记号。

注 2.1. 局部与整体。只需在任意给定点 $a_0 \in S \cap E$ 的某个邻域内证明定理 1.1 的断言。对于整体情形，我们可以按照给定的 E 排序所确定的顺序，对 $S \cap E$ 的分支 $F_i := \{z = x = w_i = 0\}$， $i = 1$，....., r 进行爆破；根据局部版本，可得到对每个 F_i 所需爆破次数的一个上界。我们也可以根据局部断言给出的幂次 p 的上界，但这并无必要，因为根据引理 3.5]，对于某个 p， f 在 $\mathbb{C}[\![w^{1/p}, u, x]\!]$ 上分裂，当且仅当它在 $p = k!$ 下分裂。除子 E 对局部断言基本无关紧要，因为我们只需令 E 表示 $\{w_1 \cdots w_r = 0\}$。

我们对定理 1.1 的证明使用了 Soto 和 Vicente 提出的多元牛顿-普赛定理 [24], ，其使用方式与证明 [4, 定理 1.13] 中的方式相同。我们还使用了 [4, 引理 3.1] 以及下面的三个引理。在代数情形下，引理 2.2 和 2.3 对任意代数闭域 $\mathbb{K}$都成立，但定理 1.1 的证明要求底域是一个特征零的不可数代数闭域 $\mathbb{K}$ 。

给定 f 如 (1.1) 中所示，令 $Y \subset S \cap E$ 表示满足 f 不分裂的点的集合 $a \in S$ ；也就是说，满足 f不在 $\mathbb{C}[\![w - w_0, u - u_0, x]\!]$上分裂的点，其中 $a = (w_0, u_0, 0)$。我们将 Y 简单地称为 f 在 S中的不分裂轨迹。

引理 2.2. 不分裂轨迹 Y 是$S \cap E$的一个闭代数（或解析）子集。

证明。 这一断言直接源于以下事实： Y 是 S 中所有点的补集；对于这些点 $b \in S$, X的正规化态射的纤维中恰有 k 个点。□

引理 2.3. 假设对于 $S \cap E$的每个不可约分支 $F_j = \{z = x = w_j = 0\}$，都存在一点 $a_j \in F_j \backslash Y$。那么 $Y = \emptyset$。

证明。 根据引理 2.2， Y 是 $S \cap E$的闭代数（或解析）子集。因此，假设意味着 Y 在 S中的余维至少为 2。

代数情形下引理 2.3 的证明涉及一种类似 Hartog 定理的论证——解析情形见下文的注 2.4。令 $V := \{z = 0\}$，并令 $X \to X$ 表示 $X := \{f(w, u, x, z) = 0\}$ 的正规化。考虑分歧覆盖 $p : X \to X \to V \to V$，并令 $B \subset V$ 表示分歧轨迹（V 中 p 不是 étale 的子集）。于是 $B \cap S = Y$。

在任意代数闭域 $\mathbb{K}$ 上，根据分歧轨迹的纯性，B 是 $\{h(w, u, x) = 0\}$ 在 V 中的一个超曲面。假设 $Y \neq \emptyset$。那么 $Y = B \cap S$ 是 $\{h(w, u, 0) = 0\}$ 在 S 中的一个超曲面，这与 codim $Y \geq 2$ 矛盾。□

注 2.4。为了在复解析情形下证明引理 2.3，我们可以假设存在一个开多圆盘 U，它相对于 $\{z = 0\}$ 的坐标 (w, u, x)，以 $a_0 = 0$ 为中心，并且对于每个 $a \in (S \setminus Y) \cap U$，$f$ 都有 k 个局部解析根 $b_{a,i}(w, u, x)$，$i = 1, \dots, k$；也就是说

$$b_{a,i}(w, u, x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{k-1}} b_{a,i\alpha}(w, u) x^{\alpha},$$

在以 a 为中心的较小多圆盘 $U_a \subset U$ 中定义，其中 $b_{a,\, i\alpha}$ 是定义在 $S \cap U_a$ 上的解析函数。若 a，$b \in (S \setminus Y) \cap U$ 且 $U_a \cap U_b \neq \emptyset$，则在 $U_a \cup U_b$ 上，a 和 b 处的根（按适当顺序排列）可以粘合起来。

由于 Y 在 S 中的余维为 ≥ 2，$(S \setminus Y) \cap U$ 是单连通的。因此，通过解析延拓，局部根的系数 $b_{a,\, i\alpha}(w, u)$ 可以粘合起来，从而在 $(S \setminus Y) \cap U$ 上定义解析函数 $b_{i\alpha}(w, u)$。现在，根据 Hartog 定理，$b_{a,\, i\alpha}$ 可以延拓为定义在 $S \cap U$ 上的解析函数，结论得证。

引理 2.5. 设 $\mathbb{K}$ 表示特征为零的代数闭域。对每个 $\lambda \in \mathbb{K}(u) = \mathbb{K}(u_1, \dots, u_q)$，存在 $\mathbb{K}^q$ 的一个真代数子集 W，使得在每个点 $a = (a_1, \dots, a_q) \in \mathbb{K}^q \setminus W$ 处，λ 都由幂级数环 $\mathbb{K}[\![u - a]\!]$ 中的一个元素给出。

证明。注意，典范包含 $\mathbb{K}[u] \subset \mathbb{K}[\![u]\!]$ 将代数闭包 $\mathbb{K}(u)$ 识别为 $\mathbb{K}((u))$ 的子域，其中包含后者中所有在 $\mathbb{K}(u)$ 上代数的元素（或者通过去分母，可视为在 $\mathbb{K}[u]$ 上代数的元素）。给定一点 $u = a \in \mathbb{K}^q$，存在一个典范同构 $u \mapsto u + (u - a)$，将 $\mathbb{K}(u)$ 映到 $\mathbb{K}(u - a)$。

给定 $\lambda \in \overline{\mathbb{K}(u)}$，存在一个多项式 $P(u, t)$，它属于 t 且系数在 $\mathbb{K}[u]$ 中，使得 λ 是 $P(u, t)$ 的一个根 $= 0$，并且 P 的判别式 $\Delta(u)$ 不恒为零。

设 $a \in \mathbb{K}^q \setminus W$，其中 W 是 Δ 的零点集。若 $m =$ 的次数为 P，则 $P(u, t) = P(a + (u - a), t)$ 在 a 处分裂为 m 个互异根 $t = b_i(u - a) \in \mathbb{K}[\![u - a]\!] \subset \mathbb{K}((u - a))$ $i = 1, \dots, m$，因此 $\lambda = b_i$，其中 i。□

定理 *1.1* 的证明。情形 $r = 1$。令 $\mathbb{L}$ 表示 $\mathbb{C}[u] = \mathbb{C}[u_1, \dots, u_q]$ 的分式域的代数闭包 $\mathbb{C}(u)$。记作 $(y_1, \dots, y_k) := (x_1, \dots, x_{k-1}, w) = (x, w)$。

令 $\mathrm{SL}^+{}_{\mathrm{lex}}(k, \mathbb{Z})$ 表示 $\mathrm{SL}(k, \mathbb{Z})$ 中由上三角矩阵构成的乘法子半群

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

其中 a_{ij} 为非负整数。显然，$\mathrm{SL}^+{}_{\mathrm{lex}}(k,\mathbb{Z})$ 通过 $y^\alpha \mapsto y^{\alpha A}$, $A \in \mathrm{SL}^+{}_{\mathrm{lex}}(k,\mathbb{Z})$ 作用于单项式$y^\alpha = y_1^{\alpha_1}\cdots y_k^{\alpha_k}$，其中

$$\alpha A := (\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\cdot\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

设 $\psi_A(y^\alpha) := y^{\alpha A}$。当然， ψ_A 可扩展为在 $\mathbb{L}[\![y]\!] = \mathbb{L}[\![y_1,\ldots,y_k]\!]$ 上的运算，也可扩展为在 $\mathbb{L}[\![y]\!][z]$ 上的运算（通过前述对系数的运算），这两种情况下我们也都将其记为 ψ_A。

由于 ψ_A 取 $y_k = w \mapsto w$，并且（对每个 $i = 1$，……，$k-1$）取 $y_i \mapsto y_i$ 乘以（y_{i+1}，……，y_{k-1}，w）中的一个单项式（其指数由 A 的第 i 行给出），我们看到 ψ_A 也可以作为在 $\mathbb{L}(w)[\![y_1,\ldots,y_{k-1}]\!]$ 上的运算，或在 $\mathbb{L}((w))[\![y_1,\ldots,y_{k-1}]\!]$ 上的运算。

根据 Soto 和 Vicente 定理 [24], ，存在一个正整数 p ，使得 f 在 $\mathbb{L}((y_k^{1/p}))\cdots((y_1^{1/p}))[z]$ 中分裂；此外，存在 $A \in \mathrm{SL}^+{}_{\mathrm{lex}}(k,\mathbb{Z})$，使得 $\psi_A(f)$ 在 $\mathbb{L}[\![y_1^{1/p},\ldots,y_k^{1/p}]\!][z]$ 中分裂。令 $c_i \in \mathbb{L}[\![y_1^{1/p},\ldots,y_{k-1}^{1/p},w^{1/p}]\!]$,$i = 1,\ldots,k$ 表示 $\psi_A(f)$ 的根。

根据 [4, 引理 3.1]， f 在 $\mathbb{L}(w)\overline{[\![y_1,\ldots,y_{k-1}]\!]}[z]$ 中分裂。令 $b_i \in \overline{\mathbb{L}(w)}[\![y_1,\ldots,y_{k-1}]\!] \subset \overline{\mathbb{L}((w))}[\![y_1,\ldots,y_{k-1}]\!]$, $i = 1,\ldots,k$ 表示 f 的根。

由于 $\mathbb{L}[\![y_1^{1/p},\ldots,y_{k-1}^{1/p},w^{1/p}]\!]$ 是唯一分解整环， $\psi_A(f)$ 的根集 $\{c_i\}$ 与集合 $\{\psi_A(b_i)\}$ 相同；也就是说，每个 $c_i \in \mathbb{L}[\![y_1,\ldots,y_{k-1},w^{1/p}]\!]$。

注意，给定任意单项式 $y_1^{\alpha_1}\cdots y_{k-1}^{\alpha_{k-1}}$， $w = y_k$ 在 $\psi_A(y_1^{\alpha_1}\cdots y_{k-1}^{\alpha_{k-1}})$ 中出现的次数为 $\sum_{j=1}^{k-1}\alpha_j a_{jk}$；也就是说，次数至多为 $d\mu$，其中 d 是次数 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1}$ 和 $\mu = \max\{a_{jk}\}$。

因此，以 $\{z = x_1 = \cdots = x_{k-1} = w = 0\}$ 为中心进行 μ 次膨胀，就能消除根 b_i 中的所有分母。因此，经过这些爆破后，我们可以假设 $f(v^p, u, x, z)$ 在 $\mathbb{C}(u)[\![v,x]\!]$ 上分裂；也就是说，其根为

$$b_i(v,u,x) = \sum_{j\in\mathbb{N},\,\alpha\in\mathbb{N}^{n-1}} b_{i,j\alpha}(u)v^j x^\alpha \in \overline{\mathbb{C}(u)}[\![v,x]\!], \quad i = 1,\ldots,k.$$

根据引理 2.5，对于每个 i, j, α，都存在 $W_{i,\,j\alpha}$ 的一个闭代数子集，使得 $b_{i,\,j\alpha} \in \mathbb{C}[\![u-u_0]\!]$ 对每个 $u_0 \in \mathbb{C}^q\backslash W_{i,\,j\alpha}$ 都成立。由于任意不可数代数闭域上的光滑簇都不是可数个真子簇的并（在解析情形下，这也可由贝尔纲定理得出），因此存在 $u_0 \in \bigcap_{i,\,j,\,\alpha}(\mathbb{C}^q\backslash W_{i,\,j\alpha})$，由此可知 f 在 $\mathbb{C}[\![v,u-u_0,x]\!]$ 上分裂。 $r = 1$ 的结果则由引理 2.3 得出。

情形 $r > 1$。我们可以像上文的 $r = 1$ 情形那样，逐一处理 $F_j = \{z = x = w_j = 0\}$、$j = 1$、……、$r$，从而得出：经过有限次以形如 F_j的子集为中心的爆破后，对于每个 j，都存在一个正整数 p，使得 $f(v^p, u, x, z) = f(v_1^p, \ldots, v_r^p.u, x, z)$ 在每个 $\{z = x = v_j = 0\}$ 的一个点（稠密子集中的任意一点）处分裂。结论再次由引理 2.3 得出。□

3. Group-circulant normal form

我们首先说明分裂定理 1.1 如何引出有限阿贝尔群 Γ ，以及 Γ-循环奇点或 Γ-循环标准形的概念（定义 1.5）。所用方法是组合性的，并涉及

有限阿贝尔群 [23]的 庞特里亚金对偶。我们证明，群循环标准形在余维一层的每一点处都会导出标准乘积循环正规形（定理 3.8；参见注记 1.6）。最后，我们证明定理 1.7，即约化到群循环标准形。

设 $f(w,\ u,\ x,\ z)$ 表示一个满足定理 1.1 结论的函数。因此，对于某个 $p\in\mathbb{N},\ f(v_1^p,\ \ldots,\ v_r^p,\ u,\ x,\ z)$ 在 $\mathbb{C}[\![v,u,x]\!]$ 上分裂。设 $\mathcal{S}_k$ 表示 $f(v_1^p,\ \ldots\ldots,\ v_r^p,\ u,\ x,\ z)$ 的根的置换群。

假设 $f(w,\ u,\ x,\ z)$ 不可约。那么 $(\mathbb{Z}_p)^r$ 映 onto $\mathcal{S}_k$ 的一个子群，该子群在根上具有传递作用。由此（如引理 3.5(2)] 的证明所示）可得 [4,

$$f(v_1^{p_1},\ldots,v_r^{p_r},u,x,z) \tag{3.1}$$

分裂，其中对于每个 $i=1,\ \ldots\ldots,\ r,\ \ p_i\le k$ 以及群 $\mathbb{Z}_{p_i}^{(i)}:=\{0\}^{i-1}\times\mathbb{Z}_{p_i}\times\{0\}^{r-i}$ 映 onto $\mathcal{S}_k$ 的一个循环子群 $\mathbb{Z}_{p_i}$。设 G 表示阶为 $p_1\cdots p_r$ 的阿贝尔群$\mathbb{Z}_{p_1}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{p_r}$。

我们可以写成

$$f(v_1^{p_1},\ldots,v_r^{p_r},u,x,z)=\prod_{j=1}^{k}(z+b_j(v,u,x)), \tag{3.2}$$

其中每个 $b_j\in\mathbb{C}[\![v,u,x]\!]$。由于 f 不可约，取 $b:=b_{j_0}$，对于任意 $j=j_0$，(3.2) 的所有根 $-b_j$ 均具有以下形式

$$-b(\varepsilon_{p_1}^{j_1}v_1,\ldots,\varepsilon_{p_r}^{j_r}v_r,u,x),\quad j_i=0,\ldots,p_i-1,\ \ i=1,\ldots,r, \tag{3.3}$$

其中 ε_p 表示 $e^{2\pi i/p}$，因此 $\varepsilon_{p_i}=\varepsilon_k^{k/p_i}$。

群 G 在 $\mathbb{C}[\![v,u,x,z]\!]$ 上的作用如 (3.3) 所示；即，$j=(j_1,\ \ldots,\ j_r)\in G$ 将 $\varphi(v,\ u,\ x,\ z)$ 映射为 $\varphi(\varepsilon_{p_1}^{j_1}v_1,\ \ldots,\ \varepsilon_{p_r}^{j_r}v_r,\ u,\ x,\ z)$。此作用诱导出一个从 G 到 (3.2) 的根的置换群 $\mathcal{S}_k$ 的阿贝尔子群的同态，该子群在根上传递地作用。

对于每个 $i,\ p_i$ 整除 k，因为 G 中各元素对 $\mathbb{Z}_{p_i}\subset S_k$ 的平移构成了 (3.2) 的根集的一个划分，其中每个子集含有 p_i 个元素。

由于 G 是阿贝尔的，G 的作用下任一根的稳定子群 H 都与根无关；H 是 G 的一个子群，其阶为 $|H|=p_1\cdots p_r/k$。

对于每个 $j=(j_1,\ \ldots\ldots,\ j_r)\in G$，令

$$Y_j:=z+b(\varepsilon_{p_1}^{j_1}v_1,\ldots,\varepsilon_{p_r}^{j_r}v_r,u,x). \tag{3.4}$$

将第 2], 节的结果推广，写作 [4,

$$X_\ell:=\frac{1}{p_1\cdots p_r}\sum_{j_1=0}^{p_1-1}\cdots\sum_{j_r=0}^{p_r-1}\varepsilon_{p_1}^{\ell_1(p_1-j_1)}\cdots\varepsilon_{p_r}^{\ell_r(p_r-j_r)}Y_j,\quad \ell\in G. \tag{3.5}$$

在下文第3.1节中，Y_j、$j\in G$ 表示相互独立的变量。式 (3.4) 中 $f(v_1^{p_1},\ \ldots\ldots,\ v_r^{p_r},\ u,\ x,\ z)$ 各因子的表达式在第3.1节中不起作用，但会在以下各小节中再次以重要方式出现。

3.1. 循环组合学。 令 $Y_j,\ j=(j_1,\ldots,j_r)\in G$ 表示不定元，并由 (3.5) 定义 $X_\ell,\ \ell=(\ell_1,\ldots,\ell_r)\in G$。因此 (3.5) 定义了一个线性

变换 $W \to V$，其中 W和 V是 $\mathbb{C}^{|G|} = \mathbb{C}^{p_1 \cdots p_r}$的副本。该变换可逆，其逆变换为

$$Y_j = \sum_{\ell_1=0}^{p_1-1} \cdots \sum_{\ell_r=0}^{p_r-1} \varepsilon_{p_1}^{j_1\ell_1} \cdots \varepsilon_{p_r}^{j_r\ell_r} X_\ell, \quad j \in G \tag{3.6}$$

（参见 [4,(2.2)]）。

令 k表示 p_1、.....、 p_r 的最小公倍数（或任意公倍数）。注意， $\varepsilon^{\ell_i(}$ $_{p_i}^{p_i-j_i} = \varepsilon^{-(k/p_i))_k}$ $\ell_i j_i$ 。

注 3.1。 $\mathbb{Z}_{p_i}$ 作为 $\mathbb{Z}_k$ 的子群。包含同态 $\mathbb{Z}_{p_i} \hookrightarrow \mathbb{Z}_k$，作为模 p_i 或 k 的整数加法群，将 $1 \in \mathbb{Z}_{p_i}$ 映射到 $k/p_i \in \mathbb{Z}_k$。将 $\mathbb{Z}_{p_i}$、 $\mathbb{Z}_k$ 视为单位根的乘法群，这只需将 ε_{p_i} 写成 ε_k^{k/p_i} 。

为简洁起见，记 $\varepsilon := \varepsilon_k$。我们可以将方程 (3.6)、(3.5) 改写为

$$Y_j = \sum_{\ell \in G} \varepsilon^{\langle j,\ell\rangle} X_\ell, \quad j \in G, \tag{3.7}$$

其逆为

$$X_\ell = \frac{1}{p_1 \cdots p_r} \sum_{j \in G} \varepsilon^{-\langle \ell, j\rangle} Y_j, \quad \ell \in G, \tag{3.8}$$

其中 $\langle j, \ell\rangle$ 表示“加权标量积”

$$\langle j, \ell\rangle := \sum_{i=1}^{r} \frac{k}{p_i} j_i \ell_i\,, \quad j = (j_1, \ldots j_r),\, \ell = (\ell_1, \ldots, \ell_r) \in G.$$

若 Y_j 由 (3.4) 给出，则 $Y_j = Y_{j+h}$ 当且仅当 $h \in H$。一般而言，令 H表示 G的任意子群，并令 W_H 表示 W 中由下列方程定义的线性子空间

$$Y_j = Y_{j+h}, \quad j \in G,\ h \in H.$$

那么 $\dim W_H = |G/H|$。

令 $t := |G/H|$，并选取 G/H 的不同元素的代表元 $j^0, \ldots j^{t-1} \in G$。则对每个 $\ell \in G$,

$$X_\ell = \frac{1}{p_1 \cdots p_r} \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{h \in H} \varepsilon^{-\langle \ell, j^i + h\rangle} Y_{j^i+h}\,. \tag{3.9}$$

若 $Y = (Y_j)_{j\in G} \in W_H$，则

$$X_\ell = \frac{\xi_\ell}{p_1 \cdots p_r} \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon^{-\langle \ell, j^i\rangle} Y_{j^i}, \tag{3.10}$$

其中

$$\xi_\ell := \sum_{h \in H} \varepsilon^{-\langle \ell, h\rangle}. \tag{3.11}$$

Let

$$K := \left\{ \ell \in G : \varepsilon^{\langle \ell, h\rangle} = 1, \text{ for all } h \in H \right\};$$

即， $K = \{\ell \in G :\ \langle \ell,\ h\rangle \equiv 0$ 模 k，对所有 $h \in H\}$，因此把 K称为 H 在 G中的“正交补” $K = H^\perp$ 是合理的。容易看出， $H^\perp$ 是 G的一个子群。

例 3.2. 设 $G = \mathbb{Z}_k \times \cdots \times \mathbb{Z}_k$（$r$次），并设 H表示 G的子群$\mathbb{Z}_{p_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_r}$。则 $H^\perp = \mathbb{Z}_{k/p_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{k/p_r}$。

特别地，若 $G = \mathbb{Z}_4$ 且 $H = \mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Z}_4$，则 $H^\perp = H$，且典范同态 $H^\perp \hookrightarrow G \to G/H$ 不是同构。

引理 3.3. 正交补 $H^\perp$ （非典范地）同构于G/H。

证明。 我们使用 G [23]的（庞特里亚金）对偶 G^*。有限阿贝尔群 G 的对偶 G^* 定义为

$$G^* := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \tag{3.12}$$

（特征群 $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*) \cong \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$，其中 G 为有限阿贝尔群。）

设 G 是有限阿贝尔群。首先我们注意到， G^* 非典范地同构于 G。我们可以假设 $G = \mathbb{Z}_{p_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_r}$。于是

$$\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{p_i}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \tag{3.13}$$

（若 $f \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$，则相对于 (3.13)，我们将 $f = (f_1, \ldots, f_r)$ 记作此形式。）因此，只需证明 $(\mathbb{Z}_p)^* \cong \mathbb{Z}_p$。任意 $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 都将 1 映到 $f(1) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，且 $f(1)$ 有一个代表元 $a/b \in \mathbb{Q}$，满足 $a < b$，并且是既约分数。由于 $pf(1) = 0$，因此 $pa/b \in \mathbb{Z}$；于是 $b|p$ 并且

$$\frac{a}{b} = \frac{a(p/b)}{p}.$$

换言之， $f(1)$ 有 p 个可能取值：0，$1/p$，$\ldots$，$(p-1)/p$。

给定 G 上的一个标量积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，存在一个同态

$$\begin{aligned} G &\to G^* \\ g &\mapsto \langle g, \cdot \rangle. \end{aligned} \tag{3.14}$$

反过来，任意元素 $f \in G^*$ 都可以通过这种方式实现，取 $g = (f_1(1) \ldots, f_r(1))$ 即可，从而 (3.14) 是一个同构。

现在，给定 H of G的一个子群，我们将 H^O of H在 G^* 中的正交补定义为

$$H^\mathrm{O} := \{f \in G^* : f(h) = 0,\ h \in H\}.$$

同构 (3.14) 将 $H^\perp$ （关于标量积）映到 H^O。结论由此得出，因为

$$(G/H)^* = \mathrm{Hom}(G/H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \{f \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : H \subset \ker f\} = H^\mathrm{O}.$$

□

引理 3.4. 按(3.11)中的定义定义 ξ_ℓ。那么

$$\xi_\ell = \begin{cases} |H|, & \ell \in H^\perp, \\ 0, & \ell \notin H^\perp. \end{cases}$$

证明。 当 $\ell \in H^\perp$时，断言显然。另一方面，若 $\ell \notin H^\perp$，则存在 $h_\ell \in H$ 使得 $\varepsilon^{\langle \ell, h_\ell \rangle} \neq 1$。但是

$$\varepsilon^{\langle \ell, h_\ell \rangle} \xi_\ell = \sum_{h \in H} \varepsilon^{\langle \ell, h_\ell \rangle} \varepsilon^{\langle \ell, h \rangle} = \sum_{h \in H} \varepsilon^{\langle \ell, h_\ell + h \rangle} = \xi_\ell,$$

从而 $\xi_\ell = 0$。 □

引理 3.5。 $Y_j = Y_{j+h}$，对所有 $j \in G$ 和 $h \in H$，当且仅当 $X_\ell = 0$，对所有$\ell \notin H^\perp$。

证明。若对于所有 $j \in G$ 和 $h \in H$，$Y_j = Y_{j+h}$，则由 (3.10) 和引理 3.4 可得，对于所有 $\ell \notin H^\perp$，$X_\ell = 0$。反过来，假设对于所有 $\ell \notin H^\perp$，$X_\ell = 0$。若 $j \in G$ 和$h \in H$，则

$$Y_{j+h} = \sum_{\ell \in H^\perp} \varepsilon^{\langle j+h,\ell\rangle} X_\ell = \sum_{\ell \in H^\perp} \varepsilon^{\langle j,\ell\rangle}\varepsilon^{\langle h,\ell\rangle} X_\ell = Y_j,$$

因为 $\varepsilon^{\langle h,\ \ell\rangle} = 1$ 若 $h \in H$ 且 $\ell \in H^\perp$。 □

推论 3.6。 线性变换 (3.5) （或 (3.8)）诱导一个同构$W_H \to V_H$，其中

$$V_H := \{(X_\ell)_{\ell\in G} \in V : X_\ell = 0,\ \textit{for all}\ \ell \notin H^\perp\};$$

尤其是，$|H^\perp| = |G/H|$ （这也可由引理 *3.3* 得出）。

我们可以用群循环矩阵来诠释前面的组合性说明。给定 $j = (j_1, \ldots, j_r) \in G$，令 j 表示 G/H 中 j 的等价类，并令$Y_j := Y_j|_{W_H}$。推论 3.6 中同构 $\bar{W}_H \to V_H$ 的逆由以下线性变换给出

$$Y_{\bar{j}} = \sum_{\ell \in H^\perp} \varepsilon^{\langle j,\ell\rangle} X_\ell, \quad \bar{j} \in G/H.$$

令 ℓ_0，ℓ_1，$\ldots$，ℓ_{t-1} 表示指标 $\ell \in H^\perp$ 的任意枚举，其中 $\ell_0 = 0$。对于加法群 $\Gamma := G/H$，循环矩阵 (1.4) 可写成

$$C_{G/H}(X_{\ell_0}, X_{\ell_1}, \ldots, X_{\ell_{t-1}}) = \begin{pmatrix} X_{\ell_0} & X_{\ell_1} & \cdots & X_{\ell_{t-1}} \\ X_{\ell_0-\ell_1} & X_{\ell_1-\ell_1} & \cdots & X_{\ell_{t-1}-\ell_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{\ell_0-\ell_{t-1}} & X_{\ell_1-\ell_{t-1}} & \cdots & X_{\ell_{t-1}-\ell_{t-1}} \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

注 3.7。 Γ-循环矩阵 $C_\Gamma(X_{\ell_0}, X_{\ell_1}, \ldots, X_{\ell_{t-1}})$ 不仅取决于 Γ，还取决于排序 ℓ_0，ℓ_1，$\ldots$，ℓ_{t-1}。这可与标准循环矩阵 [4, (2.1)], 相比较；在 $\Gamma = \mathbb{Z}_k$ 的情况下，它是 C_Γ，排序为 $\ell = 0, 1, \ldots, k-1$。

另一方面，设

$$\Delta_\Gamma := \det C_\Gamma;$$

那么，Δ_Γ 和 C_Γ 的特征值都与排序 ℓ_0、ℓ_1、.....、ℓ_{t-1}无关；参见§1.3。

特别地，当且仅当我们可以取 $\ell_i = i$、$0 \le i \le t-1$时，$\Gamma \cong \mathbb{Z}_t$ 成立。因此，当且仅当 Γ是一个阶为 t的循环群时，Δ_Γ才与标准循环行列式 $\Delta_t(X_0, \ldots X_{t-1})$一致。

(3.15) 中的矩阵取决于群结构。若引入变量替换 $Y_i := X_{\ell_i}$, $i = 0, \ldots, t-1$，那么按照标准惯例，我们可以写作 $\Delta_\Gamma(Y_0, \ldots, Y_{t-1})$，表示行列式 $\Delta_\Gamma(X_{\ell_0}, X_{\ell_1}, \ldots, X_{\ell_{t-1}})$ 与变换 $X_{\ell_i} = Y_i$ 的复合。但请注意，这种记号隐藏了群结构；特别是，除非 Γ 是循环群，否则 $\Delta_\Gamma(Y_0, \ldots, Y_{t-1})$ 并不是一个矩阵的行列式，该矩阵的后续各行由第一行 $(Y_0, \ldots, Y_{t-1})$ 经过平凡的置换（例如循环置换）得到。参见例1.10。

容易验证，(3.15) 中的矩阵具有特征向量

$$\Psi_{\overline{j}} = (\varepsilon^{\langle j,\ell_o\rangle}, \varepsilon^{\langle j,\ell_1\rangle}, \dots, \varepsilon^{\langle j,\ell_{t-1}\rangle}), \quad \overline{j} \in G/H,$$

具有相应的特征值

$$Y_{\overline{j}} = \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon^{\langle j,\ell_i\rangle} X_{\ell_i}\,; \tag{3.16}$$

特别是，

$$\det C_{G/H}(X_{\ell_0}, X_{\ell_1}, \dots, X_{\ell_{t-1}}) = \prod_{\overline{j}\in G/H} Y_{\overline{j}}.$$

3.2. **群循环标准形**。现在考虑 $f(w,\ u,\ x,\ z)$ 不可约，如第 3 节开头所述。我们可以假设 $a_1(w,\ u,\ x) = 0$；即，$\sum_{j=1}^{k} b_j = 0$。我们沿用本节开头的记号，从而

$$f(w,u,x,z) = \prod_{\overline{j}\in G/H} Y_{\overline{j}},$$

其中

$$Y_{\overline{j}} = Y_j := z + b(\varepsilon_{p_1}^{j_1} w_1^{1/p_1}, \dots, \varepsilon_{p_r}^{j_r} w_r^{1/p_r}, u, x),$$

对于 $G = \mathbb{Z}_{p_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_r}$ 中 j 的任意代表元 $j = (j_1,\ \dots\dots,\ j_r)$。

回顾一下，对于每个 $i = 1,\ \dots\dots,\ r$, $\mathbb{Z}_{p_i}^{(i)} := \{0\}^{i-1} \times \mathbb{Z}_{p_i} \times \{0\}^{r-i}$ 映射到置换因子 Y_j 的群 S_k 的一个循环子群 $\mathbb{Z}_{p_i}$；而 G 中各元素对 $\mathbb{Z}_{p_i}^{-} \subset S_k$ 的平移，将 $\{Y_j\}$ 划分为 k/p_i 个子集，每个子集含有 p_i 个元素。

特别地，给定 $i = 1,\ \dots\dots,\ r$，在 余维一层 的任意一点，

$$T_i := \{z = x = w_i = 0,\ w_h \neq 0,\ h \neq i\}, \tag{3.17}$$

（即 $S := \{z = x = 0\}$ 中余维为一），$f(w,\ u,\ x,\ z)$ 在形式上有 k/p_i 个不可约因子，其在 z 中的次数为 p_i，与前述划分相对应。

与前面一样，H 表示在 $G = \mathbb{Z}_{p_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_r}$ 的作用下 (3.2) 的任一根的稳定子群。因此 $|G/H| = k$。

我们回顾一下，若在点 a 处的 ´étale 或解析邻域内，存在适当坐标 $(w,\ u,\ x,\ z)$，使得 f 具有 G/H-循环奇点，

$$f(w,u,x,z) = \Delta_{G/H}(X_{\ell_0}, X_{\ell_1}, \dots, X_{\ell_{k-1}}), \tag{3.18}$$

其中定义 1.5 的条件 (1) 和 (2) 对 $G/H = \{0 = \ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{k-1}\}$成立，并且

$$\begin{aligned} X_{\ell_0} &= z, \\ X_{\ell_j} &= w^{\gamma_j} x_j, \quad j = 1, \dots, k-1; \end{aligned}$$

在此情况下，此外，(3.18)称为 G/H-循环正规形式。我们还考虑 f 不可约时的乘积群循环正规形，如定义 1.5 所述。

定义 1.5 中的指数 γ_j 不一定是最优的，但在每个余维一层 T_i上都是最优的。此外，下面的定理表明，在任意点 $a \in T_i$处，(3.18) 都可以改写为例 1.4 中的乘积循环标准形，其中 $a_\circ$

定理 3.8。 余维一分层。 若 $f(w,u,x,z)$ 不可约，且具有上述群循环标准形，则在余维一层T_i上的任意点 b处，我们都可以在 b 的一个 *´étale* 邻域或局部解析邻域中找到坐标，使(3.18) 能够改写为例 ***1.4*** 中的标准（乘积）循环标准形；特别地，对于每个 $j=1,\ \ldots\ldots,\ k-1$, $\{\gamma_{ji}:\ \ i=1,\ \ldots\ldots,\ r\}$ 由 k/p_i 个 h/p_i 组成，对于每个 $h=0,\ \ldots\ldots,\ p_i-1$ （其中 $\gamma_{0i}:=0, i=1,\ \ldots\ldots,\ r$）。

为了证明定理 3.8，我们需要进一步发展第3.1节中的组合技巧；这将在接下来的第3.3节中完成。定理 3.8 的证明将在第3.4节中完成。

例 3.9. 考虑由以下方程定义的复代数簇 X

$$f(w,x,z):=\Delta_4\left(z,\ w_1^{2/4}w_2^{1/4}x_1,\ w_2^{2/4}x_2,\ w_1^{2/4}w_2^{3/4}x_3\right). \tag{3.19}$$

那么 X 是不可约的， $G=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$ 和 $G/H\cong\mathbb{Z}_4$。 X 的正规化不光滑——它是 $\mathbb{C}^3$ 与一个二次锥的乘积——这与 cp(*k*) 形成对照。

在余维一层 $T_1=\{z=x=w_1=0,\ w_2\neq 0\}$ 的任意一点，(3.19) 可写为

$$\Delta_4\left(z,\ w_1^{2/4}y_1,\ y_2,\ w_1^{2/4}y_3\right),$$

经过变量替换后，而后者可分解为

$$\left((z+y_2)^2-w_1(y_1+y_3)^2\right)\left((z-y_2)^2-w_1(y_1-y_3)^2\right).$$

这就是 cp(2) ×cp(2)；也就是说，

$$(\eta_1^2-w_1\xi_1^2)(\eta_2^2-w_1\xi_2^2),$$

经过变量替换后。

在本小节余下部分，我们将证明三个初等引理。虽然它们并未在定理 3.8 的证明中正式使用，但提供了重要的动机；特别是，定理 3.8 是下面引理 3.11 的一个非常一般的版本，而其证明包含了引理 3.12 中恒等式的一般对应形式（引理 3.10 也在 [4] 中隐式使用；见 [4, 备注 4.3]。）

引理 3.10。 假设 $r=1$, $f(w,x,z)$ 是不可约的，并且

$$\begin{aligned} f(w,x,z)&=\Delta_k\left(z,w^{h_1/k}x_1,w^{h_2/k}x_2\ldots,w^{h_{k-1}/k}x_{k-1}\right)\\ &=\prod_{\ell=0}^{k-1}(z+\varepsilon^{\ell}w^{h_1/k}x_1+\cdots+\varepsilon^{(k-1)\ell}w^{h_{k-1}/k}x_{k-1}), \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon=e^{2\pi i/k}$ 和 $(h_1,\ldots,h_{k-1})$ 是$(1,\ldots,k-1)$ 的一个置换（见 [4,注 4。3]）。然后，经过变量置换 $x_j=y_{h_j},\ j=1,\ldots,k-1$,$f$ 可以写成循环正规形式

$$\begin{aligned} &\Delta_k\left(z,w^{1/k}y_1,w^{2/k}y_2\ldots,w^{(k-1)/k}y_{k-1}\right)\\ &\qquad=\prod_{\ell=0}^{k-1}(z+\varepsilon^{\ell}w^{1/k}y_1+\cdots+\varepsilon^{(k-1)\ell}w^{(k-1)/k}y_{k-1}). \end{aligned}$$

证明。 经过变量置换 $x_j = y_{h_j}$, $j = 1, \dots, k-1$后，我们可以将f 重写为

$$\prod_{\ell=0}^{k-1} (z + \varepsilon^{j_1 \ell} w^{1/k} y_1 + \cdots + \varepsilon^{j_{k-1} \ell} w^{(k-1)/k} y_{k-1}), \tag{3.20}$$

其中（j_1，.....， j_{k-1}）是（1，.....， $k-1$）的一个置换。

(3.20) 中含 $\ell = 0$ 的因子是 $z + w^{1/k} y_1 + \cdots + w^{(k-1)/k} y_{k-1}$。注意， $\varepsilon \in \mathbb{Z}_k$ 对 f 的根的作用将

$$\varepsilon^{\ell} w^{1/k} y_1 + \cdots + \varepsilon^{(k-1)\ell} w^{(k-1)/k} y_{k-1},$$

对任意 ℓ，映为带有 $\ell + 1$ 的同一表达式。由于该作用在这些根上是传递的，

$$f(w, y, z) = \prod_{\ell=0}^{k-1} (z + \varepsilon^{\ell} w^{1/k} y_1 + \cdots + \varepsilon^{(k-1)\ell} w^{(k-1)/k} y_{k-1}),$$

即得所需结论。（注意，这里的因子次序与 (3.20) 中并不相同。） □

引理 3.11。假设

$$\begin{aligned} f(w, x) &= \Delta_k \left(w^{h_0/k} x_0, w^{h_1/k} x_1, w^{h_2/k} x_2 \dots, w^{h_{k-1}/k} x_{k-1} \right) \\ &= \prod_{\ell=0}^{k-1} (w^{h_0/k} x_0 + \varepsilon^{\ell} w^{h_1/k} x_1 + \cdots + \varepsilon^{(k-1)\ell} w^{h_{k-1}/k} x_{k-1}) \end{aligned} \tag{3.21}$$

是一个关于$(w,\ x) = (w,\ x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_{k-1})$的多项式，其中每个 $h_j \in \{0, \dots, k-1\}$。那么，当且仅当$(h_0,\ \dots,\ h_{k-1})$ 是 $\{0, \dots, k-1\}$ 的一个置换时， f才是不可约的。

证明。 $\mathbb{Z}_k$ 的生成元 ε 在 (3.21) 的因子上作用如下：

$$\varepsilon^{j\ell} w^{h_j/k} x_j \mapsto \varepsilon^{j\ell + h_j} w^{h_j/k} x_j, \quad j = 0, \dots, k-1.$$

由于 $f(w,\ x)$ 是不变量，该作用会置换这些因子；即，

$$j\ell + h_j = j\lambda_\ell \mod k, \quad j = 0, \dots, k-1,$$

其中 $(\lambda_0,\ \dots,\ \lambda_{k-1})$ 是 $(0,\ \dots,\ k-1)$ 的一个置换。因此， $h_j = \mu j$ 模 k，$j = 0,\ \dots,\ k-1$，对于任意给定的 ℓ，我们可以取 $\mu = \lambda_\ell - \ell$。

那么，当且仅当 μ 和 k 互质时， $f(w,\ x)$ 才是不可约的；也就是说，$(0,\ \mu,\ \dots,\ (k-1)\mu)$（每一项均模 k）是 $(0,\ \dots,\ k-1)$ 的一个置换。结论由引理 3.10（一个稍强的陈述）得出。 □

引理 3.12. 给定正整数 $k \geq 2$ 和 r，

$$\begin{aligned} &\prod_{i=0}^{r-1} \Delta_k(x_{i0}, w^{1/k} x_{i1}, \dots, w^{(k-1)/k} x_{i,k-1}) \\ &\qquad = \Delta_{rk}(x_0, w^{1/k} x_1, \dots, w^{(k-1)/k} x_{k-1}, x_k, w^{1/k} x_{k+1}, \dots, w^{(k-1)/k} x_{2k-1}, \\ &\qquad\qquad \dots, x_{(r-1)k}, \dots, w^{(k-1)/k} x_{2k-1}), \end{aligned} \tag{3.22}$$

其中$(x_{ij})_{i=0,\dots,r-1,\ j=0\dots,k-1}$ 和$(x_i)_{i=1,\dots,rk}$ 满足以下恒等式：

$$x_{ij} = \varepsilon_{rk}^{ij} (x_j + \varepsilon_r^i x_{k+j} + \cdots + \varepsilon_r^{(r-1)i} x_{(r-1)k+j}), \quad i = 0, \dots, r-1, \tag{3.23}$$

对于每个 $j=0\dots,k-1$ （注意，对于每个固定的 j，(3.23) 定义了一个可逆线性变换）。

证明。 在 (3.22) 的左边，每个因子

$$\begin{aligned}&\Delta_k(x_{i0},w^{1/k}x_{i1},\dots,w^{(k-1)/k}x_{i,k-1})\\&\qquad=\prod_{\ell=0}^{k-1}(x_{i0}+\varepsilon_k^{\ell}w^{1/k}x_{i1}+\cdots+\varepsilon_k^{(k-1)\ell}w^{(k-1)/k}x_{i,k-1}.\end{aligned}\tag{3.24}$$

(3.22) 的右边为

$$\begin{aligned}&\prod_{m=0}^{rk-1}(x_0+\varepsilon_{rk}^m w^{1/k}x_1+\cdots+\varepsilon_{rk}^{(k-1)m}w^{(k-1)/k}x_{k-1}+\varepsilon_{rk}^{km}x_k+\varepsilon_{rk}^{(k+1)m}w^{1/k}x_{k+1}\\&\qquad+\cdots+\varepsilon_{rk}^{(2k-1)m}w^{(k-1)/k}x_{2k-1}+\cdots+\varepsilon_{rk}^{(rk-1)m}w^{(k-1)/k}x_{rk-1})\\&=\prod_{m=0}^{rk-1}\Big((x_0+\varepsilon_r^m x_k+\cdots+\varepsilon_r^{(r-1)m}x_{(r-1)k})\\&\qquad+w^{1/k}\varepsilon_{rk}^m(x_1+\varepsilon_r^m x_{k+1}+\cdots+\varepsilon_r^{(r-1)m}x_{(r-1)k+1})\\&\qquad+\cdots+w^{(k-1)/k}\varepsilon_{rk}^{(k-1)m}(x_{k-1}+\varepsilon_r^m x_{2k-1}+\cdots+\varepsilon_r^{(r-1)m}x_{rk-1})\Big).\end{aligned}$$

指标 m 可写作 $m=\ell r+i$，其中 $\ell=0.\dots,k-1,\ i=0,\dots,r-1$，使得 $\varepsilon_{rk}^{jm}=\varepsilon_{rk}^{j\ell r+ij}=\varepsilon_k^{j\ell}\varepsilon_{rk}^{ij},\ j=0,\dots,k-1$，结论随即得出。 □

3.3. **余维一组合学**。 我们采用第3.1节以及第 3 节引言中的记号；特别地， $G=\mathbb{Z}_{p_1}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{p_r}$，$H$ 是 (3.2) 的一个根的稳定子群， $Y_j,\ j=(j_1,\dots,j_r)\in G$由 (3.4) 给出，而 $X_\ell,\ \ell\in G$由 (3.5) 给出。

若 $j\in G$，则 Y_j 仅取决于 j 在 G/H 中的等价类 $\overline{j}$，因此记作 $Y_{\overline{j}}:=Y_j$。于是有

$$X_\ell=\frac{1}{k}\sum_{\overline{j}\in G/H}\varepsilon^{-\langle\ell,j\rangle}Y_{\overline{j}},\qquad\text{for all }\ \ell\in H^\perp,\tag{3.25}$$

or

$$Y_{\overline{j}}=\sum_{\ell\in H^\perp}\varepsilon^{\langle j,\ell\rangle}X_\ell,\qquad\text{for all }\ \overline{j}\in G/H,\tag{3.26}$$

其中 $\varepsilon=\varepsilon_k:=e^{2\pi i/k}$。注意，若 j 是 j 在 G 中的任一代表元，则 $\overline{\varepsilon}^{-\langle\ell,\ j\rangle}=\overline{\varepsilon}^{\ell_1(p_1-j_1}\cdots\overline{\varepsilon}^{\ell_1)(p_r-j_r)p_r}$，其中 $j=(j_1,\dots,j_r)$ 和 $\ell=(\ell_1,\dots,\ell_r)$ 仅取决于 j。另请注意，按照 (1.1) 的记号， $X_0=z+a_1(w,u,x)/k$。

回顾一下 $\mathbb{Z}_{p_i}^{(i)}:=\{0\}^{i-1}\times\mathbb{Z}_{p_i}\times\{0\}^{r-i},\ i=1,\dots,r$。

考虑 $i=1$。任意元素 $j\in G/H$ 都是某个元素 $j\in G$ 的等价类，而 j 可写作 $j=\alpha+\beta$，其中 $\alpha\in\mathbb{Z}_{p_1}\times\{0\}\times\cdots\times\{0\}=\mathbb{Z}_{p_1}^{(1)}$ 和 $\beta\in\{0\}\times\mathbb{Z}_{p_2}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{p_r}$。令 G_1 表示 $G_1:=\mathbb{Z}_{p_1}^{(1)}$ 在 G/H 中的豫，并令 F_1 表示 $F_1:=\{0\}\times\mathbb{Z}_{p_2}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{p_r}$ 在 G/H 中的像。

对于所有 $\ell\in H^\perp$，我们可以将 (3.25) 改写为

$$X_\ell=\frac{p_1}{k}\sum_{\overline{\beta}\in\overline{F}_1}\varepsilon^{-\langle\ell,\beta\rangle}\,\frac{1}{p_1}\sum_{\overline{\alpha}\in\overline{G}_1}\varepsilon^{-\langle\ell,\alpha\rangle}Y_{\overline{\alpha}+\overline{\beta}},\tag{3.27}$$

其中 α, β 是 α, β 在（分别） G 的子群 G_1, F_1 中的任意代表元，并且

$$\varepsilon^{-\langle \ell, \alpha\rangle} = \varepsilon_{p_1}^{\ell_1(p_1-\alpha)},$$
$$\varepsilon^{-\langle \ell, \beta\rangle} = \varepsilon_{p_2}^{\ell_2(p_2-\beta_2)} \dots \varepsilon_{p_r}^{\ell_r(p_r-\beta_r)},$$

其中 $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_r)$。（再次说明，由于 α、$\beta \in G/H$ 和 $\ell \in H^\perp$、$\varepsilon^{-\langle \ell, \alpha\rangle}$ 和 $\varepsilon^{-\langle \ell, \beta\rangle}$ 分别只依赖于 $\overline{\alpha}$ 和 β。）我们可以重新排列 $Y_{j=\alpha+\beta}$，$j \in G/H$，使其成为 $Y_{\alpha\overline{\beta}}$，$\overline{\alpha} \in \overline{G}_1$，$\overline{\beta} \in F_1$。

定义

$$X^{(1)}_{\mu\overline{\beta}} := \frac{1}{p_1} \sum_{\overline{\alpha} \in \overline{G}_1} \varepsilon_{p_1}^{\mu(p_1-\alpha)} Y_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}, \quad \mu \in \mathbb{Z}_{p_1},\ \overline{\beta} \in \overline{F}_1; \tag{3.28}$$

也就是说，(3.28) 是对应于 (3.27) 中内层求和的变换。若分别按照数对 (β, α) 和 (β, μ) 的字典序排列 $Y_{\alpha\beta}$ 和 $X^{(1)}_{\mu\beta}$ 的指标，并将指标 $\beta \in F_1$ 按任意顺序排列，则线性变换 (3.28) 的矩阵具有分块对角形式，其中有 k/p_1 个相同的块；每个块由固定 β 时的 (3.28) 给出。

注记 3.13。变换 (3.28) 对应于在余维一层 T_1 的点 b 处改写为标准乘积圆正规形（例 1.4）时所涉及的坐标变换。参见 (3.29) 以及下文 §3.4。

现在，$H + G_1$ 是 G 的一个子群，并且

$$\begin{aligned}(H+G_1)^\perp &= \{\ell \in H^\perp : \langle \ell, \alpha\rangle = 0, \text{ for all } \alpha \in G_1\} \\ &= \{\ell \in H^\perp : \ell_1 = 0 \mod p_1\}.\end{aligned}$$

考虑商 $H^\perp/(H+G_1)^\perp$。该商中的任意元素 ℓ 都由一个元素 $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_r) \in H^\perp$ 表示，并且 $\ell_1 \in \mathbb{Z}_{p_1}$ 由 ℓ 唯一确定。

引理 3.14。

$$\frac{H^\perp}{(H+G_1)^\perp} \cong \mathbb{Z}_{p_1}.$$

证明。回顾一下，$G_1 = \mathbb{Z}^{(1)}_{p_1}$ 同构地映到 G/H 的子群 $G_1 = \mathbb{Z}_{p_1}$ 上。由 $\overline{\ell} \mapsto \ell_1$ 给出的同态 $H^\perp \to \mathbb{Z}_{p_1}$ 诱导出单射 $H^\perp/(H+G_1)^\perp \hookrightarrow \mathbb{Z}_{p_1} \hookrightarrow G/H$。因此，只需证明 $|H^\perp/(H+G_1)^\perp| = p_1$。这是由以下事实得出的：$H^\perp \cong G/H$ 和 $(H+G_1)^\perp \cong G/(H+G_1) \cong (G/H)/G_1$。□

现在，对于任意 $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_r) \in H^\perp$，我们可以写成 $\ell = \mu + \nu$，其中 $\mu = (\ell_1, 0, \dots, 0)$，且 $\nu = (0, \ell_2, \dots, \ell_r)$。我们可以将 X_ℓ 重新编号为 $X_{\mu\nu}$，从而将变换 (3.27) 重写为 (3.28) 与该变换的复合

$$X_{\mu\nu} = \frac{p_1}{k} \sum_{\overline{\beta} \in \overline{F}_1} \varepsilon^{-\langle \ell, \beta\rangle} X^{(1)}_{\mu\overline{\beta}}. \tag{3.29}$$

由于 $\ell = (\mu, \nu) \in H^\perp$，$\varepsilon^{-\langle \ell, \beta\rangle}$ 仅取决于 ν 和 β。坐标变换 (3.29) 对每个固定的 $\mu \in \mathbb{Z}_{p_1}$，都涉及变量 $X^{(1)}_{\mu\beta}$、$\beta \in F_1$ 的可逆线性组合。

对变换 (3.28) 和 (3.29) 求逆，可得

$$Y_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}_{p_1}} \varepsilon_{p_1}^{\alpha\mu} X^{(1)}_{\mu\overline{\beta}} = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}_{p_1}} \varepsilon_{p_1}^{\alpha\mu} \sum \varepsilon^{\langle\beta,\nu\rangle'} X_{\mu\nu}. \tag{3.30}$$

其中，后一求和遍及所有满足 $(\mu,\nu)\in H^\perp$ 的 $\nu=(\nu_2,\dots,\nu_r)$，且

$$\langle\beta,\nu\rangle' := \sum_{i=2}^{r} \frac{k}{p_i}\beta_i\nu_i, \quad \text{so that} \quad \varepsilon^{\langle\beta,\nu\rangle'} = \varepsilon_{p_2}^{\beta_2\nu_2}\cdots\varepsilon_{p_r}^{\beta_r\nu_r}.$$

现在我们可以陈述定理 3.8 了。

3.4. **余维一分层**。

定理 *3.8* 的证明。我们继续使用 §§3.2、3.3 中的记号。考虑

$$X_{\mu\nu} = w^{\gamma_{\mu\nu}} x_{\mu\nu},$$

（其中 $X_{00}=x_{00}=z$），这与定义 1.5 相对应。在余维一层 T_1 上的一点处，我们可以将单位 $w_2^{\gamma_{\mu\nu}}\cdots w_r^{\gamma_{\mu\nu}}$ 吸收到 $x_{\mu\nu}$ 中，因此有

$$X_{\mu\nu} = w_1^{h_{\mu\nu}/p_1} x_{\mu\nu}, \quad \text{where } h_{\mu\nu}\in\{0,\dots,p_1-1\},$$

经过这一变量变换后。

我们回顾一下，在 T_1 的这一点处，$f(w,\ x,\ z)=f(w_1,\ x,\ z)$，$x=(x_{\mu\nu})$ 有 k/p_1 个不可约分支。我们断言，这些分支由下式给出：

$$\prod_{\overline{\alpha}\in\mathbb{Z}_{p_1}} Y_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}, \quad \text{for each fixed } \overline{\beta}. \tag{3.31}$$

事实上，对于固定的 β，与 $Y_{\alpha\beta}$、$\alpha\in\mathbb{Z}_{p_1}$ 对应的 f 的根构成了 $\mathbb{Z}_{p_1}$ 的作用下的一个轨道。因此，(3.31) 是 $\mathbb{Z}_{p_1}$-不变量，因而是一个关于 z 的多项式，其系数是关于 w_1 和 $x_{\mu\nu}$ 的多项式，因为这些系数由根的初等对称函数给出。

固定 β。利用 (3.28)，容易验证，对于每个 μ，$v_1^{p_1-\mu}X^{(1)}_{\mu\beta}$ 在 $\mathbb{Z}_{p_1}$的作用下是不变量。因此，

$$v_1^{p_1-\mu} X^{(1)}_{\mu\overline{\beta}} = \eta_\mu(v_1^{p_1}, x),$$

其中 $\eta_\mu(w,x)\in\mathbb{C}[w,x]$。由此可知，对于每个 $\mu=0,\dots,p_1-1$，$\eta_\mu(v_1^{p_1},x)$ 可被 $v_1^{p_1}$ 整除，因此我们可以写成

$$X^{(1)}_{\mu\overline{\beta}} = v_1^{p_1 m_\mu+\mu}\zeta_\mu(v_1^{p_1},x) = w_1^{m_\mu+\mu/p_1}\zeta_\mu(w_1,x), \tag{3.32}$$

其中 $\zeta_\mu(w_1,x)\in\mathbb{C}[w_1,x]$ 不能被 w_1 整除。

由此可知，对于某个 (μ,ν)，$m_\mu=0$ 和 $\mu/p_1=h_{\mu\nu}/p_1$，进而可知 $h_{\mu\nu}/p_1$ 与 ν无关，记为 $h_{\mu\nu}=h_\mu$。因此 $(h_0,\dots,h_{p_1-1})=(0,\dots,p_1-1)$，并且

$$\prod_{\overline{\alpha}\in\mathbb{Z}_{p_1}} Y_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} = \Delta_{p_1}(y_{0\overline{\beta}}, w_1^{1/p_1}y_{1\overline{\beta}},\dots w_1^{(p_1-1)/p_1}y_{p_1-1,\overline{\beta}}),$$

其中

$$y_{\mu\overline{\beta}} = \sum \varepsilon^{\langle\beta,\nu\rangle'} x_{\mu\nu}.$$

（与引理 3.12 比较。） □

3.5. **通过膨胀化归为群循环标准形**。 在本小节中，我们证明定理 1.7。证明用到了关于 [7], [9] 的消奇化不变量 inv 的若干事实；特别是，为了化归到下面的定理 3.15。我们可以按照 [4, Thm. 1.22], 的证明结构证明后者；关于消奇化算法以及所需的不变量 inv 的基本细节，请参见 [4, §4.2]。我们将 inv(nc(p)) 记作 inv 在阶为 p 的正规交叉点处的取值；inv(nc(p)) $=(p,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 1,\ 0,\ \infty)$, 其中该序列中有 p 个对。

定理 *1.7* 的证明。证明开始时，我们应用消奇化算法（该算法先将 X 变换为超曲面，然后才膨胀任何超曲面点），并在不变量 inv 的最大值为≤inv(nc(p)) 时停止算法。若 inv 的最大值为 inv(nc(p))，则最大值轨迹是 X（即 X 的严格变换）中的一个维数为 $n-p+1$ 的光滑子集 S，且与例外除子 E 横截；我们可以通过膨胀消除 S 中 X 不一般地为正规交叉的任意分支，并确保 X 在 S 与例外除子的交集之外为正规交叉(p)。

定理 1.7 的第一项断言（包括条目 (1)）由下文的定理 3.15 推出，其中 $k=p$。（应用该结果后， X 在 S 的一个删去邻域中的阶为 $<p$，因此可以使用消奇化算法，将 S 之外的阶降至 $<p$。）关于群作用的定理 1.7 断言 (2)，请参见下文定理 3.15 证明之后的证明补充。

定理 3.15。 考虑一个嵌入超曲面 $X\hookrightarrow Z$。令 U 表示 Z 的一个开子集。假设（经过一列 inv-容许爆破后），inv 在 U 上的最大值为 $\mathrm{inv}(\mathrm{nc}(k))$，因此层 $S:=\{\mathrm{inv}=\mathrm{inv}(\mathrm{nc}(k))\}$ 是 U 中余维为 k 的光滑子簇，并且与例外除子 E 横截。设 X 在 $S\backslash E$ 上是 $\mathrm{nc}(k)$。那么存在 U 的一列有限的 inv_1- 容许爆破，保持 $\mathrm{nc}(k)$ 轨迹不变；经过这些爆破后， X 在 S 的严格变换的每一点都具有（乘积）群循环标准形。

按照定义 *1.5*，我们还可以假设，在 $S\cap E$ 的任意一点处，乘积群循环奇点公式中出现的参数 w_1、……、w_r 各自对应于 E 的某个分支。

在此断言中，inv_1 表示截取 inv 中构成 inv 的第一个有序对之后的部分；参见 [4,§4.2]。

与 [4, 定理 1.22], 的情形一样，我们可以将定理 3.15 的证明分为两部分。第一部分是局部版本：从分裂定理 1.1 的假设出发，在这一设定下证明定理 3.15。第二部分则是说明，以下证明中涉及的清理膨胀确实构成全局容许光滑膨胀。第二部分中的全局清理论证与 [4, §4.4], 中的完全相同，因此我们参照后者，不在此重复论证；下面只给出局部部分的证明。

此外，对于局部部分，下面我们只给出不可约情形的证明。一般情形的证明与 [4, 定理 1.22], 的证明完全相同，细节留给读者。

定理 *3.15* 的证明。根据定理 1.1，经过有限次 inv-容许爆破，其连续中心由 S 与 E 的一个分支的交给出后，我们可以假设，在层 S 的任意给定点 a 处， X 由一个正则函数或

解析函数 $f(w,\ u,\ x,\ z)$ 定义，如 (1.1) 所示，且满足定理 1.1 的结论；其坐标为适当坐标 $(w,\ u,\ x,\ z)$，位于 a 的一个 etale 邻域或局部解析邻域中。假设 $f(w,\ u,\ x,\ z)$ 不可约，这样我们便可采用第 3 节开头的设定。

我们仍可假设 $a_1(w,\ u,\ x) = 0$，并采用第3.1节的记号。定义 Y_j, $j = (j_1,\ \dots,\ j_r) \in G$，如式 (3.4) 所示，并定义 X_ℓ, $\ell \in G$，如式 (3.5) 所示；特别地，$X_0 = z$。若 $j \in G$，则 Y_j 仅取决于 j 在 G/H 中的等价类 $\bar{j}$，因此记作$Y_{\bar{j}} := Y_j$。于是，对所有 $\ell \in H^\perp$，有

$$X_\ell = \frac{1}{k} \sum_{\bar{j} \in G/H} \varepsilon^{-\langle \ell, j \rangle} Y_{\bar{j}},$$

其中 $\varepsilon = \varepsilon_k := e^{2\pi i/k}$。注意，若 j 是 j 在 G 中的任意代表元，则 $\varepsilon^{-\langle \ell,\ j \rangle} = \varepsilon^{-\langle \ell,\ \bar{j} \rangle}$。

$\varepsilon^{\ell_1(p_1 - j_1) \cdots \ell_1)(p_r - j_r)p_r}$，其中 $j = (j_1,\ \dots,\ j_r)$ 和 $\ell = (\ell_1,\ \dots,\ \ell_r)$ 仅取决于 $\bar{j}$。

p_1 我们仿照定理 4.1], 的证明来描述标记理想 (f, k) 的系数理想；对于较简单情形的更多细节，请参见该定理。

考虑 $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_r) \in H^\perp$。容易看出，每个

$$v_1^{p_1 - \ell_1} \cdots v_r^{p_r - \ell_r} X_\ell$$

在 $G = \mathbb{Z}_{p_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_r}$ 的作用下都是不变的。因此，

$$v_1^{p_1 - \ell_1} \cdots v_r^{p_r - \ell_r} X_\ell = \eta_\ell(v_1^{p_1}, \dots v_r^{p_r}, u, x),$$

其中 $\eta_\ell(w, u, x) \in \mathbb{C}[\![w, u, x]\!]$。由此可知，对每个 $\ell \in H^\perp \backslash \{0\}$，$\ell = (\ell_1, \dots, \ell_r)$，$\eta_\ell(v_1^{p_1}, \dots v_r^{p_r}, u, x)$ 都可被 $v_i^{p_i}$ 整除，其中 $i = 1, \dots, r$，因此我们可以写成

$$\begin{aligned} X_\ell &= v_1^{p_1 m_{\ell,1} + \ell_1} \cdots v_r^{p_r m_{\ell,r} + \ell_r} \zeta'_\ell(v_1^{p_1}, \dots, v_r^{p_r}, u, x) \\ &= w_1^{m_{\ell,1} + \ell_1/p_1} \cdots w_r^{m_{\ell,r} + \ell_r/p_r} \zeta_\ell(w_1, \dots, w_r, u, x), \end{aligned} \tag{3.33}$$

其中 $\zeta_\ell(w_1, \dots, w_r, u, x) \in \mathbb{C}[\![w, u, x]\!]$ 不能被任何 w_i 整除（参见 (3.32)）。

设 $k_i := k/p_i$, $i = 1, \dots, r$。与 [4, 定理 4.1], 的证明中一样，标记理想 (f, k) 的系数理想等价于标记理想 $\mathcal{C}^1 = (\mathcal{C}^1, k)$，其中$\mathcal{C}_1$ 表示由以下元素生成的理想

$$X_\ell^k = w^{\gamma_\ell} \zeta_\ell^k, \quad \ell \in H^\perp \backslash \{0\},$$

在最大接触子空间 $N^1 := \{z = 0\}$ 上，而 w^{γ_ℓ} 是单项式

$$w^{\gamma_\ell} := w_1^{k m_{\ell,1} + k_1 \ell_1} \cdots w_r^{k m_{\ell,r} + k_r \ell_r}.$$

由于 $\mathsf{inv}(0) = (k, 0, 1, \dots)$，存在关于逐项序最小的 γ_ℓ（即，$\gamma \le \gamma'$ 表示 $\gamma_i \le \gamma'_i$, $i = 1, \dots, r$，其中 $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ $\gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_r)$）。换言之，

$$\alpha_1 := \min_{\ell \in H^\perp \backslash \{0\}} \gamma_\ell$$

是良定义的。令 ℓ^1 表示相应的 ℓ（达到最小值），并令ξ_{ℓ^1} 表示相应的 ζ_ℓ。由于 $\mathsf{inv}(0) = (k, 0, 1, \dots)$，因此 ξ_{ℓ^1} 的阶为 1。单项式 w^{α_1} 生成系数理想 $\mathcal{C}^1$ 的单项式部分（参见 [10,§A.6]）。

由此可知，在第二个最大接触子空间 $N^2 := \{z = \xi_{\ell^1} = 0\}$ 上，第二个系数理想 $\mathcal{C}^2$（其标记阶或伴随阶仍为 k）由以下元素生成

$$w^{\gamma_\ell - \alpha_1} \zeta_\ell^k|_{N^2}, \quad \ell \ne \ell^1.$$

因此，对每个 $\ell \neq \ell^1$，我们可以写成

$$\zeta_\ell = \eta_\ell^{(1)} + w^{\beta_\ell^{(1)}} \xi_\ell^{(1)},$$

其中 $\beta_\ell^{(1)} \in (1/k)\mathbb{N}^r$，$\eta_\ell^{(1)}$ 属于由 ξ_{ℓ^1}生成的理想，而 $\xi_\ell^{(1)}|_{N^2}$ 不能被 $w_i, i = 1, \ldots, r$ 整除。

由于 $\mathsf{inv}(0) = (k, 0, 1, \ldots)$，存在最小的 $\gamma_\ell + k\beta_\ell^{(1)}$, $\ell \neq \ell^1$；即，

$$\alpha_2 := \min_{\ell \neq \ell^1} \left(\gamma_\ell + k\beta_\ell^{(1)} \right)$$

是良定义的。令 ℓ^2 表示相应的 ℓ （取到最小值），令 ξ_{ℓ^2}表示相应的 $\xi_\ell^{(1)}$。于是 ξ_{ℓ^2}的阶为 1，因为 $\mathsf{inv}(a) = (k, 0, 1, 0, 1 \ldots)$。单项式 $w^{\alpha_2 - \alpha_1}$ 生成系数理想 $\mathcal{C}^2$的单项式部分。

我们可以对 $3, \ldots, k-1$递归地重复这一论证，从而得到指数$\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$，以及 $H^\perp$的一个排序 $\{0 = \ell^0, \ell^1, \ldots, \ell^{k-1}\}$。注意，对每个 $j = 1, \ldots, k-1$,

$$\frac{1}{k}\alpha_j = \frac{1}{k}\alpha_{j-1} + \beta_j + \delta_j,$$

其中 $\alpha_0 := 0$, $\beta_j = (\beta_{j1}, \ldots, \beta_{jr}) \in \mathbb{N}^r$和 $\delta_j = (\delta_{j1}, \ldots, \delta_{jr})$，其中 $\delta_{ji} \in \{0, 1/p_i, \ldots, (p_i - 1)/p_i\}$。

现在，我们可以按照 [4, 定理 4.1] 的证明进行清理。首先，在最大接触子空间 $N^{k-1} = \{z = \zeta_{\ell^1} = \ldots = \zeta_{\ell^{k-2}} = 0\}$ 中，以余维 1 组合中心 $\{w_i = 0\}$ ($1 \leq i \leq r$) 为中心进行膨胀，从而化归为 $\beta_{k-1} = 0$。为了对所有 j 得到 $\beta_j = 0$，我们可以依次在最大接触子空间 $N^{k-2}, \ldots, N^1$ 中继续这一过程。

然后，我们可以进行一次形式（或 ´étale 或解析）坐标变换

$$\begin{aligned} y_{\ell^1} &:= \xi_{\ell^1}, \\ y_{\ell^j} &:= \eta_{\ell^j}^{(j-1)} + \xi_{\ell^j}, \quad j = 2, \ldots, k-1, \end{aligned}$$

将每个 X_{ℓ^j}化为$w^{\alpha_j} y_{\ell^j}$, $j = 1, \ldots, k-1$。我们得出结论，清理后，f 可写为

$$\Delta_{G/H}\left(z, w^{\delta_1} y_{\ell^1}, w^{\delta_1+\delta_2} y_{\ell^2}, \ldots, w^{\delta_1+\cdots+\delta_{k-1}} y_{\ell^{k-1}}\right), \tag{3.34}$$

其中每个 $\delta_j = (\delta_{j1}, \ldots, \delta_{jr})$满足 $\delta_{ji} \in \frac{1}{p_i}\{0, \ldots, p_i - 1\}$。

注意，(3.34)可改写为

$$\Delta_{G/H}\left(z, w^{\beta_1+\gamma_1} y_{\ell^1}, w^{\beta_2+\gamma_2} y_{\ell^2}, \ldots, w^{\beta_{k-1}+\gamma_{k-1}} y_{\ell^{k-1}}\right), \tag{3.35}$$

其中每个 $\beta_j \in \mathbb{N}^r$ 以及每个 $\gamma_j = (\gamma_{j1}, \ldots, \gamma_{jr})$均满足$\gamma_{ji} \in \frac{1}{p_i}\{0, \ldots, p_i - 1\}$。

现在我们可以按照 [4, 注 4.5] 的论证，将(3.35)中的每个 β_j 化为 0；也就是说，我们得到标准形

$$\Delta_{G/H}\left(X_{\ell^0}, X_{\ell^1}, \ldots, X_{\ell^{k-1}}\right), \tag{3.36}$$

其中

$$\begin{aligned} X_{\ell^0} &= z, \\ X_{\ell^j} &= w^{\gamma_j} y_{\ell^j}, \quad j = 1, \ldots, k-1, \end{aligned}$$

并带有前述关于指数 γ_j 的条件。 □

定理 *1.7* 证明的完成。 首先，我们利用奇点的典范解消，得到满足分裂定理 1.1 之假设的光滑子集 S。所涉及的全部膨胀中心关于群作用都是不变的，因此定理 1.1 假设中的全部例外除子在 G 的作用下也都是不变的。由于正规交叉轨迹关于群作用同样是不变的，从而定理 1.1 中所有爆破的中心也都是不变的。

因此，在定理 3.15 的证明开头，与 $\{w_i = 0\}$ 对应的例外除子都关于群作用保持不变。群作用将最大接触子簇映射为最大接触子簇，并保持例外除子 $\{w_i = 0\}$ 不变，因此清理过程中涉及的膨胀中心关于群作用保持不变。最后，在定理 3.15 证明的结尾，我们按照 [4, 注 4.5] 中的论证，将 (3.35) 中的每个β_j 化为零（即得到群循环标准形），而 [4, 注 4.5]中的论证所涉及的膨胀中心也保持不变。□

4. Weighted blowing up of group-circulant singularities, and partial desingularization

本节证明关于部分消奇的定理 1.13。该定理涉及对给定阶数的群循环奇点轨迹进行加权爆破。我们仅在这种情形下使用加权爆破。对代数（或复解析）簇进行加权爆破 X，可得到一个轨形实例，其覆盖图表（如（1.12）所示）带有有限阿贝尔群作用，并有一个由商诱导的适当双有理（或双亚纯）态射 $\sigma\colon X' \to X$。我们仅在所需的背景下发展加权爆破与轨形的相关理论。

我们主要讨论代数情形，但这些方法也适用于复解析情形，基本上是在 Specan 上运用 [3, Ch. 1] （参见 [1, §1.6]）。我们将采用 Abramovich、Temkin 和 W-lodarczyk [2], 提出的加权爆破消奇不变量；此外，采用 W-lodarczyk [26]以协边爆破表述的方法较为方便，因为这种方法可以给出显式的双有理态射$\sigma : X' \to X$，而无需考虑茎论商。

对群循环奇点进行加权爆破，为更一般的技术提供了很好的实践入门。例如，在复解析情形下，定理 1.13 所需的所有论证都可以直接进行，而无需使用[2], [26]。我们计划在后续文章中介绍这一内容，以使本文篇幅保持适中。

本节分为三个小节。首先，我们回顾仿射空间加权爆破的定义，以及轨形覆盖图之间的 ´étale过渡态射。其次，我们详细描述局部坐标下群循环奇点的加权爆破，以及如何将这一构造用于部分消奇。（循环群循环奇点这一特殊情形已在例1.11中讨论。）最后，我们证明定理 1.13。群循环奇点的组合结构在其中发挥着重要作用。

4.1. 仿射空间的加权爆破。本小节中，我们讨论$\mathbb{C}^n$ 与乘法群 $\mathbb{C}^*$，或者更一般地，讨论域 $\mathbb{K}$（代数闭域）上的仿射空间 $\mathbb{A}^n$ 以及阿贝尔乘法群（概形） G_m。

定义 4.1。令 $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)\in\mathbb{N}^n$ 表示一个权重向量。加权射影空间 $\mathbb{P}^{n-1}_\omega$定义为如下商空间或轨道空间

$$\mathbb{P}^{n-1}_\omega := (\mathbb{A}^n\backslash\{0\})/G_m$$

由下述作用 G_m 给出

$$\lambda\cdot(y_1,\dots,y_n)=(\lambda^{\omega_1}y_1,\dots,\lambda^{\omega_n}y_n),$$

其中 $y=(y_1,\ \dots\dots,\ y_n)\in\mathbb{A}^n$ 且 $\lambda\in G_m$。

群作用总是指由自同构给出的作用。 $\mathbb{P}^{n-1}_\omega$中的点记作 $[y_1,\dots,y_n]$，其中 $[y_1,\dots,y_n]$ 表示 $(y_1,\ \dots\dots,\ y_n)\in\mathbb{A}^n\backslash\{0\}$的等价类或轨道。

加权射影空间 $\mathbb{P}^{n-1}_\omega$可由 n个仿射图覆盖

$$U_i=\{[y_1,\dots,y_n]\in\mathbb{P}^{n-1}_\omega : y_i\neq 0\},\quad i=1,\dots,n.$$

U_i中的每个点都可写作 $[y_1,\dots,1,\dots,y_n]$（第 i 个位置为 1）。

对于每个 i，令 A_i 表示仿射商簇（或轨道空间） $\mathbb{A}^{n-1}/\mu_{\omega_i}$，其中乘法循环群 μ_{ω_i} 在 $\mathbb{A}^{n-1}$ 上的作用由下式给出

$$\varepsilon_i\cdot(y_1,\dots,\hat{y_i},\dots,y_n)=(\varepsilon_i^{\omega_1}y_1,\dots,\widehat{\varepsilon_i^{\omega_i}y_i},\dots,\varepsilon_i^{\omega_n}y_n),$$

并且 $\varepsilon_i=\varepsilon_{\omega_i}$ 表示单位根的一个本原 ω_i次根。（帽号表示删除相应的项。）

注4.2。μ_{ω_i}的上述作用对应于在 $\mathbb{K}[y_1,\dots,\hat{}y_i,\dots,y_n]$ 上的作用，对每个 j，其定义为 $\varepsilon_i\cdot y_j=\varepsilon_i^{\omega_j}y_j$，并且

$$\mathbb{A}^{n-1}/\mu_{\omega_i}=\operatorname{Spec}\mathbb{K}[y_1,\dots,\hat{y}_i,\dots,y_n]^{\mu_{\omega_i}},$$

其中 $\mathbb{K}[y_1,\dots,\hat{}y_i,\dots,y_n]^{\mu_{\omega_i}}$表示 μ_{ω_i}-不变多项式代数。仿射商簇 A_i 由不变多项式代数的一组生成元（希尔伯特基）之间的关系理想确定。

容易看出，将 $[y_1,\dots,1,\dots,y_n]$映射到 $(y_1,\dots,\hat{}y_i,\dots,y_n)$ 的轨道的映射 $U_i\to A_i$ 是良定义的态射（与 $y_1,\dots,\hat{}y_i,\dots,y_n$的选择无关），并定义一个同构 $U_i\cong A_i$。

因此，对于每个 i，我们都有一个态射 $\pi_i:\ \mathbb{A}^{n-1}\to\mathbb{A}^{n-1}/\mu_{\omega_i}\cong U_i\subset\mathbb{P}^{n-1}_\omega$。我们称 $\mathbb{A}^{n-1}$ 为覆盖（仿射）图表，称 $A_i\cong U_i$ 为商图。态射 π_i, $i=1,\dots,n$的集合赋予加权射影空间 $\mathbb{P}^{n-1}_\omega$一个轨形结构（见下文）。

定义 4.3。仿射空间的加权爆破。令 $Z\subset\mathbb{A}^n\times\mathbb{P}^{n-1}_\omega$表示子簇

$$Z:=\{(x,[y])\in\mathbb{A}^n\times\mathbb{P}^{n-1}_\omega : x\in\overline{[y]}\},$$

其中 $\overline{[y]}$表示 $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{A}^n\backslash\{0\}$的 G_m-轨道 $[y]$ 的闭包；即

$$Z:=\{(x,[y])\in\mathbb{A}^n\times\mathbb{P}^{n-1}_\omega : x_j=t^{\omega_j}y_j,\ j=1,\dots,n,\ \text{for some } t\in\mathbb{A}^1\}.$$

$W=\mathbb{A}^n$ 的加权爆破，其（集合论意义下的）中心为 $\{0\}$，权重为 $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)$，对应于仿射坐标$(x_1,\dots,x_n)$，是由投影 $\mathbb{A}^n\times\mathbb{P}^{n-1}_\omega\to\mathbb{A}^n$ 诱导的态射σ：$Z\to W=\mathbb{A}^n$（或者简单地说，是簇Z）。加权爆破 σ 在 $\mathbb{A}^n\backslash\{0\}$上是同构，且 $E=\sigma^{-1}(0)$称为例外除子。

加权爆破 Z由 n 个仿射图 $V_1,\dots,V_n$覆盖，其中

$$V_i=\{(x,[y])\in Z:[y]\in U_i\subset\mathbb{P}^{n-1}_{\omega}\};$$

即， V_i是点集 $(x,\ [y])\in Z$，其中的点满足 $y=[y_1,\dots,1,\dots,y_n]$（第 i位为 1），并且

$$x_j=\begin{cases}t^{\omega_j}y_j, & j\neq i,\\ t^{\omega_i}, & j=i,\end{cases}\tag{4.1}$$

对于某个 $t\in\mathbb{A}^1$。

对于每个 i，存在一个满射态射

$$\begin{aligned}&\varphi_i:W_i=\mathbb{A}^n\to V_i\\ &\quad(y_1,\dots,y_n)\mapsto((y_i^{\omega_1}y_1,\dots,y_i^{\omega_i},\dots,y_i^{\omega_n}y_n),[y_1,\dots,1,\dots,y_n])\,.\end{aligned}$$

我们也将记作 $W_i=W_{x_i}$。一般而言，态射 φ_i 不是单射；事实上，$\varphi_i(y)=\varphi_i(z)$ 当且仅当 z 属于 y 在 μ_{ω_i} 对W_i 的由 $\xi\cdot y=z$给出的作用下的轨道，其中

$$z_i=\xi y_i\quad\text{ and }\quad z_j=\xi^{-\omega_j}y_j,\ j\neq i,$$

对任意 $\xi\in\mu_{\omega_i}$。换言之，对每个 i，有 $V_i\cong W_i/\mu_{\omega_i}$。注意，群 μ_{ω_i} 的作用在例外除子 $\varphi_i^{-1}(E)$之外是自由的；因此，态射φ_i 在 $\varphi_i^{-1}(E)$之外是 ´平展的。

下面的引理 4.5 断言，态射 $\varphi_i:\ W_i\to W_i/\mu_{\omega_i}\cong V_i$、$i=1,\dots,n$ 为加权胀开 Z提供了所谓的轨形结构，其覆盖图表为 W_i，商图表为 V_i。我们有时将 $\widetilde{\ }Z$ 记为覆盖图表的集合，并将 $Z_{\mathrm{quot}}\cong Z$ 记为商簇（参见 (1.12)）。

注记 4.4. 覆盖图表之间的过渡 $W_i=W_{x_i},\,W_j=W_{x_j}$. 设 $i=1,\,j=2$。让我们将上面的坐标 $(y_1,\dots,y_n)$ 在 W_1 的情形下重新标记为 $(s,y_2,\dots,y_n)$，并在 W_2 的情形下重新标记为 $(z_1,t,z_3,\dots,z_n)$。于是 $W_1,\,W_2$ 之间的过渡由下列公式给出

$$\begin{aligned}s^{\omega_1}&=x_1=t^{\omega_1}z_1,\\ s^{\omega_2}y_2&=x_2=t^{\omega_2},\\ s^{\omega_j}y_j&=x_j=t^{\omega_j}z_j,\quad j>2.\end{aligned}\tag{4.2}$$

写出 $W_1\cap W_2$ 是没有意义的。过渡公式确定了 W_2 的一个 μ_{ω_2}-不变开子集 $W_{12}=W_{x_1x_2}$，以及 W_1 的一个 μ_{ω_1}-不变开子集 $W_{21}=\widetilde{\ }W_{x_2x_1}$，对应于 Z_{quot} 中的 $V_1\cap V_2$。显然， $W_{12}=\{(z_1,t,z_3,\dots,z_n)\in W_2:\ z_1\neq 0\}$ 以及 $W_{21}=\{((s,y_2,\dots,y_n)\in W_1:\ y_2\neq 0\}$。下面的引理利用来自一个新覆盖图表的 ´平展态射，使覆盖图表的重叠具有意义。

引理 4.5。如上所述，给定覆盖图表 W_i、 W_j，存在

(1) 覆盖图表 $\widetilde{W}_{ji}$、 $\widetilde{W}_{ij}$，分别带有 $\mu_{\omega_i}\times\mu_{\omega_j}$、 $\mu_{\omega_j}\times\mu_{\omega_i}$ 的作用，以及一个等变同构 $\widetilde{W}_{ji}\cong\widetilde{W}_{ij}$，其中

$$\widetilde{W}_{ji}/(\mu_{\omega_i}\times\mu_{\omega_j})\cong\widetilde{W}_{ij}/(\mu_{\omega_j}\times\mu_{\omega_i})\cong V_i\cap V_j\subset Z;$$

(2) ´étale 态射

$$\widetilde{W}_{ji} \to W_i, \quad \widetilde{W}_{ij} \to W_j,$$

与由群商给出的到 Z 的投影相容，其像分别为 W_{ji}、 W_{ij} 。

特别地，(2) 中的 ´étale 态射将不同的轨道映到不同的轨道。覆盖图表 W_i 和 W_{ji} 可补充为一个满足自然余循环条件的有限覆盖图册（参见 [15, §II.1，练习 2.12]），但我们不详述这些细节。

引理 *4.5* 的证明。设 $i = 1, \quad j = 2$。我们采用注4.4中的记号。定义

$$\widetilde{W}_{21} := \operatorname{Spec} \mathbb{K}[s, y_2, y_2^{-1}, u_2, u_2^{-1}, y_3, \ldots, y_n]/(y_2 - u_2^{\omega_2}),$$
$$\widetilde{W}_{12} := \operatorname{Spec} \mathbb{K}[z_1, z_1^{-1}, u_1, u_1^{-1}, t, z_3, \ldots, z_n]/(z_1 - u_1^{\omega_1}).$$

我们还在 W_{21} 和 W_{12} 上引入如下群作用（利用 μ_{ω_1} 的生成元 ε_1 以及 μ_{ω_2}的生成元 ε_2 ）：在 W_{21} 上定义为

$$\varepsilon_1 : (s, y_2, u_2, y_k) \mapsto (\varepsilon_1 s,\, \varepsilon_1^{-\omega_2} y_2,\, \varepsilon_1^{-1} u_2,\, \varepsilon_1^{-\omega_k} y_k),$$
$$\varepsilon_2 : (s, y_2, u_2, y_k) \mapsto (s,\, y_2,\, \varepsilon_2 u_2,\, y_k),$$

其中 $k \geq 3$，而在 W_{12} 上定义为

$$\varepsilon_1 : (z_1, u_1, t, z_k) \mapsto (z_1,\, \varepsilon_1 u_1,\, t,\, z_k),$$
$$\varepsilon_2 : (z_1, u_1, t, z_k) \mapsto (\varepsilon_2^{-\omega_1} z_1,\, \varepsilon_2^{-1} u_1,\, \varepsilon_2 t,\, \varepsilon_2^{-\omega_k} z_k),$$

其中 $k \geq 3$。

于是存在一个等变同构 $W_{12} \to W_{21}$ ，由下式诱导:

$$s = t u_1, \quad u_2 = u_1^{-1}, \quad y_k = u_1^{-\omega_k} z_k,\ k \geq 3,$$

并且存在 ´étale 态射 $W_{21} \to W_1$ 和 $W_{12} \to W_2$ ，分别由 $y_2 = u_2^{\omega_2}$和 $z_1 = u_1^{\omega_1}$诱导。容易看出，该引理的断言均成立。□

注记 4.6。 更一般地，按照标准爆破的定义， $\mathbb{A}^n$的仿射坐标所对应的、以 $\mathbb{A}^m \times \{0\}$ 为中心且权重为 $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ 的 $\mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n$ 的加权爆破 定义为 $\mathbb{A}^m$ 与上述定义的 $\mathbb{A}^n$ 的加权爆破的乘积。

定理 1.13 将涉及全局加权爆破，它们在局部（或´étale 局部）由上述仿射构造给出。

4.2. 群循环奇点及其乘积的加权爆破。本小节的主要目的是将例1.11中对循环奇点 cp(k) 的加权爆破分析，首先推广到乘积 cp(k_1) $\times \cdots \times$ cp(k_s) （具有单个除子 w），其次推广到一般的（乘积）群循环奇点（定义1.5）。我们回顾一下，后者在余维一层的每一点处都会导出标准循环奇点的乘积（注记 1.6）。

为证明定理 1.13，以下示例中我们也将计算 [2], 的不变量，并将其记为 ATWinv，以便与本文中已使用的 [2], 的去奇异化不变量 inv 加以区分

。正如 [2, §1.5], 所指出的，ATWinv 由零年 inv 决定。在嵌入簇 X 的每个点（或理想的余支撑上的每个点），后者是一个有限序列（b_1，0，b_2，0，.....，b_q，0，∞），其中 b_1 是阶，每个 b_j 都是正有理数；简记 inv $=$（b_1，b_2，.....，b_q）。

事实上，如果年零 inv $=(b_1, b_2, \ldots, b_q)$，那么 ATWinv $=(a_1, a_2, \ldots, a_q)$，其中

$$a_j = b_1 b_2 \cdots b_j, \quad j = 1, \ldots, q; \tag{4.3}$$

$$\text{i.e.,} \qquad b_1 = a_1 \quad \text{and} \quad b_j = \frac{a_j}{a_{j-1}}, \quad j > 1 \tag{4.4}$$

（参见 [7, 注 1.11]）。这是因为 inv 和 ATWinv 可以使用相同的局部最大接触超曲面序列（由正则参数系的一部分给出，$x_1, \ldots, x_q$）及相应的系数理想来定义。后者可以视为标记理想（各自带有一个伴随阶），它们决定了不变量的连续各项。inv 与 ATWinv 的差别在于对伴随阶进行某种重新归一化，这与（4.3）相对应；参见 [2, §5.1]。如果 X 是由函数 f局部定义的超曲面，那么 f 的形式展开具有一个加权齐次初始形式，其权重为 $(1/a_1, \ldots, 1/a_q)$，对应于参数 $(x_1, \ldots, x_q)$。（我们使用 ATWinv 的基本版本，它不区分除子型自由参数与其余自由参数。）

用 [2], [26] 和 [1], 的语言来说，加权爆破的中心可以全局地（在 $(a_1, a_2, \ldots, a_q)$ 取 ATWinv 最大值的开集上）由一个*Rees* 代数给出，它可用局部参数表示为

$$\mathcal{O}_X[x_1 t^{1/a_1}, x_2 t^{1/a_2}, \ldots, x_q t^{1/a_q}]^{\text{int}},$$

其中，int 表示 $\mathcal{O}_X[t^{1/a}]$中的整闭包，$a =$ 是 a_j，$j = 1$，.....，q的最小正有理数倍整数。此外，按照 [26], 的做法，加权爆破可描述为一次余边界爆破

$$B = \text{Spec}_X \mathcal{O}_X[t^{-1}, x_1 t^{1/a_1}, x_2 t^{1/a_2}, \ldots, x_q t^{1/a_q}]$$

（参见定义4.3）。除了这些概念的存在性意味着我们所用的群循环奇点的加权爆破可作为全局加权爆破来理解，并会在轨形商上诱导出显式的双有理态射之外，我们无需明确处理这些概念。

ATWinv 由 inv 决定这一事实可用于简化计算，因为 inv 和最大接触超曲面只取决于标记理想的等价类（按 [9]的意义）。这在下面的例子中很有用（但并非必要）。我们先将上述细节补充到关于 cp(k) 的例1.11中。

例4.7。我们考虑由 $f(w, x) = \Delta_k(x_0, w^{1/k} x_1, \ldots, w^{(k-1)/k} x_{k-1})$ 定义的循环循环奇点 cp(k)，简写为 $\Delta_k(w^{j/k} x_j)$。参见例1.11。我们声称，在任意满足 $w = x = 0$ （可能还有其他参数）的点处，

$$\text{inv} = \left(k, \frac{k+1}{k}, 1, \frac{k}{k-1}, \frac{k-1}{k-2}, \ldots, \frac{3}{2}\right), \tag{4.5}$$

其连续的最大接触超曲面为 x_0， w， x_1 （或 x_1， w） x_2，…， x_{k-} 1·

为此，我们可以利用这样一个事实：标记理想 (f,k) 等价于单项式标记理想

$$\left((x_0^k,\, wx_1^k,\, \ldots,\, w^{k-1}x_{k-1}^k),\, k\right). \tag{4.6}$$

这种等价性源于这样一个事实： k （参见 (1.8)）的$\Delta_k(w^{j/k}x_j)$ 因子集合是 $w^{j/k}x_j$, $j=0,\ldots,k-1$ 的可逆线性组合（另见 [10, 练习 A.13]）。

计算过程如下。我们从最大接触 x_0 以及作为 inv 第一项 b_1 的阶 k 开始。第一个系数标记理想为 $((w^jx_j^k,\, j=1,\ldots,k-1)\ k)$，inv 的第二项 b_2 为 $\mathrm{ord}(w^jx_j^k)/k=(k+1)/k$。接下来，我们依次处理 inv 的各项 b_j 、最大接触超曲面和系数理想，如下所示。

$$\begin{aligned}
b_2=\frac{k+1}{k}, \qquad & w, \qquad && (x_1^k,\,k)\,+\,(x_2^k,\,k-1)\,+\cdots+\,(x_{k-1}^k,\,2),\\
b_3=1, \qquad & x_1, \qquad && (x_2^k,\,k-1)\,+\cdots+\,(x_{k-1}^k,\,2)\\
& && =((x_2^{k/(k-1)},\,x_3^{k/(k-2)},\ldots,x_{k-1}^{k/2}),\,1),\\
b_4=\frac{k}{k-1}, \qquad & x_2, \qquad && (x_3^{k/(k-2)},\ldots,x_{k-1}^{k/2},\,k/(k-1))\\
& && =(x_3^{(k-1)/(k-2)},\ldots,x_{k-1}^{(k-1)/2},\,1),
\end{aligned}$$

等等。有关如何进行计算的更多详情，请参见奇异化不变量速成课程， [10, 附录]。也可以稍作处理，直接根据 f的导数进行计算，而不必转化为等价的单项式标记理想。

由（4.5）可得

$$\mathrm{ATWinv}=\left(k,\,k+1,\,k+1,\,\frac{k(k+1)}{k-1},\,\frac{k(k+1)}{k-2},\,\ldots,\,\frac{k(k+1)}{2}\right), \tag{4.7}$$

以及与这些参数相关联的权重向量

$$(x_0,w,x_1,x_2,\ldots,x_{k-1})$$

is

$$\frac{1}{k(k+1)}\,(k+1,\,k,\,k,\,k-1,\,k-2,\,\ldots,\,2)\,.$$

这是例1.11中的权重向量，经过缩放后使得 Δ_k 的总加权次数为1。

例4.8。 考虑循环循环矩阵奇点的乘积$\mathrm{cp}(k_1)\times\cdots\times\mathrm{cp}(k_s)$，其中 $\sum k_i=k$ （带有一个除子 w），由下式给出

$$f(w,x)=\prod_{i=1}^{s}\Delta_{k_i}(w^{j/k_i}x_{ij},\,j=0,\ldots,k_i-1)$$

（使用例1.11中的简写记法），在正规交叉（k）轨迹的闭包 $S=\{x_{ij}=0:j=0,\ldots,k_i-1,i=1,\ldots,s\}$ 中。假设 $k_1=\max\,k_i$。我们首先声称，在满足 $w=x=0$ 的点处，

$$\mathrm{ATWinv}=\left(k,\ldots,k,\,\frac{k(k_1+1)}{k_1},\,\left\{\frac{kk_i(k_1+1)}{k_1(k_i-j)+k_i}:\,j=1,\ldots,k_i-1,\,i=1,\ldots s\right\}\right), \tag{4.8}$$

其中集合中的项应按升序排列，并且相应的最大接触超曲面序列为

$$x_{i0},\, i=1,\dots,s,\quad w,\ \{x_{ij}:\, j=1,\dots,k_i-1,\, i=1,\dots s\},$$

顺序与上文相同。

计算与例4.7类似。标记理想（f,k）等价于单项式标记理想

$$\sum_{i=1}^{k}\Big((w^j x_{ij}^{k_i}),\, k_i\Big)\cong\Big((w^{j/k_i}x_{ij}),\, 1\Big)$$

inv 的前 s 项为 $k,1,\dots,1$，分别对应最大接触 $x_{10},\dots,x_{s0}$，相应的系数理想为

$$\sum_{i=1}^{k}\Big((w^j x_{ij}^{k_i})_{j\geq 1},\, k_i\Big)\cong\Big((w^{j/k_i}x_{ij})_{j\geq 1},\, 1\Big)$$

由于 $k_1=\max\, k_i$，inv 的下一项为 $(k_1+1)/k_1$，我们可以取最大接触 w。此时，我们在 ATWinv 中得到 $(k,\ \dots\dots,\ k,\ k(k_1+1)/k_1,\ \dots\dots)$。下一个系数理想为

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k_i-1}\left(x_{ij},\ \frac{k_1+1}{k_1}-\frac{j}{k_i}=\frac{k_1(k_i-j)+k_i}{k_1k_i}\right)\cong\sum\left(x_{ij}^{\frac{k_1k_i}{k_1(k_i-j)+k_i}},\ 1\right).$$

inv 的下一项是以下各值中的最小值

$$\frac{k_1k_i}{k_1(k_i-j)+k_i},\quad j=1,\dots,k_i-1,\ i=1,\dots,s,$$

从而得到以下各值中的最小值

$$\frac{k(k_1+1)}{k_1}\frac{k_1k_i}{k_1(k_i-j)+k_i}=\frac{kk_i(k_1+1)}{k_1(k_i-j)+k_i},\quad j=1,\dots,k_i-1,\ i=1,\dots,s,$$

这是 ATWinv 的下一项。在这一步，inv 的最小值实际上为 1，对应的最大接触为 x_{i1}，对所有满足 $k_i=k_1$ 的 i 均取此值。我们以相同方式继续，得到 (4.8)。

注意，(4.8) 由以下正有理数集合给出

$$\frac{k(k_1+1)}{k_1},\quad \frac{kk_i(k_1+1)}{k_1(k_i-j)+k_i},\ j=0,\dots,k_i-1,\ i=1,\dots s,$$

按升序排列，并依次对应最大接触 $w,\ x_{ij}$。与参数 $w,\ x_{ij}$ 相关联的对应权重为其倒数，即 $1/k(k_1+1)\times$

$$k_1,\quad \frac{k_1(k_i-j)+k_i}{k_i}. \tag{4.9}$$

我们可以将权重 (4.9) 乘以 ℓ/k_1，其中 $\ell=$最小公倍数$\{k_i\}$，从而得到整数权重。

$$\ell,\quad \ell-\left(j\frac{\ell}{k_i}-\frac{\ell}{k_1}\right) \tag{4.10}$$

针对参数 $w,\ x_{ij}$，将例1.11中 $cp(k)$ 情形的结果加以推广。例如，若所有 $k_i=k_1$，则 (4.10) 与 cp(k_1) 的权重相同。

现在我们按照例1.11的模式，分析 $\mathsf{cp}(k_1) \times \cdots \times \mathsf{cp}(k_s)$ 的加权爆破 σ，其权重 (4.10) 与参数 w, x_{ij} 相关联。

在轨形 w 图表中， σ 由以下代换给出

$$\begin{aligned} w &= t^{\ell}, \\ x_{ij} &= t^{\ell-\left(j\frac{\ell}{k_i}-\frac{\ell}{k_1}\right)}\dot{x}_{ij}, \quad j=0,\dots,k_i-1,\ i=1,\dots s, \end{aligned}$$

群 μ_ℓ 通过以下方式作用于图表

$$\varepsilon\cdot(t,\dot{x}_{ij}) := (\varepsilon t, \varepsilon^{j\frac{\ell}{k_i}-\frac{\ell}{k_1}}\dot{x}_{ij}), \quad \text{where } \varepsilon\in\mu_\ell.$$

群作用在例外除子 $\{t=0\}$之外是自由的。

类似地，轨形 x_j 图表具有一个由 μ_{k-j+1}, $j=0,\dots,k-1$ 给出的作用。

层 $S=\{x=0\}$ 经 σ 的严格变换仅与 w 图表相交（作为一个不变光滑子簇），而 $\mathsf{cp}(k_1) \times \cdots \times \mathsf{cp}(k_s)$ 的拉回在此图表中由以下给出

$$t^{k(\ell+\ell/k_1)}\prod \Delta_{k_i}(\dot{x}_{i0},\dots,\dot{x}_{i,k_i-1}),$$

这是正规交叉。

如例1.11所示，我们得到一个希尔伯特基

$$\begin{aligned} W &= t^{\ell}, \\ X_{i0} &= t^{\ell/k_1}\dot{x}_{i0}, \quad 1\le i\le s, \\ X_{i1} &= \dot{x}_{i1}, \quad \text{if } k_i=k_1, \\ X_{ij} &= t^{\ell-\left(j\frac{\ell}{k_i}-\frac{\ell}{k_1}\right)}\dot{x}_{ij}, \quad \text{otherwise}, \end{aligned}$$

$$S_{\mu,\lambda} = S_{\mu,(\lambda_{ij})} = t^{\mu}\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=0}^{k_i-1}\dot{x}_{ij}^{\lambda_{ij}},$$

其中 μ 和 λ_{ij} 是非负整数，满足 $\lambda_{i1}=0$ （若 $k_i=k_1$，且

$$\mu+\sum_{i=1}^{s}\lambda_{i0}\left(\ell-\frac{\ell}{k_1}\right)+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k_i-1}\lambda_{ij}\left(j\frac{\ell}{k_i}-\frac{\ell}{k_1}\right)=\nu\ell, \quad \nu=\nu_{\mu,\lambda}\ge 1.$$

（后面的不变量包括前面的不变量。）注意， $0<\underline{\left(j\frac{\ell}{k_i}-\frac{\ell}{k_1}\right)}<\ell$，若$j=1$且 $k_i<k_1$，或 $j>1$。

不变量之间的关系包括

$$\begin{aligned} \prod_{i,j}X_{ij}^{\lambda_{ij}} &= = t^{\sum_i\lambda_{i0}\frac{\ell}{k_1}+\sum_i\sum_{j\ge1}\lambda_{ij}\left(\ell-\left(j\frac{\ell}{k_i}-\frac{\ell}{k_1}\right)\right)}\prod_{i,j}\dot{x}_{ij}^{\lambda_{ij}} \\ &= t^{\sum_i\lambda_{i0}\ell+\sum_i\sum_{j\ge1}\lambda_{ij}\ell-\left(\mu+\sum_i\lambda_{i0}\left(\ell-\frac{\ell}{k_1}\right)+\sum_i\sum_{j\ge1}\lambda_{ij}\left(j\frac{\ell}{k_i}-\frac{\ell}{k_1}\right)\right)}t^{\mu}\prod_{i,j}\dot{x}_{ij}^{\lambda_{ij}} \\ &= W^{\sum\lambda_{ij}-\nu}S_{\mu,\lambda}. \end{aligned}$$

与例1.11完全一样， $\{\prod\Delta_{k_i}(\dot{x}_{i0},\ \dots\dots,\ \dot{x}_{i,\ k_i-1})=0\}$ 在商态射（由希尔伯特基给出）下的像就是 $\mathsf{cp}(k_1) \times \cdots \times \mathsf{cp}(k_s)$，因此商簇是乘积循环超曲面与

由关系理想定义的托里克簇的交。我们将这个商称为轨形乘积循环奇点。

商诱导的态射由 $w = W$， $x_{i0} = WX_{i0}$， $x_{i1} = WX_{i1}$ 若 $k_i = k_1$，而对于所有其他 i， j，则由 $x_{ij} = X_{ij}$ 给出。注 1.12 的类似结论也完全以相同方式成立。特别地，前述托里克簇经一次爆破后便得到消解，随后我们恢复 cp(k_1) $\times$ $\cdots \times$ cp(k_s) 奇点。

作用于各个轨形图表上的循环群，其阶均不超过 $\ell + 1$。

若存在多个除子 w_1、.....、 w_r，则必须对 $i = 1$、.....、 r 重复上述构造，如下文一般群循环情形所示。

例4.9。 群循环奇点 Δ_Γ （定义 1.5）。群 $\Gamma = G/H$，如定义 1.5 中所述，其中 $G = \mathbb{Z}_{p_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_r}$ 对应于表示例外除子的参数$w = (w_1$、.....、 $w_r)$。每个 $p_i | k$，其中 $k = |G/H|$。在一个层上

$$T_i = \{x = w_i = 0,\, w_h \neq 0, h \neq i\}$$

余维为 1 的 $S = \{x = 0\}$ 上， $\Delta_{G/H}$ 诱导出标准乘积循环正规形 cp(p_i) $\times \cdots \times$ cp(p_i)（含有 k/p_i 个因子）。

我们进行 r 次加权爆破，其连续中心为 $S \cap \{w_i = 0\} = \{w_i = x = 0\}$、 $i = 1$、.....、 r（其中可根据历史对 w_i 排序）；对于固定的 i，参数 w_i、 x_j 的相应权重由例4.8针对 cp(p_i) $\times \cdots \times$ cp(p_i) 给出。每个这样的中心仅与 $w_1 \cdots w_{i-1}$ 图表相交。随后， S 提升到加权爆破复合的 $w_1 \cdots w_r$ 图表上，其群为 $\mu_{p_1} \times \cdots \times \mu_{p_r}$。该群的作用在 $\{y_1 \cdots y_r = 0\}$ 之外是自由的，且给定的群循环奇点在 $w_1 \cdots w_r$ 图表上的严格变换为 nc(k)。

注意， [9], [2], [26] 的奇点消解算法关于域扩张是函子性的，并且上述每一次加权爆破，对于域 $\mathbb{K}(w_{i+1}, \ldots, w_r)$上的 cp($p_i$) ~~$\times$ cp(p_i)~~， ~~都由~~例4.8给出。例如，对于$i = 1$，将域 $\mathbb{K}$ 扩张为 $\mathbb{K}(w_2, \ldots, w_r)$~~对应于~~纤维积$\times_{\operatorname{Spec} \mathbb{K}}$ Spec $\mathbb{K}(w_2, \ldots, w_r)$，借此给定点处的群循环奇点变为 cp($p_i$) $\times \cdots \times$ cp(p_i)，而 inv（或 ATWinv）则变为 cp(p_i) $\times \cdots \times$ cp(p_i)的不变量。

连续进行的加权爆破仅在 $w_1 \cdots w_i$-图表$i = 1, \ldots, r-1$上是非平凡的。作用于 $w_1 \cdots w_i x_{ij}$-图表上的群为 $\mu_{p_1} \times \cdots \times \mu_{p_i} \times \mu_{p_{i+1}-j+1}$。按照例1.11和例4.8的模式，我们可以写出 $\mu_{p_1} \times \cdots \times \mu_{p_r}$ 作用于 $w_1 \cdots w_r$-图表上的希尔伯特基和关系。然后，按照注 1.12，我们还可以通过逐个膨胀余维 1 分层，从轨形商中恢复原始的群循环超曲面。最终的轨形群的阶有上界 $p_1 + \cdots + p_r + 1 \leq k(n-k+1)+1$（因为 $r \leq n-k+1$）。

更一般的乘积群循环奇点情形，也可以完全以同样的方式处理。

4.3. **保持正规交叉的部分消奇**。我们现在终于可以完成保持正规交叉的部分消奇定理 1.13 的证明了。

证明采用对定理中的整数 p 进行归纳法，并给出一系列加权爆破。唯一需要使用非平凡权重的爆破，是针对乘积群循环奇点的爆破，如例

4.9 所述。标准（经典）爆破是权重平凡（所有权重均为 $=1$）的加权爆破。连续进行的（加权）爆破（例如归纳步骤中所需的爆破）定义在轨形覆盖图表中；我们必须证明这些爆破在全局上是有意义的，特别是它们会诱导出轨形商簇的双有理（或双亚纯）态射。

为此，采用 Abramovich-Temkin-W-lodarczyk 的加权爆破构造 [2]以及 W-lodarczyk 用协边爆破表述的方法 [26]非常方便。在此构造中，ATWinv 在加权爆破的中心上为常数；该中心可由 Rees 代数在全局上定义。

对于嵌入簇 $X \hookrightarrow Z$，其中 Z 为光滑簇，协边爆破序列是簇之间的一列态射 $Z = Z_0 \leftarrow Z_1 \leftarrow \cdots \leftarrow Z_t = Z'$，其中每个 Z_j 都带有环面 $T_j = G_m^j$ 的作用，且具有有限稳定子群和几何商（即纤维是单个轨道）。连续爆破的中心是 T_j-不变量，并且存在一列相容于商态射的诱导双有理态射 $Z_{j-1}/T_{j-1} \leftarrow Z_j/T_j$ 。该构造对于 $X \hookrightarrow Z$上的任意群作用都是函子性的。

连续的协边爆破在轨形覆盖图上诱导加权爆破（定义 4.3 和 (4.1) 是一个模型），而商 Z_j/T_j由轨形商图表覆盖（通过 ´étale 态射）；参见 [1, §A.6], [2,§3.4]。

定理 *1.13* 的证明。我们首先应用定理 1.7，得到一个态射$\sigma_p : X_p \to X$，它由一系列有限的容许爆破构成（相对于群 G的作用是等变的），并保留正规交叉点的轨迹 $X^{\mathrm{nc}(p)}$，其阶为 $\leq p$；此外， X_p 是一个超曲面，且最大阶为 $\leq p$， X_p中阶为 p的点构成的子集 S_p是光滑的，维数为 $n-p+1$（除非为空），其中 $n=$维 X，而 X_p 在 S_p 的每一点都只有阶为 p 的（乘积）群循环奇点（特别地， X_p 在 S_p 上一般是正规交叉（p）。

此外，我们可以假设 $X_p \subset Z_p$ 是一个嵌入超曲面（Z_p光滑），并且（如定理 1.7 中所述），在 S_p （定义 1.5）上任意非正规交叉（p）点处，乘积群循环奇点公式中出现的参数 w_i 各自对应例外除子（该除子在 Z_p中是简单正规交叉除子，且与 S_p横截）的某个分支 $D_j = D_{j(i)}$ 。令 D 表示这些分支 D_j之和（例如， $j=1$、.....、 q）； X_p在 $S_p \backslash D$上具有正规交叉（p）。

我们声称，例4.9 中给出的对 S_p内（乘积）群循环奇点进行的加权爆破，可以构成一个全局加权爆破序列，其中心的支集为 $S_p \cap D_j$、 $j=1$、.....、 q（其中 D_j~可按历史排序）；完成后， X_p 在 S_p 的删去邻域内仅具有正规交叉~（记号同定理 1.13）。这一论断将在下文形式化为引理4.10。

应用引理4.10后，X_p在S_p的去心邻域内仅有正规交叉。随后，我们可以在 ~S_p的补集中应用归纳假设；膨胀的中心将与 S_p 分离（因此具有闭支集），因为 X_p 在 S_p的去心邻域内已经是 $< p$ 阶正规交叉。定理得证。□

作为与引理4.10的证明相关的一个例子，我们来考虑这样的情形： X_p在点 $a \in S_p$ 处有一个 cp(k_1) $\times \cdots \times$ cp(k_s) 奇点（其中

$k_1+\cdots+k_s=p$）；参见例4.8。回顾一下，在后者中，乘积循环点的集合由 ATWinv 的最大值轨迹给出（ATWinv 取值为 (4.8)）。由于 ATWinv 和奇点消解算法关于 ´etale 态射具有函子性， X_p中 ATWinv 的最大层在 a的一个邻域内包含于 S_p ，并且对应于例4.8中的最大层。

对应于 ATWinv 最大层的加权爆破，可在局部用一组参数描述，这组参数定义了一系列最大接触超曲面，并配有来自 ATWinv 的相应权重。若在 a 处选取这样的参数 (v， y_{ij})，并按适当顺序排列（参见例4.8，其中 v 是例外除子的理想的局部生成元，在该例中对应于 w ），那么加权爆破会在 a 的某个适当的´étale 邻域内诱导出例4.8中的爆破。

一般地，考虑光滑簇 Z上的简单正规交除子 E ，其分支为E_1、.....、 E_t。设在点 $a\in Z$ 处， E的分支为 E_1、.....、 E_s ；并设 (v_1、.....、 v_s、 z_1、 z_2、.....) 是 a 处的一组参数，其中每个 v_j 都是 E_j的理想的局部生成元。我们称 v_1、.....、 v_s 为除子参数，其余坐标 z_1、 z_2、.....为自由参数。若 D_1、.....、 D_s 的理想的另一组局部生成元分别为 v_1'、.....、 v_s'，则每个 v_j' 都是v_j乘以一个单位，而参数变换诱导出分式域$\mathbb{K}(v)=\mathbb{K}(v_1$、.....、 $v_s)$与 $\mathbb{K}(v')$之间的同构。自由坐标在 $Z\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{K}}$的$a$ 处诱导出正则参数，其中 $Z\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{K}}$Spec $\mathbb{K}(v)$, 而 $\mathbb{K}(v)$ 表示 $\mathbb{K}(v)$的代数闭包。

分式域 $\mathbb{K}(v)$ 同构于由 a 处所有分支 $E_1,\dots,E_t$ 的理想的局部生成元构成的多项式环的分式域，因此我们也将 $\mathbb{K}(E)=\mathbb{K}(E_1,\dots,E_t)$ 记作 $\mathbb{K}(v)$ 的同构类。

引理*4.10*。我们沿用上文定理 *1.13* 证明中的记号，因此在余维一层 $S_p\cap($ $D_i\setminus\cup_{j\neq i}D_j)$ 的每一点， X_p 都具有给定的乘积循环奇点 $cp(k_1^i)\times\cdots cp(k_{s_i}^i)$，其中 $\sum_\ell k_\ell^i=p$。对于每个 $i=1,\dots,q$，令 $D^{(i)}$ 表示由 D 除 D_i 以外的所有分支构成的简单正规交除子。经过一系列加权爆破后， X_p 变换为一个在（ S_p 的严格变换上）具有 $nc(p)$ 的簇；这些爆破的连续加权中心的支集为 $S_p\cap D_i$，并且对应于 $X_p\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{K}}Spec\ \mathbb{K}(D^{(i)})$ 中 S_p 上 *ATWinv* 的最大值。（注意，该最大值就是 $cp(k_1^i)\times\cdots cp(k_{s_i}^i)$ 的 *ATWinv* 值。这些D_i 可按历史排序。）

证明。考虑 $S_p\cap D_i$，其中 i。在点 $a\in S_p\cap D_i$ （对应的余维一层之外），我们考虑 D_i 的理想的一个局部生成元 v_i ，以及 Z_p 在 a 处的自由参数，并将它们都视为自由参数（因此只有 D_j、 $j\neq i$ 的理想的局部生成元是除子型的）。

设 $i=1$。假设 D_1、.....、 D_s 是 a 处 D 的分支。将基域扩张为 $\mathbb{K}(v_2$、.....、 $v_s)$ 后， X_p 在 a 处有一个 $\operatorname{cp}(k_1^1)\times\cdots\operatorname{cp}(k_{s_1}^1)$ 奇点；对于相应的 ATWinv 值，通过对自由参数取适当的导数，可得到位于 a 处的连续最大接触超曲面，而这些导数由针对 Z_p 的导数诱导得到。

如果 a 是例4.9 中的一个（乘积）群循环点，那么将基域扩张为 $\mathbb{K}(v_2$、.....、 $v_s)$，在该例中会拉回为扩张 $\mathbb{K}(w_2$、.....、 $w_s)$。因此，我们在 X_p 中得到一个全局加权爆心，对应于例4.9 中针对 $i=1$ 的加权爆破。

我们以同样的方式继续处理 $i=2,\dots,q$。 □

补充 *1.16* 的证明。 为了处理 S_p 中的轨形群-循环奇点，所需的额外爆破的中心均为 S_p 与特征除子的某个分支的交（例如，按历史顺序排列这些分支）。这是注 1.12 以及一般情况下类似结论的推论（参见例4.8和例4.9）。

对于 S_{p-1}，相应的爆破的中心位于 S_p 的补集中，但~这些中心在 X_p 中是闭的，因为 X_p 在 S_p 的删去邻域内只有正规交叉奇点~。同样，对于所有 $q < p$。□

5. Quotient of normal crossings by a finite abelian group action

本节最后要说明的是，除循环奇点的邻点外，部分消奇定理1.13中出现的奇点，也可以通过类似于循环奇点的公式明确描述；这些公式适用于不变正规交叉理想在有限阿贝尔群作用下的商；参见例5.3和定理5.4。

5.1. 有限阿贝尔群的作用。 给定一个乘法循环群 μ_p，记 ε_p 为 μ_p的生成元 $e^{2\pi i/p}$。任意有限阿贝尔群 G都同构于若干循环群的乘积 $\mu_{p_1} \times \cdots \times \mu_{p_r}$。若 $G = \mu_{p_1} \times \cdots \times \mu_{p_r}$，令 $\mu_{p_i}^{(i)}$表示子群 $\{1\} \times \cdots \times \mu_{p_i} \times \cdots \times \{1\}$，并令 $\varepsilon_{p_i}^{(i)}$表示 $\mu_{p_i}^{(i)}$中与ε_{p_i}对应的生成元。

我们回顾一下：在代数闭域上，有限阿贝尔群 G 的任意线性表示都是可对角化的；等价地， G 的每个不可约线性表示的维数都是 1。

设 Z 表示代数闭域上的光滑簇（或光滑复解析簇），并设 $G = \mu_{p_1} \times \cdots \times \mu_{p_r}$ 作用于 Z。令 $a \in Z$ 表示 G 的作用的一个不动点。则 G 也作用为局部环 $\mathcal{O}_{Z,a}$ 的自同构群。由此可知，存在一组正则（或解析）坐标 $x = (x_1, \ldots, x_n)$，使得在 $a = 0$ 处，关于这组坐标， G 的作用是对角的；即:

$$\varepsilon_{p_i}^{(i)} \cdot x_j = \varepsilon_{p_i}^{\gamma_{ij}} x_j, \quad \text{where} \quad 0 \le \gamma_{ij} < p_i, \tag{5.1}$$

对于每个 $i = 1, \ldots, r$ 和 $j = 1, \ldots, n$ 都成立。（在代数情形中，根据 [18, 基本引理]，存在从 a 的一个仿射邻域到 a 在 Z 处的切空间的等变étale 态射；另见 [11, 第 5] 节。）

我们称 $f \in \mathcal{O}_{Z,\,a}$ 是 G-半不变量，如果

$$g \cdot f = \prod_{i=1}^{r} \varepsilon_{p_i}^{\gamma_i(g,f)} f, \tag{5.2}$$

对每个 $g \in G$ 都成立。（给定 $g \in G$，我们也称 f 是 g-半不变量，如果它满足 (5.2)。）如果理想 $I \subset \mathcal{O}_{Z,\,a}$ 有一组 G-半不变量生成元，那么 I 是G-不变量；也就是说，对每个 $g \in G$，都有 $g \cdot I = I$。

引理 5.1。 设 $G = \mu_{p_1} \times \cdots \times \mu_{p_r}$ 作用于 Z，且 $a \in Z$ 是不动点。令 $I \subset \mathcal{O}_{Z,\,a}$ 表示一个 G-不变理想。那么 I 有一组 G-半不变量生成元。

证明。 设 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ 表示 $a = 0$ 处的坐标，使得 G 的作用关于这些坐标是对角的，如 (5.1) 所示。固定一个元素 $f \in I$，并令 G_0 表示一个

G 的子群，使得 f 是 G_0-半不变量。（以下论证将被 $\widehat{}$ 迭代使用，从 $G_0 = \{1\}$ 开始。）令 $f_0(x)$ 表示在 $a = 0$ 处关于坐标 x 的形式展开 f。

令 $p := \mathrm{lcm}(p_1, \ldots, p_r)$。给定 $g \in G$，我们可以写成

$$\widehat{f_0}(x) = \sum_{j=0}^{p-1} h_j(x), \quad \text{where } (g \cdot h_j)(x) = \varepsilon_p^j h_j(x), \ j = 0, \ldots, p-1$$

（以唯一的方式）。注意，每个 h_j 也是 G_0-半不变量，因为G的作用相对于 $(x_1, \ldots, x_n)$ 是对角的，并且 f是 G_0-半不变量。

此外，由于 I 是 G-不变量，因此可得

$$g^\ell \cdot \widehat{f_0}(x) = \sum_{j=0}^{p-1} \varepsilon_p^{\ell j} h_j(x), \quad \ell = 0, \ldots, p-1.$$

矩阵（$\varepsilon_p^{\ell j}$）是可逆的（范德蒙德矩阵），因此对于每个 j，$h_j(x)$ 都属于由 I 生成的形式理想。但每个 $g^\ell \cdot f \in \mathcal{O}_{Z,\,a}$，所以每个$h_j \in I \subset \mathcal{O}_{Z,\,a}$也都是如此。每个 h_j 同时是 g-半不变量和 G_0-半不变量。

现在，给定 I 的生成元系 $f_1, \ldots, f_t$，我们可以将上述论证逐一应用于每个 f_i、$i = 1, \ldots, t$ 以及每个 $g \in G$，最终得到 I 的一组 G-不变量生成元。□

推论 5.2。设 $G = \mu_{p_1} \times \cdots \times \mu_{p_r}$ 作用于 Z，且 $a \in Z$ 是一个不动点。设 $E \subset Z$ 表示一个简单正规交除子，S 表示 Z 的一个与 E 正规交的光滑子簇。假设 E 在 a 处的所有分支 E_1、…、E_α 的理想 $I_{E_j} \subset \mathcal{O}_{Z,\,a}$，以及 S 的理想 $I_S \subset \mathcal{O}_{Z,\,a}$，都是 G-不变量。那么，Z 在 $a = 0$ 处具有一个 G-对角坐标系 $x =$（x_1、…、x_n），该坐标系适配于 E 和 S；也就是说，对于某个 i_j，每个 $I_{E_j} =$（x_{i_j}），并且 I_S 由若干个 x_i 生成。

证明。首先假设 E 与 S 横截。固定坐标系 $x = (x_1, \ldots, x_n)$，使得 G 的作用为对角形式。由引理 5.1，可假设每个I_{E_j} 都有一个 G-半不变量生成元 h_j，并且 I_S 有G-半不变量生成元 $h_{\alpha+1}, \ldots, h_\beta$。将坐标 x_i 中的 β 个（例如 $x_1, \ldots, x_\beta$）替换为 $h_1, \ldots, h_\beta$，即可得到结论。

一般情形下，$E = E' \cup E''$，其中 E' 与 S 横截，且E''的每个分支都包含 S。设 E'的分支为 $E'_1, \ldots, E'_\alpha$。对 E'和 S应用前述情形，可得到一个 G-对角坐标系 $(w, y, z) = (w_1, \ldots, w_\alpha, y_1, \ldots, y_\beta, z_1, \ldots, z_{n-\alpha-\beta})$，使得$I_{E''_j} = (w_j)$ $j = 1, \ldots, \alpha$，且$I_S = (y_1, \ldots, y_\beta)$。

令 E''_1、……、E''_γ表示 E''的分支；也就是说，$I_{E''_j} = (h_j)$、$j = 1$、……、γ。我们可以假设 $I_S = (h_1$、……、h_γ，$y_{\gamma+1}$、……、$y_\beta)$。（$\gamma \geq \beta$的情形是平凡的。）注意，$I_{S'} := (y_{\gamma+1}$、……、$y_\beta)$是 G-不变量。将横截情形应用于 E 和 S'，即可得到结论。□

例5.3。不变正规交理想。本例研究正规交理想$I \subset \mathcal{O}_{Z,\,a}$，它在$\mathcal{O}_{Z,\,a}$的自同构循环群$G = \mu_p$ 作用下不变（这里使用上述记号）。一般有限阿贝尔群 G的情形将在下文的定理5.4中讨论；但我们先从较简单的情形入手，以便更清楚地阐明一般情形下的论证。

令$I \subset \mathcal{O}_{Z,\,a}$表示主乘积理想 $I = (f)$，其中 $f = f_1 \cdots f_k$属于$\mathcal{O}_{Z,\,a}$，且各因子 $f_1, \ldots, f_k$在 a处的梯度线性无关；

即， I 是正规交叉。假设 I 是 G-不变量，但 I 不能（非平凡地）分解为 G-不变因子（也就是说，我们不能写成 $f = \varphi_1\varphi_2$，且两个因子都不是单位，其中 (φ_i) 是 G-不变量， $i = 1, 2$）。由于 I 是 G-不变量，正规交叉轨迹 $S = \{f_1 = \cdots = f_k = 0\}$ 的理想 $J = I_S = (f_1, \ldots, f_k) \subset \mathcal{O}_{Z,a}$ 也具有 G-不变性。

我们声称， Z 具有坐标系 $y = (y_0, \ldots, y_{n-1})$，在点 a 处，相对于该坐标系， G 是对角的，而 I 由以下元素生成：

$$\prod_{j=0}^{k-1} \left(y_0 + \varepsilon_k^j y_1 + \varepsilon_k^{2j} y_2 + \cdots + \varepsilon_k^{(k-1)j} y_{k-1} \right) = \Delta_k(y_0, \ldots, y_{k-1}). \tag{5.3}$$

若还存在一个除子 $E \subset Z$ ，使得 E， S 横截，且每个 I_{E_i} 都是G-不变量，则我们取适配于 E（以及S）的坐标 $(y_0, \ldots, y_{n-1})$。

更一般地，在 I 分裂为 G-不变因子的情况下，我们可以选取 G-对角坐标，使得 I 由形如 (5.3) 的函数乘积生成。若每个分支 (f_j) 都是 G-不变量，则该结论可直接由引理 5.1 和推论 5.2 得出。

我们从一个 G-对角坐标系 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ 开始（该坐标系适配于E和 S）。特别地，对每个 $i = 1, \ldots, n$， $\varepsilon_p \cdot x_i = \varepsilon_p^{q(i)} x_i$，存在某个 $q(i) = 0, \ldots, p-1$。

由于 I 不能分解为 G-不变因子，因此存在一个从 $G = \mu_p$ 到 μ_k 的同态，其中 μ_k 是 $f_1, \ldots, f_k$ 的置换群的一个循环子群。该同态的核是由 $\varepsilon_p^k = \varepsilon_{p/k}$ 生成的循环群 $H = \mu_{p/k}$。核 H 是 G 的子群，由所有对任意 j 都诱导出 (f_j) 的自同构的元素组成。

根据引理 5.1，我们可以假设每个 f_j 都是 H-半不变量；也就是说，$\varepsilon_{p/k} \cdot f_j = \varepsilon_{p/k}^{\gamma(j)} f_j$，其中 $\gamma(j) = 0, \ldots p/k - 1$。这意味着 f_j 的形式展开中的每个单项式 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ 都具有性质 $\varepsilon_{p/k} \cdot x^\alpha = \varepsilon_{p/k}^{\gamma(j)} x^\alpha$。但是

$$\varepsilon_{p/k} \cdot x^\alpha = \varepsilon_p^k \cdot x^\alpha = \varepsilon_p^{k \sum_i q(i)\alpha_i} = \varepsilon_{p/k}^{\sum q(i)\alpha_i};$$

也就是说， $\sum q(i)\alpha_i \equiv \gamma(j) \bmod p/k$。

特别地，对于 x^α 在 f_1 的形式展开中的每个单项式， $\sum q(i)\alpha_i$ 只取 $\gamma(1)$ $\gamma(1) + p/k$, ..., $\gamma(1) + (k-1)p/k \bmod p$ 这些值。

我们可以将 f_1 形式地写成 G-半不变量项 $f_1 = f_{1,0} + \cdots f_{1,p-1}$ 之和，其中 $\varepsilon_p \cdot f_{1,m} = \varepsilon_p^m f_{1,m}$, $m = 0, \ldots, p-1$；也就是说，对于 f_1 的形式展开中的每个单项式 $x^{\alpha,m}$，都有 $\sum q(i)\alpha_i \equiv m \bmod p$。由此可得

$$f_1 = h_0 + \ldots + h_{k-1}, \quad \text{where each } h_\ell = f_{1,\gamma(1)+\ell p/k},$$

因此

$$\varepsilon_p \cdot h_\ell = \varepsilon_p^{\gamma(1)+\ell p/k} \cdot h_\ell = \varepsilon_p^{\gamma(1)} \varepsilon_k^\ell h_\ell.$$

现在，对于每个 $j = 0, \ldots, k-1$，都有

$$\varepsilon_p^j \cdot f_1 = \varepsilon_p^{j\gamma(1)} \sum_{\ell=0}^{k-1} \varepsilon_k^{j\ell} h_\ell. \tag{5.4}$$

由于矩阵 $(\varepsilon_k^{j\ell})$ 可逆，因此每个 $h_\ell \in \mathcal{O}_{Z,a}$ 都成立，并且 a 处的 $h_0, \ldots, h_{k-1}$ 的梯度线性无关。理想 I 由以下元素生成：

乘积 $f_0' \cdots f_{k-1}'$，其中 $f_j' = \varepsilon_p^j \cdot f_1$, $j = 0, \ldots, k-1$，因此我们得到 (5.3)，其中 $y_\ell = h_\ell$, $\ell = 0, \ldots, k-1$。

以下命题对应于例5.3，其中有限阿贝尔群 G 对 $G = \mu_{p_1} \times \cdots \times \mu_{p_r}$ 的作用可取为 $G = \mu_{p_1} \times \cdots \times \mu_{p_r}$，其中 $G = \mu_{p_1} \times \cdots \times \mu_{p_r}$ 是某个 $p_1, \ldots, p_r$。下文将在证明中给出 (5.5) 中系数矩阵 $\left(\varepsilon_p^{\beta_{j\ell}}\right)$ 的精确公式，它将 (5.3) 中的范德蒙德矩阵 $(\varepsilon_k^{j\ell})$ 推广；见 (5.8)。一般的系数矩阵可以表示为一个由嵌套块构成的分块矩阵，其形式为对角 $\times$ 范德蒙德，与 (5.4) 右端的线性变换类似；参见例1.10。

定理5.4。 设 $G = \mu_{p_1} \times \cdots \times \mu_{p_r}$ 表示 $\mathcal{O}_{Z,a}$ 的一个自同构群（这里沿用上文的记号），并设 $I \subset \mathcal{O}_{Z,a}$ 表示主乘积理想 $I = (f)$，其中 $f = f_1 \cdots f_k$ 属于 $\mathcal{O}_{Z,a}$，且各因子 $f_1, \ldots, f_k$ 在 a 处的梯度线性无关；也就是说，I 是正规交叉。假设 I 是 G-不变量，但 I 不能非平凡地分解为 G-不变量因子。此外，设 $E \subset Z$ 表示一个除子，使得每个 I_{E_i} 都是 G-不变量，并且 E, S 横截相交，其中 S 是正规交叉轨迹 $S = \{f_1 = \cdots = f_k = 0\}$。

于是 Z 在 a 处存在一个坐标系 $y = (y_0, \ldots, y_{n-1})$，该坐标系适配于 E（以及 S），相对于此坐标系，G 为对角的，并且 I 由以下元素生成

$$\prod_{j=0}^{k-1} \left(y_0 + \varepsilon_k^{\beta j,1} y_1 + \cdots + \varepsilon_k^{\beta_{j,k-1}} y_{k-1} \right), \tag{5.5}$$

其中，系数矩阵 $\left(\varepsilon_k^{\beta_{j\ell}}\right)$ 由证明中的公式 (5.9) 给出。

注记 5.5. 粗略地说，系数矩阵是一个以 $i = 1, \ldots, s$ 为嵌套层次的嵌套分块矩阵，其中 $s \le r$ 和第 i 个嵌套块具有对角 $\times (\varepsilon_{q_i}^{j\ell})$ 的形式（后者是 $q_i \times q_i$ 范德蒙德），其中 $q_i < p_i$ 和 $q_1 \cdots q_s = k$。相应的对角部分也出现在 (5.4) 中，但 (5.4) 对角线上的常数不影响理想 I。公式 (5.5) 应与 $\Delta_{G/H}$ 进行比较，其中 H 是 G 的子群，其自同构保持任意（因而也保持所有）正规交叉因子；与坐标系 y 对应的循环矩阵具有一般的嵌套分块形式，如例1.10所示。

定理*5.4*的证明。 我们从适配于 E 和 S 的 G-对角坐标系 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ 开始。特别地，对于每个 $i = 1, \ldots, r$ 和 $j = 1, \ldots, n$,

$$\varepsilon_{p_i}^{(i)} \cdot x_j = \varepsilon_{p_i}^{\gamma_{ij}} x_j, \quad \text{for some } \gamma_{ij} = 0, \ldots, p_i - 1.$$

因此，对于任意单项式 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \in \mathcal{O}_{Z,a}$,

$$\varepsilon_{p_i}^{(i)} \cdot x^\alpha = \varepsilon_{p_i}^{\sum_j \gamma_{ij}\alpha_j} x_\alpha.$$

令 H 表示 G 中所有诱导主理想 (f_1) 的自同构的元素所构成的子群。由于 $I = (f)$ 不能分解为 G-不变因子，因此，对于任意 j 和 $|G/H| = k$，H 也是 G 中诱导 (f_j) 的自同构的元素所构成的子群。根据引理 5.1，我们可以假设每个 f_j 都是 H-半不变量。

考虑满群同态

$$\mu_{p_1} \to \frac{\mu_{p_1}^{(1)} + H}{H} \subset \frac{G}{H}. \tag{5.6}$$

商群 $(\mu_{p_1}^{(1)} + H)/H \cong \mu_{q_1}$，其中 q_1 是最小的 q，使得$\big(\varepsilon_{p_1}^{(1)}\big)^q \in H$；也就是说，使得 $\big(\varepsilon_{p_1}^{(1)}\big)^q$ 诱导出 (f_1) 的自同构。令 K_1表示同态 (5.6) 的核。那么

$$K_1 \cong \mu_{p_1/q_1} \quad \text{and} \quad K_1 \cong \mu_{p_1}^{(1)} \cap H.$$

对于每个 $j = 1, \ldots, k$，f_j是 H-半不变量，因此也是 K_1-半不变量，所以我们可以写成

$$\varepsilon_{p_1/q_1}^{(1)} \cdot x^\alpha = \varepsilon_{p_1/q_1}^{\gamma_1(j)} x^\alpha, \quad \text{where } 0 \le \gamma_1(j) < p_1/q_1,$$

对于 f_j 的形式展开中的每个单项式 x^α（其中 $\varepsilon_{p_1/q_1}^{(1)}$ 表示 $\big(\varepsilon_{p_1}^{(1)}\big)^{q_1}$）。

我们可以将 f_1 形式地写成若干 $\mu_{p_1}^{(1)}$-半不变量项 $f_1 = f_{1,0} +$ 之和 $\cdots f_{1,p_1-1}$，其中 $\varepsilon_{p_1}^{(1)} \cdot f_{1,\ell} = \varepsilon_{p_1}^{\ell} f_{1,\ell}$, $\ell = 0, \ldots, p_1 - 1$；也就是说，$f_1$ 的形式展开中的每个单项式 x^α 都满足 $\varepsilon_{p_1}^{(1)} \cdot x^\alpha = \varepsilon_{p_1}^{\ell} x^\alpha$，因此 $\sum \gamma_{1,j}\alpha_j \equiv \ell$ 模 p_1。但是，对于 f_1 的形式展开中的每个单项式 x^α，$\sum_{j=1}^n \gamma_{1,j}\alpha_j = \gamma_1(1)$ 模 p_1/q_1。因此，对于 f_1 的形式展开中的每个单项式 x^α，$\sum \gamma_{1,j}\alpha_j$ 只取值 $\gamma_1(1)$ $\gamma_1(1) + p_1/q_1, \ldots, \gamma_1(1) + (q_1 - 1)p_1/q_1$ 模 p_1。

换言之，

$$f_1 = h_0 + \ldots + h_{q_1-1}, \quad \text{where each } h_\ell = f_{1,\gamma_1(1)+\ell p_1/q_1},$$

使得

$$\varepsilon_{p_1}^{(1)} \cdot h_\ell = \varepsilon_{p_1}^{\gamma_1(1)+\ell p_1/q_1} h_\ell = \varepsilon_{p_1}^{\gamma_1(1)} \varepsilon_{q_1}^{\ell} h_\ell,$$

一般而言，

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \varepsilon_{p_1}^{(1)} \cdot f_1 \\ \vdots \\ \big(\varepsilon_{p_1}^{(1)}\big)^{q_1-1} \cdot f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \varepsilon_{p_1}^{\gamma_1(1)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon_{p_1}^{(q_1-1)\gamma_1(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon_{q_1} & \cdots & \varepsilon_{q_1}^{q_1-1} \\ & & \ddots & \\ 1 & \varepsilon_{q_1}^{q_1-1} & \cdots & \varepsilon_{q_1}^{(q_1-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{q_1-1} \end{pmatrix}$$

每个 h_ℓ 都是 $\varepsilon_{p_1}^{(1)}$-半不变量和 H-半不变量；因此，H_1-半不变量，其中

$$H_1 := \mu_{p_1}^{(1)} + H.$$

现在我们可以考虑满群同态

$$\mu_{p_2} \to \frac{\mu_{p_2}^{(2)} + H_1}{H_1} \subset \frac{G}{H_1}. \tag{5.7}$$

商群 $(\mu_{p_2}^{(2)} + H_1)/H_1 \cong \mu_{q_2}$，其中 q_2 是满足 $\big(\varepsilon_{p_2}^{(2)}\big)^q \in H_1$ 的最小 q。于是 q_2 整除 k/q_1。（若 $q_1 q_2 = k$，则这一步就完成了。）令 K_2 表示群同态 (5.7) 的核。于是 $K_2 \cong \mu_{p_2/q_2}$ 且 $K_2 \cong \mu_{p_2}^{(2)} \cap H_1$。

每个 h_ℓ is K_2 都是半不变量，因此我们可以写成

$$\varepsilon_{p_2/q_2}^{(2)} \cdot h_\ell = \varepsilon_{p_2/q_2}^{\gamma_2(\ell)} h_\ell.$$

按照前面的模式，我们可以写成

$$h_{\ell_1} = \sum_{\ell_2=0}^{q_2-1} h_{\ell_1 \ell_2}, \quad \ell_1 = 0, \ldots, q_1 - 1, \ \ell_2 = 0, \ldots, q_2 - 1$$

（形式上），其中每个 $h_{\ell_1\ell_2}$ 都是 $\varepsilon_{p_2}^{(2)}$-半不变量，事实上，

$$\varepsilon_{p_2}^{(2)}\cdot h_{\ell_1\ell_2}=\varepsilon_{p_2}^{\gamma_2(\ell_1)+\ell_2 p_2/q_2}h_{\ell_1\ell_2}=\varepsilon_{p_2}^{\gamma_2(\ell_1)}\varepsilon_{q_2}^{\ell_2}h_{\ell_1\ell_2}.$$

因此，对于每个 $m_1=0,\ \ldots\ldots,\ q_1-1$ 和 $m_2=0,\ \ldots\ldots,\ q_2-1$，我们得到

$$\begin{aligned}\left(\varepsilon_{p_2}^{(2)}\right)^{m_2}\left(\varepsilon_{p_1}^{(1)}\right)^{m_1}\cdot f_1&=\left(\varepsilon_{p_2}^{(2)}\right)^{m_2}\cdot\left(\varepsilon_{p_1}^{m_1\gamma_1(1)}\sum_{\ell_1=0}^{q_1-1}\varepsilon_{q_1}^{m_1\ell_1}h_{\ell_1}\right)\\&=\varepsilon_{p_1}^{m_1\gamma_1(1)}\sum_{\ell_1=0}^{q_1-1}\varepsilon_{q_1}^{m_1\ell_1}\left(\varepsilon_{p_2}^{(2)}\right)^{m_2}\cdot h_{\ell_1}\\&=\varepsilon_{p_1}^{m_1\gamma_1(1)}\sum_{\ell_1=0}^{q_1-1}\varepsilon_{q_1}^{m_1\ell_1}\varepsilon_{p_2}^{m_2\gamma_2(\ell_1)}\sum_{\ell_2=0}^{q_2-1}\varepsilon_{q_2}^{m_2\ell_2}h_{\ell_1\ell_2}.\end{aligned}\tag{5.8}$$

此处的系数矩阵是一个嵌套分块矩阵，其分块具有对角 ×范德蒙德矩阵的形式。

如果 $k=q_1q_2$，则此步骤已完成；否则，至多经过 r 步即可完成，因为 $I=(f)$ 无法分解为非平凡的 G-不变量因子。如果经过 s 步完成（其中 $s\le r$），那么 $k=q_1q_2\cdots q_s$ 其中 $q_1,\ \ldots\ldots,\ q_s$ 如上所述依次引入，从而得到

$$\begin{aligned}&\left(\varepsilon_{p_s}^{(s)}\right)^{m_s}\cdots\left(\varepsilon_{p_1}^{(1)}\right)^{m_1}\cdot f_1\\&=\varepsilon_{p_1}^{m_1\gamma_1(1)}\sum_{\ell_1=0}^{q_1-1}\varepsilon_{q_1}^{m_1\ell_1}\varepsilon_{p_2}^{m_2\gamma_2(\ell_1)}\sum_{\ell_2=0}^{q_2-1}\cdots\varepsilon_{q_{s-1}}^{m_{s-1}\ell_{s-1}}\varepsilon_{p_s}^{m_s\gamma_s(\ell_{s-1})}\sum_{\ell_s=0}^{q_s-1}\varepsilon_{q_s}^{m_s\ell_s}h_{\ell_1\ell_2\cdots\ell_s},\end{aligned}\tag{5.9}$$

对所有 $m_i=0,\ \ldots\ldots,\ q_i-1,\quad i=1,\ \ldots\ldots,\ s$。

由于系数矩阵可逆，因此（如上面的例5.3所示），$h_{\ell_1\cdots\ell_s}\in\mathcal{O}_{Z,\,a}$及其梯度线性无关。理想 I由这些 $\left(\varepsilon_{p_s}^{(s)}\right)^{m_s}\cdots\left(\varepsilon_{p_1}^{(1)}\right)^{m_1}\cdot f_1$的乘积生成，因此我们得到 (5.5)，其中 y-坐标由 $h_{\ell_1\cdots\ell_s}$给出。□

References

1. D. Abramovich、A. Belotto da Silva、M. Temkin 和 J. W

Principalization on lodarczyk，*logarithmically foliated orbifolds* 2503 00926 2 [ ] 2025 71 预印本 arXiv:。v math.AG（），页。2. D. Abramovich、M. Temkin 和 J. W

Functorial embedded resolution via weighted lodarczyk，*blowings up* **18** 2024 1557 1587 Alg. No. Theory（），–。3. J.M. Aroca、H. Hironaka 和 J.L. Vicente，*Complex analytic desingularization*，施普林格出版社，东京，2018年。4. A. Belotto da Silva、E. Bierstone 和 Ramon Ronzon Lavie，*Partial desingularization*，《美国数学会汇刊》**378**（2025年），2829–2879。5. E. Bierstone、S. Da Silva、P. D. Milman 和 F. Vera Pacheco，*Desingularization by blowings-up avoiding simple normal crossings* **142** 2014 4099 4111 ，《美国数学会会刊》（），–。6. E. Bierstone、P. Lairez 和 P.D. Milman，*Resolution except for minimal singularities II. Thecase of four variables*，《数学进展》**231**（2012年），3003–3021。7. E. Bierstone 和 P.D. Milman，*Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant*，《数学发明》**128**（1997年），207–302。8. E. Bierstone 和 P.D. Milman，*Desingularization of toric and binomial varieties*，《代数几何杂志》**15**（2006年），443–486。9. E. Bierstone 和 P.D. Milman，*Functoriality in resolution of singularities*，《京都大学数理科学研究所出版物》**44**（2008年），609–639。10. E. Bierstone 和 P.D. Milman，*Resolution except for minimal singularities I*，《数学进展》**231**（2012年），3022–3053。

11. M. Brion、H. Kraft 和 G.W. Schwarz, *Luna's slice theorem and applications*, 《美国数学会公报》, 即将出版, 52页。12. P.J. Davis, *Circulant matrices*, 第二版, AMS Chelsea 出版社, 1994年。13. R. Dedekind, *Aus Briefen am Frobenius*, 《数学著作集》, 第二卷, 414–442。14. P. Diaconis, *Group representations in probability and statistics*, 《IMS讲义与专著丛书》**11**, 数理统计学会, 加利福尼亚州海沃德, 1988年。15. R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, 施普林格出版社, 纽约, 1977年。16. S. Kanemitsu 和 M. Waldschmidt。

Matrices of finite abelian groups finite Fourier transform ,, and codes 106

《数论及其应用丛书》**8**, World Sci. Publ. Co., 新泽西州哈肯萨克, 2013年, 90–。17. J. Koll´ar, *Semi log resolutions*, 预印本 arXiv:0812.3592v1 [math.AG] (2008年), 10页。18. D. Luna, *Slices étales*, 《法国数学会公报》**33** (1973年), 81–105。19. J. McDonald, *Fiber polytopes and fractional power series*。《纯粹与应用代数杂志》**104** (1995年), 213–233。20. M. Nagata, *Remarks on a paper of Zariski on purity of branch-loci*, 《美国国家科学院院刊》**44** (1958年), 796–799。21. M. Nagata, *On the purity of branch loci in regular local rings*, 《伊利诺伊斯数学杂志》**3** (1959年), 328–333。22. A. Parusi´nski 和 G. Rond, *The Abhyankar-Jung theorem*, 《代数杂志》**365** (2012年), 29–41。23. L. Pontrjagin, *Theory of topological commutative groups*, 《数学年刊》(第2辑)**35** (1934年), 361–388。24. M.J. Soto 和 J.L. Vicente, *The Newton Procedure for several variables*, 《线性代数及其应用》**435** (2011年), 255–269。25. E. Szab´o, *Divisorial log terminal singularities*。《东京大学数学科学杂志》**1** (1994年), 631–639。26. J. W-lodarczyk, *Functorial resolution by torus actions*。预印本 arXiv:2203.03090v4 [math.AG] (2025年), 50页。

(A. Belotto da Silva) Université Paris Cité and Sorbonne Université, UFR de Mathématiques, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, UMR7586, F-75013 Paris, France, and Institut universitaire de France (IUF)*Email address*: andre.belotto@imj-prg.fr

(E. Bierstone) University of Toronto, Department of Mathematics, 40 St. George Street, Toronto, ON, Canada M5S 2E4*Email address*: bierston@math.utoronto.ca