arXiv:2602.09152v1 [math.SP] 9 Feb 2026

含分布系数常微分方程组相关对称关系的自伴扩张

STEVEN REDOLFI 和 RUDI WEIKARD

谨以此文献给 *Bernard Helffer*，值其*75*岁寿辰

摘要。我们研究实区间（a，b）上二维一阶微分方程组 $Ju'+qu=wf$ 的扩张理论，其中J 为常数可逆斜厄米矩阵， q 和 w 为矩阵，其元素是0阶实分布，且 q 为厄米矩阵、 w 为非负矩阵。具体而言，我们刻画极小关系闭包中解 u所满足的边界条件，并描述可导出自伴扩张的拟边界条件的性质。随后，我们将这些思想应用于一种广为人知的非负极小关系扩张：克莱因-冯·诺伊曼扩张。为进一步说明克莱因-冯·诺伊曼扩张的定义，附录展示了 Friedrichs 扩张的一种构造方式；传统上，克莱因-冯·诺伊曼扩张正是由此定义的。

1. 引言

本文研究与微分方程相关的对称线性关系的扩张理论

$$Ju'+(q-\lambda w)u=wf \tag{1.1}$$

在区间 $(a,\ b)\subset\mathbb{R}$ 上，其中 λ 是一个复参数，系数 J、 q和 w 满足以下假设。

假设 1.1. $J=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$、 q 和 w 是 2×2矩阵，其元素是在区间 $(a,\ b)\subset\mathbb{R}$上的零阶实分布； q 是厄米的，且 w 是非负的。

我们假设 f 属于 $L^2(w)$，其中希尔伯特空间将在下文定义，并在局部有界变差函数中寻求解。在这种情况下， u' 是一个 0 阶分布，因此可以将乘积 qu、 wu和 wf 也定义为 0阶分布。因此，提出方程（1.1）是有意义的。我们强调，不能允许系数比上述规定的更粗糙。若系数更粗糙，就必须接受比局部有界变差函数更粗糙的解，从而无法定义乘积 qu 和 wu。需要指出的是，我们的方法具有足够的普适性，能够涵盖经典的斯图姆–刘维尔方程、类似的差分方程以及狄拉克型方程。还要强调，在给定的

日期：2026年2月11日。2020 数学学科分类号。34L05, 47B25, 47A06。关键词和短语。自伴扩张、分布系数、关系。

条件下，无法保证方程（1.1）的初值问题具有解且唯一。

在 [13] 方程（1.1）的基础谱理论中，即使系统的规模大于2，相关理论也已得到发展；但人们假定，当 $\lambda = 0$时，方程（1.1）的初值问题有唯一解。与方程（1.1）相关联的是极大线性关系 $T_{\max}$ 和极小关系 $T_{\min}$ ，按构造满足 $T_{\min} \subset T_{\max}$。二者满足关系式$T_{\min}^* = T_{\max}$，这是谱理论的基石，它表明 $T_{\min}$ 是对称关系。此外， $T_{\max}$ 的自伴限制已得到刻画，并且傅里叶展开定理得以证明（需满足一些可能偏技术性的附加假设）。

对于 $\lambda = 0$ 解能够在整个(a, b) 上唯一延拓这一假设，后来发现对于上述若干结果并非必要：文献 $T_{\min}^* = T_{\max}$ 证明了关系式 [5]在一般情形下仍然成立；文献 [20] 表明，即使方程 $Ju' + qu = \lambda wu$可能有无穷多个线性无关解，其亏指数仍然有限；而文献 [21] 大幅放宽了傅里叶展开存在性的假设条件。其他进展见文献 [14], [18], 和 [19] （振荡理论）；文献 [6] （弗洛凯理论）；以及文献 [4] （关于二维系统情形下的韦伊极限点／极限圆分类）。

据我们所知，最早允许系数比局部可积系数更一般的是克莱因 [16] ，他于1952年建立了振动弦模型。此后，[1] 卡茨 [15], 费勒 [9], 阿特金森 [2], 明加雷利 [17], 盖斯采和霍尔登 [11], 萨夫丘克和什卡利科夫 [23], 以及埃克哈特等人 [7]也作出了进一步贡献。

在第1.1节回顾并拓展关于微分方程（2 ）的一些基本事实之后，我们将在第 3 节讨论 Weyl 分类。它揭示了极小关系的亏指数与系数的行为之间的联系， q 以及 w 在端点附近的情形 a 和 b。第4 节将致力于以较为经典的方式表述边界条件，与 [13]中的抽象表述相比，这种表述更为具体。最后，我们将在第 $T_{\min}$ 节讨论克莱因-冯·诺伊曼扩张（当它是非负关系时）所满足的边界条件。第5节中，我们通过克莱因-冯·诺伊曼扩张与 Friedrichs扩张之间的关系来定义前者。由于在线性关系的背景下，其定义和主要性质尚不为人熟知，我们将在附录A中阐述我们对此问题的看法。

矩阵或向量 x 的转置记作 $x^\top$。特别地，为了排版，我们可以将 $\mathbb{C}^n$中的向量写成行向量的转置形式。用 $[u]$ 表示所有关于测度 w几乎处处相等于 u 的函数类。符号 $\mathbb{1}$ 表示恒等算子（在不同语境下），集合 E 的闭包记作 E。勒贝格测度和集中在点 k 上的狄拉克测度分别记作 dx 和 δ_k。

—

我们称 u 在 b 附近具有有限范数（或零范数），如果存在一个 $c \in (a, b)$，使得 $\int_{(c,b)} u^* wu < \infty$ （或 $\int_{(c,b)} u^* wu = 0$）。

我们需要区分四种集合和。给定某个向量空间 V 的子空间 A 和 B，我们用 $A \sqcup B$ 表示 $A \cup B$ 的张成空间；当 $A \cap B = \{0\}$ 时，则改用 $A \uplus B$，以强调该和是直和。若 V 是内积空间，且 A 与 B 彼此正交，我们将它们的

[1]当然，这个列表并不详尽，更多细节请参见 [7] 和 [13]。

直和记作 $A \oplus B$。最后，若 S 和 T 是关系，则 $S+T=\{(u,s+t):(u,s)\in S$，且 $(u,t)\in T\}$。

2. 预备知识

2.1. 微分方程。给定一个 0 阶分布 h，Riesz 表示定理给出唯一的正博雷尔测度 μ 和唯一的函数$g\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$，使得对于每个 $\psi\in C_0^\infty((a,b))$，都有 $h(\psi)=\int\psi g\mu$。反过来，对于任意这样的测度 μ 和函数 g，赋值 $\psi\mapsto\int\psi g\mu$ 定义了一个 0 阶分布。因此，0 阶分布与局部[2] 测度 $g\mu$之间存在一一对应关系。通常将 h 与 $g\mu$ 等同，并在这种情况下，当积分存在时记作 $h(E)=\int_E g\mu$。$h=g\mu$ 的任意累积分布函数 H 都是一个局部有界变差函数，它本身也能通过设定 $H(\psi)=\int H\psi\,dx$ 导出一个 0 阶分布（也记作 H）。H 的分布导数为 $H'=h$，由 H 生成的（局部）勒贝格–斯蒂尔杰斯测度为 $dH=g\mu$。

为了使微分方程有意义，我们要求 u 是局部有界变差函数[3]，从而 u' 是 0 阶分布。于是，乘积qu 定义为 $(qu)(\psi)=\int\psi u\,dQ$ 其中 Q 是 q的累积分布函数（或原函数）。为了定义 wf，我们首先注意到 w 是一个正的（矩阵值）测度。因此，若 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(w)$，我们可以定义 $(wf)(\psi)=\int\psi f\,dW$其中 W 是 w的累积分布函数（或原函数）。这些考虑[4] 表明，$Ju'+qu=wf$ 中的每一项都是 0 阶分布，因此提出该方程是有意义的。当然，同样的考虑也适用于方程 $Ju'+(q-\lambda w)u=wf$，其中 λ 是一个复参数。我们强调，随着方程 $Ju'+qu=wf$ 中的系数变得越发粗糙，解 u 也必须相应地变得粗糙。到某个程度，乘积 qu 和 wu将无法定义。当 q 或 w 比 0 阶分布更粗糙时，便会达到这一程度。

若测度 q 或 w 具有原子部分，则初值问题解的存在性与唯一性便成问题。为研究这一问题，我们需要引入一些记号。设 g 为局部有界变差函数。于是我们分别用 g^+ 和 g^-表示其右连续版本与左连续版本，即令$g^+(s)=\lim_{t\downarrow s}g(t)$以及 $g^-(s)=\lim_{t\uparrow s}g(s)$。我们还引入 $g^\#=(g^++g^-)/2$，并在 $g=g^\#$时称 g 为平衡的。我们用$\mathrm{BV}^\#\,\mathrm{loc}((a,b))^2$表示$(a,b)$上局部有界变差平衡函数的有序对空间。然后我们定义矩阵 $\Delta_q(x)=q(\{x\})=Q^+(x)-Q^-(x)$，$\Delta_w(x)=w(\{x\})=W^+(x)-W^-(x)$，以及

$$B_\pm(x,\lambda)=J\pm\frac{1}{2}(\Delta_q(x)-\lambda\Delta_w(x)).$$

我们汇集关于矩阵 $B_\pm(x,\lambda)$ 的最基本事实。

命题 2.1. 下列陈述成立：

(1) $B_\pm(x,\lambda)$ 和 $B_\pm(x,\lambda)$ 中只要有一个可逆，另一个也可逆。*(2)* $\ker B_-(x,\lambda)\cap\ker B_+(x,\lambda)$ 恒为平凡。*(3)* $B_+(x,\lambda)$ 和 $B_-(x,\lambda)$ 均不可能为 0。*(4)* $\operatorname{ran}B_-(x,\lambda)\cap\operatorname{ran}B_+(x,\lambda)$ 要么是平凡的，要么等于 $\mathbb{C}^2$。

---

[2] $g\mu$ 在(a,b)的每个紧子集上都是复测度。[3]事实上，我们要求 u 是平衡的，该术语将在下文定义。[4]更多细节，读者可参阅 [13]。

证明。由于 $B_+(x,\ \lambda) = -B_-(x,\ \lambda)^\top = -B_-(\overline{x},\ \lambda)^*$，我们得到第一个结论。为证明第二个结论，假设 $z \in \ker\ B_-(x,\ \lambda) \cap \ker\ B_+(x,\ \lambda)$。那么

$$0 = B_-(x,\lambda)z + B_+(x,\lambda)z = 2Jz$$

这意味着 $z = 0$。为证明 (3)，反设 $B_+(x,\ \lambda) = 0$。由 (2) 可得 $B_-(x,\ \lambda)$ 可逆。鉴于 (1)，这是不可能的。最后，若 $B_\pm(x,\ \lambda)$ 可逆，则它们的值域的交集就是整个 $\mathbb{C}^2$。否则，$\dim \operatorname{ran}\ B_\pm(x,\ \lambda) = \dim \ker\ B_\mp(x,\ \lambda) = 1$ 且

$$\operatorname{ran} B_-(x,\lambda) \cap \operatorname{ran} B_+(x,\lambda) = (\ker B_+(x,\overline{\lambda}))^\perp \cap (\ker B_-(x,\overline{\lambda}))^\perp = \{0\}. \qquad \square$$

做好这些准备后，我们现在可以陈述存在唯一性定理，其证明见 [13]。

定理 2.2。 假设假设 *1.1* 成立。此外，设 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(w), \lambda \in \mathbb{C}, (c,d) \subset (a,b),\ x_0 \in (c,d)$，且 $u_0 \in \mathbb{C}^2$。若对所有 $x \in (c,d)$，矩阵 $B_\pm(x,\lambda)$ 均可逆，则初值问题 $Ju' + (q - \lambda w)u = wf, u(x_0) = u_0$ 在 (c,d) 中有唯一的平衡解 u。

只要 q 和 w 在 c （或 d）附近是有限测度，我们就可以在 c （或 d）处设定初始条件，即使 c （或 d）是无穷的。

如果 q 和 w 在端点 a 或 b之一附近是有限测度，那么该端点称为正则；否则称为奇异。注意，即使端点是无穷的，它也可能是正则的。

我们要求解是平衡解，原因在于分部积分公式指出：

$$\int_{(c,d)} (u\,dv + v\,du) = (uv)^-(d) - (uv)^+(c) + (2\kappa - 1)\int_{(c,d)} (v^+ - v^-)du$$

只要 u 和 v 在区间（c，d）上是有界变差函数，并满足 $u = \kappa u^+ + (1-\kappa)u^-$ 和 $v = \kappa v^+ + (1-\kappa)v^-$，其中参数 κ固定。因此，当 $\kappa = 1/2$时，分部积分公式便具有其经典形式。

要使微分方程在单点 x 处成立，必要且充分的条件是 $Ju'(\{x\}) + (q(\{x\}) - \lambda w(\{x\}))u(x) = w(\{x\})f(x)$，或者等价地，

$$B_+(x,\lambda)u^+(x) - B_-(x,\lambda)u^-(x) = \Delta_w(x)f(x).$$

因此，若 $B_+(x,\lambda)$ 不可逆，则可能出现以下两种情形之一：(i) 可能无法将给定在 (a,x) 上的解延拓到 x 之外；或 (ii) 存在无穷多种方式将 (a,x) 上的解延拓到 x 之外。当然，若 $B_-(x,\lambda)$ 不可逆，类似的结论同样成立。

由于 Q 和 W 的各项都是局部有界变差的，因此它们至多有可数个（跳跃）间断点。称点 x 为连续点，若 Q 和 W 在此处都连续，即 $q(\{x\}) = w(\{x\}) = 0$。在区间 (a,b) 中，至多有可数个点 x 使得 $B_\pm(x,\lambda)$ 不可逆。由于 $\det\ B_-(x,\cdot)$ 是次数至多为 2 的多项式，除非它恒等于零，否则至多有两个零点。令 $\Lambda_x = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det\ B_\pm(x,\lambda) = 0\}$，且 $\Lambda = \bigcup_{x\in(a,b)} \Lambda_x$，由此可知 Λ 要么等于 $\mathbb{C}$，要么是可数集。在 (a,b) 中任一使 q 诱导出有限测度的子区间上，我们发现 $\sum_{k=1}^\infty \|\Delta_q(x_k)\|$ 必为有限，其中 $k \mapsto x_k$ 是该区间内由互不相同的点组成的序列。因此，$\Xi_0 = \{x \in (a,b) : \det\ B_\pm(x,0) = 0\}$ 是离散集。类似地可以证明，对于任意固定的复数 λ，集合 $\Xi_\lambda = \{x \in (a,b) :$

$\det B_\pm(x,\lambda) = 0\}$ 是离散的。特别地，Ξ_λ 中的点不会聚集到正则端点。需要强调的是，$\Xi = \bigcup_{\lambda\in\mathbb{C}} \Xi_\lambda$ 不一定是离散集。

如果对所有 $x \in (c,d)$，$B_\pm(x,\lambda)$ 都可逆，则定理 2.2 特别保证了 $Ju' + (q-\lambda w)u = 0$ 在 (c,d) 上存在一个基本矩阵 $U(\cdot,\lambda)$。利用 [13] 的引理 3.2，我们得到 $U^+(x,\lambda)^* J U^+(x,\lambda) = U^-(x,\lambda)^* J U^-(x,\lambda)$ 与 $x \in (c,d)$ 无关。特别地，若对某个点 $x_0 \in (c,d)$，$U^+(x_0,\lambda) = U^+(x_0,\lambda)$ 是一个辛矩阵，则可得到朗斯基关系

$$U^\pm(x,\overline{\lambda})^* J U^\pm(x,\lambda) = J. \tag{2.1}$$

下面陈述常数变易公式。

定理 2.3. *设 $(c,d) \subset (a,b)$ 是一个区间，且对所有 $x \in (c,d)$，$B_\pm(x,\lambda)$ 都可逆；设 x_0 是 (c,d) 中的一个连续点，并设 $u_0 \in \mathbb{C}^2$。假设 $U(\cdot,\lambda)$ 是 (c,d) 上的一个基本矩阵，且 $S = U(x_0,\lambda) = U(x_0,\lambda)$ 是一个辛矩阵。若 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(w)$，且函数 $u = u^\#$ 由下式给出*

$$u^-(x) = U^-(x,\lambda)\Big(u_0 + J^{-1}\int_{[x_0,x)} U(\cdot,\overline{\lambda})^* w f\Big) \quad \text{for } x \ge x_0 \tag{2.2}$$

and

$$u^+(x) = U^+(x,\lambda)\Big(u_0 - J^{-1}\int_{(x,x_0]} U(\cdot,\overline{\lambda})^* w f\Big) \quad \text{for } x \le x_0, \tag{2.3}$$

则这对 (u,f) 满足 $Ju' + (q-\lambda w)u = wf$，在 (c,d) 上，并且满足 $u(x_0) = S u_0$。

反之，若 u 是 $Ju' + (q-\lambda w)u = wf$ 在 (c,d) 上的平衡解，并且满足 $u(x_0) = S u_0$，那么 $u^\pm$ 满足 (2.2) 和 (2.3)。

证明。当 $S = U(x_0,\cdot) = \mathbb{1}$ 时，这由 [13] 中的引理 3.3 得证。一般情形可利用 $U(\cdot,\lambda)S^{-1}$ 是满足该引理假设的基本矩阵这一点，并注意到 $SJ^{-1}S^* = J^{-1}$。□

2.2. 线性关系。 我们将集合 $\mathcal{L}^2(w)$ 定义为所有取值于 $\mathbb{C}^2$ 的函数 f 在 (a,b) 上的集合，其中 $\int f^* w f$ 有意义且有限。需要强调的是，$\mathcal{L}^2(w)$ 是一个完备的半内积空间，其半内积为 $\langle f,g\rangle = \int f^* w g$ 但一般而言并非希尔伯特空间。相应地，由关于 w 几乎处处相等的函数构成的等价类所形成的希尔伯特空间记为 $L^2(w)$。注意，$L^2(w)$ 是 $L^1_{\mathrm{loc}}(w)$ 的子空间。

现在我们可以定义线性关系

$$\mathcal{T}_{\max} = \{(u,f) \in \mathcal{L}^2(w)\times\mathcal{L}^2(w) : u \in \mathrm{BV}^\#_{\mathrm{loc}}((a,b))^2, Ju' + qu = wf\}$$

and

$$\mathcal{T}_{\min} = \{(u,f) \in \mathcal{T}_{\max} : \operatorname{supp} u \text{ is compact in } (a,b)\}.$$

给定 $L^2(w)$ 中某个元素的两个代表元 f 和 f，我们有 $wf = w\tilde{f}$。因此，就方程右端而言，无需区分同一等价类的代表元。然而，$[u]$ 的两个平衡代表元 u 和 $\tilde{u}$，虽然都具有局部有界变差，却未必满足 $Ju' + qu = J\tilde{u}' + q\tilde{u}$；这就是我们强调区分 $\mathcal{L}^2(w)$ 与 $L^2(w)$ 的原因。例如，若 $q = 0$、$w = \mathbb{1}\delta_0$，且 $u(x) = -u(-x) = (\alpha,\ \beta)^\top$ 对于 $x > 0$ 成立，则 $[u] = 0$，但一般而言，$Ju' + qu = (-2\beta,\ 2\alpha)^\top \neq 0$。

---

[5] 回顾一下，如果 $S^* J S = J$，则称矩阵 $S \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ 为辛矩阵。矩阵 S 为辛矩阵，当且仅当 $S = \alpha R$，其中 α 是模为 1 的复数，且 R 是行列式为 1 的实矩阵。

将注意力限制在希尔伯特空间 $L^2(w) \times L^2(w)$ 上，我们现在定义关系

$$T_{\max} = \{([u],[f]) \in L^2(w) \times L^2(w) : (u,f) \in \mathcal{T}_{\max}\}$$

这称为与 $Ju' + qu = wf$ 相关的极大关系和极小关系

$$T_{\min} = \{([u],[f]) \in L^2(w) \times L^2(w) : (u,f) \in \mathcal{T}_{\min}\}.$$

在这里（以及其他地方），我们宁求简洁，不求精确：每当我们在 $T_{\max}$ 或 $T_{\min}$ 中有一对 $([u],[f])$ 时，都假定 u 是局部有界变差的平衡函数。

回顾一下，关系 $S \subset L^2(w) \times L^2(w)$ 的伴随 S^* 定义为

$$S^* = \{(v,g) \in L^2(w) \times L^2(w) : \forall (u,f) \in S : \langle g,u\rangle = \langle v,f\rangle\}.$$

文献 [5] 证明了 $T^*_{\min} = T_{\max}$ 这一结论当然是谱理论的基石。特别是，它表明 $T_{\min}$ 是一个对称关系。令 $\mathcal{D}_\lambda = \{(u,\lambda u) \in \mathcal{T}_{\max}\}$ 和 $D_\lambda = \{(u,\lambda u) \in T_{\max}\}$。那么，冯·诺依曼关系

$$T_{\max} = \overline{T_{\min}} \oplus D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}} \tag{2.4}$$

该结论成立。当 λ 不是实数时，空间 D_λ 称为亏空间。只要 λ 在上半平面或下半平面中变化，它们的维数就与 λ 无关。因此，定义亏指数 $n_\pm = \dim D_{\pm \mathrm{i}}$。

我们将频繁使用拉格朗日恒等式，因此先简要回顾其内容。若 (v,g) 和 (u,f) 属于 $\mathcal{T}_{\max}$，则 $v^*wf - g^*wu = v^*Ju' + v'^*Ju$ 是 (a,b) 上的有限测度。由分部积分可得

$$(v^*Ju)^-(d) - (v^*Ju)^+(c) = \int_{(c,d)} (v^*Ju' + v'^*Ju) = \int_{(c,d)} (v^*wf - g^*wu) \tag{2.5}$$

只要 $[c,d] \subset (a,b)$ 即成立。这意味着极限 $(v^*Ju)^-(b)$ 和 $(v^*Ju)^+(a)$ 均存在，且彼此独立。我们强调，当 (v,g) 或 (u,f) 被替换为其等价类中的其他平衡代表元时，这些极限可能发生变化。然而，它们的差值不会变化，因为

$$(v^*Ju)^-(b) - (v^*Ju)^+(a) = \langle v,f\rangle - \langle g,u\rangle \tag{2.6}$$

其中，右端仅取决于相应的等价类，而与代表元无关。方程 (2.5) 和 (2.6) 中的任一个都称为格林公式或拉格朗日恒等式。

由于 u 满足 $J\overline{u}' + q\overline{u} = \overline{\lambda} w \overline{u}$ 当且仅当 u 满足 $Ju' + qu = \lambda w u$，因此亏指数 n_+ 和 n_- 相同，故保证了 $T_{\max}$ 的自伴限制的存在性。在 [20] 中已证明，亏指数 $n_\pm$ 不超过 2，且 $T_{\max}$ 的自伴限制由边界条件给出。具体而言，若 (v_1,g_1) ..., $(v_{n_\pm},g_{n_\pm})$ 是 $D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}}$，中线性无关的元素，则定义 $n_\pm \times n_\pm$- 矩阵 G，其元素为

$$G_{\ell,k} = \langle (g_\ell, -v_\ell), (v_k, g_k)\rangle = (g_\ell^* J g_k)^-(b) - (g_\ell^* J g_k)^+(a).$$

若 $G = 0$，则

$$T = \{(u,f) \in T_{\max} : (g_j^* Ju)^-(b) - (g_j^* Ju)^+(a) = 0, j = 1, ..., n_\pm\} \tag{2.7}$$

是 $T_{\max}$的一个自伴限制。反过来，给定 T 的一个自伴限制$T_{\max}$，存在 $n_\pm$ 线性无关元素 (v_j,g_j) 属于 $D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}}$，使得相应的矩阵 G 等于 0，且 T 如方程（2.7）所示。由于 (v,g)

在 $D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}}$ 中意味着 $(g, -v)$ 也属于 $D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}}$，条件 $G = 0$ 表明 $(g_j, -v_j) \in T$对于 $j = 1, ..., n_{\pm}$，即，

$$T = \overline{T}_{\min} \oplus \operatorname{span}\{(g_1, -v_1), ..., (g_{n_{\pm}}, -v_{n_{\pm}})\}.$$

由于 $\langle (v_j, g_j), (v_j, g_j) \rangle \neq 0$ 不可能对所有 $(u, f) \in \mathcal{T}_{\max}$，使得 $(g_j^* Ju)^+(a)$ 和 $(g_j^* Ju)^-(b)$ 同时为零。因此有三种互斥情形：(1) 对所有 $(u, f) \in \mathcal{T}_{\max}$，$(g_j^* Ju)^+(a) = 0$；(2) 对所有 $(u, f) \in \mathcal{T}_{\max}$，$(g_j^* Ju)^-(b) = 0$；(3) 对某些 $(u, f) \in \mathcal{T}_{\max}$，$(g_j^* Ju)^+(a)$ 和 $(g_j^* Ju)^-(b)$ 均不为零。[6] 相应地，边界条件有三种。若对每个 $j \in \{1, ..., n_{\pm}\}$，情形 (1) 或 (2) 均成立，则称为分离边界条件；若对每个 $j \in \{1, ..., n_{\pm}\}$，情形 (3) 均成立，则称为耦合边界条件；否则称为混合边界条件。我们稍后将看到，在目前的情形下不会出现混合边界条件。

在本文的主要部分中，我们偶尔会用到以下观察。如果 Λ 不是全平面，它就是一个可数集，因此存在一个不属于 Λ的实数 μ。我们定义 $\tilde{q} = q - \mu w$ 和 $\tilde{w} = w$，以及相应的$\tilde{}$关系 $\tilde{T}_{\max}$，等等。显然，我们有 $\tilde{\mathcal{T}}_{\max} = \mathcal{T}_{\max} - \mu \mathbb{1}$，即，

$$(u, f) \in \mathcal{T}_{\max} \Leftrightarrow (u, f - \mu u) \in \tilde{\mathcal{T}}_{\max}.$$

因此，对于 $\mathcal{T}_{\min}$、$T_{\max}$ 和 $T_{\min}$，也有类似的关系。但 $T_{\min}$呢？$\tilde{}$假设 $(u, \overline{f}) \in T_{\min} = T^*_{\text{最大值}}$，且 $(v, g) \in T_{\max}$。则 $(v, g + \mu v) \in T_{\max}$，并且由于 $\mu \in \mathbb{R}$，

$$\langle v, f - \mu u \rangle - \langle g, u \rangle = \langle v, f \rangle - \langle g + \mu v, u \rangle = 0.$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$但这意味着 $(u, f - \mu u) \in T^*_{\max} = \overline{T}_{\min}$。类似地，我们可以证明反方向的结论，因此有

$$(u, f) \in \overline{T_{\min}} \Leftrightarrow (u, f - \mu u) \in \overline{\tilde{T}_{\min}}. \tag{2.8}$$

2.3. 定性及其缺失。定义空间 $\mathcal{L}_0$ 为所有范数为 0 的$Ju' + qu = 0$ 解所构成的空间，即，

$$\mathcal{L}_0 = \{u \in \mathrm{BV}^{\#}_{\mathrm{loc}}((a, b))^2 : Ju' + qu = 0, \|u\| = 0\}.$$

注意，$\|u\| = 0$ 当且仅当 $wu = 0$。因此，如果 $u \in \mathcal{L}_0$，则对所有 $\lambda \in \mathbb{C}$，都有 $Ju' + qu = \lambda wu$。这意味着，除非 $\Lambda = \mathbb{C}$，否则 $\mathcal{L}_0$ 中不存在非平凡的紧支撑元素。

如果 $u_0 \in \mathcal{L}_0$且（u，f）$\in \mathcal{T}_{\max}$，那么（$u + u_0$，f）也属于 $\mathcal{T}_{\max}$，并且（$[u]$，$[f]$）$\tilde{}$与（$[u + u_0]$，$[f]$）在 $T_{\max}$中相同。反过来，如果（u，f）和（$\tilde{u}$，f）都是（$[u]$，$[f]$）的代表元，那么 $u - \tilde{u} \in \mathcal{L}_0$。如果 $\mathcal{L}_0$是平凡的，我们就称由 $Ju' + qu = wf$ 提出的问题为**定型**；否则称为**非定型**。

在定型情形下，二元组（$[u]$，$[f]$）中的等价类 $[u] \in T_{\max}$ 在 $\mathrm{BV}^{\#}{}_{\mathrm{loc}}((a, b))^2$ 中有唯一的代表元，满足 $Ju' + qu = wf$。在这种情况下，我们可以将$T_{\max}$ 与 $\mathcal{T}_{\max}$、$T_{\min}$ 与 $\mathcal{T}_{\min}$等同起来。

若 $\Lambda = \mathbb{C}$，第7节中的一个例子 [20], 表明 $\mathcal{L}_0$ 可能是无限维的。然而，若 $\Lambda \neq \mathbb{C}$ 且 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$，$Ju' + qu = \lambda wu$ 的所有解构成二维空间，而 $\mathcal{L}_0$ 至多是二维的。若 $\Lambda \neq \mathbb{C}$且 维数 $\mathcal{L}_0 = 2$，则必有 $w = 0$；此情形可忽略，因为 $L^2(w)$ 此时是平凡的。我们还有如下观察。

[6]此分类针对的是函数 g_j，而非其等价类。如果 $u_0 \in \mathcal{L}_0$，那么 g_j 和 $g_j + u_0$ 描述的是同一个边界。前者可能属于情形 (1)，而后者可能属于情形 (3)。

引理 2.4. 如果 $\Lambda \neq \mathbb{C}$ 且 $\mathcal{L}_0 \neq \{0\}$，那么 $\Lambda \subset \mathbb{R}$。

证明。用逆否命题来证明，假设存在 λ 和λ这两个 Λ和 $\Lambda \neq \mathbb{C}$的非实元素。于是存在一个 $x_- \in (a, b)$，使得 $\det B_+(x, \cdot)$的零点为 λ 和 λ。这意味着 $\Delta_w(x)$是正定的。若 μ 不属于 Λ，则 $Ju' + qu = \mu wu$ 具有二维解空间，且该方程的任一非平凡解 u 处处不为零。因此 $\|u\| \geq u(x)^* \Delta_w(x) u(x) > 0$，即 $Ju' + qu = \mu wu$ 的唯一范数为0的解是平凡解。因此 $\mathcal{L}_0$ 是平凡的。□

设 $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\Lambda$， $x_0 \in (a, b)$ 是一个连续点，而 $U(\cdot, \lambda)$ 是满足 $U(x_0, \lambda) = \mathbb{1}$ 的 $Ju' + qu = \lambda wu$ 的基本矩阵。定义

$$\mathbf{B}(\lambda) = \left\{ \int U(\cdot, \overline{\lambda})^* w f : f \in L^2(w), \operatorname{supp} f \text{ compact in } (a, b) \right\}.$$

设 $z \in \mathbb{C}^2$ 与 B(λ) 正交，即对于所有紧支撑函数 $f \in L^2(w)$，都有 $\int f^* wU(\cdot, \lambda) z = 0$。那么 $wU(\cdot, \lambda) z$ 是零测度，因此 $\|U(\cdot, \lambda) z\| = 0$。于是 $u_0 = U(\cdot, \lambda) z \in \mathcal{L}_0$。由于对于任意 $\lambda \in \mathbb{C}$， u_0 都是 $Ju' + qu = \lambda w u_0$ 的解，因此 $z = u_0(x_0)$ 与 λ 无关。因此 B 也与 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ 无关，接下来我们将省略其参数 λ。然而，我们强调，B 取决于基本矩阵 $U(\cdot, \lambda)$ 的选择。由于 $\mathbb{C}^2$ 是有限维的，至少对于固定的 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$，我们可以找到一个区间 $[c, d]$，其端点都是连续点，使得 $\mathbf{B} = \{\int U(\cdot, \lambda)^* w h : h \in L^2(w), \operatorname{supp} h \subset [c, d]\}$。

引理 2.5。设维数 $\mathcal{L}_0 = 0$ 且 $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\Lambda$。若 u 满足 $Ju' + qu = w(\lambda u + f)$，并且在 a 附近具有有限范数，则存在一个元素 $(v, \lambda v + g) \in \mathcal{T}_{\max}$，使得 $v = u$ 在 a 附近成立，且 $v = 0$ 在 b 附近成立。将a 和 b 的角色互换，也有类似结论。

证明。由于 $\dim \mathcal{L}_0 = 0$，我们有 $\mathbf{B} = \mathbb{C}^2$，因此存在一个支集包含于 $[c, d]$ 的 $h \in L^2(w)$，使得 $\int U(\cdot, \lambda)^* w h = -U(c, \lambda)^* J \overline{u}(c)$。现在令 $g = f$定义于 (a, c) 上， $g = h$ 定义于 (c, b) 上。定义 v 为初值问题的唯一解$Jv' + qv = w(\lambda v + g)$， $v(c) = u(c)$。于是 $v = u$ 在 (a, c) 上成立，并且当 $x \geq d$ 时，

$$(U(\cdot, \overline{\lambda})^* Jv)^-(x) = (U(\cdot, \overline{\lambda})^* Jv)^+(c) + \int_{(c,d)} U(\cdot, \overline{\lambda})^* w h = 0$$

根据拉格朗日恒等式 (2.5)。因此 $v = 0$ 在 (d, b)。 □

现在我们仔细考察 $\Lambda \neq \mathbb{C}$ （因此是可数的）且 $\mathcal{L}_0$ 为一维的情形。由此可得，$\mathbf{B}$ 也为一维。由于对于不属于 Λ 的实数 μ，基本矩阵 $U(\cdot, \mu)$ 的各项均为实数值，因此空间 $\mathbf{B}$ 由一个实单位向量 $e \in \mathbb{C}^2$ 张成。我们还定义了与 e 垂直的 $e^\perp = Je$。

假设 $g \in L^2(w)$ 和 v 满足 $Jv' + qv = w(\lambda v + g)$。对于适当的函数 α和 β，我们可以写成 $v = U(\cdot, \lambda)(\alpha e + \beta e^\perp)$，因为对于每个 $x \in (a, b)$， $U(x, \lambda)$ 的列都是线性无关的。根据方程 (2.1)，我们有$U(\cdot, \lambda)^* Jv = \alpha e^\perp - \beta e$。如果 s, t是连续点，并且 $s \leq t$拉格朗日恒等式

(2.5) 因此给出

$$(\alpha(t)-\alpha(s))e^{\perp}-(\beta(t)-\beta(s))e=U(t,\overline{\lambda})^{*}Jv(t)-U(s,\overline{\lambda})^{*}Jv(s)$$
$$=\int_{(s,t)}U(\cdot,\overline{\lambda})^{*}wg.$$

右端是$\mathbf{B}$ 中的一个元素，因此是 e的倍数。这意味着，在连续点 x 处， α 为常数，并且

$$\beta(x)=\begin{cases}\beta(x_0)+e^{*}\int_{(x,x_0)}U(\cdot,\overline{\lambda})^{*}wg & \text{if } x\le x_0,\\ \beta(x_0)-e^{*}\int_{(x_0,x)}U(\cdot,\overline{\lambda})^{*}wg & \text{if } x\ge x_0.\end{cases}\tag{2.9}$$

我们注意到， α 和 β 可能并非平衡的。特别是，如果 $\Delta_q(x)$或 $\Delta_w(x)$不为零，那么 $\alpha(x)$确实可能与 $\alpha(x_0)$不同。

引理 2.6. 设维数 $\mathcal{L}_0=1$且 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\Lambda$。若 u满足 $Ju'+qu=w(\lambda u+f)$，且在 a附近具有有限范数，则存在一个元素$(v,\lambda v+g)\in\mathcal{T}_{\max}$，使得 v在 a附近等于 u，并且在 b附近是 $U(\cdot,\lambda)e$的常数倍。交换 a 和 b 的角色，也有类似结论。

证明. 设 $g=f$在(a,c)上， $g=h$（稍后确定）在(c,b)上。令 v为初值问题 $Jv'+qv=w(\lambda v+g)$， $v(c)=u(c)$的解。则 $v=u$在(a,c)上。若 $h\in L^2(w)$的支集包含于 $[c,d]$中，且 $x\ge d$是一个连续点，则

$$U(x,\overline{\lambda})^{*}Jv(x)=\alpha e^{\perp}-\beta(c)e+\int_{(c,d)}U(\cdot,\overline{\lambda})^{*}wh$$

根据拉格朗日恒等式(2.5)。现在选择 h，使得$e^{*}\int_{(c,d)}U(\cdot,\lambda)^{*}wh=\beta(c)$。于是 $U(x,\lambda)^{*}Jv(x)=\alpha e^{\perp}$。由于根据方程(2.1)， $-U(x,\lambda)J$是 $U(x,\lambda)^{*}J$和 $-J^2=\mathbb{1}$的逆，这意味着在(d,b)上， $v(x)=\alpha U(x,\lambda)e$。□

现在我们证明关于 $T_{\min}$的一些基本事实。

引理 *2.7.* 设 *dim* $\mathcal{L}_0=1$和 $\Lambda\neq\mathbb{C}$。若 $\mu\in\mathbb{R}\setminus\Lambda$，$([u],[\mu u+f])\in T_{\min}$，且 x是一个连续点，则 $u(x)=\beta(x)U(x,\mu)e^{\perp}$，其中 β由 *(2.9)* 给出，但其中的 $\lambda=\mu$和 $g=f$。此外，极限

$$\lim_{x\uparrow b}e^{*}\int_{[x_0,x)}U(\cdot,\mu)^{*}wf\quad\text{and}\quad\lim_{x\downarrow a}e^{*}\int_{(x,x_0]}U(\cdot,\mu)^{*}wf\tag{2.10}$$

二者均存在。最后，$\int U(\cdot,\mu)^{*}wf=0$除非对于所有$(v,\mu v+g)\in\mathcal{T}_{\max}$，$e^{*}JU(x_0,\mu)^{*}Jv(x_0)=0$。

证明。当 x是连续点时，我们有 $u(x)=U(x,\mu)(\alpha e+\beta(x)e^{\perp})$其中$\alpha\in\mathbb{C}$且 β由（2.9）给出，但其中 $\lambda=\mu$且 $g=f$。

为证明第一个结论，我们将构造一个元素 $(v,\mu v+h)\in\mathcal{T}_{\max}$使得$0=(v^{*}Ju)^{-}(b)-(v^{*}Ju)^{+}(a)=-\alpha$。存在一个 $h\in L^2(w)$，其支集包含于 $[c,d]$，使得 $\int U(\cdot,\mu)^{*}wh=e$。令 $v=0$位于 c左侧，并借助常数变易公式 (2.2) 在其他地方定义它，取 $u_0=0$、$x_0=c$和$f=h$。于是 v满足 $Jv'+qv=w(\mu v+h)$，在 a附近 $v=0$，且在(d,b)上 $v=-U(\cdot,\mu)e^{\perp}$。因此在(d,b)上 $wv=0$，从而 $(v,\mu v+h)\in\mathcal{T}_{\max}$。拉格朗日恒等式 (2.6) 给出 $(v^{*}Ju)^{-}(b)=(v^{*}Ju)^{-}(b)-(v^{*}Ju)^{+}(a)=0$。但是，对于 $x\in(d,b)$，利用 (2.1) 可得，

$$(v^{*}Ju)(x)=e^{*}(\alpha e+\beta(x)e^{\perp})=-\alpha\|e\|^2.$$

因此， $\alpha = 0$ 如前所述。

为证明第二个结论，考虑任意元素 $(v,\ \mu v + g) \in \mathcal{T}_{\max}$。于是，当 x 是连续点时，对于某个数 γ 和某个函数 δ，有 $v(x) = U(x,\ \mu)(\gamma e + \delta(x)e^{\perp})$。现在我们得到

$$(v^*Ju)(x) = (\overline{\gamma}e^* + \overline{\delta(x)}e^{\perp *})U(x,\mu)^*JU(x,\mu)\beta(x)e^{\perp} = -\overline{\gamma}\beta(x) \tag{2.11}$$

在连续点处。拉格朗日恒等式 (2.5) 表明 $(v^*Ju)(x)$ 当 x 趋于 a 时也存在极限， b ，于是 (2.9) 表明 (2.10) 中的极限存在。

最后， (2.11) 意味着 $0 = (v^*Ju)^-(b) - (v^*Ju)^+(a) = \gamma \int_{(a,\ b)} U(\cdot,\ \mu)^* w f$，这证明了最后一个结论，因为 $\gamma = -e^*JU(x_0,\ \mu)^*Jv(x_0)$。 □

2.4. 极坏点。 如果矩阵 $B_{\pm}(x,\lambda)$ 对所有 $\lambda \in \mathbb{C}$ 都不可逆，我们就称点 $x \in (a,b)$ 为极坏点。这类点的存在使得后续许多证明都需要特别考虑。这里我们研究它们最基本的性质。

若 x 是极坏点，则对所有属于 $\mathbb{C}$ 的 λ ， $B_+(x,\lambda)$ 和 $B_-(x,\lambda)$ 的秩均为 1。特别地，此时存在向量 $\omega_{\pm} \in \mathbb{R}^2$ ，使得$B_+(x,0) = \omega_+\omega_-^*$ ，以及向量 B_-，使得$x(,0) = -\omega_-\omega_+^*$。向量 $\omega_{\pm}$ 线性无关，因为若存在某个 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $\omega_- = c\omega_+$ ，则会推出 $2J = B_+(x,0) + B_-(x,0) = 0$。

现在我们可以刻画极坏点。

引理 2.8。 以下命题等价:

(1) $\Lambda_x = \mathbb{C}$.(2) $0 \in \Lambda$ 且值域 $\Delta_w(x)$ 包含于值域 $B_+(x,0)$ 或包含于值域 $B_-(x,0)$。(3) 值域 $B_+(x,\lambda) \cap$ 值域 $B_-(x,\lambda) = \{0\}$ 对所有 $\lambda \in \mathbb{C}$均成立。

证明。首先证明 (1) 推出 (2)。由于 $\Lambda_x = \mathbb{C}$ (x,λ) 的行列式$B_{\pm}$不可能同时是次数为 2 的多项式，这意味着 $\Delta_w(x)$ 不可逆。因此我们可以假设，对于某个 $\omega \in \mathbb{C}^2$，有 $\Delta_w(x) = \omega\omega^*$。若 $\omega = 0$，则结论成立；所以现在假设 $\omega \neq 0$。任取一个非零复数 λ。那么我们知道 $B_{\pm}(x,\lambda)$ 的秩为 1。因此 $B_+(x,\lambda) = B_+(x,0) - \frac{\lambda}{2}\Delta_w(x)$ 有一个由向量 v 张成的非平凡核。由此可得 $2\omega_+(\omega_-^*v) = \lambda\omega(\omega^*v)$。若 $\omega^*v = 0$ ，我们也有 $\omega_-^*v = 0$ ，这证明 ω_- 与 ω 平行，即 $\operatorname{ran}\Delta_w(x) =$ 值域 $B_-(x,0)$。若 $\omega^*v \neq 0$，则可得 ω_+ 与 ω 平行，即 $\operatorname{ran}\Delta_w(x) =$ 值域 $B_+(x,0)$。第一步证明至此完成。

现在证明 (2) 蕴含 (3)。假设 $\operatorname{ran}\Delta_w(x) \subset \operatorname{ran} B_+(x,0) = \operatorname{span}\{\omega_+\}$，另一种情况可用类似方法处理。我们的假设是$\omega = c\omega_+$ 对于某个复数 c （可能为 0）。于是有 $B_-(x,\lambda) = -\omega_-\omega_+^* + \frac{\lambda}{2}\omega\omega^* = (\frac{1}{2}\lambda|c|^2\omega_+ - \omega_-)\omega_+^*$。因此，它的值域与 $B_+(x,\lambda)$ 的值域不一致。

(3) 蕴含 (1) 显然。 □

设给定了 (a,b)、 q 和 w ，以及相关关系 $\mathcal{T}_{\max}$ 和 $T_{\max}$。此外，令 $x_1 \in (a,b)$ 满足 $\operatorname{ran}\Delta_w(x_1) \subset \operatorname{ran} B_+(x_1,0) \neq \mathbb{C}^2$，因此 x_1 是一个严重坏点。若 $(u,f) \in \mathcal{T}_{\max}$，通过令 $u_0 = (u\chi_{(a,x_1)})^{\#}$ 和 $f_0 = f\chi_{(a,x_1)}$ 来定义 (u_0,f_0)，则 $(u_0,f_0) \in \mathcal{T}_{\max}$。类似地，若 $u_1 = (u\chi_{(x_1,b)})^{\#}$ 和 $f_1 = f\chi_{[x_1,b)}$，则 $(u_1,f_1) \in \mathcal{T}_{\max}$。此外，$([u_0],[f_0])$ 和 $([u_1],[f_1])$ 是 $T_{\max}$ 中的正交元素。为说明这一点，注意到

$$\langle([u_1],[f_1]),([u_0],[f_0])\rangle = u_1(x_1)^*\Delta_w(x_1)u_0(x_1) = \frac{1}{4}u^+(x_1)^*\Delta_w(x_1)u^-(x_1) = 0$$

其中最后一个等式成立，是因为 $u^-(x_1)\in$核 $B_-(x_1,\ 0)$ =(值域 $B_+(x_1,\ 0))^\perp$，因此 $\Delta_w(x_1)u^-(x_1)=0$。于是，定义

$$T_0=\{([(u\chi_{(a,x_1)})^\#],[f\chi_{(a,x_1)}]):(u,f)\in\mathcal{T}_{\max}\}$$

and

$$T_1=\{([(u\chi_{(x_1,b)})^\#],[f\chi_{[x_1,b)}]):(u,f)\in\mathcal{T}_{\max}\}$$

由此得到 $T_{\max}=T_0\oplus T_1$。注意，$\ker\ B_-(x_1,\ 0)\ \subset\ker\Delta_w(x_1)$。因此，令$v=(u\chi_{(a,x_1)})^\#$ 当 $u\in$属于定义域 $\mathcal{T}_{\max}$时，可知 $v_-(x_1)\in$属于核 $B_-(x_1,\ 0)$，从而$v(x_1)^*\Delta_w(x_1)v(x_1)=0$。因此，$T_0$ 与定义在 $(a,\ x_1)$ 上且满足边界条件 $u^-(x_1)\in$属于核 $B_-(x_1,\ 0)$ 的问题酉等价。

类似地，若 $\operatorname{ran}\Delta_w(x_1)\ \subset\operatorname{ran}\ B_-(x_1,\ 0)\ \neq\mathbb{C}^2$，则定义

$$T_0=\{([(u\chi_{(a,x_1)})^\#],[f\chi_{(a,x_1]}]):(u,f)\in\mathcal{T}_{\max}\}$$

and

$$T_1=\{([(u\chi_{(x_1,b)})^\#],[f\chi_{(x_1,b)}]):(u,f)\in\mathcal{T}_{\max}\}$$

并得到 $T_{\max}=T_0\oplus T_1$。这里，T_1 与定义在 $(x_1,\ b)$ 上且满足边界条件 $u^+(x_1)\in$属于核 $B_+(x_1,\ 0)$ 的问题酉等价。

如果 $\Delta_w(x_1)\ =0$ （且 $B_\pm(x_1,\ 0)$ 不可逆），那么上述两种分解均适用，即 T_0 和 T_1 都与定义在 $(a,\ b)$ 的适当子区间上并满足适当边界条件的问题酉等价。

3. Weyl 分类

本节的第一个结果是对 $T_{\min}$ 的闭包的刻画。

定理 3.1。极小关系 $T_{\min}$ 的闭包是所有 $([u],[f])\ \in T_{\max}$ 的集合，其中存在 $[u]$ 的一个平衡代表元 u_0，使得 $([u_0],[f])\ \in T_{\max}$ 并且

$$(v^*Ju_0)^-(b)=(v^*Ju_0)^+(a)=0$$

对所有 $(v,g)\ \in\mathcal{T}_{\max}$。

证明。如果 $([u_0],[f])\ \in T_{\max}$ 且 $(v^*Ju_0)^-(b)\ =(v^*Ju_0)^+(a)\ =0$ 对 (v,g) $2\mathcal{T}_{\max}$ 均成立，那么根据拉格朗日恒等式 (2.6)，$([u_0],[f])\ \in T^*\max\ =T_{\min}$。

为证明逆命题，设 $([u],[f])$ 和 (v,g) 分别是 $T_{\min}$ and$\mathcal{T}_{\max}$ 中的任意元素。再次利用拉格朗日恒等式，得到 $(v^*Ju)^-(b)=(v^*Ju)^+(a)$，因此我们必须证明，对于 u 的某个特定取值 $u_0\in[u]$，这些项中至少有一项为 0。

我们首先假设 $0\notin\Lambda$ 且 $\mathcal{L}_0=\{0\}$。根据引理 2.5，可以找到一个元素 (v_0,g_0) $\in\mathcal{T}_{\max}$，使得 $v_0=v$ 在 a 附近且 $v_0=0$ 在 b附近。因此

$$(v^*Ju)^+(a)=(v_0^*Ju)^+(a)-(v_0^*Ju)^-(b)=\langle g_0,u\rangle-\langle v_0,f\rangle=0.$$

这就证明了第一种情况下我们的断言。

接下来，我们假设 $\mathcal{L}_0\neq\{0\}$，但仍有 $0\notin\Lambda$。在这种情况下，引理 2.6 给出一个元素 $(v_0,g_0)\ \in\mathcal{T}_{\max}$，使得在 a 附近 $v_0=v$，并且在某个数 γ 的 b 附近 $v_0=\gamma U(\cdot,0)e$。此外，我们可以选择$[u]$的一个代表元。引理 2.7 表明，如果 x 是一个连续点，则 $u(x)$ $=\beta(x)U(x,0)e^\perp$。这里，$\beta(x)\ =\beta(x_0)-e^*\int_{[x_0,x)}U(\cdot,0)^*wf$ 在 x 趋于 b 时有极限。由于 $\mathcal{L}_0$ 的元素都是 $U(\cdot,0)e^\perp$ 的倍数，我们可以选择一个代表元 u_0，它属于 $[u]$

使得 $\lim_{x\uparrow b}\beta(x) = 0$，也就是说，对于连续点，我们可以假设 $u_0(x) = \beta(x)U(x,0)e^{\perp}$，其中 $\beta(x) = e^* \int_{(x,\ b)} U(\cdot,\ 0)^* w f$。由此可得

$$(v_0^* J u_0)(x) = \overline{\gamma}\beta(x) e^* U(x,0)^* J U(x,0) e^{\perp} = -\overline{\gamma}\beta(x)$$

因此 $(v_0^* J u_0)^-(b) = 0$。于是

$$(v^* J u_0)^+(a) = (v_0^* J u_0)^+(a) - (v_0^* J u_0)^-(b) = \langle g_0, u_0\rangle - \langle v_0, f\rangle = 0$$

所需的结论。

接下来考虑 0 属于 Λ 但 Λ 并非整个复平面的情形。在这种情况下，Λ 是可数集，因此存在不属于 Λ的实数。设 μ是任意这样的数，定义 $\tilde{q} = q - \mu w$ 和 $\tilde{w} = w$，并用带有 a˜重音符号的记号表示与这些新系数˜ ˜相关的对象。注意到 $0 \notin \Lambda$ 且 $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{0}$。由于，˜根据 (2.8)，$([u],\ [f - \mu u]) \in T_{\min}$，由我们已经证明的结果可知，存在一个$u_0 \in [u]$ 使得 $(\tilde{v}^* J u_0)^+(a) = 0$，只要 $(\tilde{v},\ \tilde{g}) \in \tilde{\mathcal{T}}_{\max}$。特别地，我们可以选取 $\tilde{v} = v$ 和 $\tilde{g} = g - \mu v$，从而得到 $(v^* J u_0)^+(a) = 0$。

现在还需考虑 $\Lambda = \mathbb{C}$ 的情形。设 x_1 是一个严重坏点，满足 $\operatorname{ran}\Delta_w(x_1) \subset \operatorname{ran} B_+(x_1, 0)$。若 $(v,g) \in \mathcal{T}_{\max}$，则必有 $v^-(x_1) 2 \ker B_-(x_1,0)$。在 x_1 的右侧，我们可以继续将 v 和 g 置为 0，同时仍得到 $\mathcal{T}_{\max}$ 中的一个元素。因此，如前所述，可以证明 $(v^* J u)^+(a) = 0$。若 $\operatorname{ran}\Delta_w(x_1) \subset \operatorname{ran} B_-(x_1, 0)$，则将 (v,g) 在 x_1 的左侧作修改，因此可以证明 $(v^* J u)^-(b) = 0$。□

下面的引理概述了当解的存在性和唯一性无法得到保证时会出现的情况。

引理 3.2. 设 $\lambda \in \Lambda$ 和 $x_1, x_2 \in \Xi_\lambda$，其中 $x_1 \le x_2$。若 v 是 $Ju' + qu = \lambda w u$ 的一个解，则 $(v\chi_{(a,x_1)})^{\#}$、$(v\chi_{(x_2,b)})^{\#}$ 和 $(v\chi_{(x_1,x_2)})^{\#}$ 也都是解。若 λ 不是实数，则 $(v\chi_{(x_1,x_2)})^{\#} \in \mathcal{L}_0$；若 Λ_{x_1} 和 Λ_{x_2} 中至少一个不同于 $\mathbb{C}$，则甚至有 $v\chi_{(x_1,x_2)} = 0$。

证明。根据命题2.1 的第（4）条，我们有 $B_+(x_1,\lambda)u^+(x_1) = B_-(x_2,\lambda)u^-(x_2) = 0$。因此，$\tilde{v} = (v\chi_{(x_1,x_2)})^{\#}$ 也是 $Ju' + qu = \lambda w u$ 的一个解。对于 $(v\chi_{(a,x_1)})^{\#}$ 和 $(v\chi_{(x_2,b)})^{\#}$，同理。

由于 $\tilde{v}$ 属于 $\mathcal{L}^2(w)$，我们有 $([\tilde{v}], \lambda[\tilde{v}]) \in T_{\min}$。但是 $\overline{T_{\min}}$不可能有非实数特征值，因此 $\tilde{v} \in \mathcal{L}_0$，如果 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$。

现在假设 $\Lambda_{x_1} \ne \mathbb{C}$ 并选取 $\nu \in \mathbb{C} \setminus \Lambda_{x_1}$。那么在 (a,b) 中也满足 $J\tilde{v}' + q\tilde{v} = \nu w \tilde{v}$。由于 $Ju' + qu = \nu w u$ 的初值问题有唯一解，且 $\tilde{v}$ 在 x_1 左侧恒为零，因此 $\tilde{v}$ 恒等于 0。当然，当 $\Lambda_{x_2} \ne \mathbb{C}$ 时，同样的论证也适用。□

当 λ 不是实数时，$Ju' + qu = \lambda w u$ 的紧支撑解必须属于 $\mathcal{L}_0$；但如下例所示，当 λ 为实数时，此类解可能具有正范数。设 $(a,\ b) = (0,\ \infty)$，且

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)\delta_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{smallmatrix}\right)\delta_{2n} \quad \text{and} \quad w = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\delta_{2n-1}.$$

于是 $B_+(2n-1,\ 1) = B_-(2n,\ 1)$ 且 $B_+(2n,\ 1) = B_-(2n+1,\ 1)$，并且这些关系均不可逆。因此，任意区间 $(n,\ n+1)$、$n \in \mathbb{N}$ 都可以支持 $Ju' + qu = wu$ 的一个紧支撑解，该解具有正范数；consequently，1 是 $T_{\min}$ 的一个具有无限重数的特征值。

在继续之前，我们需要先介绍一些约定。如果 Ξ_λ 不在端点 b处聚积，则存在一个不与 Ξ_λ 相交且具有正则端点 $\check{a}$的末区间 $(\check{a},b)$。当 $\Xi_\lambda\neq\emptyset$时，我们可以取 $\check{a}=\max\Xi_\lambda$；否则可取区间 (a,b) 中的任意点 $\check{a}\in$。设 $\check{q}$ 和 $\check{w}$ 分别为 q 和 w 在区间 $(\check{a},b)$ 上的限制，并用带有 $\check{}$上标的记号表示与这些新系数相关的相应关系及其他对象。特别地，令 $\check{\mathcal{D}}_\lambda=\{(r,\lambda r)\in\check{\mathcal{T}}_{\max}\}$。由下述引理 3.3 可知，只要 $\lambda\notin\mathbb{R}$，$\check{\mathcal{D}}_\lambda$ 至少是一维的。此外，在引理 3.4 中，我们将证明$\check{}$：仅当对于所有非实 λ均如此时，$\mathcal{D}_\lambda$ 才能针对某个非实 λ 被定义且为二维。当然，如果 Ξ_λ 不在 a 处聚积，情况也是类似的；此时存在一个不$\check{}$与 Ξ_λ 相交且具有正则端点 b的初区间 $(a,\check{b})$。

引理 3.3. 设 $\Lambda\neq\mathbb{C}$，a 是一个正则端点，且 λ 不属于 $\mathbb{R}$。那么在 $\mathcal{L}^2(w)$ 中，$Ju'+qu=\lambda wu$ 存在非平凡解。当 b 是一个正则点时，该结论也成立。

证明。显然，我们可以假设 $\mathcal{L}_0=\{0\}$，从而 $\mathsf{B}=\mathbb{C}^2$。我们还知道 Λ 至多可数，因此其补集中包含一个实数 μ。令 $U(\cdot,\mu)$ 为 $Ju'+qu=\mu wu$ 的一个基本矩阵，使得 $U(x_0,\mu)=\mathbb{1}$ 对某个 $x_0\in(a,b)$ 成立。引理 2.5 给出 $\mathcal{T}_{\max}$ 中的元素 $(u,f+\mu u)$ 和 $(v,g+\mu v)$，使得 $u(a)=(1,0)^\top$，$v(a)=(0,1)^\top$，并且 $u(x)=v(x)=0$ 在 b 附近。

现在假设 $T_{\min}$ 的亏指数为 0，这意味着 $T_{\max}$ 是自伴的。由于 $(u,\mu u+f)$ 和 $(v,\mu v+g)$ 属于 $\mathcal{T}_{\max}$，由拉格朗日恒等式 (2.6) 可得出荒谬的结论：$0=\langle v,\mu u+f\rangle-\langle\mu v+g,u\rangle=v(a)^*Ju(a)=1$。因此，亏空间 $D_\pm(\lambda)$、$\lambda\notin\mathbb{R}$ 不可能是平凡的。于是，在 (a,b) 上存在 $Ju'+qu=\lambda wu$ 的一个解，且 $\|u\|<\infty$。当然，交换 a 和 b 的角色也能得到类似的论证。□

引理 3.4. 假设 a 是正则端点，并且对于某个 $\lambda_0\in\mathbb{C}\setminus\Lambda$，有维数 $\mathcal{D}_{\lambda_0}=2$。那么，对于任意 $\lambda\in\mathbb{C}$，$Ju'+qu=\lambda wu$ 的任意解都属于 $\mathcal{L}^2(w)$。此外，如果 λ 不是实数，那么 Ξ_λ 不会在 b 处聚集，并且 维数 $\mathcal{D}_\lambda=2$。同样，交换 a 和 b 的角色后，结论仍然成立。

证明。我们通过令 $\|u\|_{c,d}=\int_{(c,d)}u^*wu$ 来定义范数 $\|u\|_{c,d}$，其中 c 和 d 是连续点。令 $U(\cdot,\lambda_0)$ 为满足 $U(a,\lambda_0)=\mathbb{1}$ 的 $Ju'+qu=\lambda_0wu$ 的基本矩阵，并分别用 ϕ 和 ψ 表示 $U(\cdot,\lambda_0)$ 的第一列和第二列。这些都是 $\mathcal{L}^2(w)$ 的元素，因此我们可以选取 c，使得对于所有 $d\in(c,b)$，$\|\phi\|_{c,d}$ 和 $\|\psi\|_{c,d}$ 均小于 $M=1/(2\sqrt{|\lambda-\lambda_0|})$。

现在设 u 满足 $Ju'+qu=\lambda wu$ 或者等价地，$Ju'+(q-\lambda_0w)u=(\lambda-\lambda_0)wu$。于是，根据常数变易公式（定理 2.3），存在一个向量 $(\alpha,\beta)^\top\in\mathbb{C}^2$ 使得

$$u(x)=U(x,\lambda_0)\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right)+(\lambda-\lambda_0)J^{-1}\int_{(c,x)}U(\cdot,\overline{\lambda_0})^*wu\Big)$$

每当 $x\geq c$ 是连续点时。由于 $U(\cdot,\lambda_0)^*=(\phi,\psi)^*$，我们引入$\gamma(x)=\int_{(c,x)}\phi^*wu$ 和 $\delta(x)=\int_{(c,x)}\psi^*wu$。然后柯西 - 施瓦茨不等式表明，$|\gamma(x)|\leq M\|u\|_{c,d}$ 且 $|\delta(x)|\leq M\|u\|_{c,d}$，每当 $x\in(c,d)$时。接下来我们

由闵可夫斯基不等式得到

$$\|u\|_{c,d} \leq (|\alpha| + |\lambda - \lambda_0|M\|u\|_{c,d})M + (|\beta| + |\lambda - \lambda_0|M\|u\|_{c,d})M.$$

根据我们对 M 的定义，这就得到

$$\|u\|_{c,d} \leq 2(|\alpha| + |\beta|)M.$$

由于右端与 d 无关，这意味着 $u \in \mathcal{L}^2(w)$。

我们现在已经证明，只要 $\lambda \notin \Lambda$，就有 $\dim \mathcal{D}_\lambda = 2$。特别地，$n_\pm = 2 - \dim \mathcal{L}_0$。如果 $\mathcal{L}_0$ 并非平凡，引理 2.4 表明 $\Lambda \subset \mathbb{R}$，即 $\dim \mathcal{D}_\lambda = 2$，且对于所有非实数 λ，都有 $\Xi_\lambda = \emptyset$。另一方面，如果 $\mathcal{L}_0 = \{0\}$，则有 $n_\pm = 2$，因此对于所有非实数 λ，$Ju' + qu = \lambda wu$ 存在两个有限范数的线性无关解，即使 $\lambda \in \Lambda \setminus \mathbb{R}$ 也如此。剩下唯一需要证明的是，当 $\lambda \in \Lambda \setminus \mathbb{R}$ 时，Ξ_λ 不会在 b 处聚集。若确实如此，引理 3.2 将表明，$Ju' + qu = \lambda wu$ 的任意解在 $(\min \Xi_\lambda, b)$ 上均为零，这将导致 $\dim \mathcal{D}_\lambda < 2$，与假设矛盾。□

对于某些类型的端点，无论 u 和 v 属于定义域 $\mathcal{T}_{\max}$，当 x 趋近该端点时，量 $(v^* Ju)(x)$ 都趋于 0。因此，无法在这类端点处提出边界条件，或者说，在此处提出边界条件毫无意义。正如我们将在下文证明的，若对于某个非实数 λ，Ξ_λ 在 b 处聚集，或空间 $\mathcal{D}_\lambda$ 是一维的，则端点 b 会出现这种情况。在这种情况下，我们称端点 b 处于极限点情形，或简称 b 为极限点。否则，我们称端点 b 处于极限圆情形，或称 b 为极限圆。引理 3.4（由于我们可以对某个 $c \in (a, b)$，考虑区间 (a, c) 或区间 (c, b)，故该引理适用）表明，判断一个端点是极限点还是极限圆，并不取决于所选用的非实数 λ。这种术语可追溯至 Weyl 1910 年的著名论文 [25], ，但我们提醒读者，其字面含义仅适用于 λ，此时 Ξ_λ 为空。在 [4] 中，Weyl 的观点得到了进一步探讨（甚至允许系数 q 和 w 为复数）。当然，对于 a，我们也有类似的二分情形；对于任何给定的问题，a 处要么是极限点情形，要么是极限圆情形。注意，正则端点属于极限圆情形。

定理 3.5. 如果我们在 b 处和 $([v], [g]) \in T_{\max}$有极限点情形，那么对于所有 $([u], [f]) \in T_{\max}$，都存在 $[u]$ 的一个平衡代表元 u_0，使得$([u_0], [f]) \in T_{\max}$ 且 $(v^* Ju_0)^-(b) = 0$。在 a处为极限点情形时，也有类似结论。

证明。首先考虑 Ξ_{i} 以 b为聚点的情形，令 $c = \inf \Xi_{\mathrm{i}}$，并考虑 $Ju' + qu = \mathrm{i}wu$的一个解 r。由引理 3.2 可知，$(r\chi_{(c,b)})^\#$ 属于 $\mathcal{L}_0$。若 $a < c$，则必有 $B_-(c, \mathrm{i})r^-(c) = 0$，从而在 (a, c) 上只允许一个线性无关解。因此，若 r 具有有限正范数，则有 $n_+ = 1$。否则，或当 $a = c$时，我们有 $n_+ = 0$。若 $n_\pm = 0$，则我们的断言由定理 3.1 得出。因此现在可以假设 $n_\pm = 1$，从而 D_{i} 与 $D_{-\mathrm{i}}$ 是一维的。设 $([r], \mathrm{i}[r])$ 为 D_{i}的一个基向量，则 $([r], -\mathrm{i}[r])$ 为 $D_{-\mathrm{i}}$的一个基向量，并且我们可以假设 $r = 0$ 在 (c, b) 上。因此，利用冯·诺依曼关系 (2.4)，存在$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$一对 $(\tilde{u}, f) \in \mathcal{T}_{\max}$，使得 $([\tilde{u}], [f]) \in T_{\min}$且

$$(u, f) = (\tilde{u} + \alpha r + \beta \overline{r}, \tilde{f} + \alpha \mathrm{i} r - \beta \mathrm{i} \overline{r})$$

其中 α 与 β 是适当的数。由定理 3.1，存在平衡函数 $\tilde{u}_0$，使得 $\tilde{u}-\tilde{u}_0=\ell_0\in\mathcal{L}_0$ 且 $(v^*J\tilde{u}_0)^-(b)=0$。令 $u_0=u-\ell_0$。则 $[u_0],[f]\in T_{\max}$ 且 $(v^*Ju_0)^-(b)=(v^*J\tilde{u}_0)^-(b)=0$。

接下来考虑 Ξ_{i} 不会在 b处聚集的情形。令 $\check{a}=\max\Xi_{\mathrm{i}}$，或者若 $\Xi_{\mathrm{i}}=\emptyset$，取 (a,b) 中的任意一点。分别将 (v,g) 和 (u,f) 限制到 $(\check{a},b)$，记为 $(\check{v},\check{g})$ 和 $(\check{u},\check{f})$。显然，我们有 $(v^*Ju)^-(b)=(\check{v}^*J\check{u})^-(b)$，现在考虑 $(\check{a},b)$ 上的问题。由于 $\check{\mathcal{D}}_{\mathrm{i}}=\{r:(r,\mathrm{i}r)\in\check{\mathcal{T}}_{\max}\}$ 是一维的，因此 $\check{n}_\pm$ 只能为 0 或 1。在前一种情形下，定义域 $\overline{\mathrm{dom}\,\check{\mathcal{D}}_{\mathrm{i}}}=\mathcal{L}_0$，$T_{\max}=T_{\min}$，结论由定理 3.1 得出。后一种情形，即 $\check{\mathcal{L}}_0=\{0\}$，因而 $\check{\mathsf{B}}=\mathbb{C}^2$，则需要进一步讨论。取 $\mu\in\mathbb{R}\setminus\check{\Lambda}$，并令 r_1 和 r_2 为 $Ju'+\check{q}u=\mu\check{w}u$ 的解，满足初始条件 $r_1^+(\check{a})=(1,0)^\top$ 和 $r_2^+(\check{a})=(0,1)^\top$。由引理 2.5，存在元素 $(\tilde{r}_j,\tilde{h}_j)\in\check{\mathcal{T}}_{\max}$，$j=1,2$，使得 $\tilde{r}_j=r_j$ 在 $\check{a}$ 附近成立，且 $\tilde{r}_j=0$ 在 b附近成立。由于 $\tilde{(}\tilde{r}_2^*J\tilde{r}_1)^+(\check{a})=1$，定理 3.1 表明 $([\tilde{r}_1],[h_1])$ 和 $([\tilde{r}_2],[h_2])$ 均不属于$\check{T}_{\min}$。因此，根据冯·诺依曼关系 (2.4)

$$(\check{u},\check{f})=(\tilde{u}+\alpha\tilde{r}_1+\beta\tilde{r}_2,\tilde{f}+\alpha\tilde{h}_1+\beta\tilde{h}_2)$$

其中 $([\tilde{u}],[\tilde{f}])\in\check{T}_{\min}$。引理 2.5 也用于寻找一个元素 $(\tilde{v},\tilde{g})\in\check{\mathcal{T}}_{\max}$使得 $\tilde{v}=0$ 在 $\check{a}$ 附近，且 $\tilde{v}=\check{v}=v$ 在 b附近。然后，利用拉格朗日恒等式（2.6），

$$(v^*Ju)^-(b)=(\check{v}^*J\check{u})^-(b)=(\tilde{v}^*J\tilde{u})^-(b)-(\tilde{v}^*J\tilde{u})^+(a)=\langle\tilde{v},\tilde{f}\rangle-\langle\tilde{g},\tilde{u}\rangle=0.\quad\square$$

现在，我们利用收集到的所有信息，在各种情形下考察 Weyl 分类。

3.1. **定定情形，不存在极坏点**。这里我们得到一个三分法，其形式与经典情形相同。

定理 3.6。假设 $\Lambda\neq\mathbb{C}$ 和 $\mathcal{L}_0=\{0\}$。那么，以下陈述成立。

(1) $n_+=n_-=0$ 当且仅当在 a 和 b两端均为极限点情形。在这种情况下，$T_{\max}$ 是自伴的。(2) $n_+=n_-=1$ 当且仅当在 a 和 b中的一端为极限点情形，而另一端为极限圆情形。通过在极限圆端施加分离边界条件，可得到自伴限制。(3) $n_+=n_-=2$ 当且仅当在 a 和 b两端均为极限圆情形。

证明。假设在 a 和 b处均为极限点情形。于是定理 3.5和 3.1 给出 $T_{\min}=T_{\max}$。因此 $T_{\max}$ 是自伴的，且$T_{\min}$ 的亏指数为零。反之，如果 a 和 b 中至少有一个是极限圆情形，并且由于 $\mathcal{L}_0$ 是平凡的，对引理 3.3 作略微修改可得 $n_\pm>0$。这就证明了（1）。

现在假设在 a 和 b处均为极限圆情形。那么，$Ju'+qu=\pm\mathrm{i}wu$ 的每个解都属于 $\mathcal{L}^2(w)$，即 $n_\pm=2$。反之，如果a 和 b 中至少有一个是极限点情形，则必有 $n_\pm<2$。这就证明了（ 3 ），从而也证明了（ 2 ）的第一条陈述。

对于 (2) 的第二个陈述，假设边界条件由 $(v,g)\in D_{\mathrm{i}}\oplus D_{-\mathrm{i}}$ 给出，并假设 a 为极限圆且 b 为极限点（另一种情形可类似处理）。由于 $(g,-v)$ 也属于 $D_{\mathrm{i}}\oplus D_{-\mathrm{i}}$，定理 3.5 给出 $(g^*Ju)^-(b)=0$，对任意 $(u,f)\in T_{\max}$ 成立，从而所提出的边界条件为 $(g^*Ju)^+(a)=0$。$\square$

3.2. 非定定情形，不存在极坏点。 我们先前的考虑立即给出如下结果。

定理 3.7. 假设 $\Lambda \neq \mathbb{C}$ 且 维数 $\mathcal{L}_0 = 1$。那么，当且仅当在 a 或 b 处属于极限点情形时，$n_+ = n_- = 0$ 成立；当且仅当在 a 和 b处均属于极限圆情形时，$n_+ = n_- = 1$ 成立。

在 [13] 的定理 7.3 中证明了，当 $\dim \mathcal{L}_0 = 1$ 时，$T_{\max} = \{0\} \times L^2(w)$；对于所有 $x \in (a,b)$，均有 $\ker \Delta_w(x) \subset \ker \Delta_w(x) J^{-1} \Delta_q(x)$。特别是，当 w 为连续测度时会出现这种情况；但如果 $\Delta_w(x)$ 在不等于 0 时可逆，也会如此。然而，如果对于某个 $x \in (a,b)$，$\Delta_w(x)$ 的秩为 1，则情况可能不同。例如，在 $(a,b) = (0,1)$,$J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \delta_k$ 且 $w = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k$ 的例子中即可看出这一点。在这种情况下，$T_{\max}$ 实际上是一个自伴无限维算子。

3.3. 存在极坏点。 如果在 a 和 b 处都属于极限点情形，那么仍有 $n_+ = n_- = 0$，且 $T_{\max}$ 是自伴的。然而，如果仅在一个端点处属于极限点情形，而另一个端点处不是，我们只能得出 $n_\pm \leq 1$。同样，仅知道两个端点都属于极限圆情形，并不能确定亏指数。所需的额外信息涉及 $\mathcal{L}_0$ 的结构。

假设 a 是极限圆端点，b 是极限点端点。那么存在一个最小的严重坏点，记作 x_1。取一个非实数 λ，使得对于所有 $x \in$，$B_\pm(x,\lambda)$ 都是可逆的（请回忆，除可数多个非实数 λ 外，其余均满足这一条件），并令 v_0 为方程 $Ju' + qu = \lambda w u$ 的一个非平凡解，该解满足边界条件$B_-(x_1,\lambda)u^-(x_1) = 0$，且在 (x_1,b) 上为零。如果 $(u,\lambda u) \in \mathcal{T}_{\max}$，令 $u_0 = (u\chi_{(a,x_1)})^\#$ 和 $u_1 = (u\chi_{(x_1,b)})^\#$。利用 $u_1 = 0$ 在 a 附近这一事实，定理 3.5 和定理 3.1 表明 $([u_1], \lambda[u_1]) \in T_{\min}$。由于 λ 不可能是 $T_{\min}$ 的特征值，因此有 $u_1 \in \mathcal{L}_0$。所以 $\|u\| \neq 0$ 当且仅当 $\|u_0\| \neq 0$。但是 u_0 是 v_0 的常数倍。因此，如果 v_0 的范数为 0，那么 $\operatorname{dom} \mathcal{D}_\lambda \subset \mathcal{L}_0$, D_λ 是平凡的，且 $n_\pm = 0$。反之，如果 v_0 的范数为正，那么 $n_\pm = 1$。

当 b 是极限圆端点且严重坏点在 a 处聚集时，情况类似。

最后，如果 a 和 b 都是极限圆端点，我们分别用 x_1 和 x_N 表示最小和最大的严重坏点。与前面一样，我们选取 $Ju' + qu = \lambda w u$ 的一个非平凡解 v_0，使其在 (x_1,b) 上为零，并满足边界条件 $B_-(x_1,\lambda)u^-(x_1) = 0$。类似地，$v_N$ 是 $Ju' + qu = \lambda w u$ 的一个非平凡解，在 (a,x_N) 上为零，并满足边界条件 $B_+(x_N,\lambda)$ $u^+(x_N) = 0$。现在我们有如下三分法：

(1) $n_\pm = 2$ 当且仅当 v_0 和 v_N 都有正范数。(2) $n_\pm = 1$ 当且仅当 v_0 和 v_N 中恰有一个有正范数（另一个的范数为 0）。(3) $n_\pm = 0$ 当且仅当 v_0 和 v_N 的范数都为 0。

例子表明，这些情况实际上都可能发生。

4. 边界条件

当 $n_\pm = 0$ 关系 $T_{\max}$ 是自伴时，无需（也不能）施加边界条件。然而，如果 $n_\pm > 0$ 关系 $T_{\max}$ 有无穷多个

由第 2.2 节所述边界条件确定的不同自伴限制： $T_{\max}$ 的任意自伴限制均由满足 $(g_j^* J g_k)^-(b) - (g_j^* J g_k)^+(a) = 0$, $j,k = 1, ..., n_\pm$ 的 $n_\pm$ 线性无关元素 (v_1, g_1) ..., $(v_{n_\pm}, g_{n_\pm})$ 确定。反之，若这些条件成立，则

$$T = \{([u],[f]) \in T_{\max} : \forall j = 1, ..., n_\pm : (g_j^* J u)^-(b) - (g_j^* J u)^+(a) = 0\}$$

是 $T_{\max}$ 的一个自伴限制。本节旨在给出边界条件的一种更经典的表示。

若 a 是一个极限圆端点，则极坏点不会在 a 处聚集。因此，存在一个实数 μ 和一个区间 $(a, \breve{b})$，使得对所有 $x \in (a, \breve{b})$， $B_\pm(x, \mu)$ 都可逆。对于定义在此区间上的方程 $Ju' + qu = \mu w u$，我们选取一个平衡基本矩阵 $U_\ell(\cdot, \mu)$，它在 $(a, \breve{b})$ 内某个连续点处是辛的（因而在所有此类点处都是辛的）。对于 $u \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max}$ 和 $x \in (a, \breve{b})$，现定义 $\overleftarrow{u}(x) = U_\ell(x, \mu)^* J u(x)$。由于 a 是极限圆端点，根据拉格朗日恒等式 (2.5)， $\overleftarrow{u}(a) = \lim_{x \downarrow a} \overleftarrow{u}(x)$ 存在。类似地，若 b 是极限圆端点，则在某个区间 $(\breve{a}, b)$ 上，我们有一个在连续点处为辛的平衡基本矩阵 $U_r(\cdot, \mu)$，利用它，我们对任意 $u \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max}$ 在 $(\breve{a}, b)$ 上定义一个映射 $\overrightarrow{u} = U_r(\cdot, \mu)^* J u$。同样， $\overrightarrow{u}(b) = \lim_{x \uparrow b} \overrightarrow{u}(x)$ 存在。我们将向量 $\overleftarrow{u}(a)$ 和 $\overrightarrow{u}(b)$ 称为 $u \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max}$ 的拟边界值。若 a 和 b 都是极限圆端点，当然可以选取一个共同的 μ。若 $\Xi_\mu = \emptyset$，我们甚至可以选取 $U_r = U_\ell$，此时有 $\overrightarrow{u} = \overleftarrow{u}$，并将 $\overleftrightarrow{u}$ 用于表示其中任意一个。

我们强调，如果 a 是正则端点，则 $U_\ell(\cdot, \mu)$ 的典范选择是满足 $U_\ell(a, \mu) = J$ 的选择；在这种情况下，拟边界值等于实际边界值。同样地，如果 b 是正则端点，我们选择 $U_r(\cdot, \mu)$，使得 $U_r(b, \mu) = J$，从而 $\overrightarrow{u}(b) = u(b)$。

现在我们证明一个关键引理。

引理 4.1。 设 $Ju' + qu = wf$ 和 $Jv' + qv = wg$ 在 (a, b) 上。则对于所有 $x \in (a, \breve{b})$，有 $v(x)^* J u(x) = \overleftarrow{v}(x)^* J \overleftarrow{u}(x)$。同样地，如果 $Ju' + qu = wf$ 和 $Jv' + qv = wg$ 在 $(\breve{a}, b)$ 上，则当 $x \in (\breve{a}, b)$ 时， $v(x)^* J u(x) = \overrightarrow{v}(x)^* J \overrightarrow{u}(x)$。

证明。设 $U = U_\ell$ 或 $U = U_r$。于是将 $\lambda = \mu \in \mathbb{R}$的恒等式 (2.1) 左乘 $JU(x, \mu)J$，再右乘 $U(x, \mu)^{-1}$，得到恒等式$JU(x, \mu)JU(x, \mu)^* J = -J$，该式对连续点成立。将这个新恒等式左乘 $v(x)^*$，再右乘 $u(x)$，即可证明我们的结论。 □

4.1. 亏指数为2。假设 T 是由 $(v_1, g_1), (v_2, g_2) \in D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}}$, 确定的 $T_{\max}$的自伴限制，即，

$$T = \{([u],[f]) \in T_{\max} : (g_j^* J u)^-(b) - (g_j^* J u)^+(a) = 0 \text{ for } j = 1, 2\}. \tag{4.1}$$

由于 $n_\pm = 2$ 我们在第3.1节至第 3.3 节中的结果表明， a 和 b 是极限圆型端点。如果不存在极坏点， $\mathcal{L}_0$ 必为平凡，此时对于任意元素（$[u]$, $[f]$） $\in T_{\max}$，都存在唯一的 $u \in [u]$ 满足 $Ju' + qu = wf$。因此，我们可以为任意$u \in$ 定义域$T_{\max}$唯一地定义拟边界值 $\overleftarrow{u}$（a）和 $\overrightarrow{u}$（b）。如果存在严重坏点，它们不可能在 a或 b处聚集。根据第 3.3 节，对于任意元素（ $[u]$, $[f]$） $\in T_{\max}$， u 在第一个和最后一个区间上的限制均由此唯一确定，因此拟边界

值是良定义的。利用引理4.1 ，现在可以写成

$$T = \{([u],[f]) \in T_{\max} : A\begin{pmatrix} \overleftarrow{u}(a) \\ \overrightarrow{u}(b) \end{pmatrix} = 0\}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} \overleftarrow{g}_1(a)^* & \overrightarrow{g}_1(b)^* \\ \overleftarrow{g}_2(a)^* & \overrightarrow{g}_2(b)^* \end{pmatrix} \mathbb{J} \in \mathbb{C}^{2\times 4} \tag{4.2}$$

以及 $\mathbb{J} = \left(\begin{smallmatrix} -J & 0 \\ 0 & J \end{smallmatrix}\right)$。

现在我们需要以下引理。

引理 4.2。该映射

$$\mathcal{B} : D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}} \to \mathbb{C}^4 : (v,g) \mapsto \begin{bmatrix} \overleftarrow{v}(a) \\ \overrightarrow{v}(b) \end{bmatrix}$$

是一个线性双射。

证明。若 $\overleftarrow{v}(a) = 0$，则对于任意 $(u,f) \in \mathcal{T}_{\max}$，有 $(u^*Jv)^+(a) = \overleftarrow{u}(a)^*J\overleftarrow{v}(a) = 0$。类似地，若 $\overrightarrow{v}(b) = 0$，则当 $(u,f) \in \mathcal{T}_{\max}$ 时，有 $(u^*Jv)^-(b) = 0$。根据定理 3.1，可得 $(v,g) \in T_{\min}$，从而 $(v,g) = 0$，即 $\ker \mathcal{B} = \{0\}$。□

该引理表明，由于 (v_1,g_1) 和 (v_2,g_2) 线性无关，(4.2) 中的矩阵 A 的秩为 2。条件 $(g_j^*Jg_k)^-(b) - (g_j^*Jg_k)^+(a) = 0$ 对于 $j,k = 1,2$ 成立，意味着 $A\mathbb{J}A^* = 0$。

反过来，给定一个 2×4-矩阵 A，其秩为 2 且满足 $A\mathbb{J}A^* = 0$，以及如上所述的映射 $u \mapsto \overleftarrow{u}$ 和 $u \mapsto \overrightarrow{u}$，便可构造出 $T_{\max}$ 的一个自伴限制，证明见下文。引理 4.2 表明，存在元素g_1，$g_2 \in$属于 $\mathsf{dom}(D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}})$，其拟边界值分别由矩阵的各列给出

$$\mathbb{J}A^* = \begin{pmatrix} \overleftarrow{g}_1(a) & \overleftarrow{g}_2(a) \\ \overrightarrow{g}_1(b) & \overrightarrow{g}_2(b) \end{pmatrix},$$

分别。由于 $\mathsf{ran}(D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}}) = \mathsf{dom}(D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}})$，因此我们有两个元素 (v_1,g_1) 和 $(v_2,g_2) \in D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}}$。由于 A 的秩为 2，它们线性无关，并且满足 $(g_j^*Jg_k)^-(b) - (g_j^*Jg_k)^+(a) = 0$, $j,k = 1,2$，因为$A\mathbb{J}A^* = 0$。因此，按 (4.1) 给出的关系 T 是 $T_{\max}$ 的一个自伴限制。

现在我们更仔细地考察 A 的结构，将其写成一个含有两个 2×2 块的分块矩阵，即 $A = (A_1, A_2)$。条件 $A\mathbb{J}A^* = 0$ 变为$A_1JA_1^* = A_2JA_2^*$，这意味着 A_1 可逆当且仅当 A_2 可逆。因此我们需要讨论两种情形：(i) A_1 和 A_2 均可逆；(ii) 二者均不可逆。不过，在此之前请注意，将 A 左乘一个常数可逆 R，可得到一个秩为 2 的新矩阵 RA，且满足$RA\mathbb{J}(RA)^* = 0$。如果 $\mathbb{J}A^*$ 确定了元素 (v_1, g_1) 和 $(v_2, g_2) \in D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}}$，那么 $\mathbb{J}(RA)^*$ 就给出它们的线性组合。由此可知，A 和 RA 产生了 $T_{\max}$ 的同一个自伴限制。

如果 A_1 和 A_2 不可逆，我们选择 R 使得 $RA = \left(\begin{smallmatrix} c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \end{smallmatrix}\right)$。那么$RA\mathbb{J}(RA)^* = 0$ 意味着 c_1c_2 和 c_3c_4 必须为实数。因此，我们不妨假设 $A = \left(\begin{smallmatrix} \text{余弦}\,\alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{正弦}\,\beta & \text{余弦}\,\beta \end{smallmatrix}\right)$，其中 α, $\beta \in [0,\pi)$ 取适当值。这就是分离边界条件的情形。显然，α 和 β 由 T唯一确定。

若 A_1 且 A_2 可逆，我们可以选取$R = A_2^{-1}$使得 $RA = (S,\mathbb{1})$ 其中 S是一个（复）辛矩阵。这就是耦合边界条件的情形。现在我们证明$(S_1,\mathbb{1})$与$(S_2,\mathbb{1})$确定相同的 T，如（4.1）所示，只需

若 $S_1 = S_2$。由于 g_1 和 g_2 属于 T 的定义域，因此对于 j、$k = 1$，有 $\vec{g}_j(b) + S_k\overleftarrow{g}_j(a) = 0$，2。假设 $\overleftarrow{g}_1(a)$ 和 $\overleftarrow{g}_2(a)$ 线性相关，因此存在数 c_1 和 c_2，使得 $c_1\overleftarrow{g}_1(a) + c_2\overleftarrow{g}_2(a) = 0$。应用 S_1可得 $c_1\vec{g}_1(b) + c_2\vec{g}_2(b) = 0$。但这是不可能的，因为 $(S_1, 1)$ 的秩为 2，因此 $\overleftarrow{g}_1(a)$ 和 $\overleftarrow{g}_2(a)$ 实际上线性无关。接下来有 $S_2\overleftarrow{g}_j(a) = -\vec{g}_j(b) = S_1\overleftarrow{g}_j(a)$。这意味着 $\ker(S_2 - S_1)$ 是二维的，即 $S_2 = S_1$。

4.2. **亏指数为 1；耦合边界条件**。由于 $n_\pm = 1$我们必须至少有一个极限圆端点。如果另一个端点是极限点，则只能施加分离边界条件。因此，若要有 $n_\pm = 1$且满足耦合边界条件，两个端点都必须是极限圆端点。如果存在极坏点，请回顾第 v_0 和 v_N 节中的定义。3.3它们中恰有一个具有正范数，设为 v_0，这意味着 $\operatorname{dom} D_\mathrm{i}$ 的张成元可以选为支集位于 a附近。因此，任何边界条件都只涉及端点 a，也就是说，它是分离边界条件。如果 v_N反而具有正范数，我们同样只能得到分离边界条件。由此可知，只有在存在两个极限圆端点、没有极坏点且 $n_\pm = 1$ 时，才会出现 $\mathcal{L}_0 \neq \{0\}$及耦合边界条件。

固定一点 $x_0 \in (a, b)$ 和一个 $\mu \in \mathbb{R} \setminus \Lambda$。我们选择 $\varphi \in \mathcal{L}_0$，使得 $\varphi(x_0)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的单位向量，并定义 ψ 为初值问题 $J\psi' + q\psi = \mu w\psi$，$\psi(x_0) = J\varphi(x_0)$ 的解。于是，$\Phi = (\varphi, \psi)$ 是 $Ju' + qu = \mu wu$ 的基本矩阵，并在连续点处满足 $\Phi^* J\Phi = J$。我们利用这个基本矩阵，为 $u \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max}$ 定义映射 $u \mapsto \overleftrightarrow{u} = \Phi^* Ju$。特别地，$\overleftrightarrow{\Phi}(x) = J$，即 $\overleftrightarrow{\varphi}(x) = \binom{0}{1}$ 且 $\overleftrightarrow{\psi}(x) = \binom{-1}{0}$。由于这些量不依赖于 x，以下省略其自变量。

我们需要以下引理。

引理 4.3。若 $(u, f) \in \mathcal{T}_{\max}$，则

$$\overleftrightarrow{u}^-(x) = \overleftrightarrow{u}(a) + \int_{(a,x)} \psi^* w(f - \mu u)\overleftrightarrow{\varphi}.$$

特别地，$\overleftrightarrow{u}$ 的第一分量在连续点处为常数。

证明。由于 $\varphi \in \mathcal{L}_0$，我们有 $w\varphi = 0$，且 $(\varphi, 0) \in \mathcal{T}_{\max}$。因此，拉格朗日恒等式 (2.5) 表明 $(\varphi^* Ju)^-(x) - (\varphi^* Ju)^+(a) = \int_{(a,x)} \varphi^* wf = 0$。这是 $\overleftrightarrow{u}^-(x) - \overleftrightarrow{u}(a)$ 的第一分量。对于第二分量，当我们对 $(\psi, \mu\psi)$ 和 (u, f) 使用 (2.5) 时，得到 $\int_{(a,x)} \psi^* w(f - \mu u)$。□

设 $([u], \mathrm{i}[u])$ 张成 D_i（其维数为 1）。那么，根据前述引理，对于适当的函数 $\overleftrightarrow{u}(x) = \alpha(x)\overleftrightarrow{\varphi} + \beta\overleftrightarrow{\psi}$ 以及一个数 α，在连续点处有 β。由于根据拉格朗日恒等式（2.6）和引理4.1，我们有

$$0 \neq 2\mathrm{i}\|u\|^2 = \overleftrightarrow{u}(b)^* J\overleftrightarrow{u}(b) - \overleftrightarrow{u}(a)^* J\overleftrightarrow{u}(a) = 2\mathrm{i}\operatorname{Im}((\alpha(b) - \alpha(a))\overline{\beta}), \tag{4.3}$$

我们发现 $\beta \neq 0$。因此，定义函数 $v_+ = (u - \alpha\varphi)/\beta$，可得$([v_+], \mathrm{i}[v_+])$ 也是张成空间 D_i的一个元素。注意，$\overleftrightarrow{v}_+(a) = \overleftrightarrow{\psi} = \binom{-1}{0}$ 和$\overleftrightarrow{v}_+(b) = p\overleftrightarrow{\varphi} + \overleftrightarrow{\psi} = \binom{-1}{p}$ 其中 $p = (\mathrm{i} - \mu)\langle\psi, v_+\rangle$ 根据引理4.3。由于，

如式（4.3）所示， $0 < \|v_+\|^2 = \mathrm{Im}(p)$ 我们得到 p 不可能是实数。若令 $v_- = v_+$，则一有{v21'>([v_-], -i[v_-]) 张成 $D_{-\mathrm{i}}$。此外， $\overleftrightarrow{v}_-(a) = \overleftrightarrow{\psi}$ 和 $\overleftrightarrow{v}_-(b) = p\overleftrightarrow{\varphi} + \overleftrightarrow{\psi}$。因此，我们构造了一个从 $D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}}$ 到

$$\mathcal{D} = \{(c_1 v_+ + c_2 v_-, \mathrm{i}(c_1 v_+ - c_2 v_-)) : c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}.$$

现在定义拟边界映射

$$\mathcal{B} : \mathcal{D} \to \mathbb{C}^4 : (v, g) \mapsto \begin{bmatrix} \overleftrightarrow{v}(a) \\ \overleftrightarrow{v}(b) \end{bmatrix}.$$

特别地， $\mathcal{B}(c_1 v_+ + c_2 v_-,\ \mathrm{i}(c_1 v_+ - c_2 v_-)) = (-c_1 - c_2,\ 0,\ -c_1 - c_2,\ c_1 p + c_2 p)^\top$。由于 p 不是实数，这个拟边界值集合的维数为 2，因此与 $\mathcal{D}$ 之间存在线性一一对应关系，从而也与 $D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}}$ 之间存在线性一一对应关系。

现在令 T 为由非平凡元素 $(v,\ g) \in \mathcal{D}$ 确定的 $T_{\max}$ 的一个自伴限制，即，

$$\begin{aligned} T = \{([u], [f]) \in T_{\max} : (g^* J u)^-(b) - (g^* J u)^+(a) = 0\} \\ = \{([u], [f]) \in T_{\max} : \overleftrightarrow{g}(b)^* J \overleftrightarrow{u}(b) - \overleftrightarrow{g}(a)^* J \overleftrightarrow{u}(a) = 0\}. \end{aligned}$$

回顾一下， $0 = (g^* J g)^-(b) - (g^* J g)^+(a) = \overleftrightarrow{g}(b)^* J \overleftrightarrow{g}(b) - \overleftrightarrow{g}(a)^* J \overleftrightarrow{g}(a)$。若令 $A = (-\overleftrightarrow{g}(a)^* J,\ \overleftrightarrow{g}(b)^* J) \in \mathbb{C}^{1\times 4}$，则得到

$$T = \{([u], [f]) \in T_{\max} : A \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{u}(a) \\ \overleftrightarrow{u}(b) \end{pmatrix} = 0\}.$$

注意， $\begin{pmatrix} \overleftrightarrow{g}(a) \\ \overleftrightarrow{g}(b) \end{pmatrix} = \mathbb{J} A^*$ 是 $\mathcal{B}$值域中的一个元素。因此，我们有 $0 \neq A \in$ 张成空间{(0, −1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)} 和 $A \mathbb{J} A^* = 0$。若 $A = (0, -s, t, s)$，则得到 $A \mathbb{J} A^* = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(ts)$，即 ts 必须是实数。由于将 A 乘以一个非零常数不会改变边界条件，我们可以假设，对于某个 $\alpha \in [0, \pi)$， $A = (0, -\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\alpha)$。

反过来，假设有 $A = (0, -\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\alpha)$。那么我们可以找到一个非平凡元素 $(g, -v) \in \mathcal{D}$，其拟边界值为 $\mathbb{J} A^*$。它还满足 $(g^* J g)^-(b) - (g^* J g)^+(a) = 0$，这意味着该关系

$$T = \{([u], [f]) \in T_{\max} : A \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{u}(a) \\ \overleftrightarrow{u}(b) \end{pmatrix} = 0\}$$

是自伴的。

如果两个端点都是正则的，我们可以使用满足 $\Phi_\ell(a) = \Phi_r(b) = J$ 的基本矩阵 Φ_ℓ 和 Φ_r，从而解除拟边界值之间的关联。上述讨论仍然成立，并且拟边界值将与实际边界值重合。

4.3. 亏指数为 1；分离边界条件。这种情况有两种情形，现分别加以描述。

(1) 一个端点为极限圆型，另一个为极限点型（无论是否存在严重坏点），参见定理 3.5。正如我们将看到的，此时分离边界条件应设在极限圆端。 (2) 存在（必然有限个）严重坏点时，两个端点均为极限圆型。回忆一下第 v_0 节中定义的函数 v_N 和 3.3。若两者的范数均为 0，则 $n_\pm = 0$，此情形无需考虑。若两者均具有正范数，则 $n_\pm = 2$，这一情形已在第 4.1 节中讨论。然而，如果 v_0 和 v_N 中恰有一个具有正范数（而

另一个的范数为 0），则需要一个分离边界条件。若 $\|v_0\| > 0$，该条件设在 a；若 $\|v_N\| > 0$，则设在 b。

下面我们将假定 b 是这样一个端点：在其邻域内，$Ju' + qu = \lambda wu$ 的所有解要么具有零范数，要么具有无穷范数。另一种情形当然可以类似处理。

若 T 是如下算子的一个自伴限制：$T_{\max}$，该限制由元素$(v,\ g) \in D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}}$,确定，则$(g^* Ju)^-(b) = 0$根据定理3.5（回顾$(g,\ -v)$也属于 $D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}} \subset T_{\max}$）。因此

$$T = \{([u],[f]) \in T_{\max} : (g^* Ju)^+(a) = 0\}$$

并且，利用引理4.1，

$$T = \{([u],[f]) \in T_{\max} : \overleftarrow{g}(a)^* J \overleftarrow{u}(a) = 0\}$$

在按上文所述选取适当的基本矩阵之后。设 $A^* = J^* \overleftarrow{g}(a)$为 $\mathbb{C}^2$的一个元素。于是 $AJA^* = 0$，但 $A \neq 0$。前一条件意味着我们可以选取 $A^* \in \mathbb{R}^2$，因为我们可以将 g_1 乘以一个非零常数而不改变边界条件。事实上，我们可以选取 $A = (\cos\ \alpha,\ \sin\alpha)$，只要取某个 $\alpha \in [0,\pi)$。

反过来，若 $A = (\cos\ \alpha, \sin\ \alpha)$ 且满足 $\alpha \in [0,\pi$，则有 $A \neq 0$, $AJA^* = 0$。用于证明引理 4.2 的同一论证表明，映射 $\mathcal{B}$：$D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}} \to \mathbb{C}^2 : (v,g) = \overleftrightarrow{v}(a)$ 仍是线性双射。因此，A 确定了一个非平凡元素 $(v,g) \in D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}}$，满足 $(g^* Jg)^+(a) = 0$。

由此我们证明了，$T_{\max}$ 的所有自伴限制均由下式给出

$$T = \{([u],[f]) \in T_{\max} : (\cos\alpha, \sin\alpha)\overleftarrow{u}(a) = 0\}$$

其中 $\alpha \in [0,\pi)$。若 a 正则，我们可以用真实边界值 $u(a)$ 替换 $\overleftarrow{u}(a)$。

5. 克莱因-冯·诺伊曼扩张

本节研究与方程 $Ju' + qu = wf$ 相关的非负关系在极限圆端点情形下的克莱因-冯·诺伊曼扩张。我们首先介绍抽象克莱因-冯·诺伊曼扩张的一些基本事实。

设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，其内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 且 S 是 $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$中的一个对称线性关系。若存在 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得对所有 $(u,f) \in S$，则称 S有下界（为 α）。若可取 $\alpha = 0$，则称 S为非负。

非负关系 S 的克莱因-冯·诺伊曼扩张 S_{KvN} 的一个便捷定义是：它等于 S^{-1}的Friedrichs扩张的逆，即

$$S_{\mathrm{KvN}} = ((S^{-1})_F)^{-1},$$

其中下标 F 表示 Friedrichs 扩张。此定义依赖于这样一个事实：S 为非负，当且仅当 S^{-1} 为非负。关于此类问题的背景信息，读者可参阅例如 Riesz 和 Sz.-Nagy[22], 、Ando 和 Nishio [1], 、Faris [8], 、Behrndt、Hassi 和 de Snoo [3], 以及 Fucci 等人 [10]。

关于线性算子的 Friedrichs扩张，可在许多书籍中找到相关内容。关于线性关系的资料则不多，但 Behrndt、Hassi 和 de Snoo[3] 就是其中之一。无论如何，为方便读者，并为阐述我们独特的观点，我们添加了附录 A 。

将定理 A.3 与上述克莱因-冯·诺伊曼扩张的定义结合起来，可得以下等价表述。

定义 5.1. 设 S 是 $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$中的一个非负关系。那么

$$S_{\mathrm{KvN}}=\{(u,f)\in S^*:\exists(u_n,f_n)\in S:f_n\to f \text{ and } \langle u_n,f_n\rangle\to\langle u,f\rangle\}$$

称为 S的克莱因-冯·诺伊曼扩张[7] 。

我们立即得到以下结果 t.

命题 5.2. 设 S 是 $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$中的一个非负关系。那么我们有核$S^*\times\{0\}\subset S_{\mathrm{KvN}}$。

$S=\{(0,0)\}$是克莱因-冯·诺伊曼扩张的最简单例子。在此情形下， $S^*=\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ 且 $S_{\mathrm{KvN}}=$核$S^*\times\{0\}=\mathcal{H}\times\{0\}$。

现在，我们将这些抽象定义应用于这样的情形： $S=T_{\min}$是与方程 $Ju'+qu=wf$ 相关联的极小关系。我们令 $T_K=(T_{\min})_{\mathrm{KvN}}$。我们的目标是确定决定 T_K 的边界条件。

首先，假设 $0\notin\Lambda$并选取一个基本矩阵 $U(\cdot,0)$，使其满足第 $Ju'+qu=0$节的要求。然后，我们利用这个基本矩阵，像该节中那样定义拟边界值 $\overset{\leftrightarrows}{u}(a)$ 和 $\overset{\leftrightarrows}{u}(b)$ ；请记住， $\overset{\leftrightarrows}{u}(x)=U(x,0)^*Ju(x)$。

定理 5.3. 假设端点 a 和 b 是极限圆端点， $T_{\min}$ 非负，并且 $0\notin\Lambda$。那么，克莱因-冯·诺伊曼扩张由下式给出

$$\begin{aligned}T_K=\overline{T_{\min}}\uplus(\ker T_{\max}\times\{0\})&=\{(u,f)\in T_{\max}:\overset{\leftrightarrows}{u}(b)=\overset{\leftrightarrows}{u}(a)\}\\&=\{(u,f)\in T_{\max}:\int U(\cdot,0)^*wf=0\}.\end{aligned}\tag{5.1}$$

特别地， T_K 是自伴的。

我们强调，对于任何在某个（因而也在所有）点处为辛的基本矩阵选择，克莱因-冯·诺伊曼扩张均由周期性准边界值确定。

证明。 （5.1）中的最后一个等式由拉格朗日恒等式（2.6）得出。注意，核$\mathcal{T}_{\max}$中不存在非零的紧支撑元素，因此$T_{\min}$与核$T_{\max}\times\{0\}$的交是平凡的。现在定义

$$R=\overline{T_{\min}}\uplus(\ker T_{\max}\times\{0\})\quad\text{and}\quad T=\{(u,f)\in T_{\max}:\overset{\leftrightarrows}{u}(b)=\overset{\leftrightarrows}{u}(a)\}.$$

于是命题 5.2 给出 $R\subset T_K$。我们在第 4.1 节证明了 T 是 $T_{\min}$ 的一个自伴扩张，当 $n_\pm=2$时。反之，若 $n_\pm=1$，则引理 4.3表明，适当选择定义拟边界值时所用的基本矩阵后， $\overset{\leftrightarrows}{u}$ 的第一分量为常数。于是，条件$\overset{\leftrightarrows}{u}(b)=\overset{\leftrightarrows}{u}(a)$ 可由如下选择表示： $A=(0,1,0,-1)$，这再次表明 T 是自伴的。

现在我们证明 $T_K\subset T$。为此，假设$(u,f)\in T_K$。那么存在一个序列$(u_n,f_n)\in T_{\min}$，使得 $f_n\to f$ 且 $\langle u_n,f_n\rangle\to\langle u,f\rangle$。对于每个$(u_n,f_n)\in T_{\min}\subset T$，我们有 $0=\overset{\leftrightarrows}{u}_n(b)-\overset{\leftrightarrows}{u}_n(a)=\int_{(a,b)}U(\cdot,0)^*wf_n$。由于 $f_n\to f$，这就得到

$$\overset{\leftrightarrows}{u}(b)-\overset{\leftrightarrows}{u}(a)=\int_{(a,b)}U(\cdot,0)^*wf=0$$

[7]显然， S 甚至 S 都包含于 S_{KvN}中。

从而得到 $T_K \subset T$，如前所述。

若 $\mathcal{L}_0$ 是平凡的，则 $\ker T_{\max}$ 的维数为 2，即 R 是 $T_{\min}$ 的二维扩张。由于 $n_\pm = 2$，T 也是 $T_{\min}$ 的二维扩张。因此 $R = T$，这就完成了此情形的证明。

最后，若 $\mathcal{L}_0$ 不是平凡的，则 R 和 T 都是 $T_{\min}$ 的一维扩张，且彼此相同。□

我们已经证明，在定理 5.3 的假设下，克莱因-冯·诺伊曼扩张可以用周期性准边界值来描述。现在我们将说明，另一种描述方式是通过狄利克雷到诺伊曼型关系。这在端点正则的情形下尤其值得关注，下面我们将重点讨论这种情形。选取 U 作为 $Ju' + qu = 0$ 的基本矩阵，使其满足 $U(b) = J$（注意，此时 U 是实值的）。那么，$(u, f) \in T_K$ 当且仅当 $u(b) = \overleftrightarrow{u}(b) = \overleftrightarrow{u}(a) = U(a)^* J u(a)$。$(u, f)$ 的“狄利克雷”数据 D 由边界数据的第一分量给出，即由 $D = (u_1(a)\ u_1(b)) = (u_1(a)U_{2,1}(a)u_1(a) - U_{1,1}(a)u_2(a))$ 给出，其中 $U_{j,k}$ 表示 U 中第 j 行第 k 列的元素。“诺伊曼”数据由 $N = (-u_2(a)\ u_2(b))$ 给出。[8] 因此，$N = (-u_2(a)U_{2,2}(a)u_1(a) - U_{1,2}(a)u_2(a))$。“狄利克雷到诺伊曼”关系 M 因此表示为

$$M = \operatorname{span}\left\{\left(\begin{pmatrix}1\\ U_{2,1}(a)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ U_{2,2}(a)\end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix}0\\ U_{1,1}(a)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ U_{1,2}(a)\end{pmatrix}\right)\right\}.$$

若 $U_{1,1}(a) = 0$，则 0 是一个“狄利克雷”特征值，即自伴关系的一个特征值

$$T_D = \{(u, f) \in T_{\max} : (1, 0)u(a) = (1, 0)u(b) = 0\}.$$

否则，M 是一个线性映射的图像，其矩阵表示为

$$M = \frac{1}{U_{1,1}(a)} \begin{pmatrix} -U_{2,1}(a) & 1 \\ 1 & U_{1,2}(a) \end{pmatrix}$$

利用 $J = U(x)^* J U(x) = \det U(x) J$，因此 $\det U(x) = 1$。现在可以写成 $T_K = \{(u, f) \in T_{\max} : (D, N) \in M\}$，或者在 0 不是狄利克雷特征值时，$T_K = \{(u, f) \in T_{\max} : N = MD\}$。

在定理 5.3 中，我们假设 $0 \notin \Lambda$。相反，若 0 属于 Λ，一个简单的例子表明定理 5.3 的结论并不成立。例子如下。设 $q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)\delta_0$ 且 $w = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)\delta_0$。由于 $u \in$ 核 $T_{\max}$ 当且仅当 $u(x) = \alpha\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ 若 $x < 0$，且 $u(x) = \beta\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ 若 $x > 0$，可得 $T_{\min} = \{(0, 0)\}$，并且

$$T_K = L^2(w) \times \{0\} = \{(u, f) \in T_{\max} : (0, 1)u(a) = 0 = (1, 0)u(b)\},$$

也就是说，T_K 由分离边界条件确定。

事实上，正如我们接下来将要证明的，这种情况在更一般的情形下仍然成立。若两个端点 a 和 b 均为极限圆，且 Ξ_0 非空但有限，令 $\Xi_0 = \{x_1, ..., x_N\}$，其中 $x_1 < ... < x_N$。再令 $x_0 = a$ 和 $x_{N+1} = b$。由引理 3.2 可知，$\ker \mathcal{T}_{\max}$ 中的任意元素都是~~支撑于~~ (x_j, x_{j+1}) 上的函数的线性组合。每个这样的区间至多支撑一个属于 $\ker \mathcal{T}_{\max}$ 的线性无关函数 u，因为这样的解必须满足 $u^+(x_j) \in \ker B_+(x_j, 0)$，其中 $j = 1, ..., N$，并且 $u^-(x_{j+1}) \in \ker B_-(x_{j+1}, 0)$，其中 $j = 0, ..., N-1$。当然，$\ker \mathcal{T}_{\max}$ 中的紧支撑函数属于 $\ker \mathcal{T}_{\min}$。现在选取辛

[8] 我们在 N 的第一项中额外加上负号，因为诺伊曼数据使用外法向导数。

基本矩阵 U_ℓ 和 U_r，它们分别对应区间 (a, x_1) 和 (x_N, b) 上的 $Ju' + qu = 0$。如第 4 节中所述，我们定义 $u \mapsto \overleftarrow{u}$，其中 $\overleftarrow{u}(x) = U_\ell(x)^* Ju(x)$；并定义 $u \mapsto \vec{u}$，其中 $\vec{u}(x) = U_r(x)^* Ju(x)$。此外，设 v_0 和 v_N 为 $Ju' + qu = 0$ 在区间 (a, b) 上的非平凡解，但它们的支撑分别仅位于 $(a, x_1]$ 和 $[x_N, b)$ 上。

定理 5.4. 假设两个端点 a 和 b 都是极限圆，$0 \in \Lambda$, Ξ_0 有限，且 $T_{\min}$ 非负。则克莱因-冯·诺伊曼扩张为

$$T_K = \overline{T_{\min}} \sqcup (\ker T_{\max} \times \{0\}) = \{(u, f) \in T_{\max} : \overleftarrow{v}_0(a)^* J\overleftarrow{u}(a) = 0 = \vec{v}_N(b)^* J\vec{u}(b)\}.$$

特别地，T_K 是自伴的。

我们强调，$T_{\min} \cap \overline{(\ker} T_{\max} \times \{0\})$ 不必是平凡的，因为 $\ker T_{\max}$ 中可能存在具有正范数的紧支撑元素。我们用符号 $\sqcup$ 表示给定向量空间中两个子空间 A 和 B 的并集在 $A \sqcup B$ 下的张成空间。

证明. 首先假设 $[v_0]$ 和 $[v_N]$ 线性无关。注意，$[v_0]$ 和 $[v_N]$ 属于 $\ker T_{\max}$，但不属于 $\ker T_{\min}$。因此

$$R = \overline{T_{\min}} \sqcup (\ker T_{\max} \times \{0\})$$

是 $T_{\min}$ 的二维扩张，并且与前面一样，是 T_K 的子集。令

$$T = \{(u, f) \in T_{\max} : \overleftarrow{v}_0(a)^* J\overleftarrow{u}(a) = 0 = \vec{v}_N(b)^* J\vec{u}(b)\}.$$

与定理 5.3 的证明相同，我们现在证明 $T_K \subset T$。由第 4.1 节可知，它是 $T_{\min}$ 的自伴扩张。若 $(u, f) \in T_K$，则存在一个序列 $(u_n, f_n) \in T_{\min} \subset T$，满足 $f_n \to f$，且 $\langle u_n, f_n\rangle \to \langle u, f\rangle$。因此，$0 = \vec{v}_N(b)^* J\vec{u}_n(b) = \int v_N^* w f_n$。令 n 趋于无穷并取极限，可得 $\vec{v}_N(b)^* J\vec{u}(b) = \int v_N^* w f = 0$。类似地，$\overleftarrow{v}_0(a)^* J\overleftarrow{u}(a) = 0$，即 $(u, f) \in T$。因此我们有 $R \subset T_K \subset T$，其中 R 和 T 都是 $T_{\min}$ 的二维扩张。因此 $R = T_K = T$。

现在假设 $[v_0]$ 和 $[v_N]$ 线性相关，但不全为 0，即存在不全为 0 的数 α 和 β，使得 $\alpha v_0 + \beta v_N = \ell_0 \in \mathcal{L}_0$。在这种情况下，$R$ 是 $T_{\min}$的一维扩张。如果 α 和 β 均不为 0，那么方程 $\overleftrightarrow{v}_0(a)^* J\overleftrightarrow{u}(a) = 0$与 $\overleftrightarrow{v}_N(b)^* J\overleftrightarrow{u}(b) = 0$中的一个蕴含另一个，因为对于所有 $(u, f) \in \mathcal{T}_{\max}$，都有$\overleftrightarrow{\ell}_0(b) J\overleftrightarrow{u}(b) - \overleftrightarrow{\ell}_0(a) J\overleftrightarrow{u}(a) = 0$，并且 $\ell_0 = \alpha v_0$在 a 附近，$\ell_0 = \beta v_N$ 在 b附近。因此，T 是 $T_{\min}$的一维扩张。否则，譬如若$\alpha = 0$，条件 $\vec{v}_N(b)^* J\vec{u}(b) = 0$是空泛的，而且同样地，$T$是 $T_{\min}$的一维扩张。无论哪种情况，$R = T_k = T$。

最后，若 $[v_0] = [v_N] = 0$，则我们第3 节的结果表明 $n_\pm = 0$，此时 $T_K = R = T_{\min}$。定义 T 的条件现在都是空的，因为v_0 与 v_N 都属于 $\mathcal{L}_0$。因此 $T = T_{\min}$也是如此。□

最后我们指出，对于Friedrichs扩张，即使仅限于具有两个极限圆端点且0不属于 Λ的问题，也不存在特定类型的边界条件。事实上，我们有如下例子，在每个例子中我们选取 $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 以及$(a,\ b) = (-2,\ 2)$。我们的条件将保证 $0 \notin \Lambda$、$T_{\min}$ 是非负的，且端点是正则的。

(1) 当 $q = 0$ 和 $w = 2\delta_0 \mathbb{1}$ 时，Friedrichs扩张由反周期边界条件给出。

(2) 当 $q = 0$ 和 $w = 2(\delta_0 + \delta_1)\mathbb{1}$ 时，Friedrichs扩张由周期边界条件给出。顺便提一下，在这种情况下，克莱因-冯·诺依曼扩张与 Friedrichs扩张重合，因为它是 $T_{\min}$唯一的非负扩张。(3) 设 $q = \left(\begin{smallmatrix} v & 0 \\ 0 & -1/p \end{smallmatrix}\right)$ 和 $w = \left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$，其中 $1/p$ 和 r 为正且可积，而 v 关于勒贝格测度非负且可积。众所周知（例如，参见 [3] 中的定理 6.8.5 (iii)，或[12]中的注 4.3.11），Friedrichs扩张由狄利克雷条件给出，即 $(1,0)u(-2) = (1,0)u(2) = 0$。

附录 A. Friedrichs扩张

我们简要介绍线性关系的 Friedrichs扩张，大致遵循 Weidmann 针对算子的策略 [24]。

设 $\mathcal{H}$ 为带有标量积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 及相应范数 $\|\cdot\|$的希尔伯特空间。再设 S为 $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ 中的一个对称线性关系，并用 $\mathcal{V}$表示其定义域。假设 S有下界 $\alpha \in \mathbb{R}$，即对所有 $(u,f) \in S$，都有 $\langle f,u\rangle \geq \alpha\|u\|^2$。若 (u,f)、(u,f') 和 (v,g) 属于 $S \subset S^*$，则 $(0,f-f') \in S^*$，因此$\langle f-f',v\rangle = \langle 0,g\rangle = 0$。于是映射 $\mathcal{V}\times\mathcal{V} \to \mathbb{C}: (u,v) \mapsto \langle f,v\rangle = \langle u,g\rangle$ 定义良好。由于 S 有下界 α

$$\langle\!\langle u,v\rangle\!\rangle = \langle f,v\rangle + (1-\alpha)\langle u,v\rangle \tag{A.1}$$

是 $\mathcal{V}$中的标量积。我们将与$\cdot,\cdot$相关联的范数记为 $|||\cdot|||$。 $\mathcal{V}$ 在 $|||\cdot|||$ 下的完备化将称为 $\mathcal{W}$。对于 $\mathcal{W}$ 中的 u 和 v，选取序列 $u_n \in \mathcal{V}$和 $v_n \in \mathcal{V}$，使得 $|||u_n - u|||$ 和 $|||v_n - v|||$ 趋于0。由于$u,v = \lim_{n\to\infty} u_n, v_n$不依赖于这些序列的选取方式，我们可以将内积$\cdot,\cdot$延拓到 $\mathcal{W}$，从而使其成为希尔伯特空间。我们还将 $\mathcal{X}$ 引入为 $\mathcal{V}$ 在 $\mathcal{H}$ 中的闭包。

引理 A.1. $|||\cdot|||$ 是 $\|\cdot\|$相容的，即下列两个性质成立。*(i)*对所有 $v \in \mathcal{V}$ 有$\|v\| \leq |||v|||$，并且*(ii)*每当 $n \mapsto v_n \in \mathcal{V}$ 是关于 $|||\cdot|||$ 和 $\|v_n\| \to 0$的柯西序列时，则 $|||v_n||| \to 0$亦然。

证明。 (i) 显然成立。为证明 (ii)，设 $n \mapsto v_n \in \mathcal{V}$ 是关于 $|||\cdot|||$ 的柯西序列，且满足 $\|v_n\| \to 0$。设 v 是 v_n 关于 $|||\cdot|||$的极限，并设 $(u,\ f)$ 是 S 中的任意元素。则 $u,\ v_n = \langle f,\ v_n\rangle + (1-\alpha)\langle u,\ v_n\rangle$趋于 0。这意味着对所有 $u \in \mathcal{V}$，都有 $u,\ v = 0$，因此 $v = 0$。□

引理 A.2。 $\mathcal{W}$可连续嵌入[9]到 $\mathcal{X}$。

证明。对于 $\mathcal{W}$ 中的 f，选取一个序列 $n \mapsto f_n \in \mathcal{V}$，使得 $|||f_n - f||| \to 0$。该序列关于 $|||\cdot|||$是柯西序列。因此，它在 $\mathcal{X}$ 中关于 $\|\cdot\|$是柯西序列，故收敛。将相应的极限记为 $\phi(f)$，注意到若选取 $\mathcal{V}$ 中另一个趋于 f 的序列，$\phi(f)$ 仍保持不变。由此定义了一个映射 $\phi:\ \mathcal{W} \to \mathcal{X}$。显然，$\phi$ 是线性的。为证明它是单射，假设 $\phi(f) = 0$。设 $|||f_n - f||| \to 0$ 满足 $f_n \in \mathcal{V}$。那么 $n \mapsto f_n$ 关于 $|||\cdot|||$ 是柯西序列，且 $\|f_n\| = \|f_n - \phi(f)\| \to 0$。由引理 A.1 可得$|||f_n||| \to 0$。因此

$$|||f||| \leq |||f - f_n||| + |||f_n||| \to 0$$

从而证明了 ϕ 的单射性。

[9]请注意，嵌入是线性单射。

最后，由于 ϕ 有界于 1（因此连续），

$$\|\phi(f)\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n\| \leq \lim_{n\to\infty} |||f_n||| = |||f|||,$$

若 $|||f_n - f||| \to 0$ with $f_n \in \mathcal{V}$。 □

将 $\phi(f)$ 与 f 等同后，我们可以认为 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{X}$ 的子集，因而也是 $\mathcal{H}$的子集。现在可以定义 S的 Friedrichs扩张 S_F。

定理 A.3. 假设 S 是 $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ 中的一个有下界的对称线性关系。那么该关系

$$S_F = \{(u,f) \in S^* : \exists\, n \mapsto (u_n, f_n) \in S : u_n \to u \text{ and } \langle f_n, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle\}$$

是 S的一个自伴扩张。

证明。 我们可以自由使用上文确立的记号，尤其令 α 为 S的一个下界。

固定 $v \in \mathcal{H}$ 并考虑线性泛函 $L : \mathcal{W} \to \mathbb{C} : u \mapsto \langle v, u\rangle$。由于$|\langle v, u\rangle| \leq \|v\|\|u\| \leq \|v\|\,|||u|||$, L 有界，因此我们有 $\langle v, u\rangle = Rv, u$，其中存在唯一确定的向量 $Rv \in \mathcal{W}$。因此，我们可以定义一个线性映射R: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$，其值域包含于 $\mathcal{W}$。由于 $0 \leq |||Rv|||^2 = \langle v, Rv\rangle \leq \|v\|\,|||Rv|||$，可知 R 有下界 0，且它是连续的。

现在我们证明 R 是自伴的。由于

$$\langle Rv, u\rangle = \overline{\langle u, Rv\rangle} = \overline{\langle\!\langle Ru, Rv\rangle\!\rangle} = \langle\!\langle Rv, Ru\rangle\!\rangle = \langle v, Ru\rangle$$

当 (u, Ru) 和 (v, Rv) 属于 R 时，我们有 $R \subset R^*$。为了证明 $R^* \subset R$，令 $(f, g) \in R^*$ 且 $(u, Ru) \in R$。那么

$$\langle g, u\rangle = \langle f, Ru\rangle = \langle\!\langle Rf, Ru\rangle\!\rangle = \overline{\langle\!\langle Ru, Rf\rangle\!\rangle} = \overline{\langle u, Rf\rangle} = \langle Rf, u\rangle.$$

因此 $\langle Rf - g, u\rangle = 0$ 对所有 $u \in \mathcal{H}$ 均成立，因此 $g = Rf$，进而 $(f, g) = (f, Rf) \in R$.

现在定义自伴线性关系 $T = R^{-1} + (\alpha - 1)\mathbb{1} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$。注意，定义域$T$ = 值域 R在 (核 $R)^\perp = \mathcal{W}$ 中稠密。为证明 T是S的扩张，取元素 $(u, f) \in S$以及元素 $v \in \mathcal{W}$。于是

$$\langle\!\langle Rf, v\rangle\!\rangle = \langle f, v\rangle = \langle\!\langle u, v\rangle\!\rangle + (\alpha - 1)\langle u, v\rangle = \langle\!\langle u + (\alpha - 1)Ru, v\rangle\!\rangle.$$

由此可得 $u + (\alpha - 1)Ru = Rf$，或者等价地，$(u, f) \in R^{-1} + (\alpha - 1)\mathbb{1} = T$，即 $S \subset T$。由于 T是自伴的，因此 $T \subset S^*$。

若 $(u, f) \in T$，因此 $u \in \mathcal{W}$，则存在一个序列 $(u_n, f_n) \in S$，使得 $\lim_{n\to\infty} |||u_n - u||| = 0$。由于 $|||\cdot|||$ 与 $\|\cdot\|$相容，我们得到 $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0$。此外，

$$\langle f_n, u_n\rangle - \langle f, u\rangle = |||u_n|||^2 - |||u|||^2 + (\alpha - 1)(\|u_n\|^2 - \|u\|^2).$$

由三角不等式可知，前述恒等式中的右端现在趋于 0。因此我们已经证明，当 S_F 如定理所述给定时， $T \subset S_F$。

为证明逆向结论，首先注意到 S_F是对称的，因为对于所有 $(u, u\rangle \in \mathbb{R}) \in S_F$，都有 $\langle f, f$。因此现在有 $T \subset S_F \subset S_F^*$，这意味着

$$S_F^* \subset T^* = T \subset S_F \subset S_F^*$$

迫使所有包含关系都成为等式，从而完成证明。 □

参考文献

[1] Tsuyoshi Ando 和 Katsuyoshi Nishio。正对称算子的正自伴扩张。《东北数学杂志》（第 2 辑），22：65–75，1970。[2] F. V. Atkinson。《离散与连续边界问题》。《科学与工程数学》，第 8 卷。学术出版社，纽约—伦敦，1964年。[3] Jussi Behrndt、Seppo Hassi 和 Henk de Snoo。《边值问题、韦伊函数与微分算子》，《数学专著》第 108 卷。Birkhäuser/Springer，尚，2020年。[4] Varun Bhardwaj 和 Rudi Weikard。具有分布系数的常微分方程的极限点/极限圆分类。《数学文献》29，762，2024年 3，747 无页码 – 。[5] Kevin Campbell、Minh Nguyen 和 Rudi Weikard。关于不具备唯一延拓性质的一阶系统的谱理论。《线性与多重线性代数》，69(12)：2315–2323，2021年。在线发表：2019年10月4日。[6] Kevin Campbell 和 Rudi Weikard。具有周期分布系数的一阶方程组的谱理论。载于 Malcolm Brown、Fritz Gesztesy、Pavel Kurasov、Ari Laptev、Barry Simon、Gunter Stolz 和 Ian Wood 编，《从复分析到算子理论——全景：纪念 Sergey Naboko》，《算子理论：进展与应用》第 291 卷，第 217–238 页。Birkhäuser/Springer，尚，2023年。[7] Jonathan Eckhardt、Fritz Gesztesy、Roger Nichols 和 Gerald Teschl。具有分布势的斯图姆-刘维尔算子的韦伊-蒂奇马什理论。《数学小品》，33(3)：467–563，2013年。[8] William G. Faris。《自伴算子》，《数学讲义》第 433 卷。施普林格出版社，柏林—纽约，1975年。[9] William Feller。关于二阶微分算子。《数学年刊》（第 2 辑），61：90–105，1955年。[10] Guglielmo Fucci、Fritz Gesztesy、Klaus Kirsten、Lance L. Littlejohn、Roger Nichols 和 Jonathan Stanfill。重新探讨克莱因–冯·诺伊曼扩张。《应用分析》，101(5)：1593–1616，2022年。[11] F. Gesztesy 和 H. Holden。量子力学中描述直线上点相互作用的一类新可解模型。《物理学杂志 A》，20(15)：5157–5177，1987年。[12] Fritz Gesztesy、Roger Nichols 和 Maxim Zinchenko。《斯图姆-刘维尔算子、其谱理论及若干应用》。《美国数学学会专题讲座出版物》，即将出版，2024年。[13] Ahmed Ghatasheh 和 Rudi Weikard。具有分布系数的常微分方程组的谱理论。《微分方程杂志》，268(6)：2752–2801，2020年。[14] Ahmed Ghatasheh 和 Rudi Weikard。具有测度值系数的齐次斯图姆–刘维尔方程解的变号点。《应用分析》，101 1570，2022年 5 1556( )：– 。[15] I. S. Kac。关于某些二阶奇异微分系统谱函数的存在性。《苏联科学院通报》（新辑），106：15–18，1956年。[16] M. G. Kreĭn。关于斯蒂尔杰斯研究的一种推广。《苏联科学院通报》（新辑），87：881–884，1952年。[17] Angelo B. Mingarelli。《沃尔泰拉–斯蒂尔杰斯积分方程与广义常微分表达式》，《数学讲义》第 989 卷。施普林格出版社，柏林，1983年。[18] Minh Nguyen 和 Rudi Weikard。具有分布系数的一阶系统中特征值的渐近行为。《亨利·庞加莱年刊》，24(8)：2661–2685，2023年。[19] Minh Nguyen 和 Rudi Weikard。具有分布系数的一阶系统的比较定理与振荡定理。《数学分析与应用杂志》，第 128137 页，2024年。[20] Steven Redolfi 和 Rudi Weikard。不具备唯一延拓性质的常微分方程一阶系统的格林函数。《积分方程与算子理论》，94(2)：第 23 号论文，1–19，2022年。[21] Steven Redolfi 和 Rudi Weikard。具有分布系数的常微分方程组的傅里叶展开。《泛函分析杂志》，286 110370，2024年 9( )：。

[22] Frigyes Riesz 和 Béla Sz.-Nagy。《泛函分析》。Dover 高等数学丛书。Dover Publications, Inc.，纽约，1990年。由 Leo F. Boron 根据法文第二版译出，重印1955年原版。[23] A. M. Savchuk 和 A. A. Shkalikov。具有奇异势的斯图姆-刘维尔算子。《数学札记》，66(6):741–753，1999年。译自《数学札记》第66卷，第897–912页（1999年）。[24] Joachim Weidmann。《希尔伯特空间中的线性算子》，《数学研究生教材》第68卷。施普林格出版社，纽约—柏林，1980年。由 Joseph Sz ücs 从德文译出。[25] Hermann Weyl。关于具有奇点的常微分方程及其相关的任意函数展开。《《数学年刊》》，68:220–269，1910年。

数学系，阿拉巴马大学伯明翰分校，伯明翰，AL 35226-1170，美国电子邮件地址：
stevenre@uab.edu, weikard@uab.edu