极大秩可解李代数的上同调刚性 K

B.A. OMIROV、G.O.SOLIJANOVA 和 G.KH. URAZMATOV

摘要。我们研究一类可解李代数 $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$ 的伴随模系数第二上同调群。这类代数是极大秩幂零李代数 $\mathcal{N}$ 的极大可解扩张。在由极大环面 $\mathcal{T}$ 对 $\mathcal{N}$ 的作用所确定的根系满足适当结构假设时，我们得到 $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$ 上同调刚性的充分条件。反之，我们确定了会导致第二上同调群非平凡的显式根配置，从而构造出大量不具上同调刚性的可解李代数。我们的结果推广了 Leger 和 Luks 的经典充分条件，并为判定广泛一类可解李代数（包括若干已知结果）的上同调刚性提供了统一且计算有效的框架。

arXiv:2602.09200v1 [math.RA] 9 Feb 2026

2020年数学主题分类： 17B22, 17B30, 17B56.

关键词： 可解李代数，幂零李代数，可解扩张，上同调刚性，Hochschild–Serre 分解。

1. 引言

研究李代数在伴随模系数下的第二上同调群，处于李理论多个核心主题的交汇处，包括上同调代数、变形理论、李代数结构律簇的几何以及扩张 [5,11,12]。这一上同调不变量发挥着丰富而统一的作用：它刻画李代数无穷小变形的空间 $\mathfrak{g}$，通过上同调的消失揭示几何刚性，并提供一种能够区分非同构代数的不变量。其理论框架开创了代数结构变形理论的现代视角，确立了李代数的括号何时允许非平凡扰动所需满足的上同调条件 [9, 10]。

Gerstenhaber 为结合代数提出的变形理论 [8]，后来在 Nijenhuis 和 Richardson 的奠基性工作 [17]中被推广到李代数的背景下。在这一框架中，上同调群 $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ 获得了自然的解释：它是支配李代数 $\mathfrak{g}$无穷小变形的空间。更确切地说，李括号的形式单参数变形可以表示为

$$[x,y]_t = [x,y] + t\,\varphi_1(x,y) + t^2\,\varphi_2(x,y) + \cdots,$$

其中，一阶项 $\varphi_1\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 必然是 Chevalley–Eilenberg 复形中的一个 2-上循环。两个变形等价，当且仅当它们的一阶项相差一个余边界。因此，第二上同调群 $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ 对 $\mathfrak{g}$的无穷小变形进行参数化。特别地，如果该群为零，那么每个形式变形都等价于原始结构；也就是说，$\mathfrak{g}$ 是上同调刚性 [18]。

第二个同样基础的联系源于李代数结构代数簇的几何。对于固定维数 n，$\mathbb{F}^n$ 上的所有李代数结构构成一个仿射代数簇 $\mathcal{L}_n$，群 GL_n 通过基变换在其上自然地作用。每个轨道对应一个同构类，而李代数的退化对应于这些轨道的扎里斯基闭包之间的包含关系。Lauret 和 Weimar-Woods [13, 14], 的工作阐明了代数变形与几何退化之间的关系，其中表明形式变形自然地属于更广泛的轨道闭包几何理论。

回顾一下，每个代数簇都能唯一地分解为有限个不可约分支，并且扎里斯基开子集的闭包构成该代数簇的不可约分支。因此，$\mathcal{L}_n$ 的分类与确定轨道为扎里斯基开集的那些李代数密切相关；这些正是刚性 李代数。根据诺特性，这样的轨道只有有限个。因此，确定刚性李代数对于理解 $\mathcal{L}_n$的整体几何至关重要。

Nijenhuis 和 Richardson 的一项重要定理确立了上同调刚性蕴含刚性 [18]，而存在并非上同调刚性的刚性李代数则表明，反过来一般并不成立（见 [21] 和 [4]）。因此，上同调刚性的李代数不可能是任何与其不同构的代数的退化极限。这一结果使群 $H^2(\mathfrak{g},\ \mathfrak{g})$ 成为退化理论的核心：非平凡上同调类的存在意味着潜在的几何不稳定性，而它们的缺失则保证情况恰恰相反。

因此，许多刚性且在结构上具有重要意义的可解李代数，例如丝状李代数的极大可解扩张、模型幂零李代数以及各种类Borel可解代数，都可由其伴随第二上同调群的消失来精确刻画；例如参见 [1, 3, 15]。

这些问题汇聚于一类尤为丰富的李代数：极大秩幂零李代数的极大可解扩张。得益于 [20] 关于某些幂零李代数的极大可解扩张唯一性的结果，对极大秩幂零李代数的极大可解扩张的研究可以归结为对极大秩可解李代数的分析。这些代数可典范地描述为半直积

$$\mathcal{R}_{\mathcal{T}} \;=\; \mathcal{N} \rtimes \mathcal{T},$$

其中，$\mathcal{N}$ 是极大秩幂零李代数，$\mathcal{T}$ 是作用于 $\mathcal{N}$ 且以对角形式作用的极大环面。根据 Mostow 关于任意两个极大环面 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$可通过 $\mathcal{N}$的内自同构相互共轭这一结果的著名推论 [23] ，相应的可解扩张同构，即 $\mathcal{R}_{\mathcal{T}_1} \cong \mathcal{R}_{\mathcal{T}_2}$。构造极大环面的一种实用方法见 [19]。因此，对于给定的幂零（非特征幂零）李代数，可以不必考虑显式构造可解代数$\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$这一潜在难题。这类代数的一个关键结构特征是，$\mathcal{N}$ 分解为 $\mathcal{T}$的权空间，从而形成一种环面分次，在其上同调分析中发挥核心作用。这类代数的上同调性质与 $\mathcal{T}$作用所关联的根的构型密切相关，而理解这些根之间的相互作用已成为一个基本问题。

计算可解李代数上同调的一种有效且强大的工具是 Hochschild–Serre 分解定理。在我们的情形下，它将 $H^n(\mathcal{R}_{\mathcal{T}},\ \mathcal{R}_{\mathcal{T}})$ 的计算归结为分析对所有 $j \le n$ 均成立的 $\mathcal{T}$-不变上同调群 $H^j(\mathcal{N},\ \mathcal{R}_{\mathcal{T}})^{\mathcal{T}}$。由于极大秩的可解李代数 $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$ 是完备的（即中心为零且不含外导子） [16]，我们得到以下等价关系：

$$\mathcal{R}_{\mathcal{T}} \text{ is cohomologically rigid} \quad\Longleftrightarrow\quad H^2(\mathcal{N}, \mathcal{R}_{\mathcal{T}})^{\mathcal{T}} = 0.$$

因此，这些代数的刚性问题完全取决于幂零根的第二上同调中以可解代数为系数的 $\mathcal{T}$-不变分量。

Leger 和 Luks 的经典工作针对某些可解李代数，建立了使 $H^2(\mathfrak{g},\ \mathfrak{g})$ 消失的充分条件；这些条件以 $\mathcal{N}$ [15] 的环面分解中出现的根之间的组合关系来表述。他们的方法利用权之间显式的线性相关关系，既适用范围广，概念上也清晰。

本文的主要目标是建立一个通用框架，用于计算形如 $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$ 的可解李代数的第二伴随上同调群，并推导出其消失的明确且概念上自然的充分条件。我们的方法拓展了 Leger–Luks 的方法，使其能够应用于更广泛的可解李代数，并得到新的上同调刚性结构族。

作为对上同调刚性结果的补充，我们还建立了确保 $H^2(\mathfrak{g},\ \mathfrak{g})$ 不消失的充分条件。这些充分条件阐明了我们的消失结果不适用的确切情形。此外，对计算中显现的模式进行分析后，我们提出一个猜想，涉及极大秩可解李代数的第二伴随上同调群维数的下界。

本文的组织结构如下。第 3 节通过拓展 Leger-Luks 关于极大秩可解李代数的第二上同调群消失的经典充分条件，建立若干充分条件。这些条件适用于广泛的代数类，包括低维分类中所有维数不超过九的极大秩幂零李代数的极大可解扩张 [3], 模型幂零李代数和模型丝状李代数 [1, 10]。此外，我们证明，对于幂零根的幂零指数为 $s+1$ 的可解李代数 $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$，若上同调群 $H^i(\mathcal{R}_{\mathcal{T}},\ \mathcal{R}_{\mathcal{T}})$ 对于$0 \le i \le s-1$ 消失，则整个伴随上同调必然平凡。作为应用，我们为 [2] 中引入的模型幂零李代数子类的极大可解扩张的刚性，给出一种新的统一证明。

第 4 节聚焦于秩为二、由两个本原权生成的幂零根。我们给出了一个充分条件：若不存在权 $3\alpha_1+\alpha_2$ 和 $\alpha_1+3\alpha_2$（见定理 4.7），则 $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$ 具有上同调刚性。该条件适用于一大类代数（例如例 4.8），而现有方法无法处理这些代数。

第 5 节转而讨论相反的现象：非刚性。我们给出了权系上易于验证的充分条件（见定理 5.1），这些条件可保证 $H^2(\mathcal{R}_{\mathcal{T}},\ \mathcal{R}_{\mathcal{T}}) \neq 0$。本节通过具体例子阐释这些条件，并给出了第二上同调维数的一个下界。我们还举例说明，尽管这些条件是充分的，却不是必要的。这个例子厘清了当前一般性方法的适用边界，并凸显了进一步获得结构性洞见的必要性。

在本文中，代数和模均假定为有限维，且定义在域 $\mathbb{C}$. 上

In 本节将给出本文中将用到的定义和预备结果 r.

设 $\mathcal{G}$ 是一个李代数， $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{G}$-模。$\mathcal{G}$ 的 Chevalley–Eilenberg 上同调（系数取自 $\mathcal{M}$）由以下上链复形定义

$$C^0(\mathcal{G},\mathcal{M}) = \mathcal{M}, \qquad C^k(\mathcal{G},\mathcal{M}) = Hom(\wedge^k\mathcal{G},\mathcal{M}) \quad (k \geq 1),$$

其余边界微分 d^k: $C^k(\mathcal{G},\mathcal{M}) \to C^{k+1}(\mathcal{G},\mathcal{M})$ 定义如下

$$(d^k f)(x_1,\ldots,x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}x_i \cdot f(x_1,\ldots,\widehat{x}_i,\ldots,x_{k+1}) + \sum_{1\leq i<j\leq k+1} -1)^{i+j} f([x_i,x_j],x_1,\ldots,\widehat{x}_i,\ldots,\widehat{x}_j,\ldots,x_{k+1})$$

对于 $f \in C^k(\mathcal{G},\mathcal{M})$ 以及 x_1，……， $x_{k+1} \in \mathcal{G}$ [6]。

我们分别用以下符号表示 k-余边界和 k-余循环空间

$$B^k(\mathcal{G},\mathcal{M}) = \operatorname{im} d^{k-1}, \qquad Z^k(\mathcal{G},\mathcal{M}) = \ker d^k$$

约定 $B^0(\mathcal{G},\mathcal{M}) = 0$。

恒等式 $d^k \circ d^{k-1} = 0$ 意味着 $B^k(\mathcal{G},\ \mathcal{M}) \subseteq Z^k(\mathcal{G},\ \mathcal{M})$。因此， $\mathcal{G}$ 以 $\mathcal{M}$ 为系数的 k阶上同调群为:

$$H^k(\mathcal{G},\mathcal{M}) = Z^k(\mathcal{G},\mathcal{M})/B^k(\mathcal{G},\mathcal{M}).$$

尽管上同调群的计算通常很复杂，但 Hochschild–Serre 分解定理为某些类别的可解李代数提供了实质性的简化（见 [7]中的定理 13）。下面我们将介绍一个根据我们的目的加以调整的 Hochschild–Serre 分解定理版本。

定理 2.1. 设 $\mathcal{G} = \mathcal{N} \rtimes \mathcal{Q}$ 为可解李代数，其中 $\mathcal{Q}$ 为阿贝尔李代数，且令 $\mathcal{M}$ 为一个 $\mathcal{G}$-模。假设 $ad_{x|\mathcal{N}}$ （$x \in \mathcal{Q}$） 以及 $\mathcal{Q}$ 在 $\mathcal{M}$ 上的表示均为对角的。则上同调群 H^n（$\mathcal{G}$， $\mathcal{M}$） 满足以下同构关系:

$$H^n(\mathcal{G},\mathcal{M}) \cong \sum_{i+j=n} H^i(\mathcal{Q},\mathbb{F}) \otimes H^j(\mathcal{N},\mathcal{M})^{\mathcal{Q}}, \quad n \geq 0,$$

其中

$$H^j(\mathcal{N},\mathcal{M})^{\mathcal{Q}} = \{f \in H^j(\mathcal{N},\mathcal{M}) \mid (t \cdot f) = 0,\ t \in \mathcal{Q}\} \tag{1}$$

是取值于 $\mathcal{M}$ 的 $\mathcal{N}$ 的 $\mathcal{Q}$-不变余循环空间，其中不变性的定义为

$$(t \cdot f)(z_1,z_2,\ldots,z_b) = t \cdot f(z_1,z_2,\ldots,z_b) - \sum_{s=1}^{b} f(z_1,\ldots,[t,z_s],\ldots,z_j).$$

注 2.2。 考虑到 $H^i(\mathcal{Q},\mathbb{F}) = \wedge^i\mathcal{Q}$ 我们得出， $H^n(\mathcal{G},\mathcal{M}) = 0$ 当且仅当$H^j(\mathcal{N},\mathcal{M})^{\mathcal{Q}} = 0$对所有 $0 \leq j \leq n$ 都成立。

由于基域为 $\mathbb{C}$，半单性等价于可对角化性。因此，商 $(\mathcal{N} \rtimes \mathcal{Q})/\mathcal{N}$的半单性意味着 $\mathcal{Q}$ 在 $\mathcal{N}$ 上的诱导作用是可对角化的。特别地， $\mathcal{Q}$ 通过一族可交换对角算子作用于$\mathcal{N}$。

我们回顾一下，若幂零李代数 $\mathcal{N}$满足秩 $\mathcal{N} = \dim(\mathcal{N}/\mathcal{N}^2)$，则称其具有极大秩。

设 $\mathcal{R}_{\mathcal{T}} := \mathcal{N} \rtimes \mathcal{T}$是由幂零李代数 $\mathcal{N}$与极大环面 $\mathcal{T}$构成的半直积，其中 $\mathcal{T}$作用于 $\mathcal{N}$。考虑相对于 $\mathcal{T}$的$\mathcal{N}$的权空间分解,

$$\mathcal{N} = \bigoplus_{\alpha \in W} \mathcal{N}_\alpha.$$

对于 $f \in H^j(\mathcal{N},\ \mathcal{M})^{\mathcal{T}}$，条件 $\mathcal{T} \cdot f = 0$意味着 $f(\mathcal{N}_{\alpha_1},\ \ldots\ldots,\ \mathcal{N}_{\alpha_j}) \subseteq \mathcal{N}_{\alpha_1+\cdots+\alpha_j}$对所有 $\alpha_k \in W.$ 都成立。令 $\Pi = \{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$表示本原权的集合。那么，每个权 $\mu \in W$都可以唯一地$_n$表示为以下形式： $\mu = \sum r_i\alpha_i$， 其中系数 r_i 是非负整数。对于这样的权 μ，我们$_{i=1}$定义其长度为

$$\operatorname{length}(\mu) = \sum_{i=1}^{n} r_i.$$

下面我们将 [15] 中给出的假设 (i)–(iv) 调整为适用于 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 的情形。

(i) $\dim \mathcal{T} = \dim(\mathcal{N}/\mathcal{N}^2) = n$; (ii) 对于 $\alpha \in W$，$\dim \mathcal{N}_\alpha = 1$，并且若 α、β、$\alpha+\beta$ 均属于 W，则 $[\mathcal{N}_\alpha, \mathcal{N}_\beta] = \mathcal{N}_{\alpha+\beta}$。由此可得 $[x, e_\alpha] = \alpha(x)e_\alpha$，$x \in \mathcal{T}$；(iii) 若 α、β、γ、δ、$\alpha+\gamma$、$\beta+\delta$ 均属于 W，其中 α、β 是本原且不相等的，并且满足 $\alpha+\gamma = \beta+\delta$，则存在某个 $\mu \in W$，使得 $\delta = \alpha+\mu$、$\gamma = \beta+\mu$，且以下至少一种情形成立：情形 1. $\alpha+\beta \notin W$；情形 2. $\alpha+\beta \in W$，但 $\alpha+2\beta \notin W$，并且对某个 $\nu \in W$ 有 $\mu = \beta+\nu$；情形 3. $\alpha+\beta \in W$，但 $2\alpha+\beta \notin W$，并且对某个 $\nu \in W$ 有 $\mu = \alpha+\nu$。

那么，与上述假设相关的主要结果之一 [15]表述如下：
若 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$满足假设（i）–（iii），则 $H^2(\mathcal{R}_\mathcal{T}, \mathcal{R}_\mathcal{T}) = 0$.
注意，对于 $\mathcal{N}$的极大环面 $\mathcal{T}$，等式 $\dim \mathcal{T} = \dim(\mathcal{N}/\mathcal{N}^2)$ 表明 $\mathcal{N}$是极大秩 [16]的幂零李代数。因此，李代数 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$称为极大秩可解李代数。

由于对于任意形如 $\mathcal{N} \oplus \mathcal{Q}$的可解李代数，其中 $\mathcal{Q}$ 是 $\mathcal{N}$的补子空间，我们有上界估计 $\dim \mathcal{Q} \le \dim(\mathcal{N}/\mathcal{N}^2)$（见 [22]），因此假设（i）意味着 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$是 $\mathcal{N}$的极大扩张。

应用 [20]关于某一类幂零李代数的极大可解扩张在同构意义下唯一性的结果，并注意到条件（i）保证 $\mathcal{N}$属于这一类，我们得出结论：$\mathcal{R}_\mathcal{T}$是 $\mathcal{N}$的极大可解扩张，且在同构意义下唯一。因此，不失一般性，我们可以用 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$代替 $\mathcal{N}$的任意极大可解扩张。

此外，我们假设代数 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$满足条件 (i)–(ii)。下文中，若权 λ 存在满足性质 (iii) 的分解 $\lambda = \alpha+\gamma = \beta+\delta$，我们就称“$\lambda$ 满足 Leger-Luks条件”。

下面介绍本文的核心概念。

定义 2.3. *[18]*。若李代数 $\mathcal{G}$ 满足 $H^2(\mathcal{G}, \mathcal{G}) = 0$，则称其具有上同调刚性。

通过考察极大秩二步幂零李代数的结构常数，我们得到如下结果。

命题 2.4. 设 $\mathcal{N}$是满足 $\mathcal{N}^3 = 0$的极大秩幂零李代数，则 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$具有上同调刚性。

证明。 对 2-上循环的结构进行直接分析可知，它是一个 2-上边界。 □

从现在起，我们关注幂零根的幂零指数大于 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$的可解李代数 3.
对于每个权空间 $\mathcal{N}_\alpha = \mathrm{Span}\{e_\alpha\}$，其中 $\alpha \in W$，我们将相应的结构常数记为 $c(\alpha, \beta)$，它由乘积 $[e_\alpha, e_\beta] = c(\alpha, \beta)e_{\alpha+\beta}$.定义
设 $\mathcal{M}$ 是一个一维 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$-模，记作 $\mathcal{M} = \mathbb{C}m$，且 $\mathcal{T}$在 $\mathcal{M}$ 上的权为 Λ。那么，对于任意$f \in H^2(\mathcal{N}, \mathcal{M})^\mathcal{T}$，我们可以写成

$$f(e_\alpha, e_\beta) = \begin{cases} \Phi(\alpha, \beta)\, m, & \text{if } \alpha+\beta = \Lambda, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$\mathcal{M}$ 的一维性意味着 $\mathcal{T}$-不变第二上循环条件得以简化，将通常的六项和化为三项和。对于一组三个元素 $\{e_\alpha, e_\beta, e_\gamma\}$，雅可比恒等式和第二上循环条件用结构常数及定义 f的标量表示后，形式如下

$$\begin{cases} c(\alpha,\beta)c(\alpha+\beta,\gamma) + c(\beta,\gamma)c(\beta+\gamma,\alpha) + c(\gamma,\alpha)c(\gamma+\alpha,\beta) &= 0, \\ c(\alpha,\beta)\Phi(\alpha+\beta,\gamma) + c(\beta,\gamma)\Phi(\beta+\gamma,\alpha) + c(\gamma,\alpha)\Phi(\gamma+\alpha,\beta) &= 0. \end{cases} \tag{2}$$

为方便起见，我们分别将式 (2) 中第一个和第二个等式的左端记为 $L(\alpha, \beta, \gamma)$ 和 $Z(\alpha, \beta, \gamma)$。

3. 第二上同调群消失的极大秩可解李代数。

本节在 Leger–Luks 条件的基础上，为更广泛的一类极大秩可解李代数确立了保证其上同调刚性的充分条件。考虑到极大秩可解李代数 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$是完备代数，应用文献 [16] 中的定理 2，可得到以下辅助结果。

引理 3.1。 对于任意非本原权 $\alpha \in W$，存在一个本原权 α_{i_0}，使得对某个 $\beta \in W$ 有 $\alpha = \beta + \alpha_{i_0}$，也就是说，$c(\alpha_{i_0}, \beta) \neq 0$.

现在陈述本节的主要结果。

定理 3.2。 设 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$ 是一个幂零根为 $\mathcal{N}$ 的可解李代数，且设 $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$-模，使得 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{M}$ 上的作用是对角的，并且 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{M}$ 上的权属于 W。若对于 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{N}$ 上的每个权 λ，以下条件至少有一个成立

i）满足 ***Leger-Luks*** 条件；ii） $\lambda = \alpha_i + \mu$ 对某个 $\alpha_i \in \Pi$ 成立，且对所有 $\alpha_j \in \Pi \setminus \{\alpha_i\}$，$\lambda - \alpha_j \notin W$ 均成立；iii） $\lambda = \alpha_i + \alpha_j$ 或 $\lambda = \alpha_i +$（$\alpha_i + \alpha_j$）对某些不同的 α_i、$\alpha_j \in \Pi$ 成立。

那么 $H^2(\mathcal{N}, \mathcal{M})^\mathcal{T} = 0$.

证明。 由恒等式

$$t \cdot (e_\alpha \cdot m_\beta) = [t, e_\alpha] \cdot m_\beta + e_\alpha \cdot (t \cdot m_\beta) = (\alpha + \beta)(t)\, e_\alpha \cdot m_\beta, \qquad e_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha,\ m_\beta \in \mathcal{M},$$

可知 $\mathcal{N}_\alpha \cdot \mathcal{M}_\beta \subseteq \mathcal{M}_{\alpha+\beta}$. 因此，$\mathcal{N}$ 通过幂零算子作用于 $\mathcal{M}$。根据恩格尔定理，由于$\mathcal{M} \neq 0$，存在一个非零向量 $m \in \mathcal{M}$，使得 $\mathcal{N} \cdot m = 0$。因此，$\mathcal{M}$ 拥有真 $\mathcal{N} \rtimes \mathcal{T}$-子模：$\mathcal{M}' = \mathbb{C}m$ 和 $\mathcal{M}/\mathcal{M}'$.

由此得到短正合列

$$H^2(\mathcal{N}, \mathcal{M}')^\mathcal{T} \longrightarrow H^2(\mathcal{N}, \mathcal{M})^\mathcal{T} \longrightarrow H^2(\mathcal{N}, \mathcal{M}/\mathcal{M}')^\mathcal{T}.$$

对模 $\mathcal{M}/\mathcal{M}'$ 应用同样的论证，可得到另一个形式相同的短正合列。重复这一过程，最终可得到一个精确列，其外项涉及一维模。现在，假设对于每个一维模 $\mathcal{V}$，都有 $H^2(\mathcal{N}, \mathcal{V})^\mathcal{T} = 0$，则上述归纳法表明 $H^2(\mathcal{N}, \mathcal{M})^\mathcal{T} = 0$.

因此，为了证明该定理，只需考虑 $\mathcal{M}$ 作为 $\mathcal{N} \rtimes \mathcal{T}$ 上的模是一维的情形。设 $\mathcal{M} = \mathbb{C}m$，且 Λ 是 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{M}$ 上的权。下面我们将重点讨论权 $\lambda = \Lambda$.

任取 $f \in H^2(\mathcal{N}, \mathcal{M})^\mathcal{T}$，使得 $\mathcal{T} \cdot f = 0$。

情形（i）。那么结论可直接由 [15] 的工作得出（参见 [15] 中命题 5.3 的证明），其中构造了 $g \in C^1(\mathcal{N}, \mathcal{M})$，使得 $f = \delta g$。

情形（ii）。不失一般性，可以假设 $\Lambda = \alpha_1 + \mu$，其中某个权为 μ。

我们证明等式

$$\Phi(\nu, \Lambda - \nu) = a(\nu)\, \Phi(\alpha_1, \Lambda - \alpha_1), \quad a(\nu) \in \mathbb{C} \tag{3}$$

对每个权 $\nu \in W$，通过对 ν 的长度进行归纳法证明。

对于 length(ν) $= 1$，等式 (3) 由条件（ii）立即得出。令 length(ν) $= 2$，即 $\nu = \alpha_s + \alpha_t$。

若 $\Lambda - \nu \notin W$，我们令 $a(\nu) = 0$，则 (3) 显然成立。因此，我们可以假设 $\Lambda - \nu \in W$。在这种情形下，我们考虑

$$L(\alpha_s, \alpha_t, \Lambda - (\alpha_s + \alpha_t)) = Z(\alpha_s, \alpha_t, \Lambda - (\alpha_s + \alpha_t)) = 0. \tag{4}$$

若 $2 \leq s \neq t \leq n$，则 (4) 推出

$$c(\alpha_s + \alpha_t, \Lambda - (\alpha_s + \alpha_t)) = \Phi(\alpha_s + \alpha_t, \Lambda - (\alpha_s + \alpha_t)) = 0.$$

如果 $s = 1$，则由(4)可得

$$c(\alpha_1 + \alpha_t, \Lambda - (\alpha_1 + \alpha_t)) = \begin{cases} \frac{c(\alpha_t, \Lambda - (\alpha_1 + \alpha_t))}{c(\alpha_1, \alpha_t)} c(\alpha_1, \Lambda - \alpha_1), & \text{if} \quad c(\alpha_1, \alpha_t) \neq 0, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$\Phi(\alpha_1 + \alpha_t, \Lambda - (\alpha_1 + \alpha_t)) = \begin{cases} \frac{c(\alpha_t, \Lambda - (\alpha_1 + \alpha_t))}{c(\alpha_1, \alpha_t)} \Phi(\alpha_1, \Lambda - \alpha_1), & \text{if} \quad c(\alpha_1, \alpha_t) \neq 0, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

Thus, 对某个适当的标量 $a(\nu)$, 我们得到 $\Phi(\nu, \Lambda - \nu) = a(\nu)\, \Phi(\alpha_1, \Lambda - \alpha_1)$ 永远 y weight ν 的长g度2。

假设对于满足 length(ν) $\leq p$ 的每个权 ν，(3) 都成立，并令 ν 为长度为 $p + 1$ 的任意权。

如果 $\Lambda - \nu \notin W$，我们设 $a(\nu) = 0$。现在假设 $\nu \in W$和 $\Lambda - \nu \in W$。由引理 3.1，存在一个本原权 α 和一个权 $\tau \in W$，使得

$$\nu = \alpha + \tau, \qquad [e_\alpha, e_\tau] \neq 0.$$

由等式 $Z(\alpha,\ \tau,\ \Lambda-\nu)=0$，结合归纳假设，我们可以推得参数$\Phi(\Lambda-\alpha,\ \alpha)$ 和 $\Phi(\Lambda-\tau,\ \tau)$ 由 $\Phi(\alpha_1,\ \Lambda-\alpha_1)$ 线性确定。因此，对于每个 $\nu\in W$，(4) 都成立。Si milarl y, 我们 btain o

$$c(\nu,\Lambda-\nu)=a(\nu)\,c(\alpha_1,\Lambda-\alpha_1). \tag{5}$$

由条件（ii）和引理 3.1，我们得出 $c(\alpha_1,\ \Lambda-\alpha_1)\neq 0$.利用恒等式 (4) 和 (5),

我们推导出

$$c(\alpha_1,\Lambda-\alpha_1)\,\Phi(\nu,\Lambda-\nu)=c(\nu,\Lambda-\nu)\,\Phi(\alpha_1,\Lambda-\alpha_1),\qquad \nu\in W. \tag{6}$$

将 $g\in C^1(\mathcal{N},\ \mathcal{M})$ 定义为

$$g(\rho)=\begin{cases}-\frac{\Phi(\alpha_1,\Lambda-\alpha_1)}{c(\alpha_1,\Lambda-\alpha_1)}m, & \text{if } \rho=\Lambda,\\ 0, & \text{if } \rho\neq\Lambda.\end{cases} \tag{7}$$

若 $\alpha+\gamma\neq\Lambda$，则显然有 $(f-d^1g)(e_\alpha,\ e_\gamma)=0$.

若 $\alpha+\gamma=\Lambda$，则将 $\nu=\alpha$ 和 $\Lambda-\nu=\gamma$ 代入 (6)，得到

$$(f-d^1g)(e_\alpha,e_\gamma)=f(e_\alpha,e_\gamma)+c(\alpha,\gamma)\,g(e_\Lambda)=0.$$

情形（iii）。设 $\Lambda=\alpha_i+\alpha_j$ 或 $\Lambda=2\alpha_i+\alpha_j$，其中有某些互不相同的 $\alpha_i,\ \alpha_j\in\Pi$，。然后，按照 (7) 中的定义，将 α_1 替换为 α_i 来定义 g，我们得出 $f-d^1g=0$. □

由于 $H^i(\mathcal{R}_\mathcal{T},\ \mathcal{R}_\mathcal{T})=0,\ \ 0\leq i\leq 1$ 对任意可解李代数均成立（见 [20]），由注 2.2 可知，我们得到以下推论。

推论 3.3。设 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$ 是满足定理 *3.2* 条件的可解李代数，则 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$ 具有上同调刚性。

回顾一下，维数不超过 9 的极大秩可解李代数的上同调刚性已在 [3] 中得到证明。特别地，其中的代数

$$\mu_5^1,\ \mu_6^2,\ \mu_7^5,\ \mu_7^6,\ \mu_8^{22},\ \mu_8^{25},\ \mu_8^{26},\ \mu_8^{33}$$

满足定理 3.2 的条件 (ii) 和 (iii)。此外，在 [1], 中，为证明模型幂零李代数的极大可解扩张具有上同调刚性而进行的大量计算，通过应用定理 3.2 可以大大简化，因为该可解代数同时满足条件 (ii) 和 (iii)。类似地，模型丝状李代数的极大可解扩张n_1 也满足情形 (ii) 和 (iii) 的假设，并且其上同调刚性已在 [10] 中得到证明。

证明可解李代数的上同调刚性通常需要大量计算。然而，应用定理 3.2，只要满足条件 (i)–(iii) 中至少一项，就能以显著更高效的方式确定上述代数的上同调刚性。

现在 继续讨论以下结果，这些结果将有助于研究高阶上同调群 s.

引理 3.4. 设 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$ 是一个可解李代数，其幂零根为 $\mathcal{N}$，幂零指数为 $(s+1)$。设 $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$-模，且 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{M}$ 上的作用是对角的，并假设 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{M}$ 上的所有权都属于 W。那么 $H^s(\mathcal{N},\mathcal{M})^\mathcal{T}=0$.

证明. 与定理 3.2 的证明类似，只需处理 $\mathcal{M}=\mathbb{C}m$ 为一维且 Λ 是 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{M}$ 上的权的情形。设 $f\in H^s(\mathcal{N},\mathcal{M})^\mathcal{T}$。显然，只需考虑极大秩至少为 s 的情形。于是，对于任意 s-元组 $(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_s})$，我们有

$$f(e_{\alpha_{i_1}},\ldots,e_{\alpha_{i_s}})\in\mathcal{N}_{\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_s}},$$

并且由于 $\mathcal{N}^{s+1}=0$，只有当所有 $\alpha_{i_j}\in\Pi$. 时才会产生非零贡献

因此，只需考虑

$$f(e_{\alpha_{i_1}},\ldots,e_{\alpha_{i_s}})=\Phi(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_s})\,m,\qquad \alpha_{i_j}\in\Pi,\ \ \sum_{j=1}^{s}\alpha_{i_j}=\Lambda$$

对应于 $\mathcal{T}$-权 Λ 的情形； f 的所有其他分量均为零。由于 $\Lambda\in W$，对于所有 s-元组 $(\alpha_{i_1},\ \ldots,\ \alpha_{i_s})$，都存在 $1\leq p<q\leq s$，使得 $c(\alpha_{i_p},\ \alpha_{i_q})\neq 0$。定义 $g\in C^{s-1}(\mathcal{N},\ \mathcal{M})$ 为

$$\begin{cases} g(e_{\alpha_{i_p}+\alpha_{i_q}},e_{\alpha_{i_1}},\ldots,\widehat{e}_{\alpha_{i_p}},\cdots,\widehat{e}_{\alpha_{i_q}},\cdots,e_{\alpha_{i_s}}) &= (-1)^{p+q}\frac{\Phi(e_{\alpha_{i_1}},\ldots,e_{\alpha_{i_s}})}{c(\alpha_{i_p},\alpha_{i_q})}m,\\ g(\alpha_{j_1},\ldots,\alpha_{j_s}) &= 0,\quad \text{otherwise.}\end{cases}$$

那么，根据 g 的选取，我们得到

$$(f-d^{s-1}g)(e_{\alpha_{i_1}},\ldots,e_{\alpha_{i_s}})=0.$$

因此， $f = d^{s-1}g$，且余循环 f是一个 s-余边界。这证明了 $H^s(\mathcal{N},\mathcal{M})^{\mathcal{T}} = 0$。 □

命题 3.5. 设 $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$满足引理 *3.4* 的条件，且 $H^i(\mathcal{R}_{\mathcal{T}},\mathcal{R}_{\mathcal{T}}) = 0$ 对所有 $0 \le i \le s-1$ 成立。则 $H(\mathcal{N},\mathcal{M})^{\mathcal{T}} = 0$。

证明。 由于 $H^i(\mathcal{N},\mathcal{R}_{\mathcal{T}})^{\mathcal{T}} = 0$ 对所有 $i \ge s+1$ 成立，只需证明 $H^s(\mathcal{N},\mathcal{R}_{\mathcal{T}})^{\mathcal{T}} = 0$，而这可直接由引理 3.4 得出。□

为便于分析高阶上同调群，我们现在给出如下结果。

推论 3.6. 设 $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$为一个可解李代数，其幂零根 $\mathcal{N}$的幂零指数 $(s+1)$ 满足 $H^i(\mathcal{R}_{\mathcal{T}},\mathcal{R}_{\mathcal{T}}) = 0$ 对所有 $0 \le i \le s-1$。则 $H(\mathcal{R}_{\mathcal{T}},\mathcal{R}_{\mathcal{T}}) = 0$。

下面我们给出一个满足推论 3.6 之假设的例子。

例 3.7。 设 $\mathfrak{n}$为具有如下乘法表的幂零李代数

$$\begin{cases} [e_1, e_j] &= e_{j+1}, & 2 \le j \le n_1, \\ [e_1, e_{n_1+\cdots+n_i+j}] &= e_{n_1+\cdots+n_i+j+1}, & 2 \le j \le n_{i+1}, \quad 1 \le i \le k-1. \end{cases}$$

其中，对所有 $1 \le i \le k$，均有 $2 \le n_i \le 4$。

对于参数 n_i 的任意取值，这个李代数在 *[2]* 中被引入为模型幂零李代数。该文证明，对于 $\mathfrak{n}$的可解扩张 $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$，有 $H^p(\mathcal{R}_{\mathcal{T}},\mathcal{R}_{\mathcal{T}}) = 0, 0 \le p \le 3$.于是，推论 *3.6* 的断言推出 $H(\mathcal{R}_{\mathcal{T}},\mathcal{R}_{\mathcal{T}}) = 0.$

4. 极大秩 2 可解李代数的上同调刚性

本节继续研究极大秩幂零李代数的极大可解扩张的上同调刚性。我们关注幂零根由两个元素生成且秩为二的可解李代数 $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$。因此， $\mathcal{N} = \langle e_{\alpha_1},\ e_{\alpha_2}\rangle$. 与定理 3.2 的证明类似，一般的$\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$-模 $\mathcal{M}$可归结为一维情形。因此，不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{M} = \mathbb{C}m$，其中 m 在 $\mathcal{T}$的作用下具有权 Λ。

我们用 $c^{s,\ t}_{i,\ j}$ 表示由乘积确定的结构常数

$$[e_{i\alpha_1+j\alpha_2},\, e_{s\alpha_1+t\alpha_2}] = c^{s,t}_{i,j}\, e_{(i+s)\alpha_1+(j+t)\alpha_2}.$$

并用 $\Phi^{s,\ t}_{i,\ j}$表示与余循环 $f \in H^2(\mathcal{N},\ \mathcal{M})^{\mathcal{T}}$ 相关联的系数，其定义为

$$f(e_{i\alpha_1+j\alpha_2},\, e_{s\alpha_1+t\alpha_2}) = \begin{cases} \Phi^{s,t}_{i,j}\, m, & \text{if } (i+s)\alpha_1 + (j+t)\alpha_2 = \Lambda, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

此外，对于权 $\mu = p\alpha_1 + q\alpha_2 \in W$，我们引入记号

$$\operatorname{diff}(\mu) = |p-q|.$$

引理 4.1. 设 $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$是一个可解李代数，其幂零根为 $\mathcal{N}$，且幂零指数至多为 5。则 $H^2(\mathcal{N},\mathcal{M})^{\mathcal{T}} = 0$。证明。 根据幂零指数的假设，所有权的集合满足

$$W \subseteq \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2,\ 2\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1+2\alpha_2,\ 3\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1+3\alpha_2,\ 2\alpha_1+2\alpha_2\}.$$

固定 $\Lambda = (i+s)\alpha_1 + (j+t)\alpha_2 \in W \setminus \{2\alpha_1+2\alpha_2\}$，其中 $i\alpha_1 + j\alpha_2,\quad s\alpha_1 + t\alpha_2 \in W$。由于元素 e_Λ 可以唯一地表示为乘积

$$e_\Lambda = [e_{i\alpha_1+j\alpha_2},\, e_{s\alpha_1+t\alpha_2}],$$

因此，相应的结构常数 $c^{s,\ t}_{i,\ j}$ 非零。

定义一个上链 $g \in C^1(\mathcal{N},\mathcal{M})$，令其为

$$g(e_\Lambda) = -\Phi^{s,t}_{i,j} m / c^{s,t}_{i,j} \quad \text{and} \quad g(e_\rho) = 0, \quad \rho \ne \Lambda.$$

直接计算可得 $f = d^1 g$.

现在假设 $\Lambda = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 \in W$。这些等式

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2) = 0, \qquad Z(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2) = 0,$$

意味着

$$c^{1,0}_{1,2}\,\Phi^{2,1}_{0,1} = c^{0,1}_{2,1}\,\Phi^{1,2}_{1,0}, \qquad \text{with} \qquad c^{1,2}_{1,0} c^{2,1}_{0,1} \ne 0.$$

再次定义上链 $g \in C^1(\mathcal{N},\ \mathcal{M})$

$$g(e_\Lambda) = -\Phi^{1,2}_{1,0} m / c^{1,2}_{1,0} \quad \text{and} \quad g(e_\rho) = 0, \quad \rho \neq \Lambda,$$

由此再次可得，$f = d^1 g$. 总之，每个 2-上循环都是一个 2-上边界。 □

应用注 2.2，我们得到以下推论。

推论 4.2。设 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$ 是一个可解李代数，其幂零根 $\mathcal{N}$ 的幂零指数至多为5。那么 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$ 是上同调刚性的。

现在我们给出证明主要定理时将用到的关键引理。首先，对每个整数 $i \geq 1$，定义以下集合：

$$W_i = \{\mu \in W \mid \text{length}(\mu) \leq i\}, \qquad V_i = \{\mu \in W \mid \text{length}(\mu) = i\}.$$

引理 4.3。设 $3\alpha_1 + \alpha_2$ 和 $\alpha_1 + 3\alpha_2$ 均不属于 W。则以下性质成立：

(i) 对任意 $\mu \in W_6$，$\text{diff}(\mu) \leq 1$。(ii) 对任意权 τ_1、$\tau_2 \in W$，若 $\text{length}(\tau_1) + \text{length}(\tau_2) \leq 6$，且 $\tau_1 + \tau_2 \in W$，则李括号 $[e_{\tau_1}, e_{\tau_2}]$ 为零，当且仅当 $\text{diff}(\tau_1) + \text{diff}(\tau_2) = 0$。

证明。直接验证可知，该引理对所有权 $\mu \in V_i$, $i \leq 3$ 均成立。通过常规的归纳论证，并注意到 $3\alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1 + 3\alpha_2$ 不属于 W，可推出

$$n\alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 + n\alpha_2 \notin V_{n+1} \quad \text{for all } n \geq 4.$$

因此，我们需要在 V_k 且满足 $4 \leq k \leq 6$ 的情况下证明该结论。

情形 V_4：显然，对于权 $\mu = 2\alpha_1 + 2\alpha_2$，$\text{diff}(\mu) = 0$；因此 μ 满足性质 (i)。等式 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) = 0$ 表明，两个系数 $c^{0}_{,1\ 21}$ 和 $c^{1}_{,0\ 12}$ 均非零。因此，当 (τ_1, τ_2) 为 $(2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2)$ 或 $(\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1)$ 时，$\text{diff}(\tau_1) + \text{diff}(\tau_2) = 2$。

情形 V_5：我们有 $V_5 \subseteq \{3\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2\}$。因此，对于每个 $\mu \in V_5$，$\text{diff}(\mu) = 1$。假设 $3\alpha_1 + 2\alpha_2 \in V_5$。由于元素 $e_{3\alpha_1+2\alpha_2}$ 只能由其中一个括号产生

$$[e_{\alpha_1}, e_{2\alpha_1+2\alpha_2}] \quad [e_{\alpha_1+\alpha_2}, e_{2\alpha_1+\alpha_2}],$$

那么在两种情形下，我们都有 $\text{diff}(\tau_1) + \text{diff}(\tau_2) = 1$。

由 α_1 和 α_2 的对称性，情形 $2\alpha_1 + 3\alpha_2 \in V_5$ 验证了引理中的断言。

情形 V_6：由于 $V_6 \subseteq \{4\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + 4\alpha_2, 3\alpha_1 + 3\alpha_2\}$，我们考虑各种可能的情形。

等式 $L(\alpha_1,\ \alpha_1 + \alpha_2,\ 2\alpha_1 + \alpha_2) = 0$ 迫使 $c^{3}_{,\ 21,\ 0} = 0$。然而，当且仅当 $c^{3}_{,\ 21,\ 0} \neq 0$ 时，$4\alpha_1 + 2\alpha_2 \in V_6$。这一矛盾表明 $4\alpha_1 + 2\alpha_2 \notin V_6$。由对称性，我们也得到 $2\alpha_1 + 4\alpha_2 \notin V_6$。

令 $3\alpha_1 + 3\alpha_2 \in W_6$。这意味着以下结构常数中至少有一个非零：

$$c^{2,2}_{1,1}, \quad c^{2,3}_{1,0}, \quad c^{3,2}_{0,1}, \quad c^{1,2}_{2,1}.$$

我们考察权的各种分解所对应的雅可比恒等式及由此得到的约束。

雅可比恒等式				约束
$L(\alpha_1,\ \alpha_2,\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2)$	$=$	0	$\Rightarrow$	$c^{2,2}_{1,1}c^{0,1}_{1,0} = c^{2,3}_{1,0}c^{2,2}_{0,1} + c^{3,20}_{,1}c^{1,02}_{,2},$
$L(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2)$	$=$	0	$\Rightarrow$	$c^{2,2}_{1,1}c^{1,2}_{1,0} = c^{2,3}_{1,0}c^{1,2}_{1,1} + c^{2,1}_{,1}c^{1,11}_{,0},$
$L(\alpha_2,\ \alpha_1 + \alpha_2,\ 2\alpha_1 + \alpha_2)$	$=$	0	$\Rightarrow$	$c^{2,2}_{1,1}c^{2,1}_{0,1} = c^{3,2}_{0,1}c^{2,1}_{1,1} + c^{1,22}_{,1}c^{1,10}_{,1},$
$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2)$	$=$	0	$\Rightarrow$	$c^{1,21}_{,1}c^{0,\ 1}_{1.0} + c^{1,01}_{,2}c^{0,\ 12}_{,2} = 0,$
$L(\alpha_1,\ \alpha_2,\ 2\alpha_1 + \alpha_2)$	$=$	0	$\Rightarrow$	$c^{2,\ 11}_{,1}c^{0,\ 1}_{1.0} + c^{2,\ 10}_{,1}c^{1,\ 02}_{,2} = 0,$
$L(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_1 + \alpha_2)$	$=$	0	$\Rightarrow$	$c^{0,1}_{1,1}c^{1,2}_{1,0} + c^{1,\ 0}_{,1}c^{0,\ 12}_{,1} = 0.$

对所得约束的分析表明，$c^{2}_{,2\ 1,1} = 0$。此外，如果常数 $c^{2}_{,3\ 10,}$、$c^{3}_{,2\ 01,}$ 或 $c^{1,2}_{,2\ 21,}$ 中任意一个为零，则它们必定全都为零。这与假设 $3\alpha_1 + 3\alpha_2 \in V_6$ 矛盾。因此，这三个常数均非零，从而保证 $3\alpha_1 + 3\alpha_2 \in W_6$，且其满足性质 (i) 和 (ii)。□

现在我们 陈述辅助引理，它在本节主要结果的证明中起着关键作用 n.

引理 4.4. 设 $3\alpha_1+\alpha_2$ 和 $\alpha_1+3\alpha_2$ 不属于 W。则有以下性质：

(i) 对于任意 $\mu\in W$，$\mathrm{diff}(\mu)\le 1$。(ii) 对于任意权 $\tau_1,\tau_2\in W$，李括号 $[e_{\tau_1},e_{\tau_2}]$ 为零，当且仅当 $\mathrm{diff}(\tau_1)+\mathrm{diff}(\tau_2)=0$。

证明。 我们通过对 V_s中的指标 s 使用归纳法来证明。对于满足 $s\le 5$的任意 $\mu\in V_s$，性质 (i) 和 (ii) 由引理 4.3 得出。

假设性质 (i) 和 (ii) 对 W_s 中的所有权均成立，并证明它们对 W_{s+1}中的所有权也成立。我们区分 $s+1$.的奇数值和偶数值

情形 $s+1=2t+1$。考虑到归纳假设，我们需要证明引理对 μ 中属于V_{2t+1}的权成立。显然，我们有

$$V_{2t+1}\subseteq\{(t+1+i)\alpha_1+(t-i)\alpha_2,\ (t-i)\alpha_1+(t+1+i)\alpha_2\mid 0\le i\le t-1\}. \tag{8}$$

第 (i) 部分：反设存在 $\mu\in V_{2t+1}$，使得 $\mathrm{diff}(\mu)>1$。那么，由 (8) 可得 $\mathrm{diff}(\mu)\ge 3$。考虑分解 $\mu=\mu_1+\mu_2$，其中 $\mu_1,\ \mu_2\in W$。那么，对于 $i=1,\ 2$，有 $\mathrm{length}(\mu_i)\le 2t$。

由归纳假设可知，对于 $i=1,\ 2$，$\mathrm{diff}(\mu_i)\le 1$。于是，不等式 $\mathrm{diff}(\mu)\le\mathrm{diff}(\mu_1)+\mathrm{diff}(\mu_2)$ 导致矛盾。

第 (ii) 部分：由 Part (i)，对于 $s+1=2t+1$，我们可得

$$V_{2t+1}\subseteq\{(t+1)\alpha_1+t\alpha_2,\ t\alpha_1+(t+1)\alpha_2\}. \tag{9}$$

嵌入 (9) 推出：如果 $\tau_1+\tau_2\in V_{2t+1}$，则 $\mathrm{diff}(\tau_1)+\mathrm{diff}(\tau_2)\ne 0$。

由于 $V_{2t+1}\ne\emptyset$，结构常数 $\{c_{p,p-1}^{t-p+1,t-p+1},\ c_{p-1,p}^{t-p+1,t-p+1}\mid 1\le p\le t\}$ 中至少有一个非零。

通过考虑以下等式：

$$\begin{cases} L(\alpha_1,p\alpha_1+(p-1)\alpha_2,(t-p)\alpha_1+(t-p+1)\alpha_2)=0,\\ L(\alpha_2,(p-1)\alpha_1+p\alpha_2,(t-p+1)\alpha_1+(t-p)\alpha_2)=0,\end{cases}$$

对于 $2\le p\le t$，我们得到

$$\begin{cases} c_{t-p,t-p+1}^{1,0}c_{t-p+1,t-p+1}^{p,p-1}=c_{t-p,t-p+1}^{p,p-1}c_{t,t}^{1,0},\\ c_{t-p+1,t-p}^{0,1}c_{t-p+1,t-p+1}^{p-1,p}=c_{t-p+1,t-p}^{p-1,p}c_{t,t}^{0,1},\end{cases} \tag{10}$$

由于归纳假设，系数 $c^{1}_{0,t-p,t-p+1}$, $c^{p}_{p-1,t-p,t-p+1}$ $c^{0}_{1,t-p+1,t-p}$ 和 $c^{p}_{p,t-p+1,t-p}$ 均非零。

因此，由 (10) 可知，$(t+1)\alpha_1+t\alpha_2\in V_{2t+1}$ 当且仅当 $c^{p-1}_{p,t-p+1,t-p+1}\ne 0$ 对所有$1\le p\le t$. 成立。由于 α_1 和 α_2 之间具有对称性，我们得到 $t\alpha_1+(t+1)\alpha_2\in V_{2t+1}$ 当且仅当$c^{p}_{p-1,t-p+1,t-p+1}\ne 0$ 对所有 $1\le p\le t$. 成立。因此，我们证明了 $[e_{\tau_1},e_{\tau_2}]\ne 0$ 当且仅当 $\tau_1+\tau_2\in V_{2t+1}$，从而完成了针对 $s=2t+1$ 的 (ii) 的证明。

情形 $s+1=2t+2$。由归纳假设和前一种情形，我们推得

$$V_{2t+2}\subseteq\{(t+1+i)\alpha_1+(t+1-i)\alpha_2,\ (t+1-i)\alpha_1+(t+1+i)\alpha_2\mid 0\le i\le t\}.$$

第 (i) 部分：设 $\mu\in V_{2t+2}$ 满足 $\mathrm{diff}(\mu)\ge 2$。首先，假设 $\mathrm{diff}(\mu)>2$，即 $\mathrm{diff}(\mu)\ge 4$。对于分解 $\mu=\mu_1+\mu_2$，我们推得 $\mathrm{length}(\mu_i)\le 2t+1$，也就是说，$\mu_1,\ \mu_2\in W_{2t+1}$。应用归纳假设和前一种情形，我们得到 $\mathrm{diff}(\mu_i)\le 1$。不等式 $\mathrm{diff}(\mu)\le\mathrm{diff}(\mu_1)+\mathrm{diff}(\mu_2)$ 表明，$\mathrm{diff}(\mu)>2$ 是不可能的。

设 $\mathrm{diff}(\mu)=2$。则有

$$V_{2t+2}\subseteq\{(t+2)\alpha_1+t\alpha_2,\ t\alpha_1+(t+2)\alpha_2,\ (t+1)\alpha_1+(t+1)\alpha_2\}. \tag{11}$$

设 $\mu=(t+2)\alpha_1+t\alpha_2\in V_{2t+2}$。注意，元素 $e_{(t+2)\alpha_1+t\alpha_2}$ 只能由以下形式的乘积得到：

$$[e_{p\alpha_1+(p-1)\alpha_2},e_{(t+2-p)\alpha_1+(t+1-p)\alpha_2}]=c_{p,p-1}^{t+2-p,t+1-p}e_{(t+2)\alpha_1+t\alpha_2},\ \ 1\le p\le t. \tag{12}$$

通过考察

$$L(\alpha_1,p\alpha_1+(p-1)\alpha_2,(t-p+1)\alpha_1+(t-p+1)\alpha_2)=0,\quad 2\le p\le t,$$

我们得到以下关系

$$c_{t+1-p,t+1-p}^{1,0}c_{t+2-p,t+1-p}^{p,p-1}=c_{t+1-p,t+1-p}^{p,p-1}c_{t+1,t}^{1,0}.$$

根据归纳假设，我们有 $c^{1,\ \overset{0}{\ }}_{t+1-p,\ t+1-p} \neq 0$ 以及 $c^{p,\ \overset{p-1}{\ }}_{t+1-p,\ t+1-p} \neq 0$。由此可知， $\mu \in V_{2t+2}$ 当且仅当 $c^{p,\ \overset{p-1}{\ }}_{t+2-p,\ t+1-p} \neq 0$对所有 $1 \leq p \leq t$.

应用等式

$$\begin{cases} L(\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, t\alpha_1+(t-1)\alpha_2)) & = & 0, \\ L(\alpha_1, 2\alpha_1+\alpha_2, (t-1)\alpha_1+(t-1)\alpha_2) & = & 0, \end{cases}$$

对 $s+1=2t+1$ 使用第 (ii) 部分中的相同论证，可以得到 $\mu \notin W$。根据对称性，我们排除$\mu = t\alpha_1 +(t+2)\alpha_2$。因此， $V_{2t+2} \subseteq \{(t+1)\alpha_1+(t+1)\alpha_2\}$，且 (i) 对 W_{2t+2} 成立。

第 (ii) 部分：令 $\tau_1+\tau_2 \in V_{2t+2}$ and $\mathrm{diff}(\tau_1) + \mathrm{diff}(\tau_2) = 0.$。我们从区间 $1 \leq k < [\,^{t+1}_{2}]$. 中固定 k。注意，权

$$(t-1)\alpha_1+(t+1)\alpha_2,\ (t-2k+3)\alpha_1+(t-2k+1)\alpha_2,\ (t-2i-1)\alpha_1+(t-2i+1)\alpha_2$$

差值大于 1 且长度小于 $2t+1$。因此，根据归纳假设，它们不在 W 中。因此，考虑等式

$$L\big(a\alpha_1+b\alpha_2,\ c\alpha_1+d\alpha_2,\ f\alpha_1+g\alpha_2\big) = 0$$

对于以下三元组的选择 $\{(a,\ b),\ (c,\ d),\ (f,\ g)\}$:

$$\{(1,0),\ (k-1,k),\ (t-k,\ t+1-k)\},$$

$$\{(i,i-1),\ (k-i,k-i+1),\ (t-2k+i+1,\ t-2k+i)\}$$

$$\{(i+1,i),\ (k-i-1,k-i),\ (t-k-i,\ t-k-i+1)\},$$

$$\{(k,k),\ (j,j-1),\ (t-2k-j+1,\ t-2k-j+2)\},$$

由 $1 \leq i \leq k-1$ 和 $1 \leq j \leq t+1-2k$，我们得到以下等式方程组

$$\begin{cases} c^{t-k,t-k+1}_{k,k} & = & -\dfrac{c^{1,0}_{t-k,t-k+1}\, c^{k-1,k}_{t-k+1,t-k+1}}{c^{k-1,k}_{1,0}}, & \\ c^{t-2k+i+1,t-2k+i}_{k,k} & = & -\dfrac{c^{t-2k+i+1,t-2k+i}_{k-i,k-i+1}\, c^{i,i-1}_{t-k+1,t-k+1}}{c^{k-i,k-i+1}_{i,i-1}}, & 1 \leq i \leq k-1, \\ c^{t-k-i,t-k-i+1}_{k,k} & = & -\dfrac{c^{i+1,i}_{t-k-i,t-k-i+1}\, c^{k-i-1,k-i}_{t-k+1,t-k+1}}{c^{k-i-1,k-i}_{i+1,i}}, & 1 \leq i \leq k-1, \\ c^{t-2k-i+1,t-2k-i+2}_{k,k} & = & \dfrac{c^{i,i-1}_{k,k}\, c^{t-2k-i+1,t-2k-i+2}_{k+i,k+i-1}}{c^{i,i-1}_{t-k-i+1,t-k-i+2}}, & 1 \leq i \leq t-2k+1. \end{cases} \tag{13}$$

为简化后续计算中出现的表达式，我们引入以下记号:

$$\begin{aligned} U_{s,r} &:= s\, c^{1,0}_{t-k+1,t-k+1}\, c^{k-1,k}_{t-k+2,t-k+1} + r\, c^{t-k+1,t-k+1}_{k-1,k}\, c^{1,0}_{t,t+1}, \quad s,r \in \mathbb{N}, \\ C_{p,q} &:= \frac{c^{t-k-p+1,t-k-p+2}_{p,p-1}\, c^{q,q-1}_{t-k+1,t-k+1}}{c^{k-q,k-q+1}_{q,q-1}}\, c^{k-q,k-q+1}_{t-k+q+1,t-k+q}. \end{aligned}$$

接下来，由对 $1 \leq i \leq k$ 和 $1 \leq j \leq t+1-k$成立的等式方程组,

$$\begin{cases} L\big((t-k+1)\alpha_1+(t-k+1)\alpha_2,\ i\alpha_1+(i-1)\alpha_2,\ (k-i)\alpha_1+(k+1-i)\alpha_2\big) = 0, \\ L\big(k\alpha_1+k\alpha_2,\ j\alpha_1+(j-1)\alpha_2,\ (t-k+1-j)\alpha_1+(t-k+2-j)\alpha_2\big) = 0, \end{cases}$$

我们得到，对于 $2 \leq i \leq k$,

$$\begin{cases} U_{1,1} + c^{k-1,k}_{1,0}\, c^{t-k+1,t-k+1}_{k,k} = 0, \\ U_{1,1} + \dfrac{c^{k-1,k}_{1,0}}{c^{k-i,k-i+1}_{i,i-1}} \Big(c^{i,i-1}_{t-k+1,t-k+1}\, c^{k-i,k-i+1}_{t-k+i+1,t-k+i} + c^{t-k+1,t-k+1}_{k-i,k-i+1}\, c^{i,i-1}_{t-i+1,t-i+2} \Big) = 0, \\ U_{1,1} + \dfrac{c^{k-1,k}_{1,0}}{c^{t-k-j+1,t-k-j+2}_{j,j-1}} \Big(c^{j,j-1}_{k,k}\, c^{t-k-j+1,t-k-j+2}_{k+j,k+j-1} + c^{k,k}_{t-k-j+1,t-k-j+2}\, c^{j,j-1}_{t-j+1,t-j+2} \Big) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

为方便起见，我们分别将 (14) 中的第一、第二和第三种等式类型记为 A_1、 A_i 和 B_j。

接下来，我们将按以下步骤分析方程组 (14)：

步骤 1：将来自 A_1 的系数 $c_{k\ k}^{t-k+1\ t-k+1}{}_{,,}$代入 B_1，得到

$$c_{k,k}^{1,0}c_{t-k+1,t-k+1}^{t-k,t-k+1}c_{t-k+1,t-k+1}^{k-1,k}+c_{k,k}^{t-k,t-k+1}U_{1,2}=0. \tag{15}$$

然后，以 (15) 作为变量 j 的归纳基，并在每一步归纳中使用 (13) 中的第四个等式，我们得到 B_{jk+1} 的以下一般表达式，该表达式对所有 $0\le j\le {}^{t+1-i}_{k}$ 均成立：

$$c_{t-(j+1)k,t-(j+1)k+1}^{(j+1)k+1,(j+1)k}=\frac{c_{jk+1,jk}^{t-(j+1)k,t-(j+1)k+1}}{c_{1,0}^{k-1,k}\,c_{k,k}^{jk+1,jk}}U_{j+1,j+2}. \tag{16}$$

步骤 2：对于所有 $2\le i\le k$，从等式 A_i 中提取系数 $c^{\,i}{}_{,t-i+1,\,t-i+2}^{\,i-1}$，并将其与 (13) 中的第三个等式一起代入相应的 B_i。于是，我们得到形式如下的 B_i 的等式

$$c_{t-k-i+1,t-k-i+2}^{k+i,k+i-1}=\frac{2c_{i,i-1}^{t-k-i+1,t-k-i+2}U_{1,1}-C_{i,i}c_{1,0}^{k-1,k}}{c_{1,0}^{k-1,k}\,c_{k,k}^{i,i-1}}. \tag{17}$$

以 (17) 作为变量 j 的归纳基，并在每一步归纳中应用 (13) 中的第四个等式，我们推导出 B_{jk+i} 的形式，该形式对所有 $2\le i\le k$ 和 $0\le j\le {}^{t+1-i}_{k}$ 均成立：

$$c_{t-(j+1)k-i+1,t-(j+1)k-i+2}^{(j+1)k+i,(j+1)k+i-1}=\frac{(j+2)\,c_{jk+i,jk+i-1}^{t-(j+1)k-i+1,t-(j+1)k-i+2}U_{1,1}-C_{jk+i,i}\,c_{1,0}^{k-1,k}}{c_{1,0}^{k-1,k}\,c_{k,k}^{jk+i,jk+i-1}}. \tag{18}$$

步骤 3：开始这一步之前，我们重新编号式 (14) 中最后的 k 个等式，假设 $B_{t-2k+1+p}$ 满足 $1\le p\le k$，其中 B_{jk+i_0+p}，对某个固定的 $1\le i_0\le k$ 和 $j={}^{t-2k-i_0+1}_{k}$。此外，我们定义 s_l，使得

$$\left\lfloor\frac{lk-1}{i_0}\right\rfloor<s_l\le\left\lfloor\frac{lk-1}{i_0}\right\rfloor+1,\quad 1\le l\le r,$$

其中 $r=\ {}^{i_0}\!/_{\gcd(k,i_0)}$.

代入 l 式 (13) 的第二个等式到 (18) 中，对于 B_{jk+i_0+1}，我们得到归纳法的基础，它给出 s_1-1 以建立如下形式的 B_{jk+li_0+1} 表达式：

$$c_{t-k+li_0+2,t-k+li_0+1}^{k-li_0-1,k-li_0}=\frac{c_{li_0+1,li_0}^{k-li_0-1,k-li_0}}{c_{1,0}^{k-1,k}\,c_{t-k+1,t-k+1}^{li_0+1,li_0}}U_{l(j+2)+1,l(j+2)}. \tag{19}$$

假设 (19) 对所有 $1\le l\le s_1-2$ 都成立。考虑 (18) 中给出的 $B_{jk+(l+1)i_0+1}$ 表达式。利用 (19) 直接代入项 $c_{t-k+li_0+2}^{k-li_0-1\ k-li_0}{}_{,,t-k+li_0+1}$，并通过 (13) 中的第二个等式替换 $c_{k\ k}^{t-2k+li_0+2\ t-2k+li_0+1}{}_{,,}$，可得到 $B_{j_0k+(l+1)i_0+1}$ 的形式 (22)。

现在，考虑 (18) 中的表达式 $B_{j_0k+s_1i_0+1}$。对于情形 $l=s_1-1$，将 $c_{t-k+\ s_1-1\ i_0+2\ t-k+}^{k-(s_1-1\ i_0-1\ k-\ s_1-1\ i_0}{}_{),}$ $_{()(),(s_1-1)i_0+1}$ 替换为 (22) 的右端，并再次对结构常数 $c_{k\ k}^{t-2k+(s_1-1\ i_0+2\ t-2k+\ s_1-1\ i_0+1}{}_{),(),,}$ 应用 (13) 中的第二个等式，我们得到 $B_{j_0k+s_1i_0+1}$ 的以下表达式：

$$c_{t-2k+s_1i_0+2,t-2k+s_1i_0+1}^{2k-s_1i_0-1,2k-s_1i_0}=\frac{c_{s_1i_0-k+1,s_1i_0-k}^{2k-s_1i_0-1,2k-s_1i_0}}{c_{1,0}^{k-1,k}\,c_{t-k+1,t-k+1}^{s_1i_0-k+1,s_1i_0-k}}U_{s_1(j_0+2)+2,s_1(j_0+2)+1} \tag{20}$$

接下来，我们利用 (18) 分析 $B_{j_0k+(s_1+1)i_0+1-k}$。将系数 $c_{t-2k+s_1i_0+2}^{2k-s_1i_0-1\ \ 2k-s_1i_0}{}_{,,\ t-2k+s_1i_0+1}$ 替换为 (20) 的右端，并通过 (13) 的第二个等式重写 $c_{k\ k}^{j_0k+\ s_1+1\ \ i_0-k+1\ \ j_0k+\ s_1+1\ \ i_0-k}{}_{(),(),}$，得到$B_{j_0k+(s_1+1)i_0+1-k}$：

$$\begin{aligned}c_{t-2k+(s_1+1)i_0+2,\ t-2k+(s_1+1)i_0+1}^{2k-(s_1+1)i_0-1,\ 2k-(s_1+1)i_0}=&\frac{c_{(s_1+1)i_0-k+1,\ (s_1+1)i_0-k}^{2k-(s_1+1)i_0-1,\ 2k-(s_1+1)i_0}}{c_{1,0}^{k-1,k}\,c_{t-k+1,\ t-k+1}^{(s_1+1)i_0-k+1,\ (s_1+1)i_0-k}}\\&\times U_{(s_1+1)(j_0+2)+2,\ (s_1+1)(j_0+2)+1}.\end{aligned} \tag{21}$$

现在我们对 s_q for $1\le q\le r-1$ 进行归纳法。以（19）和（20）作为归纳法的基础，我们建立等式 $B_{j_0k+\ (s_q+u)\ \ i_0+1-qk}$ 在 $1\le u\le s_{q+1}-s_q-1$ 下以及情形

$q \neq r-1$ of $B_{(j_0+1)\ k+s_{q+1}i_0+1-\ (q+1)\ k}$ 的显式形式。更确切地说，我们得到

$$c^{(q+1)k-(s_q+u)i_0-1,\ (q+1)k-(s_q+u)i_0}_{t-(q+1)k+(s_q+u)i_0+2,\ t-(q+1)k+(s_q+u)i_0+1} = \frac{c^{(q+1)k-(s_q+u)i_0-1,\ (q+1)k-(s_q+u)i_0}_{(s_q+u)i_0-qk+1,\ (s_q+u)i_0-qk}}{c^{k-1,k}_{1,0}\, c^{(s_q+u)i_0-qk+1,\ (s_q+u)i_0-qk}_{t-k+1,\ t-k+1}} \times U_{(s_q+u)(j_0+2)+q,\ (s_q+u)(j_0+2)+q-1}, \tag{22}$$

and

$$c^{(q+2)k-s_{q+1}i_0-1,\ (q+2)k-s_{q+1}i_0}_{t-(q+2)k+s_{q+1}i_0+2,\ t-q+2)k+s_{q+1}i_0+1} = \frac{c^{(q+2)k-s_{q+1}i_0-1,\ (q+2)k-s_{q+1}i_0}_{s_{q+1}i_0-(q+1)k+1,\ s_{q+1}i_0-(q+1)k}}{c^{k-1,k}_{1,0}\, c^{s_{q+1}i_0-(q+1)k+1,\ s_{q+1}i_0-(q+1)k}_{t-k+1,\ t-k+1}} \times U_{s_{q+1}(j_0+2)+q+1,\ s_{q+1}(j_0+2)+q}. \tag{23}$$

假设对所有 $1 \leq u \leq s_{q+1}-s_q-2$，等式 $B_{j_0k+(s_q+u)i_0+1-qk}$ 可写成式 (22)。

接下来，我们利用式 (18) 考虑等式$B_{j_0k+(s_{q+1}+1)i_0+1-(q+1)k}$。分别将结构常数 $c^{(q+2)k-s_{q+1}i_0-1,\ (q+2)k-s_{q+1}i_0}_{t-(q+2)k+s_{q+1}i_0+2,\ t-(q+2)k+s_{q+1}i_0+1}$ and $c^{t-(q+3)k+s_{q+1}i_0+2,t-(q+3)k+s_{q+1}i_0+1}_{k,k}$，代入式 (23) 的右端以及式 (13) 中的第二个等式，我们得到等式

$$B_{j_0k+(s_{q+1}+1)i_0+1-(q+1)k}$$

其所得表达式与式 (22) 的形式相同。

A假设对所有 $1 \leq u \leq s_{q+2}-s_{q+1}-2$，等式 $B_{j_0k+(s_{q+1}+u)i_0+1-(q+1)k}$ 具有式 (22)。

考虑由（18）给出的形式$B_{j_0k+(s_{q+1}+u+1)i_0+1-(q+1)k}$。然后，将下列结构常数替换为

$$c^{(q+2)k-(s_{q+1}+u)i_0-1,(q+2)k-(s_{q+1}+u)i_0}_{t-(q+2)k+(s_{q+1}+u)i_0+2,t-(q+2)k+(s_{q+1}+u)i_0+1} \quad \text{and} \quad c^{t-(q+3)k+(s_{q+1}+u)i_0+2,t-(q+3)k+(s_{q+1}+u)i_0+1}_{k,k},$$

分别代入（22）的右端和（13）的第二个等式，我们得到

$$B_{j_0k+(s_{q+1}+u+1)i_0+1-(q+1)k}$$

如（22）所示的形式。

接下来，将结构常数的表达式 $c^{(q+2)k-(s_{q+2}-1)i_0-1,(q+2)k-(s_{q+2}-1)i_0}_{t-(q+2)k+(s_{q+2}-1)i_0+2,t-(q+2)k+(s_{q+2}-1)i_0+1}$ and $c^{t-(q+3)k+(s_{q+2}-1)i_0+2,t-(q+2)k+(s_{q+2}-1)i_0+1}_{k,k}$，分别将（22）和（13）的第二个等式代入$B_{(j_0+1)k+s_{q+2}i_0-(q+2)k+1}$（其形式由（18）给出），便立即得到$B_{(j_0+1)k+s_{q+2}i_0-(q+2)k+1}$ 如（23）所示的形式。因此，我们证明了（22）和（23）。

最后，我们分析（16）中的等式$B_{(j_0+1)k+1}$。将结构常数 $c^{i_0-1}_{,t-i_0+2,t-i_0+1}$ 替换为（22）中等式的右端，并采用参数赋值 $q=r-1$ 和 $u=s_r-s_{r-1}-1$，再结合由关系式推导出的 $c^{i_0-1}_{,t-k-i_0+2,t-k-i_0+1}$ 的表达式

$$L\big((i_0-1,i_0),\ (k-i_0+1,k-i_0),\ (t-k-i_0+2,t-k-i_0+1)\big)=0,$$

我们得到等式的如下形式 $B_{(j_0+1)k+1}$:

$$\frac{c^{i_0-1,i_0}_{k-i_0+1,k-i_0}}{c^{k-i_0+1,k-i_0}_{t-k+1,t-k+1}} \times \big(s_r(j_0+2)+r-1\big)\,U_{1,1}=0.$$

由于 $c^{i_0-1}_{,k-i_0+1,k-i_0}$ 和 $c^{k-i_0+1\ k-i_0}_{t-k+1\ t-k+1}$,,均非零，因此得到 $U_{1,1}=0$。由等式 A_1，我们得到 $c^{t-k+1\ t-k+1\ ,,k}_{k}=0$. 因此，对于任意选取的 τ_1 和 τ_2，只要 $\mathrm{diff}(\tau_1)+\mathrm{diff}(\tau_2)=0$，我们便可得出结论$[e_{\tau_1},e_{\tau_2}]=0$。

现在证明“若”这一部分。假设 $\tau_1,\tau_2\in W$，其中 $\tau_1+\tau_2\in V_{2t+2}$ 满足 $\mathrm{diff}(\tau_1)+\mathrm{diff}(\tau_2)\neq 0$。那么，不失一般性，可以假设权 τ_1 和 τ_2 可写成如下形式:

$$\tau_1=p\alpha_1+(p-1)\alpha_2,\ \tau_2=(t-p+1)\alpha_1+(t-p+2)\alpha_2,\ 1\leq p\leq t+1.$$

由这些等式

$$L\big((1,0),(p-1,p-1),(t-p+1,t-p+2)\big)=0,\quad 2\leq p\leq t+1,$$

我们得到

$$c^{t-p+1,t-p+2}_{p,p-1}=\frac{c^{p-1,p-1}_{t-p+1,t-p+2}}{c^{p-1,p-1}_{1,0}}c^{1,0}_{t,t+1}. \tag{24}$$

根据第 (ii) 部分的归纳假设，所有系数 $c^{p-1}{}_{,1\,0}{}^{p-1}{}_{,}$以及 $c^{p-1}{}_{,t-p+1}{}^{p-1}{}_{,t-p+2}$ 对所有 $2 \le p \le t+1$均非零 (24)。因此，对某个 p 而言，结构常数 $c^{t-p+1}_{p\ p-1}{}^{t-p+2}{}_{,}$的消失蕴含它们全部消失。这与假设 $\tau_1+\tau_2 \in V_{2t+2}$ 矛盾，从而得到 $[e_{\tau_1}, e_{\tau_2}] \neq 0$。因此，第 (ii) 部分对 V_{2t+2}成立。 □

注 4.5。 由引理 *4.4* 的证明可知，每个集合 W_i、$1 \le i \le s-1$（其中 s 是 $\mathcal{N}$ 的幂零指数）都由满足 $\mathrm{diff}(\mu) \le 1$ 且 $\mathrm{length}(\mu) \le i.$ 的所有权 μ 组成

基于前述引理的结果，我们现在建立以下命题。

命题 4.6。 设 $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$ 是一个可解李代数，其幂零根为 $\mathcal{N}$，并设 $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$-模，使得 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{M}$ 上的作用是对角的，且 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{M}$ 上的所有权都属于 W。进一步假设 $3\alpha_1+\alpha_2 \notin W$ 和 $\alpha_1+3\alpha_2 \notin W.$，则 $H^2(\mathcal{N},\ \mathcal{M})^{\mathcal{T}}=0$。

证明。 应用定理 3.2 证明中的相同论证，只需考虑 $\dim \mathcal{M}=1$。设 $\mathcal{M}=\mathbb{C}m$，且 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{M}$ 上的权为 Λ。考虑任意 $f \in H^2(\mathcal{N},\ \mathcal{M})^{\mathcal{T}}$，使得 $\mathcal{T}\cdot f=0$。

根据引理 4.4，W 中的所有权具有下列形式之一：

$$n\alpha_1+n\alpha_2, \quad (n+1)\alpha_1+n\alpha_2, \quad n\alpha_1+(n+1)\alpha_2.$$

由于 α_1 与 α_2 情形的对称性，只需考虑情形 $n\alpha_1+n\alpha_2$ 与$(n+1)\alpha_1+n\alpha_2$。首先，我们假设 $\Lambda=n\alpha_1+n\alpha_2$。根据与 $1 \le q \le n-1$相关的等式：

$$\begin{cases} L\big(\alpha_1,\ (q-1)\alpha_1+q\alpha_2,\ (n-q)\alpha_1+(n-q)\alpha_2\big)=0, \\ Z\big(\alpha_1,\ (q-1)\alpha_1+q\alpha_2,\ (n-q)\alpha_1+(n-q)\alpha_2\big)=0, \end{cases}$$

我们得到关于结构常数的限制

$$\begin{cases} c^{1,0}_{n-q,n-q}c^{q-1,q}_{n-q+1,n-q}+c^{q-1,q}_{n-q,n-q}c^{n-1,n}_{1,0} &= 0, \\ c^{1,0}_{n-q,n-q}\Phi^{q-1,q}_{n-q+1,n-q}+c^{q-1,q}_{n-q,n-q}\Phi^{n-1,n}_{1,0} &= 0. \end{cases} \tag{25}$$

根据引理 (4.4)，我们有 $c^{q-1}{}_{,\ n-q+1,\ n-q}{}^{q} \neq 0$ 以及 $c^{q-1}{}_{,\ n-q}{}^{q}{}_{,\ n-q} \neq 0$。因此，利用 (25)，我们 g et

$$\Phi^{q-1,q}_{n-q+1,n-q}=\frac{c^{q-1,q}_{n-q+1,n-q}}{c^{n-1,n}_{1,0}}\Phi^{n-1,n}_{1,0}, \quad 1 \le q \le n-1. \tag{26}$$

定义上链 $g \in C^1(\mathcal{N},\ \mathcal{R})$如下

$$g(e_\rho)=0 \quad \text{for} \quad \rho \neq \Lambda=n\alpha_1+n\alpha_2 \quad \text{and} \quad g(e_\Lambda)=-\frac{\Phi^{n-1,n}_{1,0}}{c^{n-1,n}_{1,0}}m.$$

假设 $\alpha+\beta=\Lambda$ 与 α 要么是 α_1，要么是 α_2。

若 $\alpha=\alpha_1$，则根据 g 的定义，我们立即得到 $(f-d^1g)(e_{\alpha_1},\ e_\beta)=0.$

若 $\alpha=\alpha_2$，则将等式 (26) 应用于 $q=1$，可得 $(f-d^1g)(e_{\alpha_2},\ e_\beta)=0.$

假设 α 和 β 的长度大于 1。不失一般性，我们可以假设

$$\alpha=(q-1)\alpha_1+q\alpha_2, \quad \beta=(n-q+1)\alpha_1+(n-q)\alpha_2 \quad \text{for some} \quad 2 \le q \le n-1.$$

于是，由 (26) 应用于可得，$(f-d^1g)(e_\alpha,\ e_\beta)=\Phi^{n-q+1}{}_{,\ q-1}{}^{n-q}{}_{,\ q}\ m+c^{n-q+1}{}_{,\ q-1\ q}{}^{n-q}g_{,}\ (e_\Lambda)=0.$ 因此，$f=d^1g.$其次，假设 $\Lambda=(n+1)\alpha_1+n\alpha_2 \in W$。根据等式

$$L\big(\alpha_1,\ q\alpha_1+(q-1)\alpha_2,\ (n-q)\alpha_1+(n-q+1)\alpha_2\big)=0,$$

$$Z\big(\alpha_1,\ q\alpha_1+(q-1)\alpha_2,\ (n-q)\alpha_1+(n-q+1)\alpha_2\big)=0,$$

由 $2 \le q \le n-1$，我们推得

$$\begin{cases} c^{1,0}_{n-q,n-q+1}c^{q,q-1}_{n-q+1,n-q+1}+c^{n-q,n-q+1}_{q,q-1}c^{1,0}_{n,n} &= 0, \\ c^{1,0}_{n-q,n-q+1}\Phi^{q,q-1}_{n-q+1,n-q+1}+c^{n-q,n-q+1}_{q,q-1}\Phi^{1,0}_{n,n} &= 0. \end{cases} \tag{27}$$

根据引理 (4.4)，我们有 $c^{1}{}_{,n-q,n-q+1}{}^{0} \neq 0$ 和 $c^{q}{}_{,n-q}{}^{q-1}{}_{,n-q+1} \neq 0$。那么，等式方程组 (27) 推出

$$\Phi^{q,q-1}_{n-q+1,n-q+1}=\frac{c^{q,q-1}_{n-q+1,n-q+1}}{c^{1,0}_{n,n}}\Phi^{1,0}_{n,n}, \quad 2 \le q \le n-1. \tag{28}$$

定义 $g \in C^1(\mathcal{N}, \mathcal{R})$ 为

$$g(e_\rho) = 0 \quad \text{for} \quad \rho \neq \Lambda = (n+1)\alpha_1 + n\alpha_2 \quad \text{and} \quad g(e_\Lambda) = -\frac{\Phi_{1,0}^{n,n}}{c_{1,0}^{n,n}} m.$$

现在我们考虑 $\alpha + \beta = \Lambda$ 的情形，其中 α 的长度为 1。由于 $\operatorname{diff}(\Lambda - \alpha_2) = 2$，因此不可能出现 $\alpha = \alpha_2$ 的情形，这与引理 4.4 的断言矛盾。因此，我们有 $\alpha = \alpha_1$。在这种情况下，$(f - d^1 g)(e_{\alpha_1}, e_\beta) = 0.$

L设 $\alpha + \beta = \Lambda$，使得 α 和 β 的长度均大于 1。不失一般性，我们可以假设

$$\alpha = q\alpha_1 + (q-1)\alpha_2, \quad \beta = (n-q+1)\alpha_1 + (n-q+1)\alpha_2, \quad 2 \leq q \leq n-1.$$

然后利用 (28)，我们可以得到 $(f - d^1 g)(e_\alpha, e_\beta) = 0.$ 因此，$f = d^1 g.$ □

在这个定理中，我们给出了 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$ 的伴随模的第二上同调群的平凡性 .

定理 4.7。设 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$ 是一个幂零根为 $\mathcal{N}$ 的可解李代数。进一步假设 $3\alpha_1 + \alpha_2 \notin W$ 和 $\alpha_1 + 3\alpha_2 \notin W.$。则 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$ 是上同调刚性的。

证明。命题 4.6 以及代数 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$ 的完备性 H^i表明，对于所有 $0 \leq i \leq 2$，都有 $\mathcal{N}, \mathcal{M}^\mathcal{T} = 0$。现在，该结论直接由注 2.2 得出。□

事实上，定理 4.7 中确保代数 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$ 具有上同调刚性的条件并非必要条件。模型幂零代数和模型 filifor m 代数证明了这一点：尽管它们满足 $\alpha_1 + 3\alpha_2 \in W$，仍然具有上同调刚性（见 [1] 中的命题 4 和 [10]）。

下面给出一个满足定理 4.7 假设的极大秩幂零李代数单参数族。

例 4.8。对于每个整数 $n \geq 1$ 和每个参数 $t \in \mathbb{C}$，考虑具有基的 $\mathfrak{g}_{n,t}$ 维幂零李代数 $3(n+1)$

$$\left\{ e_{\,k\alpha_1+(k-1)\alpha_2},\ e_{\,(k-1)\alpha_1+k\alpha_2},\ e_{\,k(\alpha_1+\alpha_2)} \;\middle|\; 1 \leq k \leq n+1 \right\},$$

以及由下式给出的非零括号

$$\begin{cases} [e_{(i-1)\alpha_1+i\alpha_2},\, e_{(j-i+1)\alpha_1+(j-i)\alpha_2}] &= (-1)^{\delta_{i,1}}\, e_{j\alpha_1+j\alpha_2}, \\ [e_{i\alpha_1+i\alpha_2},\, e_{(j-i+1)\alpha_1+(j-i)\alpha_2}] &= (-1)^{\delta_{i,j}}\, e_{(j+1)\alpha_1+j\alpha_2}, \\ [e_{i\alpha_1+i\alpha_2},\, e_{(j-i)\alpha_1+(j-i+1)\alpha_2}] &= -(-1)^{\delta_{i,j}}\, e_{j\alpha_1+(j+1)\alpha_2}, \\ [e_{\alpha_1},\, e_{n\alpha_1+(n+1)\alpha_2}] &= t\, e_{(n+1)\alpha_1+(n+1)\alpha_2}, \\ [e_{(i-1)\alpha_1+i\alpha_2},\, e_{(n-i+2)\alpha_1+(n-i+1)\alpha_2}] &= t\, e_{(n+1)\alpha_1+(n+1)\alpha_2}, \end{cases}$$

其中$\delta_{i,j}$ 表示克罗内克δ，且 $1 \leq i \leq j \leq n$。

代数 $\mathfrak{g}_{n,t}$ 具有一个极大秩的二维环面，其对应的根系 W 既不包含权 $3\alpha_1 + \alpha_2$，也不包含权 $\alpha_1 + 3\alpha_2$。因此，由定理 *4.7* 可知，$\mathfrak{g}_{n,t}$ 的极大可解扩张具有上同调刚性。

5. 极大秩可解李代数的非上同调刚性

与前两节通过证明$H^2(\mathcal{R}_\mathcal{T}, \mathcal{R}_\mathcal{T})$消失以及某些高阶上同调群消失来确立刚性现象不同，本节致力于研究上同调刚性不成立的可解李代数 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$。我们将阐述导致第二上同调群非消失的结构构型，并在下文给出本节的主要结果。

定理 5.1。设 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$是一个可解李代数，其幂零根为 $\mathcal{N}$，且存在满足下列某一条件的 α、β、$\gamma \in \Pi$：

$$\begin{array}{lllll} i) & e_{3\alpha+2\beta} \in \operatorname{Center}(\mathcal{N}) & \textit{and} & \{3\alpha+\beta,\ 2\alpha+2\beta\} & \subseteq W; \\ ii) & e_{4\alpha+2\beta} \in \operatorname{Center}(\mathcal{N}) & \textit{and} & \{4\alpha+\beta,\ 3\alpha+2\beta, 2\alpha+2\beta\} & \subseteq W; \\ iii) & e_{\alpha+\beta+\gamma} \in \operatorname{Center}(\mathcal{N}) & \textit{and} & \{\alpha+\beta,\ \alpha+\gamma,\ \beta+\gamma\} & \subseteq W. \end{array}$$

于是 $H^2(\mathcal{R}_\mathcal{T}, \mathcal{R}_\mathcal{T}) \neq 0$。

证明。**情形（i）**。由于 $3\alpha+\beta \in W$，我们有 $c(\alpha, p\alpha+\beta) \neq 0, \quad 0 \leq p \leq 2.$由恒等式 $L(\alpha, \beta, \alpha+\beta) = 0$以及假设 $2\alpha + 2\beta \in W$，可得

$$c(\beta, 2\alpha + \beta) \neq 0, \qquad c(\alpha, \alpha + 2\beta) \neq 0.$$

此外，由等式 $L(\alpha, \beta, 2\alpha + \beta) = 0$可知，以下各项中至少有两项

$$c(\alpha + \beta, 2\alpha + \beta), \qquad c(2\alpha + 2\beta, \alpha), \qquad c(3\alpha + \alpha, \beta)$$

非零。

设 $c(\beta, 3\alpha + \beta) \neq 0$。那么，$c(\alpha, 2\alpha + 2\beta)$ 或 $c(\alpha + \beta, 2\alpha + \beta)$ 至少有一个非零。定义 $f \in C^2(\mathcal{N}, \mathcal{R}_{\mathcal{T}})^{\mathcal{T}}$如下:

$$\begin{cases} f(e_\alpha, e_{2\alpha+2\beta}) &= e_{3\alpha+2\beta}, \\ f(e_{\alpha+\beta}, e_{2\alpha+\beta}) &= \frac{c(\beta,2\alpha+\beta)}{c(\alpha,\beta)} e_{3\alpha+2\beta}, \end{cases}$$

并且，对于所有其他权对 τ_1, τ_2，$f(e_{\tau_1}, e_{\tau_2}) = 0$。

直接验证可知 $f \in Z^2(\mathcal{N}, \mathcal{R}_{\mathcal{T}})^{\mathcal{T}}$。假设对于某个 $g \in C^1(\mathcal{N}, \mathcal{R}_{\mathcal{T}})^{\mathcal{T}}$，有 $f = d^1 g$，且 $g(e_\alpha) = \mu_\alpha e_{\alpha\alpha}$。将 $(f - d^1 g)(e_\alpha, e_\beta) = 0$ 代入方程组，得到的方程组无解。因此 $f \notin B^2(\mathcal{N}, \mathcal{R}_{\mathcal{T}})^{\mathcal{T}}$。

设 $c(\beta, 3\alpha + \beta) = 0$。则结构常数 $c(\alpha, 2\alpha + 2\beta)$ 和 $c(\alpha + \beta, 2\alpha + \beta)$ 均非零。定义

$$\begin{cases} f(e_\beta, e_{3\alpha+\beta}) = e_{3\alpha+2\beta}, \\ f(e_{\alpha+\beta}, e_{2\alpha+\beta}) = \frac{c(2\alpha+\beta,\alpha)}{c(\alpha,\beta)} e_{3\alpha+2\beta}, \end{cases}$$

以及 $f(e_{\tau_1}, e_{\tau_2}) = 0$ 对所有其他权对 τ_1, τ_2。类似的计算表明，仍有 $f \notin B^2(\mathcal{N}, \mathcal{R}_{\mathcal{T}})^{\mathcal{T}}$，因此 $0 \neq f \in H^2(\mathcal{N}, \mathcal{R}_{\mathcal{T}})^{\mathcal{T}}$.

情形（ii） 由于 $4\alpha + \beta \in W$，对于 $0 \leq p \leq 3.$，结构常数 $c(\alpha, p\alpha + \beta)$ 非零。由等式 $L(\alpha, \beta, 2\alpha + \beta) = 0$以及条件 $3\alpha + 2\beta \in W$可知，下列结构常数中至少有两个非零:

$$c(\beta, 3\alpha + \beta), \qquad c(\alpha, 2\alpha + 2\beta), \quad c(\alpha + \beta, 2\alpha + \beta).$$

同样，等式 $L(\alpha, \beta, 3\alpha + \beta) = 0$和 $L(\alpha, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta) = 0$意味着以下各项中至少有两项非零:

$$c(\alpha, 3\alpha + 2\beta), \quad c(\beta, 4\alpha + \beta), \quad c(\alpha + \beta, 3\alpha + \beta).$$

定义一个 2-上循环 $f \in C^2(\mathcal{N}, \mathcal{R}_{\mathcal{T}})^{\mathcal{T}}$，其定义如下

$$\begin{cases} f(e_\beta, e_{3\alpha+\beta}) &= e_{3\alpha+2\beta}, & f(e_\beta, e_{4\alpha+\beta}) &= \frac{c(3\alpha+2\beta,\alpha)c(\beta,2\alpha+\beta)}{c(2\alpha+\beta,\alpha)c(3\alpha+\beta,\alpha)} e_{4\alpha+2\beta}, \\ f(e_{\alpha+\beta}, e_{2\alpha+\beta}) &= \frac{c(\beta,2\alpha+\beta)}{c(\alpha,\beta)} e_{3\alpha+2\beta}, & f(e_{\alpha+\beta}, e_{3\alpha+\beta}) &= \frac{c(3\alpha+2\beta,\alpha)c(\beta,2\alpha+\beta)}{c(2\alpha+\beta,\alpha)c(\alpha,\beta)} e_{4\alpha+2\beta}, \end{cases}$$

并且在所有其他权对上，$f(e_\tau, e_\pi) = 0$。

可以验证 $f \in Z^2(\mathcal{N}, \mathcal{R}_{\mathcal{T}})^{\mathcal{T}}$。假设对于某个 $g \in C^1(\mathcal{N}, \mathcal{R}_{\mathcal{T}})^{\mathcal{T}}$，有 $f = d^1 g$，且 $g(e_\gamma) = \mu_\gamma e_\gamma$，我们得到一个关于变量 μ_γ, $\gamma \in W.$ 的方程组，该方程组没有任何解。因此，$0 \neq f \in H^2(\mathcal{R}_{\mathcal{T}}, \mathcal{R}_{\mathcal{T}})$。

情形（iii）。等式 $L(\alpha, \beta, \gamma) = 0$意味着以下结构常数中至少有两个

$$c(\alpha, \beta + \gamma), \qquad c(\beta, \alpha + \gamma), \qquad c(\gamma, \alpha + \beta)$$

非零。

若 $c(\beta, \alpha + \gamma) \neq 0$且 $c(\gamma, \alpha + \beta) \neq 0$，定义

$$\begin{cases} f(e_\alpha, e_{\beta+\gamma}) &= e_{\alpha+\beta+\gamma}, \\ f(e_\beta, e_{\alpha+\gamma}) &= \frac{c(\beta,\gamma)}{c(\alpha,\gamma)} e_{\alpha+\beta+\gamma}, \end{cases}$$

$f(e_\tau, e_\pi) = 0$适用于所有其他权对。

再次假设 $f = d^1 g$ 会导致关于未知变量 μ_α, μ_β、μ_γ和 $\mu_{\alpha+\beta+\gamma}$的不相容方程组。因此 $f \notin B^2(\mathcal{N}, \mathcal{R}_{\mathcal{T}})^{\mathcal{T}}$。

最后，如果 $c(\beta, \alpha + \gamma) = 0$，那么其余两个结构常数均非零，并且可以定义 es

$$\begin{cases} f(e_\beta, e_{\alpha+\gamma}) &= e_{\alpha+\beta+\gamma}, \\ f(e_{\alpha+\beta}, e_\gamma) &= \frac{c(\gamma,\alpha)}{c(\alpha,\beta)} e_{\alpha+\beta+\gamma}, \end{cases}$$

$f(e_\tau, e_\pi) = 0$对于所有其他权对，同样的论证可得 $0 \neq f \in H^2(\mathcal{N}, \mathcal{R}_\mathcal{T})^\mathcal{T}$. 至此定理得证。

□

注 5.2. 注意，定理 *5.1* 中的条件 $e_\alpha \in Center(\mathcal{N})$ 可以替换为 $\alpha + \beta \notin W$ 任意 $\beta \in W$.

由定理 5.1 的证明可得以下推论。

推论 5.3. 设 m、n 和 p 分别表示满足情形（***i***）和情形（***ii***）的数对数量，以及满足情形（***iii***）的三元组数量。那么，$\mathcal{R}_\mathcal{T}$ 的第二上同调群的维数至少为 $m + n + p$。

接下来，我们给出一些代数的例子，它们恰好满足定理 5.1 中的一个条件；并给出一个李代数的例子，它不满足这两个条件中的任何一个，但其第二上同调群仍非消失。后一个例子表明，定理的假设虽然足以保证第二上同调非消失，却并非必要条件。

例 5.4。考虑极大秩为二的 9 维幂零李代数 $\mathcal{N}_9$，其唯一非零结构常数如下（均等于 *1*）：

$$\begin{cases} c(\alpha_1, \alpha_2), \quad c(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2), \quad c(\alpha_1, \alpha_1 + 2\alpha_2), \quad c(\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2), \quad c(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2), \\ c(\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2), \quad c(\alpha_1, 2\alpha_1 + 2\alpha_2), \quad c(\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2), \quad c(\alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2), \quad c(2\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2). \end{cases} \tag{29}$$

由(29) 可知，$\mathcal{N}_9$ 仅满足定理 *5.1* 的条件 ***(i)***。因此，对于由 $\mathcal{N}_\exists$ 构造的11 维可解李代数 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$，有 $H^2(\mathcal{R}_\mathcal{T}, \mathcal{R}_\mathcal{T}) \neq 0$.

例 5.5。考虑极大秩为三的 10 维幂零李代数 $\mathcal{N}_{10}$，其唯一非零结构常数如下（均等于 *1*）：

$$\begin{cases} c(\alpha_1, \alpha_2), & c(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2), & c(\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2), & c(\alpha_1, \alpha_1 + 2\alpha_2), \\ c(\alpha_1, 3\alpha_1 + \alpha_2), & c(\alpha_1, 2\alpha_1 + 2\alpha_2), & c(\alpha_1, 3\alpha_1 + 2\alpha_2), & c(\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2), \\ c(\alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2), & c(\alpha_2, 4\alpha_1 + \alpha_2), & c(\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2), & c(\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2). \end{cases} \tag{30}$$

由(30)可知，$\mathcal{N}_{10}$ 不满足条件 ***(i)*** 和 ***(iii)***，但满足定理 *5.1* 的条件 ***(ii)***。因此，由 $\mathcal{N}_{10}$ 构造的12 维可解李代数 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$ 具有非平凡的第二上同调。

例 5.6。考虑极大秩为三的 7 维幂零李代数 $\mathcal{N}_7$，其唯一非零结构常数如下（均等于 *1*）：

$$c(\alpha_1, \alpha_2), \quad c(\alpha_1, \alpha_3), \quad c(\alpha_2, \alpha_3), \quad c(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3), \quad c(\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2). \tag{31}$$

由(31)，我们得出 $\mathcal{N}_7$ 不满足条件***(i)***和***(ii)***，但满足定理 *5.1* 的条件***(iii)***。由此可知，由 $\mathcal{N}_7$ 构造的9维可解李代数 $\mathcal{R}_\mathcal{T}$ 具有非平凡的第二上同调。

例 5.7. 考虑12维极大秩为二的幂零李代数 $\mathcal{N}_{12}$，其仅有的非零结构常数如下（前三行等于1，而最后一行等于$_{1\ 2}$）

$$\begin{cases} c(\alpha_1, \alpha_2), & c(\alpha_1, 4\alpha_1 + \alpha_2), & c(\alpha_1, 4\alpha_1 + 2\alpha_2), & c(\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2), & c(\alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2), \\ c(\alpha_1, 3\alpha_1 + \alpha_2), & c(\alpha_1, 4\alpha_1 + 3\alpha_2), & c(\alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2), & c(2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2), & c(2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1), \\ c(\alpha_2, 4\alpha_1 + \alpha_2), & c(\alpha_2, 4\alpha_1 + 2\alpha_2), & c(\alpha_2, 5\alpha_1 + 2\alpha_2), & c(2\alpha_1 + \alpha_2, 5\alpha_1 + \alpha_2), & \\ c(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1), & c(\alpha_1, 5\alpha_1 + \alpha_2), & c(3\alpha_1 + \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2), & c(5\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2). & \end{cases}$$

由*th e*代数 $\mathcal{N}_{12}$ 的结构可以得出，它不满足条件***(i)***、***(ii)***和***(iii)***.

基于具有非消失二阶上同调群的可解李代数的例子，我们提出如下猜想：

猜想 5.8. 令 p表示权 Λ 的数量，对于这些权，与 Λ 相关联的两两不同三元组的最大数量和不同对的最大数量之差大于 1。那么

$$H^2(\mathcal{R}_\mathcal{T}, \mathcal{R}_\mathcal{T}) \geq p.$$

数据可用性 本文不适用数据共享，因为本研究期间未生成或分析任何数据集。

利益冲突 代表所有作者，通讯作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] J.M. Ancochea Berm´udez, R. Campoamor-Stursberg, 具有任意特征序列幂零根的上同调刚性可解李代数, Linear Algebra Appl., 488 (2016), 135-147. [2] J.M. Ancochea Berm´udez, M. Goze, 刚性李代数的非有理性, Proc. Amer. Math. Soc., 127 (1999), 2611-2618. [3] J.M. Ancochea Berm´udez, M. Goze, 关于刚性李代数的分类, J. Algebra., 245 (2001), 68-91. [4] J.M. Ancochea Berm´udez, 关于可解李代数的刚性, 代数与结构变形理论及其应用., 247 (1988), 403-445.[5] R. Campoamor-Stursberg, Schr¨odinger 代数 $S(N)$ 及其中心扩张 $S(N)$ 的上同调刚性, J. Lie Theory, 27 (2017), 315–328.[6] C. Chevalley, S. Eilenberg, 李群与李代数的上同调理论, Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948), 85–124. [7] G. Hochschild, J.P. Serre, 李代数的上同调, Ann. of Math., 57 (1953), 591-603. [8] M. Gerstenhaber, 关于环与代数的变形, I, III, Ann. of Math. 79 (1964), 59–103. 88 (1968),1–34.[9] M. Goze, 李代数结构的扰动, 载于《代数与结构变形理论及其应用》（Il Ciocco, 1986）, M. Hazewinkel 与 M. Gerstenhaber 编, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. 第247卷, 第265–355页, 克吕韦尔学术出版社, 多德雷赫特, 荷兰, 1988.[10] M. Goze, Yu. Khakimdjanov, 幂零李代数. 数学及其应用, 361. 克吕韦尔学术出版社, 多德雷赫特, 1996. xvi+336 页. ISBN 0-7923-3932-0. [11] F. Grunewald, J. O'Halloran, 维数小于六的幂零李代数簇, J. Algebra, 112 (1988), 315-325. [12] F. Grunewald, J. O'Halloran, 李代数的变形, J. Algebra, 162 (1993), 210-224. [13] J. Lauret, 李代数的退化与李群的几何, Differ. Geom. Appl., 18(2003), 177–194. [14] E. Weimar-Woods, 收缩、广义 In¨on¨u-Wigner 收缩与有限维李代数的变形, Rev. Math. Phys., 12(2000), 1505–1529. [15] G. Leger, E. Luks, 任意特征下类博雷尔可解李代数的上同调定理, Canad. J. Math. 24 (1972), 1019-1026.[16] D.J. Meng, Zhu L. Sheng, 可解完备李代数 I, Commun. Algebra, 24 (1996), 4181-4197. [17] A. Nijenhuis, R.W. Richardson, 分次李代数中的上同调与变形, Bull. Amer. Math. Soc., (72)(1966), 1-29. [18] A. Nijenhuis, R.W. Richardson, 李代数结构的变形, J. Math. Mech. 17 (1967) 89–105. [19] B.A. Omirov, G.O. Solijanova, 关于幂零莱布尼茨超代数的极大可解扩张的唯一性, J. Algebra., 677 (2025), 798-832.[20] B.A. Omirov, I.S. Rakhimov, G.O. Solijanova, 极大秩可解李超代数的描述, Linear Algebra Appl., 695 (2024), 136-162.[21] R.W. Richardson, 关于李代数半直积的刚性, Pacific J. Math. 22 (1967), 339–344.[22] L. ˇSnobl, 关于幂零李代数的极大可解扩张与列维扩张的结构, J. Phys. A: Math. Theor. 43 (2010) 505202, 17页. [23] G.D. Mostow, 代数群的完全可约子群, Amer. Math., 78 (1956), 200-221.

BAKHROM A. OMIROV 数学高级研究院，哈尔滨工业大学，哈尔滨 150001；哈尔滨工业大学苏州研究院，苏州 215104，中国电子邮箱：omirovb@mail.ru

GULKHAYO O. SOLIJANOVA 乌兹别克斯坦米尔佐·乌鲁格别克国立大学，乌兹别克斯坦电子邮箱：gulhayo.solijonova@mail.ru

GULMUROD KH. URAZMATOV 乌兹别克斯坦科学院 V.I. ROMANOVSKIY数学研究所，乌兹别克斯坦电子邮箱：gulmurod0405@gmail.com