arXiv:2602.09219v1 [math.ST] 9 Feb 2026

具有随机观测的非线性逆问题的拟合优度检验

Remo Kretschmann* Han Cheng Lie*

摘要 本文研究具有随机观测的非线性逆问题中的非参数拟合优度检验。研究证明，基于高斯过程先验分布的贝叶斯后验分布在一组真实参数上以某一速率一致收缩。结果表明，相应的后验均值满足集中不等式，并以该后验收缩率一致收敛。利用基于后验均值和最大后验估计量的下确界插件检验，本文确立了与复合原假设相距后验收缩率的有界备择假设的可区分性。研究结果应用于一类由常微分方程初值问题所支配的逆问题，这类问题在药代动力学中应用广泛。对于这一类问题，本文证明了一致后验收缩率，并进一步利用该结果确立可区分性。

关键词：贝叶斯非参数统计，拟合优度检验，非线性逆问题 ms

数学学科分类代码：62C10, 62G05, 62G10, 62P10

1 引言

在本文中，我们考虑这样的逆问题：人们关注的量 θ 无法直接观测到，而只能获得相关量 $G(\theta)$ 的含噪观测。我们考虑非参数情形，其中 θ和 $G(\theta)$均为函数，且 $G(\theta)$仅在从可能未知的分布 μ_X中抽取的N随机点 $X_1,\dots,X_N$处被观测到。在此情形下，我们基于这些点 $X_1,\dots,X_N$及其对应的含噪观测，对量 θ进行统计推断

$$Y_i = [G(\theta)](X_i) + \varepsilon_i, \quad i \in \{1,\dots,N\}.$$

此类问题例如出现在药代动力学应用中，如模型指导的精准给药，参见 [6, 12]。

我们研究这一间接非线性非参数设定下的拟合优度检验。在这里，我们通过一个检验 Ψ_N 来评估函数 θ 是否属于给定的函数类 Θ_0 ；该检验根据可用观测值（X_i， Y_i）$_{i=1}^N$接受或拒绝假设 H_0： $\theta \in \Theta_0$。术语“拟合优度检验”通常用于强调所检验的是一个复合假设 $\theta \in \Theta_0$，这与检验简单假设 $\theta = \theta_0$形成对比；后者检验的是 θ是否取某个特定值 θ_0。接下来，我们关注如何确定备择函数集合Θ_1 与集合 Θ_0之间在某种度量下的分离程度，使得针对 H_0与 H_1： $\theta \in \Theta_1$ 进行检验的最优假设检验的第一类和第二类错误低于某个界限。从渐近角度考虑，这引出了这样一个问题：随着观测数量增加，在H_0 和 H_1 仍可由最优检验区分、也就是说最优检验的错误趋于零的情况下，这种分离程度可以按多快的速率趋于零。此外，人们可能还会关注这个所谓的“极小极大分离率”如何

*数学研究所，波茨坦大学，卡尔·李卜克内西大街 24–25 号，14476 波茨坦，德国（remo.kretschmann@uni-potsdam.de、han.lie@uni-potsdam.de）。

取决于 Θ_0 和 Θ_1中函数的光滑度，以及相关逆问题的病态程度。

上述设定为拟合优度检验的发展带来了若干挑战。这些挑战包括所考虑的复合假设可能具有非线性 H_0、正向模型具有非线性 G、逆问题是不适定的、观测点具有随机性（X_i）$_{i=1}^{N}$，以及观测点的分布 μ_X 未知。

1.1 文献综述

文献 [10]综述了直接线性情形下的非参数拟合优度检验。针对序列空间模型，主要考虑简单假设以及由幂范数分离的备择假设，并利用最优 χ^2检验推导分离率。所考虑的复合假设具有收缩幂范数球的形式；例如，参见 [10, 第 8 节。5]此外，文中提到，在非参数情形下，极小极大分离率通常快于估计的极小极大速率，参见 [10,第 2 节。10],因此，即使在无法进行估计的设定下，假设检验仍可能可行。在 [7] 和 [8], 中，拟合优度检验针对包含于有限维线性子空间中的复合假设进行研究，同样针对直接线性问题。在 [9],中，拟合优度检验被扩展到序列空间模型框架下的线性逆问题，但仅限于简单假设。在 [13], 中，该框架进一步扩展到正向模型特征值不确定的逆问题。文献 [10] 及后续研究用于证明极小极大分离率的方法，要么严重依赖于所考虑问题的线性特征以及函数值数据或无限数据的可用性，要么依赖于正向模型存在谱分解。因此，这些方法难以推广到非线性正向模型和有限随机观测的设定。

在 [17],中，针对轻度和严重病态线性逆问题，给出了频率学派真值附近的后验收缩率。这里，通过证明简单假设情形下基于截断奇异值分解（SVD）估计量的插件检验具有可区分性，证明了适用于一般先验分布的一般收缩结果 [17, 定理2.1] 。该证明沿用了 [2],中定理2.1的证明思路，不同之处在于，对于逆问题情形，检验的存在性并非通过 [2] 中的定理7.1确立，而是利用所考虑估计量的一致性，通过直接计算加以证明。与后验收缩的联系仅在 [2]中定理2.1的证明里建立。 [2] 和 [17]中的结果针对由假设在希尔伯特空间范数下分离的备择假设而表述。不过，这些结果的证明专门针对线性问题，并依赖于截断SVD估计量以及有限维投影的逼近性质。因此，这些结果不易推广到其他估计量、复合零假设或非线性问题。

在 [3, 定理 8.13],中，证明了先验集中和后验以指数速度收缩意味着检验的存在。证明非常简短，但遵循了 [3, 定理 6.22],的证明，后者给出了详细论述。然而， [3, 定理 8.13] 无法用于确立可区分性，因为其中构造的空间划分只是简单地定义为 θ 的取值范围，具体取决于检验的大小高于还是低于某个值。文中没有对这些集合给出更明确、直接的描述，而且这些集合也不对应于一个在某种度量下与假设分离的备择假设。

据作者所知，在非参数非线性间接问题中，拟合优度检验的极小极大分离率尚不清楚。在 [4, 第 6.2 节。4],研究了通过下确界检验进行的非参数拟合优度检验。下确界检验基于为检验简单原假设而设计的检验；只要 H_0 中有一个元素被底层简单检验接受，就接受复合原假设 H_0。在 [4, 第 6.2 节。1], 中，介绍了若干简单假设检验方法 $\theta = \theta_0$

，具体而言，包括插件检验、 χ^2-检验和 U-统计量检验，并研究了这些检验的极小极大分离率 $\widehat{}$。如果底层估计量 θ_N 对θ与 θ_0 之间的距离超过临界值，插件检验就拒绝原假设，否则接受原假设。另一方面， χ^2-检验和 U-统计量检验则依据小波估计量与 θ_0的小波近似之间的距离作出拒绝决定。尽管诸如 [4, 命题 6.2。13] 中的下确界插件检验结果并不限于直接情形或线性情形，但它们要求底层估计量具有某些一致收敛性质，而这些性质目前只在直接情形下针对小波估计量得到证明，参见 [4, 命题 5.1。7]。在 [4, 命题 6.2。18], 之后的正文中，作者指出，如果假设集有界，且由具有足够 Besov光滑性的函数构成，那么 χ^2-检验和 U-统计量检验实际上能在直接情形下达到极小极大分离率。由于 χ^2-统计量检验只针对函数值观测定义，因此不能直接用于随机观测情形。而 U-统计量检验的结果则专门针对密度估计提出，因此不易推广到逆问题情形。

在 [6], 中，针对双室模型下协变量到参数映射的推断，对贝叶斯拟合优度检验的性能进行了数值研究。双室模型广泛应用于药代动力学。在 [15], 中，提出了针对带有随机观测的非线性逆问题的非参数贝叶斯推断理论，其中包括后验收缩结果；例如，也可参见 [19, 5, 16, 14, 11], 。然而， [15] 中的结果仅针对一个任意固定的真实参数 θ_0 给出，因此无法直接与 [4] 中针对下确界插件检验的理论相结合以获得可区分性。在 [12], 中，针对一类由常微分方程初值问题（ODE-IVPs）所支配的逆问题，建立了后验收缩率以及后验均值的收敛率。这一类问题尤其包括协变量到参数映射的推断，以及 [6] 中相同的双室模型。

1.2 贡献

据作者所知，在具有随机观测的非线性逆问题情形下，非参数拟合优度检验的极小极大分离率尚不明确。因此，一个自然的目标是通过证明与原假设以某一速率分离的备择假设具有可区分性，来界定分离率。在本研究中，在假设原假设包含于参数空间中一个适当有界的子集内的条件下，我们使用基于贝叶斯估计量的下确界插件检验实现了这一目标。我们的主要贡献如下：

(i) 在底层估计量满足一致集中不等式的条件下，我们为下确界插件检验和复合零假设建立了一般性的定量非渐近可区分性结果。这些结果表明，可区分性可达到底层估计量的收敛率。

(ii) 对于适当的概率测度 ζ 以及具有随机观测和高斯先验的一般非线性逆问题，我们证明了后验分布在 L^2_ζ、索博列夫范数和上确界范数下的一致后验收缩，以及后验均值的一致收敛。随后，我们证明，基于后验均值或最大后验估计量（MAP）的下确界插件检验，可在后验收缩率下实现可区分性。所有这些结果都是定量且非渐近的，因为我们给出了所涉概率的显式界。

(iii) 我们将一般性结果应用于由线性常微分方程初值问题支配的一类逆问题； [6, 12] 并据此得出该类问题在 L^2_ζ、索博列夫度量和上确界范数度量下的后验收缩与可区分性。

1.3 结构

本文结构如下。首先，我们通过在第 2 节介绍协变量到参数映射的推断和双室模型，为后续各节的研究背景作铺垫。在第 3 节中，我们证明了下确界插件检验的一般可区分性结果，并讨论逆问题设定下针对不同估计量已知的集中不等式。在第 4 节中，我们研究具有随机观测的一般非线性逆问题，并说明后验均值的一致收敛可由后验收缩推出。我们建立了 L^2_ζ、索博列夫度量和上确界范数度量下的后验收缩，并据此得出可区分性。此外，我们讨论最大后验估计量的一致收敛，并证明它蕴含可区分性。在第 5 节中，我们转而研究由常微分方程初值问题支配的逆问题，证明这一设定下的后验收缩与可区分性，并讨论所得收敛速率。最后，我们在第 6 节作总结。第 4 节中的较长证明汇集于附录A。我们在附录B 中讨论如何根据文献中的证明，推出简单原假设下的可区分性。

1.4 记号

对于集合 A 在集合 $B \supseteq A$ 中的补集，我们使用记号 $A^{\complement} := B \backslash A$。我们用$\log\ x$表示 $x > 0$ 的自然对数。对 $a, b \in \mathrm{R}$，我们记 $a \vee b := \max\{a, b\}$。关系 $a \lesssim b$表示不等式 $a \leq Cb$ 在相差一个固定常数 $C > 0$的意义下成立。我们用$a \leftarrow b$表示将 a 替换为 b。对任意赋范向量空间$(\mathrm{R}\ \|\cdot\|_{\mathcal{R}})$以及 $M > 0, B_{\mathcal{R}}(M) := \{x \in \mathrm{R} : \|x\|\mathrm{R} \leq M\}$。我们用 $V \hookrightarrow W$表示赋范向量空间 V 到另一赋范向量空间W的连续嵌入。对有界光滑区域$\mathrm{X}\ \subset \mathrm{R}^{d_X}$上的测度 μ、赋范向量空间 V以及$p \in [1, \infty)$，令 $L^p_\mu = L^p_\mu(\mathrm{X})\ = L^p_\mu(\mathrm{X}\ V)$表示X上关于测度 μ的 p-可积函数空间，并配以相应的范数

$$\|f\|_{L^p_\mu} = \left(\int_{\mathcal{X}} \|u(x)\|^p_V \mathrm{d}\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

我们按通常方式定义 $L^\infty_\mu(\mathrm{X}\ V)$ 和 $\|\cdot\|_{L^\infty_\mu}$。当 μ 是 R^{d_X} 上的勒贝格测度时，对于 $p \in [1, \infty]$，我们将 $L^p = L^p(\mathrm{X})\ = L^p(\mathrm{X}\ V)$ 记为，并将 $\|f\|_\infty \equiv \sup_{x \in \mathrm{X}} \|f(x)\|_V$ 记为上确界范数。令 $H^\alpha = H^\alpha(\mathrm{X})\ = H^\alpha(\mathrm{X}\ V)$ 表示基于勒贝格空间 $L^2(\mathrm{X}\ V)$ 的 $\alpha \geq 0$ 阶标准索博列夫空间。此外，令 $H^\alpha_{\mathrm{c}}(\mathrm{X}\ V)$ 表示紧支撑光滑函数 $C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathrm{X}\ V)$ 关于 H^α 范数的完备化。有关索博列夫空间的更多详细信息，参见例如[15, 附录A1]。

2 动机示例

2.1 协变量到参数的映射的推断

考虑统计模型

$$y_i = \widetilde{G}(p_i, x_i) + \varepsilon_i, \quad i \in \{1, \ldots, N\}, \tag{2.1}$$

对于独立同分布观测 $(x_i,\ y_i)_{i=1}^N$，其中包含协变量 $x_i \in \mathrm{X}\ \subseteq \mathrm{R}^{d_X}$ 以及带噪声的观测 $y_i \in \mathrm{Y}\ \subseteq \mathrm{R}^{d_Y}$、未观测的参数 $p_i \in \mathrm{P}\ \subseteq \mathrm{R}^{d_P}$、称为机制模型的非线性映射 $\widetilde{G}\colon \mathrm{P}\ \times \mathrm{X}\ \to \mathrm{R}^{d_Y}$，以及噪声 ε_i。协变量 x 与参数 p 之间的关系则由协变量到参数映射（CPM）或协变量模型 $\theta\colon \mathrm{X}\ \to \mathrm{P}$ 描述，其形式为

$$p_i = \theta(x_i), \quad i \in \{1, \ldots, N\}.$$

~我们假设机制模型 G 已知。一个典型例子是常微分方程组的解算子，其在不同时间点 t_1, ……, t_{d_y}进行观测。在这种情况下，每个 p_i都是常微分方程模型的未知参数向量。另一方面，假设 CPM θ未知——它是主要关注的量。根据观测值 $(x_i,\ y_i)_{i=1}^N$推断 CPM θ，构成一个逆问题。此外，我们假设观测到的协变量是服从概率分布 μ_X的随机变量 X的实现；也就是说，我们考虑随机设计的情形。

我们将可容许的CPM限制在从 X 到 P 的某个函数空间的子集 Θ 中。然后，我们可以通过令 $[G(\theta)](x) = G(\theta(x)\ x)$（对每个 $\theta \in \Theta$ 和 X）来将机制模型 G解释为 Θ 上的正向模型 G。

2.2 拟合优度检验

我们的目标是评估真实的 CPM θ 是否属于给定的参数函数类

$$\Theta_0 \coloneqq \{\theta_\tau : \tau \in \mathcal{T}\} \subset \Theta$$

其干扰参数为 $\tau \in \mathrm{T} \subseteq \mathrm{R}^{d_\tau}$。这对应于检验问题

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta \in \Theta \setminus \Theta_0. \tag{2.2}$$

由于这样的备择假设 H_1 通常在渐近意义下与原假设 H_0无法区分，因此通常考虑一个备择假设 $\theta \in \Theta_1$，其集合 $\Theta_1 \subset \Theta$ 在某个度量下与相隔 Θ_0。此外，可能有必要或有助于进一步将 Θ_1 限制为包含于一个有界集 $S \subset \Theta$ 中，该有界集还包含 Θ_0。

Let $\widehat{\theta}$是 θ 的一个估计量。我们将考虑所谓的下确界插件检验

$$\Psi = \mathbf{1}_{T > t} = \begin{cases} 1 & \text{if } T > t, \\ 0 & \text{if } T \le t \end{cases}$$

当距离

$$T = \inf_{\tau \in \mathcal{T}} d(\widehat{\theta}, \theta_\tau)$$

在 t 之间在 Θ 上的某种度量下超过临界值 t >时，便拒绝 0.

2.3 协变量与机制模型

我们考虑药代动力学中的一个具体拟合优度检验问题，该问题曾在 [6]中进行研究。在这个例子中，对患者施用的药物的药代动力学使用双室模型进行描述。在该模型中，人体被划分为“中央”和“外周”两个室，分别对应血流和组织。药物在血流和组织中的浓度 $s_1(t)$和 $s_2(t)$在时间 t 的变化由常微分方程初值问题建模

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} s_1(t,p) \\ s_2(t,p) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -e^{p_1-p_2} - e^{p_3-p_2} & e^{p_3-p_2} \\ e^{p_3-p_4} & -e^{p_3-p_4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1(t,p) \\ s_2(t,p) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} s_1(0,p) \\ s_2(0,p) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_0 w_0 e^{-p_2} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

其中，D_0 是时间 0 给药的药物剂量，w_0 是参考体重。ODE 的参数$p = (p_1, \ldots, p_4) \in \mathrm{R}^4 =: \mathrm{P}$ 通常是不可观测的。它们可以解释为

$$p_1 = \ln \frac{CL}{w}, \quad p_2 = \ln \frac{V_1}{w}, \quad p_3 = \ln \frac{Q}{w}, \quad p_4 = \ln \frac{V_2}{w},$$

其中， V_1 和 V_2 分别是各房室的体积， CL 是药物从血流中清除或消除的速率， Q 描述房室间药物转运， w 是患者的体重。该量

$$\widetilde{G}(p,x) = \left(\ln s_1(t_1), \ldots, \ln s_1(t_{d_y})\right)$$

是第一房室在 d_y 固定时间点 t_1、……、 t_{d_y}。因此，由（ y_i 给出的每个数据向量的总维数2.1）为 d_y。

在 [6], 中，协变量为患者的年龄 a 和体重 w。由此得到协变量向量 $x = (a, w) \in (0, \infty)^2$。目标是检验体重归一化消除清除率 $\mathrm{CL}^* := \mathrm{CL} w^{-\frac{3}{4}}$ 是否为某种形式的 a 的函数。例如，可以检验 CL^* 是否为可饱和指数函数 $\mathrm{CL}^*(a) = (1 - \tau_1 e^{-\tau_2 a})\mathrm{CL}^*_{\max}$，且其在 w 中为常数，其中 τ_1, τ_2, $CL^*_{\max} \in \mathrm{R}$；并检验体重归一化量 $Q^* := Q w^{-\frac{3}{4}}$, $V_1^* := V_1 w^{-1}$ 和 $V_2^* := V_2 w^{-1}$ 是否同时在 a 和 w 中为常数。在这种情况下，（2.2）中的原假设可写为 $\Theta_0 := \{\theta_\tau : \tau \in \mathrm{T}\}$，其中

$$\theta_\tau(a, w) = \left(\ln \frac{(1 - \tau_1 e^{-\tau_2 a}) CL^*_{\max}}{w^{\frac{1}{4}}}, \ln V_1^*, \ln \frac{Q^*}{w^{\frac{1}{4}}}, \ln V_2^*\right) \tag{2.3}$$

以及 $\tau = (\tau_1, \tau_2, \mathrm{CL}^*_{\max}, V_1^*, Q^*, V_2^*) \in \mathrm{T} \subset \mathrm{R}^6$。举另一例，可以将“$\mathrm{CL}^*$ 是可饱和指数函数”这一条件替换为“CL^* 是仿射线性函数 $\mathrm{CL}^*(a) = \tau_1 + \tau_2 a$，且在 w 中为常数”这一条件。在此情形下，(2.2) 中的原假设 Θ_0 由以下形式的函数 θ_τ 定义

$$\theta_\tau(a, w) = \left(\ln \frac{\tau_1 + \tau_2 a}{w^{\frac{1}{4}}}, \ln V_1^*, \ln \frac{Q^*}{w^{\frac{1}{4}}}, \ln V_2^*\right), \tag{2.4}$$

对于 $\tau = (\tau_1, \tau_2, CL^*_{\max}, V_1^*, Q^*, V_2^*) \in \mathrm{T} \subset \mathrm{R}^6$。还可以举出其他 Θ_0 的例子；参见例如 [6, 第 569] 页 .

3 插件检验的可区分性

我们来考察 [4] 中第 6.2.1 节和第 6.2.4 节所述的插件检验方法，该方法适用于简单和复合零假设。虽然这种方法预计无法获得优于极小极大估计速率的分离率，但它仍然很有用，因为它可以直接将已确立的估计量收敛速率转化为分离率界。此外，由此得到的检验在实践中也很容易计算。

我们考虑一个统计实验，其结果为 $X \in \mathrm{X}$，分布 P_θ 由一个无穷维参数 θ 索引，该参数取自容许参数集合 Θ。对于给定的候选参数集合 $S \subset \Theta$、原假设 $H_0 \subset S$、定义在 S 上的度量 d 以及 $\delta > 0$，考虑备择假设

$$H_1 = H_1(H_0, S, d, \delta) := \{\theta \in S : d(\theta, H_0) \geq \delta\}, \tag{3.1}$$

其中 $d(\theta, H_0) := \inf_{h \in H_0} d(\theta, h)$。我们将用于检验 H_0 对 H_1 的假设检验 Ψ 的第一类和第二类错误的合并误差记为

$$\gamma(\Psi, H_0, S, d, \delta) := \sup_{\theta \in H_0} P_\theta(\Psi = 1) + \sup_{\theta \in H_1(H_0, S, d, \delta)} P_\theta(\Psi = 0). \tag{3.2}$$

回顾 [4, 定义 6.2。1]: 对于 H_1 以及 γ 如（3.1）和（3.2）中的情形，非负实数序列 $(\delta_N)_{N \in \mathbb{N}}$ 是用于检验 极小极大 d分离率 的 H_0 对抗 H_1，如果

$$\lim_{N \to \infty} \inf_{\Psi} \gamma(\Psi, H_0, S, d, \delta_N) = 0 \tag{3.3}$$

并且对于任意满足 $\delta'_N/\delta_N \to 0$ 的非负实数序列 $(\delta'_N)_{N\in\mathbb{N}}$，

$$\liminf_{N\to\infty} \inf_{\Psi} \gamma(\Psi, H_0, S, d, \delta'_N) > 0$$

成立，其中两个下确界均取遍所有可测函数 $\Psi: \mathcal{X} \to \{0,1\}$。极小极大$d$-分离率是最小（即最快）的速率，使得一个假设与一个备择假设之间必须达到该分离程度，从而使 (3.2) 中的第一类和第二类错误 γ 之和收敛到 0。

现在回顾一下 [10, 第 64] 页中的内容：对于 (3.1) 和 (3.2) 中的 H_1 与 γ，非负实数序列 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 是检验 H_0 对 H_1 的极小极大 d-可区分率，当 (3.3) 成立时，其中下确界取遍所有可测函数 $\Psi: \mathrm{X} \to \{0, 1\}$。根据这些定义，极小极大可区分率 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 表示极小极大分离率 $(\varepsilon_N)_{N\in\mathbb{N}}$的一个上界，也就是说，$(\varepsilon_N/\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 有上界。

定义 3.1。设 H_1和 γ分别如（3.1）和（3.2）所示，并设 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$是一个非负实数序列。若检验序列 $(\Psi_N)_{N\in\mathbb{N}}$以速率 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$区分 H_0和 H_1，则称其具有该速率，其中

$$\lim_{N\to\infty} \gamma(\Psi_N, H_0, S, d, \delta_N) = 0.$$

根据极小极大 d-可区分率的定义，存在检验 $(\Psi_N)_{N\in\mathbb{N}}$以速率 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$区分 H_0和 H_1，意味着极小极大 d-可区分率至少不慢于速率 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$，这是由于（3.3）中的下确界所致。

设 $(\widehat{\theta}_N)_{N\in\mathbb{N}}$是由 X的可测函数组成的序列，它们是某个固定 θ的估计量。对于不同的估计量，在逆问题背景下已有相应的集中不等式；一些示例见下文的第 3.1 节。若序列 $(d(\theta_N, \theta))_{N\in\mathbb{N}}$相对于 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$随机有界，则对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $K > 0$和 $N_0 \in \mathrm{N}$，使得对于所有 $N \geq N_0$，

$$P_\theta\left(d(\widehat{\theta}_N, \theta) > K\delta_N\right) \leq \varepsilon. \tag{3.4}$$

随机有界性是比随机收敛到零更弱的性质，因为对于每个给定的 ε，只需存在一个 $K > 0$ 使得（3.4）成立即可。特别是，（3.4）不必对每个 $K > 0$ 以及足够大的 N都成立。此外，相对于 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$的随机有界性等价于以下收敛

$$P_\theta\left(d(\widehat{\theta}_N, \theta) > \delta'_N\right) \to 0$$

对于任意比 $(\delta'_N)_{N\in\mathbb{N}}$慢的速率 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$，这里的“慢”是指 $\delta'_N/\delta_N \to \infty$。如果（3.4）成立，那么我们也将序列 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$称为估计量序列的收敛率 $(\theta_N)_{N\in\mathbb{N}}$。对于采用一般希尔伯特空间范数惩罚的蒂霍诺夫–菲利普斯估计量或惩罚最小二乘估计量 [1] 以及采用 Sobolev 范数惩罚的估计量 [18]，均已证明了此类收敛率；基于高斯先验分布的后验均值或条件均值估计量也有相应结果；关于贝叶斯非线性逆问题的相关结果，参见 [15] 及其中所引文献。

注 3.2. 形式如（3.4）的集中不等式总可以通过适当调整，使其对所有 $N \in \mathbb{N}$均成立；必要时可选择更大的 K，但这可能会使其相对于 ε 的K增长速度加快。在许多情况下，人们关心的是，随着 $K = K(\varepsilon)$，（3.4）中的 $\varepsilon \to 0$必须以多快的速度增长，或者 K 能否取为常数。

为了界定插件检验的误差，可以假设某个集中不等式一致地 适用于一个包含原假设 H_0 和备择假设 $(H_{1,N})_{N\in\mathbb{N}}$的候选真值集合 $S \subseteq \Theta$。

定义 3.3（一致随机有界性）。设 S非空，且 $(\theta_N)_{N\in\mathbb{N}}$是由估计量构成的序列。若序列 $(d(\theta_N, \theta))_{N\in\mathbb{N}}$是一致随机有界的，其一致性是相对于

$(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$在 $\theta \in S$ 上而言，则对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $K = K(\varepsilon) > 0$和 $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$，使得

$$\sup_{\theta\in S} P_\theta \left(d(\widehat{\theta}_N, \theta) \geq K\delta_N \right) \leq \varepsilon, \quad \forall N \geq N_0. \tag{3.5}$$

如果存在某个概率衰减率 $(\varepsilon_N)_{N\in\mathbb{N}}$，以及某些不依赖于 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$或 $(\varepsilon_N)_{N\in\mathbb{N}}$的 $K > 0$ 和 $N_0 \in \mathbb{N}$，使得序列 $(d(\theta_N, \theta))_{N\in\mathbb{N}}$关于 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 在 $\theta \in S$ 上满足以下条件，则称其为强一致随机有界：

$$\sup_{\theta\in S} P_\theta \left(d(\widehat{\theta}_N, \theta) \geq K\delta_N \right) \leq \varepsilon_N, \quad \forall N \geq N_0. \tag{3.6}$$

如果 (3.5) 或 (3.6) 成立，则称 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$为 一致收敛率，对应于 $(\theta_N)_{N\in\mathbb{N}}$。

一致随机有界性比对每个$\theta \in S$分别满足随机有界性是更强的假设，因为 K 在 (3.5) 中不允许依赖于 θ，而 K 在 (3.4) 中则可以依赖于 θ。考虑强一致随机有界性的一个动机是，它能控制 $K(\varepsilon)$ 相对于 ε的增长率；参见 注 3.2。在 推论 4.11 和 推论 4.15中，我们将看到强一致随机有界性的实例。

估计量的期望误差满足以下条件，是一致随机有界性的一个充分条件：

$$\sup_{\theta\in S} E_\theta[d(\widehat{\theta}_N, \theta)] \leq \delta_N, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \tag{3.7}$$

例如，参见 [4]中的方程 (6.25) 和方程 (6.52)。若3.7)成立，则根据马尔可夫不等式，

$$\sup_{\theta\in S} P_\theta \left(d(\widehat{\theta}_N, \theta) \geq K\delta_N \right) \leq \sup_{\theta\in S} \frac{1}{K\delta_N} E_\theta[d(\widehat{\theta}_N, \theta)] \leq \frac{1}{K} = \varepsilon$$

对于 $K = K(\varepsilon) := \varepsilon^{-1}$以及所有 $N \in \mathbb{N}$。这给出了一个例子，其中 $K(\varepsilon)$在定义 3.3 中与 ε成反比；参见注 3.2。条件 (3.7)曾用于证明1 类错误与2 类错误之和的界，例如见 [4], 中的命题 6.2.2 和命题 6.2.13。在引理 3.4和推论 3.6中，我们将证明在比 (3.7)更弱的假设下，1 类错误和2类错误的界。

现在，我们将利用估计量误差的集中不等式，得到可区分性结果。对于一个待确定的集合 H_0 、一个非负数序列 $(t_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 以及估计量序列 $(\theta_N)_{N\in\mathbb{N}}$，定义下确界插件检验

$$\Psi_N := \mathbf{1}_{T_N > t_N}, \quad T_N := d(\widehat{\theta}_N, H_0) = \inf_{h\in H_0} d(\widehat{\theta}_N, h), \qquad N \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

我们将使用以下引理来证明可区分性结果。

引理 3.4（第一类 和第二类 错误的界）。设 $S \subseteq \Theta$ 非空，设 $(t_N)_{N\in\mathbb{N}}$为一个由非负数构成的序列，并设 $(\theta_N)_{N\in\mathbb{N}}$为一个估计量序列。那么，用于检验 和 的检验$(\Psi_N)_{N\in\mathbb{N}}$来自(3.8) 的第一类和第二类错误

$$H_0 \subseteq S \quad vs. \quad H_{1,N} \subseteq \{\theta \in S : d(\theta, H_0) \geq 2t_N\} \tag{3.9}$$

满足

$$\sup_{\theta\in H_0} P_\theta(\Psi_N = 1) \bigvee \sup_{\theta\in H_{1,N}} P_\theta(\Psi_N = 0) \leq \sup_{\theta\in S} P_\theta \left(d(\widehat{\theta}_N, \theta) \geq t_N \right), \qquad \forall N \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

引理 3.4 的证明。该证明采用了证明 [4, 命题 6.2.2] 的思路。令 $N \in \mathbb{N}$ 为任意值。根据 Ψ_N和 T_N 的定义 (3.8)，我们有 $P_\theta(\Psi_N = 1) = P_\theta(\inf_{h\in H_0} d(\theta_N, h) > t_N)$。现在，若 $\inf_{h\in H_0} d(\theta_N, h) > t_N$，则对每个 $\theta \in H_0$，都有 $d(\theta_N, \theta) > t_N$。根据前面的论证以及包含关系 $H_0 \subseteq S$，(3.10) 中的第一类错误界可由下式推出

$$\sup_{\theta\in H_0} P_\theta(\Psi_N = 1) = \sup_{\theta\in H_0} P_\theta\left(\inf_{h\in H_0} d(\widehat{\theta}_N, h) > t_N\right) \le \sup_{\theta\in H_0} P_\theta\left(d(\widehat{\theta}_N, \theta) > t_N\right).$$

根据 Ψ_N和 T_N的定义 (3.8)，再次有 $P_\theta(\Psi_N = 0) = P_\theta(\inf_{h\in H_0} d(\theta_N, h) \le t_N)$。根据三角不等式，对于所有的 $\theta, h \in \Theta$，都有 $d(\theta, h) \le d(\theta, \theta_N) + d(\theta_N, h)$。对该不等式两边关于 $h \in H_0$ 取下确界，再减去 $d(\theta, \theta_N)$，得到

$$\inf_{h\in H_0} d(\theta, h) - d(\theta, \widehat{\theta}_N) \le \inf_{h\in H_0} d(\widehat{\theta}_N, h), \quad \forall \theta \in \Theta.$$

因此，若 $\inf_{h\in H_0} d(\theta_N, h) \le t_N$，则 $\inf_{h\in H_0} d(\theta, h) - d(\theta, \theta_N) \le t_N$。现在，对于每个 $\theta \in H_{1,N}$，都有 $\inf_{h\in H_0} d(\theta, h) \ge 2t_N$，因为 $H_{1,N} \subseteq \{\theta \in S\colon d(\theta, H_0) \ge 2t_N\}$。根据前述观察可知，对于每个 $\theta \in H_{1,N}$，都有 $2t_N - d(\theta, \theta_N) \le t_N$。因此，$\theta \in H_{1,N}$的第二类错误有如下界

$$P_\theta(\Psi_N = 0) = P_\theta\left(\inf_{h\in H_0} d(\widehat{\theta}_N, h) \le t_N\right) \le P_\theta\left(2t_N - d(\widehat{\theta}_N, \theta) \le t_N\right) = P_\theta\left(d(\widehat{\theta}_N, \theta) \ge t_N\right).$$

对$\theta \in H_1$取上确界，N 即可完成式（3.10）的证明。 ■

现在我们利用引理 3.4 证明，由式（3.5）定义的一致随机有界性意味着式（3.8）中的插件检验能够区分 H_0 和 H_1；参见定义 3.1。

定理 *3.5*（一致随机有界性下的可区分性）。设 $S \subseteq \Theta$ 非空。设 $(\theta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 为一个估计量序列，$(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 为一个非负数序列，且 $(d(\theta_N, \theta))_{N\in\mathbb{N}}$ 关于 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 在 $\theta \in S$ 上一致随机有界。那么，对于任意一个收敛至零的非负数序列 $(\varepsilon_N)_{N\in\mathbb{N}}$，以及由式（*3.5*）给出的相应序列 $(K(\varepsilon_N))_{N\in\mathbb{N}}$ 和 $(N_0(\varepsilon_N))_{N\in\mathbb{N}}$，式（*3.8*）中检验 $(\Psi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 的第一类和第二类错误，其中 $t_N \leftarrow K(\varepsilon_N)\delta_N$，$N \in \mathbb{N}$，用于检验

$$H_0 \subseteq S \quad \textit{vs.} \quad H_{1,N} \subseteq \{\theta \in S : d(\theta, H_0) \ge 2K(\varepsilon_N)\delta_N\} \tag{3.11}$$

满足

$$\sup_{\theta\in H_0} P_\theta(\Psi_N = 1) \bigvee \sup_{\theta\in H_{1,N}} P_\theta(\Psi_N = 0) \le \varepsilon_M, \qquad \forall N \ge N_0(\varepsilon_M),\ M \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

特别地，极限$_{N\to\infty} \gamma(\Psi_N, H_0, S, d, K(\varepsilon_N)\delta_N) = 0$，且检验$(\Psi_N)_{N\in\mathbb{N}}$以$(H_{1,N})_{N\in\mathbb{N}}$的速率$(K(\varepsilon_N)\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$区分 H_0 与。

请注意，定理 3.5 并未对关于 ε 的 $K(\varepsilon)$的增长率施加任何条件；参见注 3.2。

定理 3.5 的证明。设 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$、$(\varepsilon_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 和 $(K(\varepsilon_N))_{N\in\mathbb{N}}$ 如定理陈述所述。由于对每个 $N \in \mathbb{N}$，$K(\varepsilon_N)\delta_N$ 均为非负数，我们可以在 (3.9) 和 (3.10) 中代入$t_N \leftarrow K(\varepsilon_N)\delta_N$，应用引理 3.4，从而得出检验问题 (3.11) 的检验 $(\Psi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 的第一类和第二类错误满足

$$\sup_{\theta\in H_0} P_\theta(\Psi_N = 1) \bigvee \sup_{\theta\in H_{1,N}} P_\theta(\Psi_N = 0) \le \sup_{\theta\in S} P_\theta\left(d(\widehat{\theta}_N, \theta) \ge K(\varepsilon_N)\delta_N\right).$$

令 $M \in \mathbb{N}$ 为任意值。根据一致随机有界性的假设（3.5）以及序列 $(\varepsilon_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 的选取，存在某个 $N_0(\varepsilon_M) \in \mathbb{N}$，使得

$$\sup_{\theta\in S} P_\theta\left(d(\widehat{\theta}_N,\theta) \geq K(\varepsilon_N)\delta_N\right) \leq \varepsilon_M, \qquad \forall N \geq N_0(\varepsilon_M).$$

合并上面的两个数学公式可得（3.12）。接下来，注意到根据第一类与第二类错误的组合误差函数 γ的定义（3.2）以及（3.12），对于每个 $N \geq N_0(\varepsilon_M)$，我们有 $\gamma(\Psi_N, H_0, S, d, K(\varepsilon_N)\delta_N) \leq 2\varepsilon_M$。令 $M \to \infty$，并利用假设（ε_N）$_{N\in\mathbb{N}}$收敛到零，即可完成证明。■

下面的结果表明，对于定理 3.5，只要采用比速率 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$更慢的备择假设速率 $(\delta'_N)_{N\in\mathbb{N}}$，就能确保对于任意选择的 $(\varepsilon_N)_{N\in\mathbb{N}}$，$(K(\varepsilon_N))_{N\in\mathbb{N}}$ 为常数。

推论 3.6（较慢速率下的可区分性）。设 $S \subseteq \Theta$ 非空，设 $(\theta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 为一列估计量，且设 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 为一列非负数，使得 $(d(\theta_N,\theta))_{N\in\mathbb{N}}$ 关于 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 在 $\theta \in S$ 上一致随机有界。若$(\delta'_N)_{N\in\mathbb{N}}$满足

$$\frac{\delta'_N}{\delta_N} \to \infty \quad as\ N \to \infty, \tag{3.13}$$

那么第合并的第一类1和第二类2 检验误差$(\Psi_N)_{N\in\mathbb{N}}$，来自(3.8) 对于 $t_N \leftarrow \delta'_N$检验

$$H_0 \subseteq S \quad vs. \quad H'_{1,N} \subseteq \left\{\theta \in S : d(\theta, H_0) \geq 2\delta'_N\right\}$$

满足 $\lim_{N\to\infty}\gamma(\Psi_N, H_0, S, D, \delta'_N) = 0$。特别地，检验 $(\Psi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 以速率 $_{N\in\mathbb{N}}$区分 H_0 与$(H_{1,\ N})_{N\in\mathbb{N}}$，其中速率为$(\delta'_N)_{N\in\mathbb{N}}$。

注 3.7。 推论 3.6 未涵盖备择假设的极限情形 $(H_{1,N})_{N\in\mathbb{N}}$ 恰好以速率 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$与原假设分离。这是因为序列受到约束 (3.13)$(\delta'_N)_{N\in\mathbb{N}}$。

推论 3.6 的证明。令 $\varepsilon > 0$ 任意。根据一致随机有界性的假设，存在 $K(\varepsilon) > 0$和 $N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$，使得对每个 $N \geq N_0(\varepsilon)$，$\sup_{\theta\in S} P_\theta(d(\theta_N,\theta) \geq K(\varepsilon)\delta_N) \leq \varepsilon$。根据假设 (3.13)，存在 $N_1(K(\varepsilon)) \in \mathbb{N}$，使得对每个 $N \geq N_1(K(\varepsilon))$，$\delta'_N \geq K(\varepsilon)\delta_N$。现在

$$\sup_{\theta\in S} P_\theta\left(d(\widehat{\theta}_N,\theta) \geq \delta'_N\right) \leq \sup_{\theta\in S} P_\theta\left(d(\widehat{\theta}_N,\theta) \geq K(\varepsilon)\delta_N\right) \leq \varepsilon, \quad \forall N \geq N_0(\varepsilon) \vee N_1(K(\varepsilon)).$$

因此，$(d(\theta_N,\theta))_{N\in\mathbb{N}}$ 满足条件 (3.5)，相对于较慢的速率 $(\delta'_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 具有一致随机有界性，其中 $N_0(\varepsilon) \leftarrow N_0(\varepsilon) \vee N_1(K(\varepsilon))$，且对于 (3.5) 中的每个 ε，常数 $K(\varepsilon) \leftarrow 1$。因此，定理 3.5 的假设均得到满足。在定理 3.5 的表述中分别以 1 和 δ'_N 替换 $K(\varepsilon_N)$ 和 δ_N，可得 $\lim_{N\to\infty}\gamma(\Psi_N, H_0, S, D, \delta'_N) = 0$。■

回顾定义 3.3中的强一致随机有界性判据 (3.6。如果我们将定理 3.5 中一致随机有界性的假设加强为强一致随机有界性，则可得到以下结果。

推论 3.8（强一致随机有界性下的可区分性）。设 $S \subseteq \Theta$ 非空。设$(\theta_N)_{N\in\mathbb{N}}$为估计量序列，且 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 为非负数列，使得$(d(\theta_N,\theta))_{N\in\mathbb{N}}$关于$(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$在 $\theta \in S$上强一致随机有界，其概率衰减率为$(\varepsilon_N)_{N\in\mathbb{N}}$，且标量 $K > 0$与 $N_0 \in \mathbb{N}$ 不依赖于$(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$或

$(\varepsilon_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 如(3.6)中所述。则第1类与第2 类错误，即检验$(\Psi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 来自(3.8) 在 $t_N \leftarrow K\delta_N$，$N \in \mathbb{N}$下用于检验

$$H_0 \subseteq S \quad vs. \quad H_{1,N} \subseteq \{\theta \in S : d(\theta, H_0) \geq 2K\delta_N\} \tag{3.14}$$

满足

$$\sup_{\theta\in H_0} P_\theta(\Psi_N = 1) \bigvee \sup_{\theta\in H_{1,N}} P_\theta(\Psi_N = 0) \leq \varepsilon_N, \qquad \forall N \geq N_0. \tag{3.15}$$

特别地，对每个 $N \geq N_0$， $\gamma(\Psi_N, H_0, S, d, K\delta_N) \leq 2\varepsilon_N$，且检验 $(\Psi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 以速率 $(K\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$区分$H_0$ 与 $(H_{1,N})_{N\in\mathbb{N}}$。

推论 3.8 的证明。根据定义 3.3，强一致随机有界性蕴含一致随机有界性。因此，我们可以将定理 3.5 陈述中的序列 $(K(\varepsilon_N))_{N\in\mathbb{N}}$ 和 $(N_0(\varepsilon_N))_{N\in\mathbb{N}}$ 分别替换为强一致随机有界性假设中给出的常数 K 和 N_0，然后应用定理 3.5。进行此替换后，定理 3.5 陈述中关于备择假设$H_{1,N}$ 的条件 (3.11) 得到与推论 3.8 陈述中条件 (3.14) 类似的条件。定理 3.5 陈述中的第一类和第二类错误界 (3.12) 得到与推论 3.8 陈述中界 (3.15) 类似的界；相应地，将 ε_M 以及条件 $N \geq N_0(\varepsilon_M)$、$M \in\mathbb{N}$ 分别替换为 ε_N和 $N \geq N_0, N \in\mathbb{N}$。推论 3.8 的最后一项陈述由 (3.15)、第一类和第二类错误的合并误差 γ的定义 (3.2)，以及定义 3.1 中区分原假设与备择假设族的检验的定义推出。

■

在第 4 节中，我们将使用推论 3.8 证明推论 4.13 和推论 4.13以及推论 4.16中后验均值的可区分性，并证明推论 4.19中最大后验估计量的可区分性。

3.1 文献中的集中不等式

在具有随机观测的非线性逆问题情境下，已有若干估计量的集中不等式。

在 [15,定理 2.3.2],中，证明了后验均值序列 $\widehat{\theta}_N = E^{\Pi_N}[\theta|(Y_k, X_k)_{k=1}^N]$ 的随机有界性，度量 d由$L^2_{\mu_X}$诱导，且其收敛速率为

$$\delta_N = N^{-\frac{\alpha+\kappa}{2(\alpha+\kappa)+d}}, \quad N \in \mathbb{N}$$

其中 $\alpha > 0$ 表示某个光滑度参数，而 d 表示一组函数的公共定义域的维数；这里考虑该函数集 S为单元素集的特殊情形。检查证明可知，集中不等式中的常数 K 取决于 θ。在第 4 节中，我们将证明，事实上，对于一个适当的有界集 S 容许参数，强一致随机有界性成立。

对于 [1], 惩罚最小二乘估计量（$\widehat{\theta}_N$），研究了具有平方范数惩罚的估计量在满足某些性质的一般非线性逆问题中的表现。[1] 中的推论 4.2 断言，$(d(\theta_N, \theta))_{N\in\mathbb{N}}$具有随机有界性，其中 d是由某个可分希尔伯特空间 H 的范数诱导的度量。该空间由从 X 到 V的映射构成，并连续嵌入 L^2_λ(X V)，且其收敛速率为

$$\delta_N = N^{-\frac{\alpha}{2\alpha+b+1}}, \quad N \in \mathbb{N}$$

其中 $\alpha > 0$ 再次表示某个光滑度参数，而 $0 < b < 1$ 如 [1, 中所给， 5]假设通过协方差算子的特征值衰减，描述了相对于设计测度的病态程度。对于 $K \propto \ln \frac{4}{\varepsilon}$，文中给出了一个集中不等式，但不清楚 K是否依赖于 θ，以及在源条件 [1, 11]假设下， K是否仍然有界。

^中的推论 2.10 证明了惩罚最小二乘^估计量$(\theta_N)_{N\in\mathbb{N}}$相对于$d(\theta_N,\ \theta)_{N\in\mathbb{N}}$的随机有界性

$$\delta_N = N^{-\frac{\alpha+\kappa}{2(\alpha+\kappa)+d_Z}}, \quad N \in \mathbb{N}$$

在 P_θ下，对于由标准 L^2范数诱导的度量，以及平方 H^α范数惩罚，其中 $\alpha > 0$ 表示某个光滑度参数， κ根据 [18, 条件 2 描述正向映射的正则性。3], 且 d_z 表示一族函数的公共定义域的维数。集中不等式中的常数 K显式依赖于 $\|\theta\|_{H^\alpha}$，但如果 $\theta \in S$在 S中有界，则可以对所有 H^α选取相同的常数。在 第 4.4 节中，我们将根据这一结果推导分离率的上界。

4 随机观测下的非线性逆问题

本节中，我们采用与 [15, 第 1 节2]相同的设定，研究随机观测下非线性逆问题的拟合优度检验。现在我们描述这一设定。设 $(\mathcal{Z}\ \zeta)$和 $(\mathcal{X}\ \lambda)$为概率空间，其中 $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^{d_z}$且 $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{d_x}$。此外，设 V 和 W为有限维数为 d_V和 d_W的赋范空间。我们考虑来自博雷尔可测子空间 θ的参数$\Theta \subseteq L^2_\zeta($ $\mathcal{Z}; W)$ 假设给定间接含噪观测

$$Y_i = [G(\theta_0)](X_i) + \varepsilon_i, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \tag{4.1}$$

在由真实参数 $\theta_0 \in \Theta$生成的函数 $G(\theta_0)$的随机点 X_i处，其中 $X_i \sim \lambda$ 是独立同分布的取值于$\mathcal{X}$的随机变量， $\varepsilon_i \sim$对某些 $\sigma > 0$服从$\mathcal{N}(0, \sigma^2\mathrm{Id}_V)$，是独立同分布的取值于 V的随机变量，且G是从 Θ到$L^2_\lambda(\mathcal{X}; V)$的可测非线性映射。此外，我们将使用赋范空间$(\mathcal{R}, \|\cdot\|_{\mathcal{R}})$，其中$\mathcal{R}$是 Θ的子空间；我们将$\mathcal{R}$称为“正则化空间”。我们将在下文的结果中进一步明确$\mathcal{R}$。注意，尽管噪声 ε_i 的协方差算子被假定为 V上的恒等算子，非各向同性仍可通过适当选择 V上的范数来建模。

我们首先陈述关于正向模型的关键假设。第一个假设表述了正向模型 G 在限制于正则化空间$\mathcal{R}$的有界子集时的有界性与利普希茨连续性。

假设 4.1（[15, 条件 2.1。1]）。设 $(\mathcal{X}\ \lambda)$，$(\mathcal{Z}\ \zeta)$，V，W，Θ，G，以及 $\mathcal{R}$如上所述。存在 $\kappa \geq 0$，使得对每一个 $M > 0$，存在有限标量 $U = U(M) \geq 1$和 $L = L(M) > 0$，使得

$$\sup_{\theta \in \Theta \cap B_{\mathcal{R}}(M)} \|G(\theta)\|_\infty \leq U \tag{4.2}$$

$$\|G(\theta_1) - G(\theta_2)\|_{L^2_\lambda(\mathcal{X},V)} \leq L\|\theta_1 - \theta_2\|_{(H^\kappa(\mathcal{Z}))^*}, \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \Theta \cap B_{\mathcal{R}}(M). \tag{4.3}$$

指标 κ在（4.3）中描述了算子 G的光滑程度，从而量化了由 G定义的逆问题的不适定性。注意， H^κ指的是基于勒贝格测度的标准索博列夫空间，因此若 $\kappa = 0$，则空间 $(H^0(\mathcal{Z}))^* = L^2(\mathcal{Z})$在（4.3）右端的范数是标准的，即勒贝格 L^2 范数；参见第1.4节。注意，与[18], 相比，其中对前向映射 G 使用了类似但全局的假设来证明最大后验估计量的收敛性（参见假设 4.17），假设 4.1 仅要求局部有界性和局部利普希茨连续性。

接下来，我们考虑正向模型的一个所谓稳定性估计条件。

假设 4.2（稳定性估计）。设 $(\mathcal{X}\ \lambda)$、$(\mathcal{Z}\ \zeta)$、V、W、G和 $\mathcal{R}$如假设 4.1所述。存在某个 $\eta > 0$，使得对每个 $M > 0$，都存在常数 L'、$\delta_0 > 0$，使得

$$\sup\left\{\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^2_\zeta(\mathcal{Z},W)} : \theta_1, \theta_2 \in B_{\mathcal{R}}(M), \|G(\theta_1) - G(\theta_2)\|_{L^2_\lambda(\mathcal{X},V)} \leq \delta\right\} \leq L'\delta^\eta \tag{4.4}$$

对所有 $\delta \in (0,\ \delta_0]$ 均成立。

一个 假设 4.2 的例子 $\eta = 1$ 见于 [12, 命题 3。3]。 假设 4.2 蕴含[15,条件 2.1。4]。 假设 4.2 与 [15, 条件 2.1。4] 之间一个重要的区别[15, 在于，条件 2.1。4] 依赖于一个给定的 θ_0，而 假设 4.2 则不依赖。我们将在下文的定理 4.10中利用这一区别。请注意，稳定性条件（4.4）是用 L^2_ζ 参数空间中的范数，而非标准 L^2 范数来表述的。

4.1 后验收缩下后验均值的一致收敛

正如我们在第 3 节所见，估计量的一致收敛意味着可区分性。本节将证明，后验收缩可推出后验均值的一致收敛。为此，我们陈述并证明定理 4.7，该定理表明，正则化空间 $\mathcal{R}$ 连续嵌入到可分巴拿赫空间$\mathbb{B}$ 中，且具有一致后验收缩时，后验均值在$\mathbb{B}$ 范数下一致收敛。

我们将 $P_\theta^N = \bigotimes_{i=1}^N P_\theta$记为 $(Y_i,\ X_i)_{i=1}^N$的联合分布，其中 P_θ表示满足$(Y_i,\ X_i)$且符合（4.1）的一个一般二元组的概率分布，其中 $\theta_0 \leftarrow \theta$，对 $\theta \in \Theta$成立。令 μ表示 V上的勒贝格测度与 λ的乘积。于是 $P_\theta \ll \mu$，并且

$$p_\theta(y,x) \coloneqq \frac{\mathrm{d}P_\theta}{\mathrm{d}\mu}(y,x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{d_V/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\|y - G(\theta)(x)\|_V^2\right); \tag{4.5}$$

参见 [15, 公式（1.10）]。由此得到 [15, 公式（1.13）]，即在加性独立高斯观测噪声模型（4.1）下，数据 $D_N = (Y_i,\ X_i)_{i=1}^N$的对数似然函数定义：

$$\Theta \ni \theta \mapsto \ell_N(\theta) \coloneqq -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^N \|Y_i - G(\theta)(X_i)\|_V^2. \tag{4.6}$$

对于 Θ 上的先验分布 Π，给定数据 D_N后，相应的后验分布是 Θ 上满足下式的概率测度

$$\mathrm{d}\Pi(\theta|D_N) = \frac{e^{\ell_N(\theta)}\mathrm{d}\Pi(\theta)}{\int_\Theta e^{\ell_N(\theta')}\mathrm{d}\Pi(\theta')}, \quad \theta \in \Theta. \tag{4.7}$$

我们将使用满足以下条件的 θ 上的中心高斯先验。

假设 4.3（[15, 条件 2.2。1]）。设 $(\mathcal{X}\ \lambda)$、$(\mathcal{Z}\ \zeta)$ 以及 G如 假设 4.1所述。设 Π'为线性空间 $\Theta \subseteq L^2_\zeta(\mathcal{Z})$上的中心高斯博雷尔概率测度，其再生核希尔伯特空间（RKHS）为 $\mathcal{H}$。进一步假设 $\Pi'(\mathcal{R}) = 1$对某个可分赋范线性子空间 $(\mathcal{R}\ \|\cdot\|_\mathcal{R})$ 成立，该子空间属于 Θ。

回顾一下，若 $\mathbb{B}$ 是一个可分巴拿赫空间，且 X是一个以零为均值的 $\mathbb{B}$值高斯随机变量，那么 $\mathcal{H}$ 是 X 的再生核希尔伯特空间，它是 $\mathbb{B}$ 的稠密可测子空间，并连续嵌入于 $\mathbb{B}$；参见例如 [4, 命题 2.69] 或 [3, 公式 (I.3)]之后的讨论。因此，假设 4.3意味着，若 R 是一个可分巴拿赫空间，则 H R。以下给出的缩放高斯先验族的定义与 公式 (2.18)]中的定义相同。

定义 4.4。 设 $\mathcal{Z}$ 是 $\mathbb{R}^{d_z}$中的有界光滑区域， κ 如假设 4.1所述，并令 Π' 满足假设 4.3。对于选定的 $\alpha > 0$，定义 Π_N，对每个 $N \in \mathbb{N}$，其概率分布为$\theta \coloneqq N^{-d_z/(4\alpha+4\kappa+2d_z)}\theta'$，其中 $\theta' \sim \Pi'$。

根据 α 来自定义 4.4 和 κ 来自假设 4.1，我们将使用以下[15, 方程（2.19）] 中的序列来确定后验收缩率：

$$\delta_N \coloneqq N^{-\frac{\alpha+\kappa}{2\alpha+2\kappa+d_z}}. \tag{4.8}$$

对于每个 $M > 0$，对于 κ 和假设 4.1 和假设 4.3 中的 R来自以及，并且对于任意一个收敛至零的序列$(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$，我们将使用正则化集，这些集合来自 [15, 方程（2.20）]:

$$\Theta_N = \Theta_N(M) := \{\theta \in \mathcal{R} : \theta = \theta_1 + \theta_2, \|\theta_1\|_{(H^\kappa)^*} \le M\delta_N,\ \|\theta_2\|_{\mathcal{H}} \le M,\ \|\theta\|_{\mathcal{R}} \le M\}. \tag{4.9}$$

这些集合也可以用闵可夫斯基和表示为

$$\Theta_N = \left(B_{(H^\kappa)^*}(M\delta_N) + B_{\mathcal{H}}(M)\right) \cap B_{\mathcal{R}}(M).$$

对于半度量空间 $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$ 的子集 $(\mathcal{M}\ d)$ 和 $\varepsilon > 0$，我们将相应的覆盖数记为 $N(\mathcal{M}',\ d,\ \varepsilon)$。下面定理 4.5 中的条件（4.15b）用半度量 d_G表示，其定义为

$$(\theta_1, \theta_2) \mapsto d_G(\theta_1, \theta_2) := \|G(\theta_1) - G(\theta_2)\|_{L^2_\lambda(\mathcal{X},V)}. \tag{4.10}$$

对于 δ_N在（4.8）中，$\theta_0 \in \Theta$ 以及 $\mathcal{U} > 0$，定义

$$\mathcal{B}_N(\theta_0, \mathcal{U}) := \{\theta \in \Theta : d_G(\theta, \theta_0) \le \delta_N, \|G(\theta)\|_\infty \le \mathcal{U}\}, \tag{4.11}$$

并注意到 $\mathrm{B}_N(\theta_0,\ \mathrm{U})$ 关于第二个参数是单调递增的，即如果 $\mathrm{U}_1 \le \mathrm{U}_2$，那么对于每个 θ_0，$\mathrm{B}_N(\theta_0,\ \mathrm{U}_1) \subseteq \mathrm{B}_N(\theta_0,\ \mathrm{U}_2)$。我们还定义如下函数。

$$(0,\infty) \ni u \mapsto C_u := \frac{1 - e^{-u^2/2}}{2u^2} \tag{4.12}$$

现在陈述一个前向后验收缩结果，它将构成后续所有后验收缩结果的基础。下文中，$\Pi_N(\cdot|D_N)$ 表示将 4.7 中的 $\Pi \leftarrow \Pi_N$ 替换为 Π_N 后，对应于定义 4.4 的后验分布。

定理 4.5。 假设假设 *4.1* 对正向映射 G、$\kappa \ge 0$、$M' \mapsto U(M') < \infty$、正则化空间 $\mathcal{R}$以及有界光滑区域 $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^{d_z}$成立。设基准先验分布 Π' 满足假设 *4.3*（针对给定的$\mathcal{R}$），并设 $\alpha > 0$ 满足再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的 Π' 连续嵌入条件

$$\mathcal{H} \hookrightarrow H^\alpha_c(\mathcal{Z}) \text{ if } \kappa \ge 1/2, \qquad \text{or} \qquad \mathcal{H} \hookrightarrow H^\alpha(\mathcal{Z}) \text{ if } \kappa < 1/2. \tag{4.13}$$

令 $(\Pi_N)_{N\in\mathbb{N}}$和 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$分别如定义 *4.4* 和 *(4.8)* 中所述。设 $\theta_0 \in H \cap R$。则存在充分大的 $0 < M < \infty$，使得 $\theta_0 \in B_{\mathcal{R}}(M)$，并且存在 $A = A(U)$，对于由 *(4.2)* 和 M 定义的 $U = U(M)$，使得对所有充分大的 N，

$$\Pi_N(\mathcal{B}_N(\theta_0, U)) \ge e^{-AN\delta_N^2}. \tag{4.14}$$

此外，如有必要，进一步增大 M，则存在某个 $B > A + 2$，使得集合$(\Theta_N(M))_{N\in\mathbb{N}}$ 在 (4.9) 中定义，并满足

$$\Pi_N(\Theta_N^{\complement}(M)) \le e^{-BN\delta_N^2} \tag{4.15a}$$

$$\log N(\Theta_N(M), d_G, \overline{m}\delta_N) \le N\delta_N^2 \tag{4.15b}$$

对于所有充分大的 $N \in \mathbb{N}$，其中 $m = m(M, L)$ > 0 在 *(4.15b)* 中足够大，且对于条件 *(4.3)*（假设 *4.1*）中定义的 $L = L(M)$。特别地，对于任意 $0 < b < B - (A + 2)$ 以及任意$0 < c < 1$，我们可以选取充分大且与 c 无关的 $m = m(A, b, m)$，使得对于如 *(4.14)* 中的 U，对于由 *(4.12)* 给出的且满足 $u \leftarrow U$ 的 C_U，对于某个 $N^*(c) \in \mathbb{N}$，以及对于每个 $N \ge N^*(c)$，

$$P^N_{\theta_0}\left(\Pi_N(\{\theta \in \Theta_N : d_G(\theta, \theta_0) \le mC_U^{-1/2}\delta_N\}|D_N) \le 1 - e^{-bN\delta_N^2}\right) \le (1 + c)\frac{2(U^2 + 1)}{N\delta_N^2}. \tag{4.16}$$

定理 4.5 是 [15,定理 2.22] 的扩展版本。结论 (4.16) 是 [15, 方程 (1.27)], 的强化版本，它只说明

$$\lim_{N\to\infty} P_{\theta_0}^N\left(\Pi_N(\{\theta\in\Theta_N : d_G(\theta,\theta_0)\le m\delta_N C_v^{-1}\}|D_N)\le 1-e^{-bN\delta_N^2}\right)=0,$$

而 [15, 定理 2.22] 给出（4.16）。参见附录A.1，其中给出了定理 4.5的证明。

在下面的命题 4.6中，我们给出一个高斯基先验分布的示例 Π'，它满足定理 4.5的嵌入条件（4.13）。上一段已在 [15, 第 2 节2]中提及此示例。

命题 *4.6*。设 $Z\subset R^{d_z}$ 是一个具有光滑边界的有界区域，且 ζ 是 Z 上具有有界勒贝格密度 p_ζ 的概率测度。那么，对于任意 $\alpha>d_z/2$ 和 $\kappa\ge 0$，存在一个 *Whittle–Matérn* 型高斯过程 $\theta=\{\theta(z): z\in Z\}$，使得其概率分布 Π' 满足假设 *4.3*，且对于任意 $\beta\in[0,\alpha-d_z/2)$，有 $R\leftarrow H^\beta(Z)$。此外，再生核希尔伯特空间 H 满足连续嵌入条件（*4.13*）。

命题 4.6 的证明。设 θ 是定义在 Z 上、协方差函数为 K_α 的 Whittle–Matérn 型高斯过程；例如，参见 [15, 第 B.1 节3]中的构造。正如 [15, 定理 B.13], 所述，θ 的再生核希尔伯特空间为 $\mathrm{H}=H^\alpha(\mathrm{Z})$，其中 $\alpha>d_z/2$；并且对任意 $\beta\in[0,\alpha-d_z/2)$，过程 θ 几乎必然取值于 $\mathrm{R}=H^\beta(\mathrm{Z})$。现在，$H^\beta(\mathrm{Z})\subset L^2(\mathrm{Z})$。由于 p_ζ 有界，我们可以应用引理 a.1 的结论 (ii)，从而得到 $L^2(\mathrm{Z})\hookrightarrow L^2_\zeta(\mathrm{Z})$。因此，存在一个线性空间 Θ，满足 $\mathrm{R}\subseteq\Theta\subseteq L^2_\zeta(\mathrm{Z})$，且假设 4.3 成立。

接下来，我们验证再生核希尔伯特空间 H 满足连续嵌入 (4.13)。由于如上一段所述，当 $\alpha>d_z/2$ 时，再生核希尔伯特空间为$H^\alpha(\mathrm{Z})$，因此，只要满足 $\kappa<\frac{1}{2}$，判据 $\mathrm{H}\hookrightarrow H^\alpha(\mathrm{Z})$ 就成立。若 $\kappa\ge\frac{1}{2}$，则将 Whittle–Matérn 过程 θ 乘以截断函数 $\xi\in C^\infty(\mathrm{Z})$，其中该函数在 Z 中具有紧支撑，由此得到过程 $\theta':=\{\xi(z)\theta(z): z\in\mathrm{Z}\}$，其再生核希尔伯特空间连续嵌入于 $H^\alpha_c(\mathrm{Z})$；参见上方的公式 [15, (B.1)]。将 θ-替换为 θ_ξ，即可得到 $\kappa\ge\frac{1}{2}$ 情形下所需的结果。■

现在我们证明，如果 $\mathbb{B}$ 是一个巴拿赫空间，且 $\Pi'(\mathbb{B})=1$ 并且相对于 $\mathbb{B}$ 度量的一致后验收缩以某个收敛速率成立 $(\delta_N^\eta)_{N\in\mathbb{N}}$，且候选真值构成某个适当有界的集合 S，那么后验均值序列在 $\mathbb{B}$度量下以相同速率 $(\delta_N^\eta)_{N\in\mathbb{N}}$强一致随机有界；参见定义 3.6 中的 3.3。

定理 *4.7*（一致后验收缩蕴含后验均值的一致收敛）。假设正向模型 G 满足假设 *4.1* 中的 *(4.2)*，且基准先验 Π'、R 和 H 满足假设 *4.3*。设 $(\Pi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 满足定义 *4.4*，δ_N满足 *(4.8)*，并且 $(B,\|\cdot\|_{\mathbb{B}})$ 是一个可分巴拿赫空间，满足 $\Pi'(B)=1$。假设 $S\subset B\cap R$ 在 B 范数和 R 范数下均有界，并且对于充分大的 $b>0$，存在 $0<M,C,C_1,\eta<\infty$充分大，$0<q<\infty$和$N^*\in N$，使得对每个 $N\ge N^*$以及每个 $\theta_0\in S$，

$$P_{\theta_0}^N\left(\Pi_N(\{\theta\in\Theta:\|\theta\|_{\mathcal{R}}\le M,\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}\le C\delta_N^\eta\}|D_N)\le 1-e^{-bN\delta_N^2}\right)\le\frac{C_1}{(N\delta_N^2)^{\mathfrak{q}}},\tag{4.17}$$

并且假设存在 $0<\mathrm{A}=\mathrm{A}(S,U)<\infty$使得对于包络常数 $U=U(M)$如(4.2)中所示，

$$\forall\theta_0\in S, N\in\mathbb{N},\quad \Pi_N(\mathcal{B}_N(\theta_0,U))\ge e^{-\mathrm{A}N\delta_N^2}.\tag{4.18}$$

那么对于 $N\ge N^*$,

$$\sup_{\theta_0\in S} P_{\theta_0}^N\left(\|E^{\Pi_N}[\theta|D_N]-\theta_0\|_{\mathbb{B}}>C\delta_N^\eta\right)\le\frac{C_1+2(U^2+1)}{(N\delta_N^2)^{1\wedge\mathfrak{q}}}.\tag{4.19}$$

特别地，$(\|E^{\Pi_N}[\theta|D_N]-\theta_0\|_{\mathbb{B}})_{N\in\mathbb{N}}$相对于$(\delta_N^{\eta})_{N\in\mathbb{N}}$在 $\theta_0\in S$上一致强随机有界，且概率衰减率与 $(1/(N\delta_N^2)^{1\wedge q})_{N\in\mathbb{N}}$成正比。

证明定理 4.7，请参见第 A.2节。

假设（4.18）是关于集合族 $(\mathcal{B}_N(\theta_0,U))_{\theta_0\in S}$的条件，该集合族由（4.11）定义。它是（4.14）的一个一致版本，具体而言，将（4.14）中可能 θ_0依赖于 A 的指数替换为仅依赖于 S的指数 A 。

在定理 4.7中，候选真实参数集合 S 的两个关键假设是： θ_0 在 S R 范数下有界，并且存在一个标量 A 使得（4.18）成立。在命题 4.8中，我们证明，如果候选真实参数集合 S 在H 范数下有界，那么这两个关键假设就成立。

命题 *4.8*。假设定理 *4.5* 的假设成立，且映射 $M'\mapsto U(M')$ 如（*4.2*）所示。如果 $S\subset R$ 在 H 范数下有界，那么 S 在 R 范数下有界。对于每个 $0<M_0<\infty$，以及对于 $U=U(M_0+sup_{\theta_0\in S}\|\theta_0\|_R)$，存在满足（*4.18*）的 $0<A=A(S,U)<\infty$。

关于命题 4.8的证明，请参见第A.2.1节。

本节最后，我们给出一条观察结果，后续证明中将会用到。

注 4.9。定理 4.5 和定理 4.7 的共同假设是，假设 4.1 和 4.3 成立，并且 $(\Pi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 和 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 分别满足定义 4.4 和条件 (4.8)。定理 4.7 中不包含在定理 4.5 假设内的假设如下。首先，对于某个可分巴拿赫空间 B，我们有 $\Pi'(B)=1$，并且 $S\subset B\cap R$ 在 B 范数和 R 范数下有界。其次，假设前向收缩结果 (4.17) 成立。第三，假设一致先验质量下界条件 (4.18) 成立。

4.2 L^2_ζ 范数下的一致后验收缩与可区分性

在上一节中，我们在 定理 4.7 中证明了，在某个巴拿赫空间范数下的一致后验收缩意味着后验均值在同一范数下的一致收敛。本节中，我们聚焦于巴拿赫空间为 $L^2_\zeta(\mathcal{Z},W)$空间定理 4.10中，我们给出了 L^2_ζ 后验收缩结果 [15, 定理 2.3。1], 该定理针对单个真实参数进行陈述θ_0。我们给出的版本对所有属于适当有界集的候选真实参数 θ_0 均一致成立 S。结合定理 4.10 和定理 4.7，我们得到后验均值的一致 L^2_ζ 收敛；见推论 4.11。本节的最后一个结果推论 4.13则利用推论 3.8 ，根据后验均值的一致收敛L^2_ζ 得到可区分性L^2_ζ。

对于定理 4.10 ，回顾4.8）、（4.9）和（4.12）中对 δ_N、$\Theta_N(M)$ 的定义，以及映射$u\mapsto C_u$。在本文的背景下，定理 4.10 的重要性在于，它为定理 4.7 的假设（4.17）成立提供了充分条件。

定理 4.10（均匀 L^2_ζ 后验收缩）。假设定理 *4.5* 的假设成立。假设 $S\subset\mathcal{R}\cap\mathcal{H}$在$\mathcal{H}$范数下有界。那么对于每个 $b>0$，我们可以选取足够大的$\sup_{\theta_0\in S}\|\theta_0\|_{\mathcal{R}}<M<\infty$和 $0<m<\infty$，使得对于某个 $U=U(M)$、某个 $N^*\in\mathbb{N}$、每个 $N\geq N^*$ 以及每个$\theta_0\in S$,

$$P^N_{\theta_0}\left(\Pi_N(\{\theta\in\Theta_N(M):d_G(\theta,\theta_0)\leq mC_U^{-1/2}\delta_N\}|D_N)\leq 1-e^{-bN\delta_N^2}\right)\leq\frac{4(U^2+1)}{N\delta_N^2}.$$

此外，如果 假设 *4.2* 对 $\mathcal{R}$、某个 $\eta>0$以及某个 $L'=L'(M)$成立，那么对于每个 $N\geq N^*$ 以及每个 $\theta_0\in S$,

(4.20) $$P^N_{\theta_0}(\Pi_N(\{\theta\in\Theta_N(M):\|\theta-\theta_0\|_{L^2_\zeta(\mathcal{Z},W)}\leq L'(mC_U^{-1/2}\delta_N)^\eta\}|D_N)\leq 1-e^{-bN\delta_N^2})\leq\frac{4(U^2+1)}{N\delta_N^2}.$$

关于 定理 4.10的证明，请参阅第 A.3节。

后验收缩率 $\delta_N^\eta = N^{-\eta(\alpha+\kappa)/(2\alpha+2\kappa+d_z)}$在 定理 4.10 中得到，与 [15,定理 2.3。1]中的速率相同。 定理 4.10 与 [15,定理 2.3。1] 的关键区别在于，在 定理 4.10中，后验收缩的结论对集合 θ_0 中的所有参数 S均一致成立，而 [15, 定理 2.3。1] 则仅针对单个参数陈述 θ_0。根据（4.8），两个结果中所述概率的收敛速率为

$$\left(N\delta_N^2\right)^{-1} = N^{-\frac{d_z}{2\alpha+2\kappa+d_z}}.$$

对于下面的结果，请回顾 定义 3.3中强一致随机有界性的定义、4.8 中 δ_N 的定义，以及 $\eta > 0$ 这一参数，它来自 假设 4.2。

推论 4.11（一致 L_ζ^2 后验均值收敛）。假设 定理 *4.10* 的所有假设均成立，且给定集合 S。那么，对于 M， m， $U = U(M)$， $N^* \in \mathbb{N}$，以及 $L' = L'(M)$，如 定理 *4.10*中所述，我们有

$$\sup_{\theta_0 \in S} P_{\theta_0}^N \left(\|E^{\Pi_N}[\theta|D_N] - \theta_0\|_{L_\zeta^2} > L'(mC_U^{-1/2})^\eta \delta_N^\eta \right) \le \frac{6(U^2+1)}{N\delta_N^2}, \qquad \forall N \ge N^*. \tag{4.21}$$

特别地，$(\|E^{\Pi_N}[\theta|D_N] - \theta_0\|_{L_\zeta^2})_{N\in\mathbb{N}}$ 关于$(\delta_N^\eta)_{N\in\mathbb{N}}$在 $\theta_0 \in S$ 上强一致随机有界，其概率衰减率正比于$(1/N\delta_N^2)_{N\in\mathbb{N}}$。

注 4.12。 注意，如果 ζ 具有勒贝格密度 p_ζ，且其本质下确界严格为正，那么由引理 (i) 的Lemma A.1的证明可得

$$\|E^{\Pi_N}[\theta|D_N] - \theta_0\|_{L_\zeta^2} > L'(mC_U^{-1/2})^\eta \delta_N^\eta \impliedby \|E^{\Pi_N}[\theta|D_N] - \theta_0\|_{L^2} \operatorname*{ess\,inf}_{z\in\mathcal{Z}}\{p_\zeta(z)\} > L'(mC_U^{-1/2})^\eta \delta_N^\eta.$$

由上式可知，(4.21)意味着

$$\sup_{\theta_0 \in S} P_{\theta_0}^N \left(\|E^{\Pi_N}[\theta|D_N] - \theta_0\|_{L^2} > \left(\operatorname*{ess\,inf}_{z\in\mathcal{Z}}\{p_\zeta(z)\}\right)^{-1} L'(mC_U^{-1/2})^\eta \delta_N^\eta \right) \le \frac{6(U^2+1)}{N\delta_N^2}, \qquad \forall N \ge N^*,$$

这恰好是后验均值的 L^2 一致收敛，而非 L_ζ^2 如推论 4.11中所示的收敛。

推论 4.11 的证明。证明基于应用定理 4.7。首先回顾，定理 4.10 的假设是定理 4.5 的假设成立，并且 S 在 H 范数下有界。因此，只需证明定理 4.7 的其余假设（见注 4.9）得到满足。首先，由于 $\mathrm{R} \subseteq \Theta \subseteq L_\zeta^2(\mathrm{Z})$，且根据假设 4.3 有 $\Pi'(\mathrm{R}) = 1$，我们有 $\Pi'(L_\zeta^2(\mathrm{Z})) = 1$，因此在应用定理 4.7 时可以取 $\mathrm{B} \leftarrow L_\zeta^2(\mathrm{Z})$。结合 $\Pi'(L_\zeta^2(\mathrm{Z})) = 1$和 [4,命题 2.6，得到 Π' 的再生核希尔伯特空间 H 连续嵌入于 $L_\zeta^2(\mathrm{Z})$中，因此 S 在 H 范数下有界意味着 S 在 R 范数和 L_ζ^2 范数下均有界。其次，定理 4.10 的结论 (4.20) 意味着定理 4.7 的假设 (4.17) 成立，其中按照假设 4.2，作替换 $C \leftarrow L'(mC^{-1}/_U{}^2)^\eta$为 η， $C_1 \leftarrow 4(U^2+1)$，且指数 $\mathrm{q} \leftarrow 1$。第三， S 在 H 范数下有界这一假设意味着，对于每个充分大的 M，存在某个 $\mathrm{A} = \mathrm{A}(S, U(M))$，使得由命题 4.8 可知 (4.18) 成立。因此，定理 4.7 的所有假设均得到满足，将上述替换代入定理 4.7 的界 (4.19)，即可得到所需结论。

■

收敛率 $\delta_N^\eta = N^{-\eta_{(\alpha+\kappa)/(2\alpha+2\kappa+d_z)}}$对于后验均值，在 推论 4.11中得到的收敛率与 [15, 定理 2.32], 中的相同，(4.21) 对所有 θ_0 来自集合S的元素均一致成立。该收敛率 δ_N^η 也与 [18, 推论 210],中为最大后验估计量建立的收敛率相同，但后者对 G施加了更强的、见下文 定理 4.18 中的全局假设。

接下来，我们使用 推论 4.11 来证明 L^2_ζ 基于后验均值的下确界插件检验的可区分性。

推论 *4.13*（L^2_ζ 后验均值的可区分性）。假设定理 *4.10* 的条件成立。对于给定的集合 S以及如式 *(4.8)* 中的 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$，则对于 M、 m、 $U = U(M)$、 $N^* \in \mathbb{N}$ 以及如定理 *4.10* 中的$L' = L'(M)$，插件检验 $\Psi_N = \mathbf{1}_{T_N > t_N}$ 的第一类和第二类错误

$$T_N := \inf_{h\in H_0} \|E^{\Pi_N}[\theta|D_N] - h\|_{L^2_\zeta(\mathcal{Z})} \qquad \text{and} \qquad t_N := L'(mC_U^{-1/2})^\eta \delta_N^\eta$$

用于检验 $H_0 \subseteq S$ 与

$$H_{1,N} \subseteq \left\{\theta_0 \in S : \inf_{h\in H_0} \|\theta_0 - h\|_{L^2_\zeta(\mathcal{Z})} \geq 2L'(mC_U^{-1/2})^\eta \delta_N^\eta\right\}$$

满足

$$\sup_{\theta_0\in H_0} P^N_{\theta_0}(\Psi_N = 1) \leq \frac{6(U^2+1)}{N\delta_N^2} \qquad \text{and} \qquad \sup_{\theta_0\in H_{1,N}} P^N_{\theta_0}(\Psi_N = 0) \leq \frac{6(U^2+1)}{N\delta_N^2}$$

对所有 $N \geq N^*$。

在对 ζ作出额外假设的情况下，我们可以得到 L^2 后验均值的可区分性；参见 注 4.12。

推论 4.13 的证明。由给定的假设，推论 4.11 成立，而推论 4.11 的结论 (4.21) 表明，(3.6) 中的度量 d、估计量 $(\theta_N)_{N\in\mathbb{N}}$、可区分率 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$、概率衰减率 $(\varepsilon_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 以及标量 $K > 0$ 和 $N_0 \in \mathbb{N}$，分别替换为该度量、后验均值 $(E^{\Pi_N}[\theta|D_N])_{N\in\mathbb{N}}$、修正收缩率 $(\delta_N^\eta)_{N\in\mathbb{N}}$、概率衰减率 $(6(U^2+1)/(N\delta_N^2))_{N\in\mathbb{N}}$，以及推论 4.11 中的常数 $L'(mC^{-1}/_U{}^2)^\eta$ 和 N^* 后，(3.6) 成立。将上述替换应用于推论 3.8，即得结论。■

4.3 索博列夫范数和上确界范数下的一致后验收缩与可区分性

本节将说明，在比第 4.2 节更强的假设下，我们可以使用定理 4.10，该定理给出了在 L^2_ζ 中的一致后验收缩，从而在适当范围的索伯列夫指标下，实现标准 Sobolev 范数中的一致后验收缩，进而也能实现上确界范数中的一致后验收缩；见下文的定理 4.14 。将定理 4.14 与定理 4.7 结合，可得后验均值在同一类范数下一致收敛；见推论 4.15。在推论 4.16中，我们将推论 4.15 与推论 3.8 结合，从而得到同一类范数下的可区分性。

For 以下结果中，请回忆$\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^{d_z}$ 是一个有界光滑区域；见定义 4.4。

定理 *4.14*（一致 *Sobolev* 与上确界范数后验收缩）。假设定理 *4.10* 的所有条件对于候选真值集合 S θ_0 均成立，且对于某个 $\beta > d_z/2$，R 连续嵌入于 $H^\beta(Z)$ 中；并设 b、 M、 m、 N^* 和 U 满足 *(4.20)*。设 ζ 是 Z 上的一个概率测度，其勒贝格密度 p_ζ 的本质下确界严格为正。那么，对于相同的 b 和 M，对于 *(4.8)* 中的 δ_N，对于假设 *4.2* 中的 η，以及任意固定的 $\beta' \in [0, \beta)$，存在某个 $0 < C < \infty$，使得对每个 $N \geq N^*$ 和 $\theta_0 \in S$，以下结论均成立：

$$P^N_{\theta_0}\left(\Pi_N(\{\theta \in \Theta : \|\theta\|_{\mathcal{R}} \leq M, \|\theta - \theta_0\|_{H^{\beta'}} \leq C\delta_N^{\eta(\beta-\beta')/\beta}\}|D_N) \leq 1 - e^{-bN\delta_N^2}\right) \leq \frac{4(U^2+1)}{N\delta_N^2}. \tag{4.22}$$

特别地，对于任意固定的 $\beta' \in (d_z/2,\ \beta)$，存在某个 $0 < C' < \infty$，使得对每个 $N \geq N^*$ 和 $\theta_0 \in S$，以下结论均成立：

$$P_{\theta_0}^N \left(\Pi_N(\{\theta \in \Theta : \|\theta\|_{\mathcal{R}} \leq M, \|\theta - \theta_0\|_\infty \leq C' \delta_N^{\eta(\beta-\beta')/\beta}\} | D_N) \leq 1 - e^{-bN\delta_N^2} \right) \leq \frac{4(U^2+1)}{N\delta_N^2}. \tag{4.23}$$

关于定理 4.14的证明，请参见第A.4节。

对于给定的 $\beta > d_z/2$，上确界范数下、式（4.23）中所述的后验收缩率 $\delta_N^{\eta(\beta-\beta'\ \ \beta)/}$受到下界 $\beta' > d_z/2$的限制；而在 $H^{\beta'}$ 范数下的后验收缩率 $\delta_N^{\eta(\beta-\beta'\ \ \beta)/}$可以通过选择 $\beta' \in [0, d_z/2]$,来提高，但代价是在较弱范数下发生后验收缩。与 [15, 命题 4.1。3], 相比，定理 4.14的陈述并不局限于 ζ 为均匀分布的情形。

下一个结果与推论 4.11类似。回顾定义 3.3中的条件（3.6），该定义描述了强一致随机有界性。

推论 4.15（后验均值在索博列夫范数和上确界范数下的一致收敛）。假设定理 *4.14*的所有假设均成立，其中标量为 β和 η，且候选真值集合 S为 θ_0。则以下结论成立：

(i) 对任意 $\beta' \in (0, \beta)$，$C > 0$ 可取充分大，使得对某些 $0 < C_1 < \infty$ 和 $N_0 \in \mathbb{N}$，且对所有 $N \geq N_0$，

$$\sup_{\theta_0 \in S} P_{\theta_0}^N \left(\|E^{\Pi_N}[\theta|D_N] - \theta_0\|_{H^{\beta'}} > C\delta_N^{\eta(\beta-\beta')/\beta} \right) \leq \frac{C_1}{N\delta_N^2},$$

即，$(\|E^{\Pi_N}[\theta|D_N] - \theta_0\|_{H^{\beta'}})_{N\in\mathbb{N}}$关于速率 $(\delta_N^{\eta(\beta-\beta'\ \ \beta)/})_{N\in\mathbb{N}}$在 $\theta_0 \in S$ 上强一致随机有界，且其概率衰减率与 $(1/N\delta_N^2)_{N\in\mathbb{N}}$成正比。

(ii) 对任意 $\beta' \in (d_z/2, \beta)$，$C' > 0$ 可取充分大，使得对某些 $0 < C_2 < \infty$ 和$N_0 \in \mathbb{N}$，且对所有 $N \geq N_0$，

$$\sup_{\theta_0 \in S} P_{\theta_0}^N \left(\|E^{\Pi_N}[\theta|D_N] - \theta_0\|_\infty > C'\delta_N^{\eta(\beta-\beta')/\beta} \right) \leq \frac{C_2}{N\delta_N^2},$$

即，$(\|E^{\Pi_N}[\theta|D_N] - \theta_0\|_\infty)_{N\in\mathbb{N}}$关于速率$(\delta_N^{\eta(\beta-\beta'\ \ \beta)/})_{N\in\mathbb{N}}$在 $\theta_0 \in S$ 上强一致随机有界，且其概率衰减率与 $(1/N\delta_N^2)_{N\in\mathbb{N}}$成正比。

推论 4.15 的证明。证明与推论 4.11 的证明类似，只需验证定理 4.7 的假设在 Sobolev 范数情形和上确界范数情形下均成立。定理 4.14 的假设强于定理 4.10 的假设，因为定理 4.14 还要求，对于某个 $\beta > d_z/2$，R 连续嵌入于 H^β(Z)。特别地，定理 4.10 中关于 $S \subset \mathrm{R} \cap \mathrm{H}$ 在 H 范数下有界的假设，在作为定理 4.14 的假设隐含提出时，对 S 而言是一个更强的条件，这是由于还要求对于某个 $\beta > d_z/2$，R 连续嵌入于 H^β(Z)。根据命题 4.8，S 在 H 范数下有界这一假设意味着定理 4.7 的一致先验质量下界条件 (4.18) 得以满足。因此，只需验证定理 4.7 的其余两个假设；参见注 4.9。

(i)：定理 4.14 中关于 R 连续嵌入 H^β(Z)（$\beta > d_z/2$）的假设意味着，对于任意 $\beta' < \beta$，R 都连续嵌入 $H^{\beta'}$(Z)。因此，若 $\mathrm{B} \hookleftarrow H^{\beta'}$(Z)，则定理 4.7 中关于 $\Pi'(\mathrm{B}) = 1$ 且 $S \subset \mathrm{B} \cap \mathrm{R}$ 在 B 范数和 R 范数下均有界的假设成立，因为 S 被假设在 H 范数下有界，参见命题 4.8。鉴于定理 4.14 的所有假设均成立，我们可以应用结论 (4.22)，以确保该假设

(4.17) 定理 4.7 成立，其中作如下替换：$\mathbb{B} \leftarrow H^{\beta'}(\mathcal{Z})$， C在 (4.17) 中替换为 C在 (4.22) 中的常数，η在 (4.17) 中替换为指数 $\eta(\beta - \beta')/\beta$在 (4.22) 中的指数，且 q $\leftarrow 1$。因此，定理 4.7 的另外两个假设也成立；根据定理 4.7 的结论 (4.19)，并作上述替换，即可得到 Sobolev 范数情形下所需的结论。

(ii)：如上文 (i) 的证明所示，对于任意 $\beta' < \beta$， $\Pi'(H^{\beta'}(\mathrm{Z})) = 1$and S 在 $H^{\beta'}$ 和 R 范数下均有界。由 Sobolev 嵌入 $\|\cdot\|_\infty \lesssim \|\cdot\|_{H^\beta}$（例如参见 (a.24a)），可得 $\Pi'(L^\infty) = 1$，且 S 在上确界范数和 R 范数下有界。鉴于定理 4.14 的所有假设均成立，我们可以应用 (4.23)，得出定理 4.7 的假设 (4.17) 成立，其中将 (4.17) 中的 B $\leftarrow L^\infty(\mathrm{Z})$ 替换为 (4.23) 中的常数 C'，将 (4.17) 中的 C 替换为 (4.23) 中的指数 $\eta(\beta - \beta')/\beta$，并令 q $\leftarrow 1$。因此，定理 4.7 的其余两个假设也成立。根据定理 4.7 的结论 (4.19)，并作上述替换，即可得到上确界范数情形下所需的结论。■

现在，我们结合推论 3.8 和推论 4.15 ，得到 Sobolev 范数和上确界范数下的可区分性。

推论 4.16（后验均值的 Sobolev 范数与上确界范数可区分性）。假设定理 *4.14* 的条件在 β和 η下成立。令 δ_N如(4.8) 中所述，对所有 $N \in \mathbb{N}$成立。此外，假设以下任一条件成立：

(i) $\mathbb{B} = H^{\beta'}(\mathcal{Z})$对任意 $\beta' \in [0, \beta)$成立；或

(ii) $\mathbb{B} = L^\infty(\mathcal{Z})$和 $\beta' \in (d_z/2, \beta)$.

那么， $K, K' > 0$可以取足够大，使得插件检验$\Psi_N = \mathbf{1}_{T_N > t_N}$的第一类和第二类错误满足

$$T_N := \inf_{h \in H_0} \|E^{\Pi_N}[\theta|D_N] - h\|_{\mathbb{B}} \qquad and \qquad t_N := K\delta_N^{\eta(\beta-\beta')/\beta}$$

用于检验 $H_0 \subseteq S$对

$$H_{1,N} \subseteq \left\{\theta_0 \in S: \inf_{h \in H_0} \|\theta_0 - h\|_{\mathbb{B}} \geq 2K\delta_N^{\eta(\beta-\beta')/\beta}\right\}$$

满足

$$\sup_{\theta_0 \in H_0} P_{\theta_0}^N(\Psi_N = 1) \leq \frac{K'}{N\delta_N^2} \qquad and \qquad \sup_{\theta_0 \in H_{1,N}} P_{\theta_0}^N(\Psi_N = 0) \leq \frac{K'}{N\delta_N^2}$$

对所有 $N \geq N_0$，其中 $N_0 \in \mathbb{N}$ 按 推论 *4.15*中的方式选取。

推论 4.16 的证明。(i)：假设 B = $H^{\beta'}(\mathrm{Z})$。根据假设，推论 4.15 成立。因此，$\widehat{\ }$我们得到强一致随机有界性，其中度量为 d，估计量为 $(\theta_N)_{N\in\mathbb{N}}$，可区分率为 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$，概率衰减率为 $(\varepsilon_N)_{N\in\mathbb{N}}$，标量为 $K > 0$和 $N_0 \in$；在 (3.6) 中，N 分别替换为 $H^{\beta'}$度量、后验均值 $(E^{\Pi_N}[\theta|D_N])_{N\in}$N、修正收缩率 $(\delta_N^{\eta(\beta-\beta'\ \ \beta})/\ )_{N\in}$N、概率衰减率 $(C_1/(N\delta_N^2))_{N\in}$N，以及推论 4.15 的陈述 (i) 中的常数 C和 N_0。用这些替换应用推论 3.8，可得 B $= H^{\beta'}(\mathrm{Z})$ 的所需结论，其中 $K \leftarrow C$和 $K' \leftarrow C_1$。

(ii)：假设 B $= L^\infty(\mathrm{Z})$。根据这些假设，推论 4.15 成立。因此，我们得到强一致的$\widehat{\ }$随机有界性，其中度量 d、估计量 $(\theta_N)_{N\in}$N、可区分率 $(\delta_N)_{N\in}$N、概率衰减率 $(\varepsilon_N)_{N\in\mathbb{N}}$，以及式 (3.6) 中的标量 $K > 0$和 $N_0 \in$N，分别替换为由上确界范数诱导的度量、后验均值 $(E^{\Pi_N}[\theta|D_N])_{N\in}$N、修正收缩率 $(\delta_N^{\eta(\beta-\beta'\ \ \beta})/\ )_{N\in}$N、概率衰减率 $(C_2/(N\delta_N^2))_{N\in}$N，以及推论 4.15 的陈述 (ii) 中的常数 C'和 N_0。将这些替换应用于推论 3.8，即可得到 B $= L^\infty(\mathrm{Z})$ 的所需结论，其中 $K \leftarrow C$和 $K' \leftarrow C_2$。■

4.4 基于最大后验估计量的检验在 L^2 中的可区分性

回顾式（4.1），G是从 Θ到 $L^2_\lambda(\mathrm{X}\ V)$ 的非线性映射，其中 $\Theta \subseteq L^2_\zeta(\mathrm{Z}W)$，$\mathrm{X} \subseteq \mathrm{R}^{d_x}$，$V$和$W$是维数分别为 d_V和 d_W的有限维赋范空间，并且对于某个 $\sigma \neq 0$，$\varepsilon_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2 \mathrm{Id}_V)$。给定一个由 Z 到 W 的函数所构成的再生核希尔伯特空间 H，以及一个集合族 $(y_i)_{i=1}^N \subset V$，我们将最大^后验（*MAP*）或惩罚最小二乘估计量$\theta_{\mathrm{MAP},N}$ 定义为非参数 Tikhonov-Phillips 泛函 $J^N_{r,\mathcal{H}} : \mathrm{H} \to \mathrm{R}$ 的极小值点，其中

$$J^N_{r,\mathcal{H}}(\theta) := \frac{1}{2\sigma^2 N} \sum_{i=1}^{N} \|y_i - ([G(\theta)](x_i))\|_V^2 + \frac{r^2}{2}\|\theta\|^2_{\mathcal{H}}, \qquad \forall \theta \in \mathcal{H}, \tag{4.24}$$

正则化参数 $r > 0$。例如，参见 [18, 命题 2。5] 该命题给出了确保存在性的结果，^即最大后验估计量$\theta_{\mathrm{MAP},\ N}$。在模型（4.1）的背景下，最大后验估计量可解释为基于中心高斯先验分布的后验分布 Π 中后验概率密度的最大值点，该先验分布的 Cameron–Martin 空间为$\mathcal{H}$。本节考虑$\mathcal{H} = H^\alpha(\mathcal{Z}^W)$的情形。首先回顾 [18, 条件 2_3]:

假设 4.17（全局有界性与利普希茨连续性）。(i) 存在 α，γ_1，$\kappa \geq 0$和$C_{\mathrm{Lip},\ 2} > 0$ 使得

$$\|G(\theta_1) - G(\theta_2)\|_{L^2_\lambda} \leq C_{\mathrm{Lip},2}\left(1 + \|\theta_1\|^{\gamma_1}_{H^\alpha} \vee \|\theta_2\|^{\gamma_1}_{H^\alpha}\right)\|\theta_1 - \theta_2\|_{(H^\kappa)^*}$$

~对所有 θ_1，$\theta_2 \in \Theta \cap \mathrm{H}$，满足

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \begin{cases} H^\alpha(\mathcal{Z}, W) & \text{if } \kappa < \frac{1}{2}, \\ H^\alpha_c(\mathcal{Z}, W) & \text{if } \kappa \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(ii) 存在 $U > 0$ 使得

$$\sup_{\theta \in \Theta} \|G(\theta)\|_\infty \leq U.$$

(iii) 存在 $\alpha, \gamma_2, \eta_1, \eta_2 \geq 0$ 以及$C_{\mathrm{Lip},\infty} > 0$，使得 $\alpha > \max\{\eta_1, \eta_2\} + \frac{d_z}{2}$，并且

$$\|G(\theta_1) - G(\theta_2)\|_\infty \leq C_{\mathrm{Lip},\infty}\left(1 + \max\left\{\|\theta_1\|^{\gamma_2}_{C^{\eta_1}}, \|\theta_2\|^{\gamma_2}_{C^{\eta_1}}\right\}\right)\|\theta_1 - \theta_2\|_{C^{\eta_2}}$$

对所有 $\theta_1, \theta_2 \in H^\alpha(\mathrm{Z}W)$。

与假设 4.1不同，后者在 Θ与由$\mathcal{R}$范数定义的球的交集上涉及一个利普希茨连续性条件和一个有界性条件，假设 4.17 则涉及~两个利普希茨连续性条件和一个有界性条件 G，这些条件作用于较小的空间$\mathcal{H}$或 H^α，而无需局部化到$\mathcal{R}$ 范数中的球。

定理 4.18（最大后验估计量的一致 L^2 收敛）。设$\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^{d_z}$ 为具有光滑边界的有界集。设假设 *4.2* 对$\mathcal{R} = H^\alpha(\mathcal{Z}^W)$与 $\eta \in (0, 1]$,成立，并设假设 *4.17*成立，其中

$$\alpha \geq \max\left\{\eta_1 \vee \eta_2 + d_z \vee \frac{d_z}{2}(1 + \gamma_2), \frac{d_z}{2}\gamma_1 - \kappa\right\}.$$

于是，对每个¬c、$M > 0$，都存在 c_7、$c_8 > 0$，使得 $J^N_{\delta_N, H^\alpha}$ 的一个极小化解 $\widehat{\theta}_{\mathrm{MAP},N}$ 满足

$$\sup_{\theta_0 \in B_{H^\alpha}(M)} P^N_{\theta_0}\left(\|\widehat{\theta}_{\mathrm{MAP},N} - \theta_0\|_{L^2} > c_7 \delta^\eta_N\right) < c_8 \exp\left(-\bar{c} N \delta^2_N\right), \quad \forall N \in \mathbb{N} \tag{4.25}$$

with

$$\delta_N = N^{-\frac{\alpha+\kappa}{2\alpha+2\kappa+d_Z}}$$

如 (4.8) 所示。特别地，$(\theta_{\mathrm{MAP},N})_{N\in\mathbb{N}}$ 关于速率 $(\delta_N^\eta)_{N\in\mathbb{N}}$ 在 $\theta_0 \in B_{H^\alpha}(M)$ 上是强一致随机有界的，其概率衰减率与 $(\exp(-cN\delta_N^2))_{N\in\mathbb{N}}$ 成正比。

定理 4.18 的证明。首先，注意到 [18, 条件 2.3] 由假设 4.17 满足。接下来，我们证明稳定性估计 [18, 条件 2.9] 成立。为此，注意对所有 $\theta_1, \theta_2 \in B_{H^\alpha}(M)$，我们有 $\|\theta_1\|_{H^\alpha} + \|\theta_2\|_{H^\alpha} \le 2M$，因此由假设 4.2（其中 M 替换为 $2M$）可得 [18, 条件 2.9] 成立。因此，我们可以应用 [18, 推论 2.10], ，从而得到所述标量 $c_7, c_8 > 0$ 的存在，使得

$$\begin{aligned} &P_{\theta_0}^N\left(\|\widehat{\theta}_{\mathrm{MAP},N} - \theta_0\|_{L^2} > c_7\delta_N^\eta\right) \\ &\le P_{\theta_0}^N\left(\|\widehat{\theta}_{\mathrm{MAP},N} - \theta_0\|_{L^2} > c_7\delta_N^\eta \text{ or } \|\widehat{\theta}_{\mathrm{MAP},N}\|_{H^\alpha} > c_7\right) < c_8\exp\left(-\bar{c}N\delta_N^2\right) \end{aligned}$$

对所有 $\theta_0 \in B_{H^\alpha}(M)$以及每个 $N \in \mathbb{N}$ 均成立。最后的结论成立，因为（4.25）意味着，满足强一致随机有界性的定义 3.3 中的条件（3.6）成立，其中 d、速率 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$、集合 S、概率衰减率 $(\varepsilon_N)_{N\in\mathbb{N}}$以及标量 $K > 0$和 $N_0 \in$分别替换为 $L^2(\mathbb{Z}W)$ 度量、速率 $(\delta_N^\eta)_{N\in\mathbb{N}}$、集合 $B_{H^\alpha}(M)$、概率衰减率 $(c_8\exp(-cN\delta_N^2))_{N\in\mathbb{N}}$以及标量 c_7和 1。■

在定理 4.18中，ζ被选为有界集 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^{d_Z}$上的均匀分布。因此，$\zeta$与 $\mathbf{1}_{\mathcal{Z}}\mathrm{d}z$成正比，其中 $\mathrm{d}z$ 表示 $\mathbb{R}^{d_Z}$上的勒贝格测度。此外，正则化参数被选为 $r = \delta_N$，因为我们考虑$J^N_{\delta_N,H^\alpha}$的极小化子；参见J^N_{r,H^α}的定义（4.24）。泛函$J^N_{r,\mathcal{H}}$与对数似然 ℓ_N相关，具体如下

$$NJ^N_{r,\mathcal{H}}(\theta) = -\ell_N(\theta) + \frac{Nr^2}{2}\|\theta\|^2_{H^\alpha}, \quad \forall\theta \in H^\alpha(\mathcal{Z}, W).$$

因此，选择 r可以解释为选择一个高斯先验，其 Cameron–Martin 空间H^α 按一个常数倍缩放

$$\left(Nr^2\right)^{-\frac{1}{2}} = N^{-\frac{1}{2}}\delta_N^{-1} = N^{-\frac{d_Z}{2\alpha+2\kappa+d_Z}},$$

这与定义 4.4中使用的缩放相同。

推论 4.19（L^2 最大后验估计量的可区分性）。设 $M > 0$。在定理 *4.18*的假设下，对于每个 $c > 0$，存在 c_7，$\bar{c_8} > 0$ 使得检验$\Psi_N := \mathbf{1}_{T_N > t_N}$的第一类和第二类误差满足

$$T_N := \inf_{h\in H_0}\|\widehat{\theta}_{\mathrm{MAP},N} - h\|_{L^2(\mathcal{Z},W)}, \qquad t_N := c_7\delta_N^\eta$$

以及 δ_N如（4.8）用于检验 $H_0 \subseteq B_{H^\alpha}$（$M$）针对

$$H_{1,N} \subset \left\{\theta \in B_{H^\alpha}(M) : \inf_{h\in H_0}\|\theta - h\|_{L^2} \ge 2c_7\delta_N^\eta\right\}$$

满足

$$\sup_{\theta_0\in H_0} P^N_{\theta_0}(\Psi_N = 1) \le c_8\exp(-\bar{c}N\delta_N^2) \qquad \textit{and} \qquad \sup_{\theta_0\in H_{1,N}} P^N_{\theta_0}(\Psi_N = 0) \le c_8\exp(-\bar{c}N\delta_N^2)$$

对所有 $N \in \mathbb{N}$。

推论 4.19 的证明。定理 4.18 中强一致随机有界性的结论 (4.25) 表明，推论 3.8 的假设在集合 $S \leftarrow B_{H^\alpha}(M)$、估计量 $(\widehat{\theta}_N)_{N\in\mathrm{N}} \leftarrow (\widehat{\theta}_{\mathrm{MAP},N})_{N\in\mathrm{N}}$、速率 $(\delta_N^\eta)_{N\in\mathrm{N}}$、概率衰减率 $(c_8\exp(-cN\delta_N^2))_{N\in\mathrm{N}}$ 以及标量 $K \leftarrow c_7$ 和 $N_0 \leftarrow 1$ 下成立。因此，检验 $(\Psi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 的误差界可由推论 3.8 中的误差界 (3.15) 得出。■

5 IN由线性常微分方程支配的逆问题 S

本节考虑一类线性常微分方程初值问题，其中包括 第 2.3 节 所述的双室模型，并定义一个可在第 4 节的框架下分析的非线性逆问题。

设 P 是 R^{d_p} 的非空开子集。对于每个 $p \in \mathrm{P}$，考虑相应的时间齐次线性常微分方程初值问题

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}s(t,p) &= A(p)s(t,p) \quad \text{for } t\in[0,T], \\ s(0,p) &= s_0(p) \end{aligned} \tag{5.1}$$

在 $\mathrm{R}^{d_s}, d_s \in \mathrm{N}$ 中，其中矩阵 $A\colon \mathrm{P} \to \mathrm{R}^{d_s\times d_s}$ 和初始条件 $s_0\colon \mathrm{P} \to \mathrm{R}^{d_s}$ 均依赖于参数向量 $p \in \mathrm{P}$，而 $0 < T < \infty$ 固定。假设 $A(p)$ 和 $s_0(p)$ 都是关于 p 的局部有界且局部Lipschitz连续函数，并且假设 $A(p)$ 在 R 上可对角化。

假设5.1 ([12, 假设 2。1])。对于每个 $M > 0$，存在 $C_1(M) > 0$ 使得 t

$$\begin{aligned} \|A(p)\|_2 &\le C_1(M), & \|s_0(p)\| &\le C_1(M), \\ \|A(p)-A(q)\|_2 &\le C_1(M)\|p-q\|_2, & \|s_0(p)-s_0(q)\|_2 &\le C_1(M)\|p-q\|_2 \end{aligned}$$

对所有 $p, q \in B_2(0,M) := \{p' \in \mathrm{R}^{d_p}\colon \|p'\|_2 \le M\}$。

对于每个 $d \in \mathrm{N}$，$\mathrm{GL}(d,\mathrm{R})$ 表示 $\mathrm{R}^{d\times d}$ 的可逆元素集合。

假设 5.2（[12, 假设 2.3]）。对于每个 $p \in \mathrm{P}$，存在 $\Lambda(p)$ $V(P) \in \mathrm{GL}(d_s,\mathrm{R})$，其对角线为 $\Lambda(p)$，使得 $A(p) = V(p)\Lambda(p)V^{-1}(p)$。

若假设 5.2 成立，则解 s_1 的第一个分量 s（常微分方程初值问题5.1）的形式为

$$s_1(t,p) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{d}} a_i(p)e^{\lambda_i(p)t} \quad \text{for all } t\in[0,T]$$

其中 $\mathrm{N} \ni \mathfrak{d} \le d_s$ 个互不相同的实值函数 $\lambda_1,\dots,\lambda_{\mathfrak{d}}$ 以及 $\mathfrak{d}$ 个实值函数 $a_1,\dots,a_{\mathfrak{d}}$ 属于 p，参见文献 [12] 第 6 页。这里，我们将 $\mathrm{P} \ni p \mapsto (a_i(p)\ \lambda_i(p))_{i=1}^p \in \mathrm{R}^{2\mathfrak{d}}$ 称为系数映射，并将 $2\mathfrak{d}$ 称为内在维数。

对于以下假设，我们用 $A^\top$ 表示 $A \in \mathrm{R}^{m\times n}$, m的转置 $n \in \mathrm{N}$。

假设 5.3. 的系数映射 s_1 属于 $C^1(\mathcal{P},\mathbb{R}^{2\mathfrak{d}})$, $a_i(p) > 0$ 对所有 $p \in \mathcal{P}$ 和 $i \in \{1,\dots,\mathfrak{d}\}$，且对于每个 $q \in \mathcal{P}$，在 q处计算的系数映射的雅可比矩阵，即

$$\mathcal{J}(q) = \begin{bmatrix} \nabla_p a_1(p) & \dots & \nabla_p a_{\mathfrak{d}}(p) & \nabla_p \lambda_1(p) & \dots & \nabla_p \lambda_{\mathfrak{d}}(p) \end{bmatrix}^\top\Big|_{p=q} \in \mathbb{R}^{2\mathfrak{d}\times d_p}, \tag{5.2}$$

具有满秩。

假设 5.3意味着第 [12] 节中的假设 2.5 和 3.1 均成立。特别地，假设 5.3意味着解的第一分量 $s_1(t,p)$对每个 $t \in [0,T]$和$p \in \mathcal{P}$均严格为正。这对于下面 5.3 式中 G 的定义很重要。

回顾第 2.3 节 关于药代动力学模型中‘协变量’集合$\mathcal{X}$ 的讨论。固定一个确定性集合族 $(t_j)_{j=1}^{d_y} \subset [0,T]$，其中包含 $d_y \in \mathbb{N}$ 个互不相同的观测时间、一个可容许协变量集合 $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{d_x}$、一个定义在 μ_X 上的概率测度 $\mathcal{X}$，以及一个可容许的CPM集合$\Theta \subseteq L^2_{\mu_X}(\mathcal{X}, \mathcal{P})$。定义正向模型 $G\colon \Theta \to L^2_{\mu_X}(\mathcal{X}, \mathbb{R}^{d_y})$ 如下：

$$[G(\theta)](x) := \big(\ln s_1(t_j, \theta(x))\big)_{j=1}^{d_y}, \quad \forall \theta \in \Theta, x \in \mathcal{X}. \tag{5.3}$$

考虑由（4.1）和（5.3）定义的逆问题。在（5.3）中，我们假设只能观测到解的第一个分量，并存储该分量在观测时间 $(t_j)_{j=1}^{d_y}$处的取值的对数。

首先，我们证明第 2.3 节所述的双室模型属于所考虑的常微分方程初值问题类别。

命题5.4。 双室模型满足 假设 *5.1* 至 *5.3*，其中 $2\mathfrak{d} = d_p = 4$。

命题*5.4*的证明命题*5.4*。 由 [12] 中的命题5.3可知，假设 5.1 和5.2 成立。此外， [12] 中的引理B.2 表明，假设 5.3 在 $\mathfrak{d} = 2$下成立。■

接下来，我们证明对于所考虑的常微分方程初值问题类别，算子 G 在（5.3）中满足第 4 节 关于正向模型所述的关键假设。

命题*5.5.* 假设常微分方程初值问题 *(5.1)* 满足假设 *5.1* 至 *5.3*，$X \subset R^{d_x}$ 是一个有界光滑区域， μ_X 是 X 上具有有界勒贝格密度 p_X 的概率测度，R 连续嵌入 L^∞*(X, P)*，且 $d_y \geq d_p = 2\mathfrak{d}$。那么，在 *(5.3)* 中定义的算子 G 满足假设 *4.1* 和 *4.2*，其中 $\kappa \leftarrow 0, \eta \leftarrow 1, Z \leftarrow X, \zeta \leftarrow \mu_X, \lambda \leftarrow \mu_X, W \leftarrow R^{d_p}, V \leftarrow R^{d_y}$,

$$U = \sqrt{d_y} C_2, \quad L = \sqrt{d_y} L_s e^{C_2} \|p_X\|^{1/2}_{L^\infty(\mathcal{X})}, \quad \textit{and} \quad L' = C_3, \tag{5.4}$$

对于 $L_s = L_s(M,T)$，如命题 *2.* [12, 中所述； $C_2 = C_2(M,T)$，如命题 *3.* [12, 中所述；以及 $C_3 = C_3(M,T,(t_j)_{j=1}^{d_y})$，如命题 *3.* [12, 中所述。

命题5.5的证明。假设5.3意味着假设 2.5 和 3.1 在 [12] 中均成立。此外，假设5.1和假设 5.2分别对应 [12] 中的假设2.1和2.3。R连续嵌入于 L^∞(X, P)这一假设，对应于 [12, 命题3.2]中对正则化空间R所作的假设 [12,方程（3.2）] 。根据这些观察，我们可以应用 [12, 命题3.2], ，特别是其中的结论 [12, 方程（3.5）] ，取 $\mu \leftarrow \mu_X$和$q \leftarrow 2$，从而得到对每个 $M > 0$,

$$\|G(\theta_1) - G(\theta_2)\|_{L^2_{\mu_X}} \leq \sqrt{d_y} L_s e^{C_2} \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^2_{\mu_X}}, \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in B_{\mathcal{R}}(M).$$

根据以下假设： μ_X具有有界的勒贝格密度 p_X，我们可以应用（ii），该结论来自引理A.1中的 $\zeta \leftarrow \mu_X$，进一步估计前述不等式右侧的上界，从而得到

$$\|G(\theta_1) - G(\theta_2)\|_{L^2_{\mu_X}} \leq \sqrt{d_y} L_s e^{C_2} \|p_X\|^{1/2}_{L^\infty(\mathcal{X})} \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^2}$$

对于所有 θ_1， $\theta_2 \in B_{\mathcal{R}}(M)$。该不等式

$$\sup_{\theta \in B_{\mathcal{R}}(M)} \|G(\theta)\|_\infty \leq \sqrt{d_y} C_2 < \infty$$

由 [12,命题 3.2]的结论 [12, 方程 (3.3)] 得出。因此，假设 4.1 在取 $\kappa \leftarrow 0$时成立，其中 Z $\leftarrow$X, $\zeta \leftarrow \mu_X$， $\lambda \leftarrow \mu_X$， $W \leftarrow \mathrm{R}^{d_p}$， $V \leftarrow \mathrm{R}^{d_y}$，并且 U与 L如 (5.4) 所示。最后，由 [12, 命题 3.3]（取 $q \leftarrow 2$ ）可知，假设 4.2 在 $\eta \leftarrow 1$与 L'（如 (5.4) 所示）下成立。■

验证双室模型满足假设 4.1 的计算表明，双室模型并不满足假设 4.17的全局条件，因为常数 U和 L （模型藉此满足假设 4.1 ）对半径呈指数依赖 M；参见 [12]中的引理 B.1 和命题 3.2。特别地， [12, 方程 (3.7)] 表明，标量 C_2 （它决定 U和 L，如（5.4）所示）依赖于 C_1 （见假设5.1），其依赖方式为

$$C_2(M,T) = C_1(M)T + |\log C_1(M)| + C'(M)C_1(M)T$$

对于某个 C'（M） > 0以及 T。另一方面， [12,引理 B。1]指出 C_1（M） $\lesssim e^{2M}$。因此，我们无法应用 推论 4.19 来得出基于最大后验估计量的插件检验的可区分性。

5.1 $L^2_{\mu_X}$中的一致后验收缩与可区分性

在本节中，我们应用 第 4 节 中的结果，证明 L^2中的后验收缩与可区分性，其中逆问题由（4.1）和（5.3）定义。

定理 *5.6*（一致 $L^2_{\mu_X}$后验收缩）。设常微分方程初值问题（*5.1*）满足假设 *5.1* 至 *5.3*，且 $X \subset R^{d_x}$ 是一个有界光滑区域， μ_X 是 X 上具有有界勒贝格密度 p_X 的概率测度，并且 $d_y \geq d_p = 2\mathfrak{d}$。令基准先验分布 Π' 满足假设 *4.3*，使得其再生核希尔伯特空间 H 连续嵌入 $H^\alpha(X, P)$（对某个 $\alpha > 0$ ），并且 R 连续嵌入 $L^\infty(X, P)$，再令 $(\Pi_N)_{N\in N}$ 如定义 *4.4* 所示。此外，令 $S \subset H$ 在 H 范数下有界。那么，对于每个 $b > 0$ 以及充分大的 $M, m > 0$，存在 $N_0 \in N$，使得对于每个 $\theta_0 \in S$，由 （*4.1*）和 （*5.3*）定义的逆问题的后验分布 Π_N （$\cdot|D_N$）满足

$$P^N_{\theta_0}\left(\Pi_N\left(\{\theta \in \Theta_N(M) : \|\theta - \theta_0\|_{L^2_{\mu_X}(\mathcal{X},\mathcal{P})} \leq L' m C_U^{-1/2}\delta_N\}\middle| D_N\right) \leq 1 - e^{-bN\delta_N^2}\right) \leq 4\frac{U^2+1}{N\delta_N^2}, \tag{5.5}$$

对于所有 $N \geq N_0$，其中对于所有 $N \in \mathbb{N}$， $\delta_N := N^{-\alpha/(2\alpha+d_x)}$、 U 和 L' 由 (5.4) 定义，而 C_U 由 (4.12) 定义。备注5.7。满足定理 5.6 假设的高斯基准先验 Π' 的一个具体例子，是具有再生核希尔伯特空间 H $= H^\alpha$(X, P) 的 Whittle–Matérn 过程的概率分布，其中 $\alpha > d_x$ 满足某些条件。根据定理 5.6 对 X 和 μ_X 的假设，我们可以应用命题 4.6，得出存在具有这一正则性的 Whittle–Matérn 过程。

后验收缩率 $\delta_N = N^{-\alpha/(2\alpha+d_x)}$ 在 定理 5.6 中确立，其后验收缩率与 [12, 定理 4.2], 中的相同，区别在于，(5.5) 对集合 S中的每个θ_0 都一致成立。(5.5中的概率衰减率为

$$\left(N\delta_N^2\right)^{-1} = N^{-\frac{d_x}{2\alpha+d_x}}.$$

定理 5.6 的证明。在所述假设下，我们可以应用命题5.5，得出按 (5.3) 定义的 G 满足假设 4.1 和 4.2，其中 Z $\leftarrow$X、 $\zeta \leftarrow \mu_X$、 $\lambda \leftarrow \mu_X$、 $V \leftarrow \mathrm{R}^{d_y}$、 $W \leftarrow \mathrm{R}^{d_p}$、$\kappa \leftarrow 0$、 $\eta \leftarrow 1$以及 U和 L' 如 (5.4) 所示。对基准先验 Π' 的所述假设与定理 4.5 中对基准先验 Π' 所作的假设一致，因为 $\kappa = 0$；参见 (4.13)。因此，定理 4.5 的所有假设均成立。根据定理 5.6 中关于 S 在 H 范数下有界的假设，由命题 4.8 可知， S 在 R 范数下也有界。因此，定理 4.10 的所有假设均成立；将其结论 (4.20) 应用于 $\eta \leftarrow 1$ 以及 (5.4) 中的 U和 L'，即可得到所需结论 (5.5)。■

推论 5.8（$L^2_{\mu_X}$ 可区分性）。假设定理 *5.6* 的条件成立。那么，对于 M， m，以及$N_0 \in \mathbb{N}$ 如定理 *5.6*中所述，对于 U和 L' 如(5.4)中所述，以及 C_U如(4.12)中所述，插件检验 $\Psi_N = \mathbf{1}_{T_N > t_N}$ 的第一类

$$T_N := \inf_{h\in H_0} \|E^{\Pi_N}[\theta|D_N] - h\|_{L^2_{\mu_X}(\mathcal{X},\mathcal{P})}, \qquad t_N := L'(mC_U^{-1/2})\delta_N,$$

和 $\delta_N := N^{-\alpha/(2\alpha+d_x)}$ 用于检验 $H_0 \subseteq S$ 是否属于

$$H_{1,N} := \left\{\theta_0 \in S : \inf_{h\in H_0} \|\theta_0 - h\|_{L^2_{\mu_X}(\mathcal{X},\mathcal{P})} \geq 2L'(mC_U^{-1/2})\delta_N\right\}$$

满足

$$\sup_{\theta_0\in H_0} P^N_{\theta_0}(\Psi_N = 1) \leq \frac{6(U^2+1)}{N\delta_N^2} \qquad \textit{and} \qquad \sup_{\theta_0\in H_{1,N}} P^N_{\theta_0}(\Psi_N = 0) \leq \frac{6(U^2+1)}{N\delta_N^2}$$

对所有 $N \geq N_0$。

如果勒贝格密度 p_X 的 μ_X 本质下确界严格为正，那么我们可以从 L^2可区分性陈述中得到 $L^2_{\mu_X}$ 可区分性，该陈述见推论 5.8；见注 4.12。

推论 *5.8* 的证明。在定理 5.6的证明中，我们证明了定理 4.10的假设在取$\mathcal{Z} \leftarrow \mathcal{X}$、$\zeta \leftarrow \mu_X$、$\lambda \leftarrow \mu_X$、$V \leftarrow \mathbb{R}^{d_y}$、$W \leftarrow \mathbb{R}^{d_p}$、$\kappa \leftarrow 0$、$\eta \leftarrow 1$，以及 U和 L'如（5.4）中所述的取值时成立。因此，我们可以采用相同的取值应用推论 4.13，从而得到所需的结论。■

注 5.9。如果 H_0 是一类无穷次光滑函数，并且对于每个 $\alpha > 0$，它在 H^α(X) 中有界，那么在推论 5.8 中，α 可以任意大。由推论 5.8 给出的速率 $\delta_N := N^{-\alpha/(2\alpha+d_x)}$ 可知，这一观察意味着，在 $\gamma \in (1/3, 1/2)$ 任意接近“参数率”1/2 的情况下，以任意速率 $\delta_N = N^{-\gamma}$ 都具有 $L^2_{\mu_X}$可区分性。这一观察与药代动力学中参数类协变量-参数关系的拟合优度检验有关。回顾第 2.3 节中所描述的指数函数类（2.3）和仿射线性函数类（2.4），并回顾每一类中的元素均由一个有限维干扰参数 τ 参数化。如果这些类由属于某个适当有界集 T 的 τ 的取值定义，那么根据上述观察，对于这些类可以在几乎参数率下获得 $L^2_{\mu_X}$ 可区分性。

5.2 一致后验收缩以及索博列夫范数与上确界范数下的可区分性

在本节中，我们应用第 4 节 中的结果，证明由（4.1）和（5.3）定义的逆问题在某些索博列夫度量以及由上确界范数诱导的度量下的后验收缩与可区分性。

定理 *5.10*（一致 *Sobolev* 与上确界范数后验收缩）。设常微分方程初值问题（*5.1*）满足假设 *5.1* 至 *5.3*，μ_X 具有有界的勒贝格密度，并且在 X 上的本质下确界严格为正，且 $d_y \geq d_p = 2\mathfrak{d}$。设基准先验分布 Π' 满足假设 *4.3*，其再生核希尔伯特空间 H 连续嵌入于 $H^\alpha(X, P)$，其中 $\alpha > 0$，并且 R 连续嵌入于 $H^\beta(X, P)$，其中 $\beta > d_x/2$。此外，设 $S \subset H$ 在 H 范数下有界。则对于任意 $b > 0$、$\beta' \in [0, \beta)$，以及充分大的 $M > 0$，存在 $C > 0$ 和 $N_0 \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $\theta_0 \in S$和$N \geq N_0$，由（*4.1*）和（*5.3*）定义的逆问题的后验分布 $\Pi_N(\cdot|D_N)$ 满足

$$P^N_{\theta_0}\left(\Pi_N\left(\{\theta \in \Theta : \|\theta\|_{\mathcal{R}} \leq M, \|\theta - \theta_0\|_{H^{\beta'}} \leq C\delta_N^{(\beta-\beta')/\beta}\}\middle| D_N\right) \leq 1 - e^{-bN\delta_N^2}\right) \leq \frac{4(U^2+1)}{N\delta_N^2},$$

其中 $\delta_N := N^{-\alpha/(2\alpha+d_x)}$ 对所有 $N \in \mathbb{N}$ 以及 U由下式给出 (5.4)。特别地，对每个 $b > 0$，$\beta' \in (d_x/2, \beta)$，以及充分大的 $M > 0$，存在 $C' > 0$ 和 $N_0 \in \mathbb{N}$ 使得对每个 $\theta_0 \in S$和$N \geq N_0$，

$$P^N_{\theta_0}\left(\Pi_N\left(\{\theta \in \Theta : \|\theta\|_{\mathcal{R}} \leq M, \|\theta - \theta_0\|_{\infty} \leq C'\delta_N^{(\beta-\beta')/\beta}\}\middle| D_N\right) \leq 1 - e^{-bN\delta_N^2}\right) \leq \frac{4(U^2+1)}{N\delta_N^2}.$$

在备注5.7中，我们证明了存在一些 Whittle–Matérn高斯过程，其概率分布可给出满足定理 5.6 假设的基础先验 Π'。类似地，在定理 5.10 中关于 X 和μ_X所述假设下，根据命题 4.6，存在一个 Whittle–Matérn高斯过程，其概率分布 Π'满足 $\Pi'(H^\beta(\mathrm{X},\mathrm{P})) = 1$，对任意 $\beta \in [0, \alpha - d_x/2)$ 均成立，且其再生核希尔伯特空间 H 满足 (4.13)。特别地，由定理 5.10 中所述的条件 $\alpha > d_x$可知，$(d_x/2, \alpha - d_x/2)$ 非空，因此对于 $\beta > d_x/2$，R 连续嵌入 $H^\beta(\mathrm{X},\mathrm{P})$ 的条件可以满足。

定理5.10的证明。定理 5.10 的假设严格强于定理 5.6 的假设。正如定理 5.6 的证明所示，定理 5.6 的假设意味着定理 4.10 的所有假设均成立，其中代换为 $\mathrm{Z} \leftarrow \mathrm{X}$、$V \leftarrow \mathrm{R}^{d_Y}$, $W \leftarrow \mathrm{R}^{d_P}$, $\kappa \leftarrow 0$,$\eta \leftarrow 1$，并且 U和 L' 如 (5.4) 所示。定理 5.10 的假设与定理 5.6 的假设之间的区别在于，μ_X 的勒贝格密度 p_X 具有严格为正的本质下确界，并且假设正则化空间 R 连续嵌入到 $H^\beta(\mathrm{X},\mathrm{P})$ 中，其中某个 $\beta > d_x/2$。定理 4.14 的假设与定理 4.10 的假设之间的区别恰恰也是如此。因此，定理 4.14 的所有假设均成立，所需的不等式由 (4.22) 和 (4.23) 得出。■

推论 5.11（索博列夫范数与上确界范数可区分性）。假设定理 *5.10* 的条件成立，并且以下任一条件成立

(i) $\mathbb{B} = H^{\beta'}(\mathcal{X},\mathcal{P})$ *for some* $\beta' \in [0,\beta)$, *or*

(ii) $\mathbb{B} = L^\infty(\mathcal{X},\mathcal{P})$ *with* $\beta' \in (d_x/2,\beta)$.

那么，存在 K、$K' > 0$ 和 $N_0 \in \mathbb{N}$，使插件检验$\Psi_N = \mathbf{1}_{T_N > t_N}$的第一类错误和第二类错误1和第2类误差满足

$$T_N := \inf_{h\in H_0} \|E^{\Pi_N}[\theta|D_N] - h\|_{\mathbb{B}}, \qquad t_N := K\delta_N^{(\beta-\beta')/\beta},$$

以及 $\delta_N := N^{-\alpha/(2\alpha+d_x)}$，用于检验 $H_0 \subseteq S$，以对照

$$H_{1,N} := \left\{\theta_0 \in S : \inf_{h\in H_0} \|\theta_0 - h\|_{\mathbb{B}} \geq 2K\delta_N^{(\beta-\beta')/\beta}\right\}$$

满足

$$\sup_{\theta_0\in H_0} P_{\theta_0}^N(\Psi_N = 1) \leq \frac{K'}{N\delta_N^2} \qquad \textit{and} \qquad \sup_{\theta_0\in H_{1,N}} P_{\theta_0}^N(\Psi_N = 0) \leq \frac{K'}{N\delta_N^2}$$

对所有 $N \geq N_0$ 均成立。

证明推论 *5.11*。如定理 5.10的证明所示，定理 5.10 的条件蕴含定理 4.14 的条件成立，其中作如下替换：$\mathcal{Z} \leftarrow \mathcal{X}$，$V \leftarrow \mathbb{R}^{d_Y}$，$W \leftarrow \mathbb{R}^{d_P}$，$\kappa \leftarrow 0$，$\eta \leftarrow 1$，以及 U和 L' 如（5.4）所示。因此，所需结论由推论 4.16推出。■

通过选择 $\beta \in (d_x/2, \alpha - d_x/2)$ 使其任意接近 $\alpha - d_x/2$ 以及 $\beta' \in (d_x/2, \beta)$ 使其任意接近$d_x/2$，在 推论 5.11中，可以实现速率为 $\delta_N = N^{-\gamma}$的上确界范数可区分性，且$\gamma \in (0, \gamma_0)$ 可任意接近

$$\gamma_0 = N^{-\frac{\alpha}{2\alpha+d_x}\cdot\frac{\alpha-d_x}{\alpha-d_x/2}} = N^{-\frac{2\alpha(\alpha-d_x)}{(2\alpha+d_x)(2\alpha-d_x)}}.$$

这里，γ_0 随着先验平滑度参数 α 趋于 ∞，也以参数率 $1\,2$ 收敛，参见 注 5.9。

6 结论与展望

在本文中，我们针对 L^2_ζ、索博列夫范数和上确界范数，建立了可区分性的充分条件，研究背景是具有随机观测的非线性逆问题的非参数拟合优度检验。这些结果给出了相同情形下相应极小极大分离率的上界。为获得这些结果，我们在 第 4 节 证明了适当正则的高斯先验所对应的后验收缩率，其中，对于真实参数属于相应再生核希尔伯特空间范数有界的集合，后验收缩是一致的。在 第 5 节，我们将结果应用于由参数化常微分方程初值问题所支配的逆问题，并推导出这类逆问题的后验收缩率和可区分性条件。可区分性结果运用了我们开发的工具，用于在一般情形下证明基于任意选取的一致收敛估计量的下确界插件检验具有可区分性；见 第 3 节。所有这些结果均为定量的非渐近结果，并给出了所考察检验的误差的明确界。

我们使用的插件检验无法在分离率快于估计极小极大速率时实现极小极大可区分性。另一方面，众所周知，在非参数情形下，检验的极小极大速率可能更低；例如参见 [10, 第 2 节 10]。为了进一步界定所考虑情形下的极小极大分离率，可以研究下确界 χ^2-统计量检验和 U-统计量检验。这类检验在某些情形下已知具有极小极大最优性，并可将其表现与本文介绍的下确界插件检验进行比较。

致谢

我们感谢 Alexandra Carpentier 和 Niklas Hartung（波茨坦大学）、Abhishake（拉彭兰塔理工大学）、Markus Reiß（柏林洪堡大学）以及 Maximilian Siebel（海德堡大学）提供的宝贵意见。作者的研究部分得到了德国研究基金会（DFG）— 项目编号 318763901 — SFB1294“数据同化”的资助。

参考文献

[1] Abhishake、T. Helin 和 N. Mücke，带随机观测的统计逆学习问题（2023），arXiv:2312.15341。预印本。[2] S. Ghosal、J. K. Ghosh 和 A.W. van der Vaart，后验分布的收敛速率，统计年刊28（2000），500–531，doi:10.1214/aos/1016218228。[3] S. Ghosal 和 A. van der Vaart，非参数贝叶斯推断基础，剑桥统计与概率数学丛书，剑桥大学出版社，2017，doi:10.1017/9781139029834。[4] E. Giné 和 R. Nickl，无限维统计模型的数学基础，剑桥统计与概率数学丛书，剑桥大学出版社，2016，doi:10.1017/cbo9781107337862。[5] M. Giordano 和 R. Nickl，高斯过程先验在椭圆型逆问题中的贝叶斯推断一致性，逆问题36（2020），085001，doi:10.1088/1361-6420/ab7d2a。[6] N. Hartung、M. Wahl、A. Rastogi 和 W. Huisinga，药理计量学分析中参数协变量模型的非参数拟合优度检验，*CPTPharmacometricsSyst. Pharmacol.*10（2021），564–576，doi:https://doi.org/10.1002/psp4.12614。

[7] Y. I. Ingster，复合假设的渐近最优贝叶斯检验，概率论及其应用28（1984），775–794，doi:10.1137/1128075。[8] Y. I. Ingster，验证复合有限参数假设的渐近最优检验，概率论及其应用30（1986），311–332，doi:10.1137/1130038。[9] Y. I. Ingster、T. Sapatinas 和 I. A. Suslina，不适定逆问题中的极小极大信号检测，统计年刊40（2012），1524–1549，doi:10.1214/12-aos1011。[10] Y.I. Ingster 和 I. A. Suslina，高斯模型下的非参数拟合优度检验，统计学讲义丛书，纽约施普林格出版社，2003，doi:10.1007/978-0-387-21580-8。[11] H. Kekkonen，高斯过程先验在抛物型逆问题中的贝叶斯推断一致性，逆问题38（2022），035002，doi:10.1088/1361-6420/ac4839。

[12] H. C. Lie，总体建模中协变量-参数关系的贝叶斯推断（2024），arXiv:2407.09640。预印本。

[13] C. Marteau 和 T. Sapatinas，具有部分未知算子的不适定逆问题中的极小极大拟合优度检验，亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊 53 (2017)，1675–1718，doi:10.1214/16-aihp768。

[14] F. Monard、R. Nickl 和 G. P. Paternain，含噪非阿贝尔X射线变换的一致反演，纯粹与应用数学通讯 74 (2021)，1045–1099，doi:https://doi.org/10.1002/cpa.21942。

[15] R. Nickl，贝叶斯非线性统计逆问题，苏黎世高等数学讲义，欧洲数学会出版社，2023，doi:10.4171/zlam/30。

[16] R. Nickl、S. van de Geer 和 S. Wang，《偏微分方程约束回归问题中惩罚最小二乘估计量的收敛速率》，*SIAM/ASA* 不确定性量化期刊 8 (2020), 374–413,doi:10.1137/18m1236137。

[17] K. Ray，《采用非共轭先验的贝叶斯反问题》，电子统计学杂志 7 (2013), 2516–2549,doi:10.1214/13-ejs851。

[18] M. Siebel，《随机设计下偏微分方程回归模型中最大后验估计量的收敛率》，*SIAM/ASA* 不确定性量化期刊 13 (2025),1862–1903, doi:10.1137/25m1744526。

[19] A. W. van der Vaart 和 J. H. van Zanten，《基于高斯过程先验的后验分布收缩速率》，统计年刊 36(2008),1435 –1463, doi:10.1214/009053607000000613。

附录A 延后证明

回顾第1.4节中的记号 $V \hookrightarrow W$，用于表示一个赋范向量空间到另一个向量空间的连续嵌入V W，即存在某个 $C > 0$ 使得 $\|v\|_W \leq C\|v\|_V$对每个$v \in V$均成立。引理(i) 的 A.1 中的陈述用于定理 4.14 的证明以及注 4.12。陈述(ii) 用于命题 4.6 和命题5.5的证明。

引理 A.1. 设 $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^{d_z}$ 是具有光滑边界的有界区域，且 ζ 是定义在$\mathcal{Z}$ 上的概率测度，其勒贝格密度为 p_ζ，并设 W是一个赋范向量空间。

(i) *If* $\operatorname{ess\,inf}_{z\in\mathcal{Z}} p_\zeta(z) > 0$, *then* $L^2_\zeta(\mathcal{Z}, W) \hookrightarrow L^2(\mathcal{Z}, W)$.

(ii) 若 $\|p_\zeta\|_{L^\infty} < \infty$，则 $L^2(\mathcal{Z}^W) \hookrightarrow L^2_\zeta(\mathcal{Z}^W)$.

引理 *a.1* 的证明。 (i)：任取 $u \in L^2_\zeta(\mathcal{Z}W$。那么

$$\|u\|^2_{L^2_\zeta(\mathcal{Z})} = \int_{\mathcal{Z}} \|u(z)\|^2_W p_\zeta(z)\mathrm{d}z \geq \operatorname*{ess\,inf}_{z\in\mathcal{Z}} \{p_\zeta(z)\} \int_{\mathcal{Z}} \|u(z)\|^2_W \mathrm{d}z = \operatorname*{ess\,inf}_{z\in\mathcal{Z}} \{p_\zeta(z)\} \|u\|^2_{L^2(\mathcal{Z})},$$

从而证明了 $L^2_\zeta(\mathrm{Z}) \hookrightarrow L^2(\mathrm{Z})$。
(ii)：令 $u \in L^2(\mathcal{Z}W)$ 为任意值。则

$$\|u\|^2_{L^2_\zeta} = \int_{\mathcal{Z}} \|u(z)\|^2_W p_\zeta(z)\mathrm{d}z \leq \|p_\zeta\|_{L^\infty} \int_{\mathcal{Z}} \|u(z)\|^2_W \mathrm{d}z = \|p_\zeta\|_{L^\infty} \|u\|^2_{L^2},$$

从而证明了 $L^2(\mathrm{Z}W) \hookrightarrow L^2_\zeta(\mathrm{Z}W)$。 ■

附录A.1 前向后验收缩结果的证明

在本节中，我们证明前向后验收缩结果定理 4.5。为此，我们还将使用引理A.2。关于引理A.2 的陈述及其证明概要见正文方程 (1.28) 与 (1.29) 之间 [15,第 19]。

我们用 p_1 和 p_2 表示相对于共同支配测度的两个概率密度函数之间的海林格距离： $h(p_1, p_2)$。回顾在（ Θ_N中定义的集合（4.9）。
引理 *a.2*（检验的存在性）。假设假设 *4.1* 成立，并令 L 和 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 分别如（*4.3*）和（*4.8*）中所述。假设 M 和 $m = m(M, L)$ 对每个 $N \overline{\in} N$ 都满足（*4.15b*），并令 $\theta_0 \in B_{\mathcal{R}}(M)$ 。则存在一个通用常数 $0 < K < \infty$，使得对于每个 $m > 2m$，对每个$N \in N$，都存在一个检验 $\Psi_N : (\overline{V} \times X)^N \to \{0, 1\}$，满足

$$\begin{aligned} P^N_{\theta_0}(\Psi_N = 1) &\leq \frac{1}{K}\exp(-(Km^2 - 1)N\delta_N^2), \\ \sup_{\theta\in\Theta_N(M):h(p_\theta,p_{\theta_0})>m\delta_N} P^N_\theta(\Psi_N = 0) &\leq \exp(-KmN\delta_N^2). \end{aligned} \tag{A.1}$$

要使引理 a.2 结论（A.1）中的第一类和第二类误差界非平凡，只需附加条件 $Km^2 - 1 > 0$ 在 m 上成立。

证明引理 A.2 使用了 [4, 定理7.1。4]这些检验通过结合针对球形假设备择假设的检验 [15, 推论 7.1。3], 构造而成，并通过此类球覆盖原始备择假设。尽管这些检验的定义具有构造性，但它们主要用于理论研究，因为在实践中，通过寻找备择假设的球覆盖来构造这些检验通常并不可行。

引理 a.2 的证明。证明过程是验证 [4, 定理7.1.4]的假设。回顾 p_θ的定义（4.5）。由于假设 4.1 成立，我们可以将（M）和（M）分别代入 [15, 命题 1.3.1]，其中包络常数 U（M）取自假设 4.1 中的（4.2），从而得出海林格距离 h（p_θ, p_ϑ）满足

$$C_U^{1/2} d_G(\theta, \vartheta) \leq h(p_\theta, p_\vartheta) \leq \frac{1}{2} d_G(\theta, \vartheta), \quad \forall \theta, \vartheta \in \Theta_N(M) \tag{A.2}$$

对于 C_U由（4.12）给出，并在包络常数 $U = U$（M）处取值，而 d_G为（4.10）中定义的半度量。特别地，由（A.2）中的上界可知， d_G（θ， ϑ） $\leq m\delta_N$意味着 h（p_θ， $\overline{p_\vartheta}$） $\leq \frac{1}{2}m\delta_N$。因此，由条件（4.15b），

$$N(\{p_\theta : \theta \in \Theta_N(M)\}, h, \tfrac{1}{2}\overline{m}\delta_N) \leq N(\Theta_N(M), d_G, \overline{m}\delta_N) \leq \exp(N\delta_N^2). \tag{A.3}$$

注意，对于每个 $\varepsilon_0 > 0$ 以及每个 $\varepsilon > \varepsilon_0$,

$$\begin{aligned} &N(\{p_\theta : \theta \in \Theta_N(M), \varepsilon < h(p_\theta, p_{\theta_0}) \le 2\varepsilon\}, h, \tfrac{\varepsilon}{4}) \\ \le &N(\{p_\theta : \theta \in \Theta_N(M)\}, h, \tfrac{\varepsilon}{4}) \\ \le &N(\{p_\theta : \theta \in \Theta_N(M)\}, h, \tfrac{\varepsilon_0}{4}) \end{aligned} \tag{A.4}$$

其中，第一个不等式由以下事实得出：$\{p_\theta\colon\ \theta \in \Theta_N(M)\ \varepsilon < h(p_\theta, p_{\theta_0}) \le 2\varepsilon\}$ 包含于 $\{p_\theta\colon\ \theta \in \Theta_N(M)\}$，并由覆盖数的定义得出；第二个不等式则由 $\varepsilon > \varepsilon_0$ 和覆盖数的定义得出。利用 (A.4)，令 $\varepsilon_0 \leftarrow 2m\delta_N$，并利用 (A.3)，上述论证得到

$$N(\{p_\theta : \theta \in \Theta_N(M), \varepsilon < h(p_\theta, p_{\theta_0}) \le 2\varepsilon\}, h, \tfrac{\varepsilon}{4}) \le \exp(N\delta_N^2).$$

特别地，对于密度集 $\mathrm{P} \leftarrow \{p_\theta\colon\ \theta \in \Theta_N(M)\}$，常数以及因此为非增函数的 $\varepsilon \mapsto N(\varepsilon) := \exp(N\delta_N^2)$，还有上述的 ε_0，[4,定理7.1.4] 的假设成立。应用 [4, 定理7.1.4] 的结论，取 $\varepsilon \leftarrow m\delta_N$，$m > 2m$，则对每个 $N \in \mathrm{N}$，都存在一个检验$\Psi_N\colon (V \times \mathrm{X})^N \to \{0,1\}$，用于检验问题

$$H_0 := \{p_{\theta_0}\} \quad \text{vs.} \quad H_1 := \{p_\theta : \theta \in \Theta_N(M), h(p, p_{\theta_0}) > m\delta_N\}$$

使得对于某个通用常数 $0 < K < \infty$ 和任意 $N \in \mathrm{N}$,

$$P_{\theta_0}^N(\Psi_N = 1) \le \frac{1}{K}\exp((1 - Km^2)N\delta_N^2), \qquad \sup_{p_\theta : \theta \in \Theta_N(M), h(p, p_{\theta_0}) > m\delta_N} E_\theta^N(1 - \Psi_N) \le \exp(-Km^2 N\delta_N^2);$$

参见 [15, 公式（1.28）]。至此，引理 A.2的证明。 ∎

定理 4.5。 假设 假设 *4.1* 对正向映射成立 G，$\kappa \ge 0$，$M' \mapsto U(M') < \infty$、正则化空间 $\mathcal{R}$以及有界光滑区域 $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^{d_z}$。设基准先验 Π' 满足 假设 *4.3* （给定的 $\mathcal{R}$），并设 $\alpha > 0$ 使得其再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 满足 Π' 连续嵌入

$$\mathcal{H} \hookrightarrow H_c^\alpha(\mathcal{Z}) \ \textit{if}\ \kappa \ge 1/2, \qquad \textit{or} \qquad \mathcal{H} \hookrightarrow H^\alpha(\mathcal{Z}) \ \textit{if}\ \kappa < 1/2. \tag{4.13}$$

设 $(\Pi_N)_{N\in\mathbb{N}}$和 $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$分别如定义 *4.4* 和 *(4.8)* 中所述。设 $\theta_0 \in H \cap R$。则存在充分大的 $0 < M < \infty$，使得 $\theta_0 \in B_{\mathcal{R}}(M)$，并且存在 $A = A(U)$，对于由 *(4.2)* 和 M定义的 $U = U(M)$，使得对所有充分大的 N，

$$\Pi_N(\mathcal{B}_N(\theta_0, U)) \ge e^{-AN\delta_N^2}. \tag{4.14}$$

此外，如有必要进一步增大 M，则存在某个 $B > A + 2$，使得集合$(\Theta_N(M))_{N\in\mathbb{N}}$ 定义于(4.9) 满足：

$$\Pi_N(\Theta_N^{\complement}(M)) \le e^{-BN\delta_N^2} \tag{4.15a}$$

$$\log N(\Theta_N(M), d_G, \overline{m}\delta_N) \le N\delta_N^2 \tag{4.15b}$$

对于所有充分大的 $N \in N$，其中 $m = m(M, L) > 0$ 在 *(4.15b)* 中足够大，且对于假设 *4.1* 的条件 *(4.3)* 中所定义的 $L = L(M)$。特别地，对于任意 $0 < b < B - (A + 2)$，以及对于任意$0 < c < 1$，我们可以选取充分大且与 c 无关的 $m = m(A, b, m)$，使得对于如 *(4.14)* 中的 U，对于由带有 $u \leftarrow U$ 的 *(4.12)* 给出的 C_U，对于某个 $N^*(c) \in N$，以及对每一个 $N \ge N^*(c)$,

$$P_{\theta_0}^N\left(\Pi_N(\{\theta \in \Theta_N : d_G(\theta, \theta_0) \le mC_U^{-1/2}\delta_N\}|D_N) \le 1 - e^{-bN\delta_N^2}\right) \le (1 + c)\frac{2(U^2 + 1)}{N\delta_N^2}. \tag{4.16}$$

我们现在证明定理 4.5。我们复现 [15,定理 1.3₂] 在[15, 第 19-20] 页的证明中所给出的论证，并追踪某些上界对 $N\delta_N^2$ 的依赖，目的是证明（4.16）成立。

定理 4.5 的证明。定理 4.5 的假设与 [15, 定理 2.2.2], 的假设相同，并且 (4.9) 中的 Θ_N 与 [15, 方程 (2.20)] 中定义的“正则化集”完全相同。因此，由于 [15, 定理 2.2.2], 适用于 $\theta_0 \in \mathrm{H} \cap \mathrm{R}$，(4.14)、(4.15a) 和 (4.15b) 对某个 $A > 0, \delta_N$（如 (4.8) 所示）及任意 $B > A + 2$ 均成立，前提是 $M = M(B)$ 足够大。剩下需要证明 (4.16)。

回顾 4.11) 中 $\mathcal{B}_N$ 的定义。定义

$$\mathcal{A}_N = \mathcal{A}_N(\theta_0) \coloneqq \left\{ D_N : \int_\Theta e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)} \mathrm{d}\Pi_N(\theta) \geq e^{-(A+2)N\delta_N^2} \right\}. \tag{A.5}$$

下面的蕴含关系

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{B}_N(\theta_0,U)} e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)} \mathrm{d}\Pi_N(\theta) \geq e^{-2N\delta_N^2} \Pi_N(\mathcal{B}_N(\theta_0,U)) \\ \Longrightarrow \quad &\int_\Theta e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)} \mathrm{d}\Pi(\theta) \geq e^{-(A+2)N\delta_N^2} \end{aligned}$$

成立，因为 $\Theta \supset \mathcal{B}_N(\theta_0, U)$，因为 $e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}$ 在 Θ 上非负，并且根据假设，(4.14) 成立。因此，根据 A.5) 中 $\mathcal{A}_N$ 的定义，

$$\begin{aligned} &P_{\theta_0}^N(\mathcal{A}_N) \geq P_{\theta_0}^N \left(\int_{\mathcal{B}_N(\theta_0,U)} e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)} \mathrm{d}\Pi_N(\theta) \geq e^{-2N\delta_N^2} \Pi_N(\mathcal{B}_N(\theta_0,U)) \right) \\ \Longleftrightarrow &P_{\theta_0}^N(\mathcal{A}_N^\complement) \leq P_{\theta_0}^N \left(\int_{\mathcal{B}_N(\theta_0,U)} e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)} \mathrm{d}\Pi_N(\theta) < e^{-2N\delta_N^2} \Pi_N(\mathcal{B}_N(\theta_0,U)) \right). \end{aligned}$$

由于定理 4.5 的假设包含引理 a.3 的假设，我们可以将引理 a.3 应用于 $B_N \leftarrow \mathrm{B}_N(\theta_0, U)$、$\nu(\cdot) \leftarrow \Pi_N(\cdot \cap \mathrm{B}_N(\theta_0, U))/\Pi_N(\mathrm{B}_N(\theta_0, U))$、$K \leftarrow 2$ 和 U。于是，引理 a.3 的结论 (a.14) 推出

$$P_{\theta_0}^N \left(\int_{\mathcal{B}_N(\theta_0,U)} e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)} \mathrm{d}\Pi_N(\theta) \leq e^{-2N\delta_N^2} \Pi_N(\mathcal{B}_N(\theta_0,U)) \right) \leq \frac{8(U^2+1)}{4N\delta_N^2}.$$

结合前面的两个不等式可得

$$P_{\theta_0}^N(\mathcal{A}_N^\complement) \leq \frac{2(U^2+1)}{N\delta_N^2}. \tag{A.6}$$

回顾假设 4.1 成立。根据 $\theta_0 \in \mathrm{H} \cap \mathrm{R}$ 固定这一假设，存在 M充分大的，使得 $\theta_0 \in B_{\mathcal{R}}(M)$。如有必要增大 M，证明第一段中的论证还可确保存在某个 $m > 0$，使得对于每个$N \in \mathrm{N}$，(4.15b) 成立。因此，我们可以应用引理 a.2，从而得出：存在某个通用常数 $0 < K < \infty$，并且对于满足 $Km^2 - 1 > 0$ 的每个 $m > 2m$，对每个 $N \in \mathrm{N}$，都存在一个检验 $\Psi_N : (V \times \mathrm{X})^N \to \{0, 1\}$，使得 (a.1) 成立。令 m 取值于一组范围，该范围将在证明末尾予以指定。定义

$$\overline{\Theta}_N \coloneqq \Theta_N \cap \{\theta \in \Theta : h(p_\theta, p_{\theta_0}) \leq m\delta_N\}, \quad \overline{\Theta}_N^\complement \coloneqq \Theta \setminus \overline{\Theta}_N \tag{A.7}$$

其中 $\Theta \subseteq L^2_\zeta$ 是来自 假设 4.3 的集合。令 $0 < b < B - (A+2)$ 对于 B 在（4.15a）中以及 A 在（4.14）中。现在

$$
\begin{aligned}
&P^N_{\theta_0}\left(\Pi_N\left(\overline{\Theta}_N^{\complement}|D_N\right) \geq e^{-bN\delta_N^2}\right) = P^N_{\theta_0}\left(\frac{\int_{\overline{\Theta}_N^{\complement}} e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi_N(\theta)}{\int_\Theta e^{\ell_N(\theta')-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi_N(\theta')} \geq e^{-bN\delta_N^2}\right) \\
\leq & P^N_{\theta_0}\left(\frac{\int_{\overline{\Theta}_N^{\complement}} e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi_N(\theta)}{\int_\Theta e^{\ell_N(\theta')-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi_N(\theta')} \geq e^{-bN\delta_N^2}, \mathcal{A}_N\right) + P^N_{\theta_0}(\mathcal{A}_N^{\complement}) \\
\leq & P^N_{\theta_0}\left(\frac{\int_{\overline{\Theta}_N^{\complement}} e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi_N(\theta)}{\int_\Theta e^{\ell_N(\theta')-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi_N(\theta')} \geq e^{-bN\delta_N^2}, \Psi_N = 0, \mathcal{A}_N\right) + P^N_{\theta_0}(\Psi_N = 1, \mathcal{A}_N) + P^N_{\theta_0}(\mathcal{A}_N^{\complement}) \\
\leq & P^N_{\theta_0}\left(\frac{\int_{\overline{\Theta}_N^{\complement}} e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi_N(\theta)}{\int_\Theta e^{\ell_N(\theta')-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi_N(\theta')} \geq e^{-bN\delta_N^2}, \Psi_N = 0, \mathcal{A}_N\right) + P^N_{\theta_0}(\Psi_N = 1) + P^N_{\theta_0}(\mathcal{A}_N^{\complement})
\end{aligned}
$$

其中，该等式由（4.7）推出，而这些不等式则由概率测度的单调性推出。（A.8）右侧的第二项和第三项分别根据引理 a.2的结论（a.1）中的第1 类误差界，以及（A.6）进行界定：

$$
\begin{aligned}
P^N_{\theta_0}\left(\Pi_N\left(\overline{\Theta}_N^{\complement}|D_N\right) \geq e^{-bN\delta_N^2}\right) \leq & P^N_{\theta_0}\left(\frac{\int_{\overline{\Theta}_N^{\complement}} e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi_N(\theta)}{\int_\Theta e^{\ell_N(\theta')-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi_N(\theta')} \geq e^{-bN\delta_N^2}, \Psi_N = 0, \mathcal{A}_N\right) \\
& + \frac{1}{K}\exp(-(Km^2-1)N\delta_N^2) + \frac{2(U^2+1)}{N\delta_N^2}.
\end{aligned} \tag{A.8}
$$

现在，我们根据下式对不等式（A.8）右侧的第一项进行界定：

$$
\begin{aligned}
&P^N_{\theta_0}\left(\frac{\int_{\overline{\Theta}_N^{\complement}} e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi_N(\theta)}{\int_\Theta e^{\ell_N(\theta')-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi_N(\theta')} \geq e^{-bN\delta_N^2}, \Psi_N = 0, \mathcal{A}_N\right) \\
= & P^N_{\theta_0}\left(\int_{\overline{\Theta}_N^{\complement}} e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi_N(\theta) \geq e^{-bN\delta_N^2}\int_\Theta e^{\ell_N(\theta')-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi_N(\theta'), \Psi_N = 0, \mathcal{A}_N\right) \\
\leq & P^N_{\theta_0}\left(\int_{\overline{\Theta}_N^{\complement}} e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi_N(\theta) \geq e^{-bN\delta_N^2}e^{-(A+2)N\delta_N^2}, \Psi_N = 0, \mathcal{A}_N\right) \\
\leq & P^N_{\theta_0}\left(\int_{\overline{\Theta}_N^{\complement}} e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi_N(\theta)(1-\Psi_N) \geq e^{-bN\delta_N^2}e^{-(A+2)N\delta_N^2}, \Psi_N = 0\right) \\
\leq & P^N_{\theta_0}\left(\int_{\overline{\Theta}_N^{\complement}} e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi_N(\theta)(1-\Psi_N) \geq e^{-(b+A+2)N\delta_N^2}\right) \\
\leq & E^N_{\theta_0}\left[\int_{\overline{\Theta}_N^{\complement}} e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi_N(\theta)(1-\Psi_N)\right] e^{(b+A+2)N\delta_N^2} \\
= & \int_{\overline{\Theta}_N^{\complement}} E^N_{\theta_0}\left[e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}(1-\Psi_N)\right]\mathrm{d}\Pi_N(\theta) e^{(b+A+2)N\delta_N^2},
\end{aligned}
$$

其中，第一个不等式由 A_N 的定义（a.5）推出；第二个和第三个不等式由概率测度的单调性推出；第四个不等式由马尔可夫不等式推出；最后一个等式由 Tonelli 定理推出。

接下来，我们给出 $\int_{\overline{\Theta}_N^{\complement}} E^N_{\theta_0}[e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}(1-\Psi_N)]\mathrm{d}\Pi_N(\theta)$的上界。根据 Θ_N和 $\Theta_N^{\complement}$在（A.7）中的定义，

$$
\overline{\Theta}_N^{\complement} = \Theta_N^{\complement} \cup \{\theta \in \Theta_N \mid h(p_\theta, p_{\theta_0}) > m\delta_N\}. \tag{A.9}
$$

由（4.5）和（4.6），

$$E_{\theta_0}^N\left[e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}(1-\Psi_N)\right]=E_{\theta_0}^N\left[\prod_{i=1}^N\frac{p_\theta}{p_{\theta_0}}(1-\Psi_N)\right]=E_\theta^N\left[1-\Psi_N\right]. \tag{A.10}$$

现在（A.9）和（A.10表明

$$\begin{aligned}&\int_{\overline{\Theta}_N^{\complement}}E_{\theta_0}^N\left[e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}(1-\Psi_N)\right]\mathrm{d}\Pi_N(\theta)\\=&\int_{\Theta_N^{\complement}}E_\theta^N\left[1-\Psi_N\right]\mathrm{d}\Pi_N(\theta)+\int_{\{\theta\in\Theta_N:h(p_\theta,p_{\theta_0})>m\delta_N\}}E_\theta^N\left[1-\Psi_N\right]\mathrm{d}\Pi_N(\theta)\\\leq&\Pi_N(\Theta_N^{\complement})+\sup_{\{\theta\in\Theta_N:h(p_\theta,p_{\theta_0})>m\delta_N\}}E_\theta^N\left[1-\Psi_N\right],\end{aligned}$$

不等式右侧的第一项成立，是因为 Ψ_N 取值于{0,1}；第二项成立，是因为 $\Pi_N(\Theta_N)\leq 1$。根据（4.15a），$\Pi_N(\Theta_N^{\complement})\leq e^{-BN\delta_N^2}$，前提是定义（$\Theta_N(M)$ 中（4.9）的半径参数 M 足够大。此外，我们有

$$\sup_{\{\theta\in\Theta_N:h(p_\theta,p_{\theta_0})>m\delta_N\}}E_\theta^N\left[1-\Psi_N\right]=\sup_{\{\theta\in\Theta_N:h(p_\theta,p_{\theta_0})>m\delta_N\}}P_\theta^N(\Psi_N=0)\leq\exp(-Km^2N\delta_N^2)$$

该等式成立是因为 Ψ_N 取值于{0,1}。该不等式由（2 a.1）中的第二类错误界推出。因此，（A.8）右侧的第一项满足

$$\begin{aligned}&P_{\theta_0}^N\left(\frac{\int_{\overline{\Theta}_N^{\complement}}e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi_N(\theta)}{\int_\Theta e^{\ell_N(\theta')-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi_N(\theta')}\geq e^{-bN\delta_N^2},\Psi_N=0,\mathcal{A}_N\right)\\\leq&(e^{-BN\delta_N^2}+e^{-Km^2N\delta_N^2})e^{(b+A+2)N\delta_N^2}=e^{(b+A+2-B)N\delta_N^2}+e^{(b+A+2-Km^2)N\delta_N^2},\end{aligned} \tag{A.11}$$

注意到 $\Pi_N(\Theta_N|D_N)=1-\Pi_N(\Theta_N^{\complement}|D_N)$，因为 假设 4.3 蕴含 $\Pi_N(\Theta)=1$，且因为$\Theta_N^{\complement}:=\Theta\backslash\overline{\Theta}_N$由 (A.7)可得。因此，

$$\begin{aligned}&P_{\theta_0}^N\left(\Pi_N\left(\overline{\Theta}_N|D_N\right)\leq 1-e^{-bN\delta_N^2}\right)\\=&P_{\theta_0}^N\left(\Pi_N\left(\overline{\Theta}_N^{\complement}|D_N\right)\geq e^{-bN\delta_N^2}\right)\\\leq&P_{\theta_0}^N\left(\frac{\int_{\overline{\Theta}_N^{\complement}}e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi_N(\theta)}{\int_\Theta e^{\ell_N(\theta')-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi_N(\theta')}\geq e^{-bN\delta_N^2},\Psi_N=0,\mathcal{A}_N\right)+\frac{1}{K}e^{-(Km^2-1)N\delta_N^2}+\frac{2(U^2+1)}{N\delta_N^2}\\\leq&e^{(b+A+2-B)N\delta_N^2}+e^{(b+A+2-Km^2)N\delta_N^2}+\frac{1}{K}e^{-(Km^2-1)N\delta_N^2}+\frac{2(U^2+1)}{N\delta_N^2}\end{aligned} \tag{A.12}$$

其中，第一个和第二个不等式分别由 (A.8) 和 (A.11) 得出。

根据 $0<b<B-(A+2)$ 在 定理 4.5中的假设，第二个不等式右端的第一项随 $N\delta_N^2$ 呈指数级衰减，并在 $N\to\infty$时趋于零。现在，我们定义 m 在（A.7）中的取值范围：除了 $m>2m$ 和 $Km^2-1>0$之外，还要求 $b+A+2-Km^2<0$。对于以下情形，这些条件均成立：

$$m>\max\left\{2\overline{m},\frac{1}{\sqrt{K}},\sqrt{\frac{b+A+2}{K}}\right\}.$$

对于任意这样的 m，（A.12）右端的第二项随 $N\delta_N^2$ 呈指数级衰减并趋于零。因此，对于每个 $c>0$，都存在 $N^*=N^*(c)\in\mathbb{N}$，使得对于每个 $N\ge N^*$，

$$P_{\theta_0}^N\left(\Pi_N\left(\overline{\Theta}_N|D_N\right)\le 1-e^{-bN\delta_N^2}\right)\le (1+c)\frac{2(U^2+1)}{N\delta_N^2}. \tag{A.13}$$

为完成定理 4.5 的证明，我们回顾由 (a.7) 可知 $\Theta_N=\{\theta\in\Theta_N:\ \overline{h}(p_\theta,p_{\theta_0})\le m\delta_N\}$。接下来，回顾 (a.2) 中的不等式 $C_U^{1/2}d_G(\theta,\vartheta)\le h(p_\theta,p_\vartheta)$，其中 C_U由 (4.12) 给出，且$u\leftarrow U=U(M)$，而 d_G是 (4.10) 中定义的半度量。由该不等式可得，

$$\overline{\Theta}_N=\{\theta\in\Theta_N: h(p_\theta,p_{\theta_0})\le m\delta_N\}\subseteq\{\theta\in\Theta_N: d_G(\theta,\theta_0)\le m\delta_N C_U^{-1/2}\}.$$

上述集合关系意味着

$$\begin{aligned}&\left\{D_N:\Pi_N\left(\{\theta\in\Theta_N: d_G(\theta,\theta_0)\le m\delta_N C_U^{-1/2}\}\middle|D_N\right)\le 1-e^{-bN\delta_N^2}\right\}\\ \subseteq&\left\{D_N:\Pi_N(\overline{\Theta}_N|D_N)\le 1-e^{-bN\delta_N^2}\right\}.\end{aligned}$$

结合上述集合关系与 (A.13)，我们得出：对于每个 $0<c<1$，都存在$N^*(c)\in\mathbb{N}$，使得对于每个 $N\ge N^*$，

$$P_{\theta_0}^N\left(\Pi_N\left(\{\theta\in\Theta_N: d_G(\theta,\theta_0)\le m\delta_N C_U^{-1/2}|D_N\right)\le 1-e^{-bN\delta_N^2}\right)\le (1+c)\frac{2(U^2+1)}{N\delta_N^2}.$$

这证明了 (4.16)。 ■

附录 A.2 证明：一致后验收缩蕴含后验均值的一致收敛

在本节中，我们证明定理 4.7。证明定理 4.7时，我们将使用下面的引理 A.4 。证明引理 A.4时，我们将使用引理 A.3。回顾 4.6 和（4.11）中对 ℓ_N 和$\mathcal{B}_N$的定义。

引理 *a.3*（[15, 引理 *1.3.3*]）。假设假设 *4.1* 中的（*4.2*）成立，且包络常数为 $U=U(M)$，其中 M满足 $\theta_0\in B_{\mathcal{R}}(M)$。设 ν是定义在（*4.11*）中所定义的集合 $B_N(\theta_0,U)$ 的可测子集 B_N上的概率测度，且 $U\leftarrow U$。那么，对每个 $K\ge 2$ 和 $N\in\mathbb{N}$，

$$P_{\theta_0}^N\left(\int_{B_N} e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\nu(\theta)\le e^{-KN\delta_N^2}\right)\le\frac{8(U^2+1)}{K^2N\delta_N^2}. \tag{A.14}$$

引理 a.3 的陈述与 [15, 引理 1.3。3] 的陈述在某些方面有所不同。首先，在 [15, 引理 1.3。3], 的陈述中，常数 U并未明确说明，而上文则指定 U为（4.2）中假设 4.1 在取足够大的 M时对应的包络常数。其次，[15,引理 1.3。3] 并未假设假设 4.1 成立。我们将应用引理 A.3 来证明将假设 4.1作为假设提出的定理，因此不失一般性。

回想一下，ℓ_N在（4.6）中定义的量取决于数据 $D_N=(Y_i,\ X_i)_{i=1}^N$。

引理 A.4. 假设定理 *4.7*的条件成立，并定义

$$A_N=A_N(\theta_0):=\left\{D_N:\int_\Theta e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi(\theta)\ge e^{-(\mathrm{A}+2)N\delta_N^2}\right\} \tag{A.15}$$

对于 A 如 (4.18)所示。当充分大时 N,

$$P_{\theta_0}^N(A_N^{\complement}) \leq \frac{2(U^2+1)}{N\delta_N^2},$$

其中 $U = U(M)$ 是假设 *4.1* 的 (4.2) 中对应于任意 $M \geq \sup_{\theta_0 \in S} \|\theta_0\|_{\mathcal{R}}$ 的包络常数。

事件 A_N与 (A.15) 中的事件相同， A_N定义见 [15,方程 (1.28)],，区别在于下界为 $e^{-(\mathrm{A}+2)N\delta_N^2}$，而非 $e^{-(A+2)N\delta_N^2}$对于 $A = A(\theta_0)$ 满足 (4.14) 。

引理 引理 *A.4* 的证明。回顾 (4.11) 中 $\mathcal{B}_N$ 的定义。若

$$\int_{\mathcal{B}_N(\theta_0,U)} e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)} \mathrm{d}\Pi_N(\theta) \geq e^{-2N\delta_N^2}\Pi_N(\mathcal{B}_N(\theta_0,U))$$

then

$$\int_{\Theta} e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)} \mathrm{d}\Pi(\theta) \geq e^{-(\mathrm{A}+2)N\delta_N^2},$$

因为 $\Theta \supset \mathcal{B}_N(\theta_0, U)$， $e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}$ 在 Θ 上非负，且 (4.18) 根据假设成立。因此，根据 A.15) 中 A_N 的定义，

$$\begin{aligned} & P_{\theta_0}^N(A_N) \geq P_{\theta_0}^N\left(\int_{\mathcal{B}_N(\theta_0,U)} e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)} \mathrm{d}\Pi_N(\theta) \geq e^{-2N\delta_N^2}\Pi_N(\mathcal{B}_N(\theta_0,U))\right) \\ \iff & P_{\theta_0}^N(A_N^{\complement}) \leq P_{\theta_0}^N\left(\int_{\mathcal{B}_N(\theta_0,U)} e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)} \mathrm{d}\Pi_N(\theta) < e^{-2N\delta_N^2}\Pi_N(\mathcal{B}_N(\theta_0,U))\right). \end{aligned}$$

令 $\sup_{\theta_0 \in S} \|\theta_0\|_{\mathrm{R}} \leq M < \infty$ 和 $U = U(M)$，如假设中所述。由于定理 4.7 的假设包含引理 a.3 的假设，我们可以将引理 a.3 应用于 $B_N \leftarrow \mathrm{B}_N(\theta_0,U), \nu(\cdot) \leftarrow \Pi_N(\cdot \cap \mathrm{B}_N(\theta_0,U))/\Pi_N(\mathrm{B}_N(\theta_0,U))$, $K \leftarrow 2$ 和 U。于是，引理 a.3 的结论 (a.14) 推出

$$P_{\theta_0}^N\left(\int_{\mathcal{B}_N(\theta_0,U)} e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)} \mathrm{d}\Pi_N(\theta) \leq e^{-2N\delta_N^2}\Pi_N(\mathcal{B}_N(\theta_0,U))\right) \leq \frac{8(U^2+1)}{4N\delta_N^2},$$

这进而意味着所需的结论。至此，引理A.4的证明结束。 ■

定理定理 *4.7*的证明。证明思路是修改 [15, 定理 2.3₂] 的证明，将θ_0依赖型常数替换为仅依赖于候选真值的适当有界集的常数， S 并将 $\|\cdot\|_{L^2_\zeta}$ 范数替换为 $\|\cdot\|_{\mathbb{B}}$ 范数。

证明的第一部分与 [15,定理 2.3.2]证明的第一部分类似：定义事件

$$F_N := \{\theta \in \Theta : \|\theta - \theta_0\|_{\mathbb{B}} \leq C\delta_N^{\eta}\}, \tag{A.16}$$

对于 C 以及 δ_N^{η}，如 (4.17) 中所示。于是，对于任意的 $\theta_0 \in S$,

$$\begin{aligned} \|E^{\Pi_N}[\theta|D_N] - \theta_0\|_{\mathbb{B}} &\leq E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}|D_N] = E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}(\mathbf{1}_{F_N} + \mathbf{1}_{F_N^{\complement}})|D_N] \\ &\leq C\delta_N^{\eta} + E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}\mathbf{1}_{F_N^{\complement}}|D_N] \\ &\leq C\delta_N^{\eta} + E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2|D_N]^{1/2}\Pi_N(F_N^{\complement}|D_N)^{1/2}, \end{aligned} \tag{A.17}$$

其中，第一个、第二个和第三个不等式分别由詹森不等式、 F_N 的定义和柯西–施瓦茨不等式得出。

现在，我们修改 [15,定理 2.32] 证明的其余部分 θ_0，以便将一些依赖于 S的量替换为仅依赖于的类似量。我们分几步进行。首先，我们证明（A.17）右侧的第二项满足

$$\begin{aligned}&P_{\theta_0}^N\left(E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2|D_N]\Pi_N(F_N^{\complement}|D_N)>(C\delta_N^{\eta})^2\right)\\ \leq& o(1)+P_{\theta_0}^N\left(E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2|D_N]e^{-bN\delta_N^2}>(C\delta_N^{\eta})^2\right),\end{aligned}$$

其中， $o(1)$ 项源于假设 (4.17)，因此对 $\theta_0\in S$一致。其次，我们进一步对上述不等式右侧的第二项作如下上界估计：

$$\begin{aligned}&P_{\theta_0}^N\left(E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2|D_N]e^{-bN\delta_N^2}>(C\delta_N^{\eta})^2\right)\\ \leq& P_{\theta_0}^N\left(\int_\Theta\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}e^{(\mathbf{A}+2-b)N\delta_N^2}\mathrm{d}\Pi_N(\theta)>(C\delta_N^{\eta})^2\right)+P_{\theta_0}^N\left(A_N^{\complement}\right),\end{aligned}$$

对于 A_N，如 (A.15) 所示。根据 引理 A.4， $P(A_N^{\complement})\leq {}^{2}_{(U^2+1)N\delta_N^2}$。在第三步中，我们证明

$$\begin{aligned}&P_{\theta_0}^N\left(\int_\Theta\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}e^{(\mathbf{A}+2-b)N\delta_N^2}\mathrm{d}\Pi_N(\theta)>(C\delta_N^{\eta})^2\right)\\ \leq&\left(\int_\Theta\|\theta'\|_{\mathbb{B}}^2\mathrm{d}\Pi'(\theta')+\sup_{\theta_0\in S}\|\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2\right)e^{(\mathbf{A}+2-b)N\delta_N^2}(C\delta_N^{\eta})^{-2},\end{aligned}$$

其中，对于 $b>\mathbf{A}+2$，该上界收敛于零。结合前述步骤即可得出结论。

步骤 1 (A.17) 右侧的第二项满足

$$\begin{aligned}&P_{\theta_0}^N\left(E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2|D_N]\Pi_N(F_N^{\complement}|D_N)>(C\delta_N^{\eta})^2\right)\\ =&P_{\theta_0}^N\left(E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2|D_N]\Pi_N(F_N^{\complement}|D_N)>(C\delta_N^{\eta})^2,\Pi_N(F_N^{\complement}|D_N)\leq e^{-bN\delta_N^2}\right)\\ &+P_{\theta_0}^N\left(E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2|D_N]\Pi_N(F_N^{\complement}|D_N)>(C\delta_N^{\eta})^2,\Pi_N(F_N^{\complement}|D_N)>e^{-bN\delta_N^2}\right)\end{aligned}\tag{A.18}$$

对所有 $b>0$。我们分别对 (A.18) 右侧的第一项和第二项进行上界估计。回顾 $\Theta_N(M)$ 的定义 (A.18)。对于 $(\Pi_N(F_N|D_N)\leq a$，注意，若存在某个 $a\geq 0$，使得 $\Pi_N(\Theta_N(M)\cap F_N|D_N)\leq a$，则有下面的第一个不等式：

$$\begin{aligned}P_{\theta_0}^N\left(\Pi_N(F_N|D_N)\leq 1-e^{-bN\delta_N^2}\right)\leq&P_{\theta_0}^N\left(\Pi_N(\Theta_N(M)\cap F_N|D_N)\leq 1-e^{-bN\delta_N^2}\right)\\ \leq&\frac{C_1}{(N\delta_N^2)^{\mathfrak{q}}}.\end{aligned}$$

上面的第二个不等式由假设（4.17）以及 A.16）的定义可得，其中 F_N。因此，式（A.18）右端的第二项满足

$$\begin{aligned}&P_{\theta_0}^N\left(E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2|D_N]\Pi_N(F_N^{\complement}|D_N)>(C\delta_N^{\eta})^2,\Pi_N(F_N^{\complement}|D_N)>e^{-bN\delta_N^2}\right)\\ \leq&P_{\theta_0}^N\left(\Pi_N(F_N^{\complement}|D_N)>e^{-bN\delta_N^2}\right)\\ =&P_{\theta_0}^N\left(\Pi_N(F_N|D_N)\leq 1-e^{-bN\delta_N^2}\right)\\ \leq&\frac{C_1}{(N\delta_N^2)^{\mathfrak{q}}}.\end{aligned}$$

对于式（A.18）右端的第一项，

$$\begin{aligned}
&P_{\theta_0}^N\left(E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2|D_N]\Pi_N(F_N^{\complement}|D_N)>(C\delta_N^{\eta})^2,\Pi_N(F_N^{\complement}|D_N)\le e^{-bN\delta_N^2}\right)\\
\le&P_{\theta_0}^N\left(E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2|D_N]e^{-bN\delta_N^2}>(C\delta_N^{\eta})^2,\Pi_N(F_N^{\complement}|D_N)\le e^{-bN\delta_N^2}\right)\\
\le&P_{\theta_0}^N\left(E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2|D_N]e^{-bN\delta_N^2}>(C\delta_N^{\eta})^2\right).
\end{aligned}$$

将这些界代入（A.18），得到

$$\begin{aligned}
&P_{\theta_0}^N\left(E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2|D_N]\Pi_N(F_N^{\complement}|D_N)>(C\delta_N^{\eta})^2\right)\\
\le&\frac{C_1}{(N\delta_N^2)^{\mathfrak{q}}}+P_{\theta_0}^N\left(E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2|D_N]e^{-bN\delta_N^2}>(C\delta_N^{\eta})^2\right).
\end{aligned}\tag{A.19}$$

步骤 2 在此步骤中，我们进一步对（A.19）右侧进行估计。回顾集合 $A_N=A_N(\theta_0)$的定义（A.15）。注意到

$$\begin{aligned}
&P_{\theta_0}^N\left(E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2|D_N]e^{-bN\delta_N^2}>(C\delta_N^{\eta})^2\right)\\
\le&P_{\theta_0}^N\left(E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2|D_N]e^{-bN\delta_N^2}>(C\delta_N^{\eta})^2,A_N\right)+P_{\theta_0}^N\left(A_N^{\complement}\right).
\end{aligned}\tag{A.20}$$

由引理 A.4，可得

$$P_{\theta_0}^N(A_N^{\complement})\le\frac{2(U^2+1)}{N\delta_N^2},$$

对 $\theta_0\in S$一致成立。因此，只需对（A.20）右侧的第一项进行估计。根据后验分布的定义（4.7），取 $\Pi\leftarrow\Pi_N$，并利用 $\ell_N(\theta_0)$ 关于 θ为常数这一事实，可得

$$E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2|D_N]=\int_\Theta\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2\frac{e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}}{\int_\Theta e^{\ell_N(\theta')-\ell_N(\theta_0)}\mathrm{d}\Pi_N(\theta')}\mathrm{d}\Pi_N(\theta).$$

因此，根据 A_N的定义（A.15），下列不等式在 A_N上成立：

$$E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2|D_N]e^{-bN\delta_N^2}\le\int_\Theta\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}e^{(\mathbf{A}+2-b)N\delta_N^2}\mathrm{d}\Pi_N(\theta).$$

因此，右侧第一项（A.20）满足

$$\begin{aligned}
&P_{\theta_0}^N\left(E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2|D_N]e^{-bN\delta_N^2}>(C\delta_N^{\eta})^2,A_N\right)\\
\le&P_{\theta_0}^N\left(\int_\Theta\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}e^{(\mathbf{A}+2-b)N\delta_N^2}\mathrm{d}\Pi_N(\theta)>(C\delta_N^{\eta})^2,A_N\right)\\
\le&P_{\theta_0}^N\left(\int_\Theta\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}e^{(\mathbf{A}+2-b)N\delta_N^2}\mathrm{d}\Pi_N(\theta)>(C\delta_N^{\eta})^2\right).
\end{aligned}$$

将这些界应用于（A.19），我们得到

$$\begin{aligned}
&P_{\theta_0}^N\left(E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2|D_N]\Pi_N(F_N^{\complement}|D_N)>(C\delta_N^{\eta})^2\right)\\
\le&\frac{C_1}{(N\delta_N^2)^{\mathfrak{q}}}+\frac{2(U^2+1)}{N\delta_N^2}\\
&+P_{\theta_0}^N\left(\int_\Theta\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}e^{(\mathbf{A}+2-b)N\delta_N^2}\mathrm{d}\Pi_N(\theta)>(C\delta_N^{\eta})^2\right).
\end{aligned}\tag{a.21}$$

步骤 3 我们进一步对（A.21）右侧进行估计。根据马尔可夫不等式和托内利定理，（A.21）右侧的第三项满足

$$\begin{aligned}
&P_{\theta_0}^N\left(\int_\Theta \|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2 e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)} e^{(\mathrm{A}+2-b)N\delta_N^2} \mathrm{d}\Pi_N(\theta) > (C\delta_N^\eta)^2\right)\\
\leq & E_{\theta_0}^N\left[\int_\Theta \|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2 e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)} e^{(\mathrm{A}+2-b)N\delta_N^2} \mathrm{d}\Pi_N(\theta)\right](C\delta_N^\eta)^{-2}\\
= & \int_\Theta \|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2 E_{\theta_0}^N\left[e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}\right]\mathrm{d}\Pi_N(\theta) e^{(\mathrm{A}+2-b)N\delta_N^2}(C\delta_N^\eta)^{-2}.
\end{aligned}$$

根据（4.5），$e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}$是拉东–尼科迪姆导数$\mathrm{d}P_\theta^N \mathrm{d}P_{\theta_0}^N$，因此对每个$\theta\in\Theta$，都有 $E_{\theta_0}^N[e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)}]=1$。

为界定 $\int_\Theta \|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2 \mathrm{d}\Pi_N(\theta)$，注意到 $\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2 \leq 2(\|\theta\|_{\mathbb{B}}^2+\|\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2)$；根据三角不等式以及初等不等式 $(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)$，其中 $a,b\in\mathrm{R}$。回顾定义 4.4，Π_N是 $\theta:=N^{-d_z/(4\alpha+4\kappa+2d_z)}\theta'$ 对于 $\theta'\sim\Pi'$ 的概率分布，其中根据假设 4.3，$\Pi'(\mathrm{R})=1$。因此，

$$\int_\Theta \|\theta\|_{\mathbb{B}}^2 \mathrm{d}\Pi_N(\theta)=\int_\Theta \|N^{-d/(4\alpha+4\kappa+2d)}\theta'\|_{\mathbb{B}}^2 \mathrm{d}\Pi'(\theta')\leq \int_\Theta \|\theta'\|_{\mathbb{B}}^2 \mathrm{d}\Pi'(\theta'),$$

其中最右侧的项是 $\|\cdot\|_{\mathbb{B}}$ 的二阶矩，Π' 因此是有限的，这是因为假设Π' 是满足 $\Pi'(\mathbb{B})=1$的高斯测度。接下来，根据假设，$S\subset\mathbb{B}$ 在 $\mathbb{B}$ 范数下有界，$\sup_{\theta_0\in S}\|\theta_0\|_{\mathbb{B}}$ 是有限的。因此，(A.21) 右端的第三项满足

$$\begin{aligned}
&P_{\theta_0}^N\left(\int_\Theta \|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2 e^{\ell_N(\theta)-\ell_N(\theta_0)} e^{(\mathrm{A}+2-b)N\delta_N^2} \mathrm{d}\Pi_N(\theta) > (C\delta_N^\eta)^2\right)\\
\leq & 2\left(\int_\Theta \|\theta'\|_{\mathbb{B}}^2 \mathrm{d}\Pi'(\theta')+\sup_{\theta_0\in S}\|\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2\right) e^{(\mathrm{A}+2-b)N\delta_N^2}(C\delta_N^\eta)^{-2}. \qquad \text{(A.22)}
\end{aligned}$$

对于 $b>\mathrm{A}+2$，该上界关于 $\theta_0\in S$ 一致收敛于零。

结论 回顾 (A.17)：

$$\|E^{\Pi_N}[\theta|D_N]-\theta_0\|_{\mathbb{B}}\leq C\delta_N^\eta+E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2|D_N]^{1/2}\Pi_N(F_N^{\complement}|D_N)^{1/2}.$$

上述不等式意味着

$$\|E^{\Pi_N}[\theta|D_N]-\theta_0\|_{\mathbb{B}}>2C\delta_N^\eta \Longrightarrow E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2|D_N]^{1/2}\Pi_N(F_N^{\complement}|D_N)^{1/2}>C\delta_N^\eta,$$

因此，对于每个 $\theta_0\in S$，

$$P_{\theta_0}^N\left(\|E^{\Pi_N}[\theta|D_N]-\theta_0\|_{\mathbb{B}}>2C\delta_N^\eta\right)\leq P_{\theta_0}^N\left(E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2|D_N]^{1/2}\Pi_N(F_N^{\complement}|D_N)^{1/2}>C\delta_N^\eta\right).$$

结合 (A.21) 和 (A.22)，上述不等式右端满足

$$\begin{aligned}
&P_{\theta_0}^N\left(E^{\Pi_N}[\|\theta-\theta_0\|_{\mathbb{B}}^2|D_N]^{1/2}\Pi_N(F_N^{\complement}|D_N)^{1/2}>C\delta_N^\eta\right)\\
\leq & \frac{C_1}{(N\delta_N^2)^{\mathfrak{q}}}+\frac{2(U^2+1)}{N\delta_N^2}+2\left(\int_\Theta \|\theta'\|_{\mathbb{B}}^2 \mathrm{d}\Pi'(\theta')+\mathrm{diam}_{\mathcal{H}}(S)^2\right) e^{(\mathrm{A}+2-b)N\delta_N^2}(C\delta_N^\eta)^{-2}.
\end{aligned}$$

根据假设，右侧第一项中的标量 C_1 不依赖于 θ_0。因此，当 N足够大时，右侧第三项小于第一项和第二项。由于

$$\frac{C_1}{(N\delta_N^2)^{\mathfrak{q}}}+\frac{2(U^2+1)}{N\delta_N^2}\leq\frac{C_1+2(U^2+1)}{(N\delta_N^2)^{1\wedge\mathfrak{q}}}$$

我们得到（4.19）。至此，定理 4.7的证明完成。 ■

附录 A.2.1 存在一致常数的证明

命题 *4.8*。假设定理 *4.5* 的假设成立，且映射 $M' \mapsto U(M')$ 如（*4.2*）所示。若 $S \subset R$ 在 H 范数下有界，则 S 在 R 范数下有界。对于每个 $0 < M_0 < \infty$，以及 $U = U(M_0 + sup_{\theta_0 \in S} \|\theta_0\| R)$，存在 $0 < A = A(S, U) < \infty$，使其满足（*4.18*）。

证明 命题 *4.8*。 由于定理 4.5 的假设成立，根据假设 4.3可知，H 是基准先验分布 Π' 和 $\Pi'(R) = 1$的再生核希尔伯特空间。回想一下，高斯测度的再生核希尔伯特空间连续嵌入于该高斯测度的支撑集中；例如参见 [4, 命题 2.6.9]。因此，存在某个 $0 < C < \infty$，使得 $\|h\|_{\mathcal{R}} \leq C\|h\|_{\mathcal{H}}$对每个 $h \in$H 都成立。又由于 S在 H 范数下有界，因此 S在 R 范数下有界，即 $\sup_{\theta_0 \in S} \|\theta_0\|_{\mathcal{R}}$有限。这证明了第一个结论。

接下来，我们通过改编 [15,定理 2.2。2], 的证明中的步骤 2 [15,第 33-34]页，来证明该命题的第二个结论。这样做是合理的，因为定理 4.5 的假设比 [15,定理2.2。2]的假设更强。

Let $0 < M_0 < \infty$ 和 U如命题陈述所述，并令 $\theta_0 \in S$。我们声称

$$\begin{aligned}\Pi_N(\mathcal{B}_N(\theta_0, U)) =& \Pi_N(\theta \in \Theta : d_G(\theta, \theta_0) \leq \delta_N, \|G(\theta)\|_\infty \leq U) \\ \geq& \Pi_N(\theta \in \Theta : d_G(\theta, \theta_0) \leq \delta_N, \|\theta - \theta_0\|_{\mathcal{R}} \leq M_0) \\ \geq& \Pi_N(\theta \in \Theta : \|\theta - \theta_0\|_{(H^\kappa)^*} \leq \tfrac{\delta_N}{L}, \|\theta - \theta_0\|_{\mathcal{R}} \leq M_0),\end{aligned}$$

存在某个待定标量 L，其将在下文确定。该等式由 4.11 中 $\mathcal{B}_N$ 的定义得到。对于第一个不等式，首先注意到

$$\|\theta - \theta_0\|_{\mathcal{R}} \leq M_0 \implies \|\theta\|_{\mathcal{R}} \leq M_0 + \sup_{\theta_0 \in S} \|\theta_0\|_{\mathcal{R}}, \tag{A.23}$$

根据三角不等式。现在，假设 4.1 中的（4.2）意味着，对于任意 θ满足$\|\theta - \theta_0\|_{\mathcal{R}} \leq M_0$ 的情况，都有 $\|G(\theta)\|_\infty \leq U$，从而证明了第一个不等式。对于第二个不等式，注意到假设 4.1 中的（4.3）可写为：对于任意 $0 < M < \infty$，存在 $L = L(M)$ 使得

$$d_G(\theta_1, \theta_2) \leq L\|\theta_1 - \theta_2\|_{(H^\kappa(\mathcal{Z}))^*}, \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \Theta \cap B_{\mathcal{R}}(M).$$

若$\|\theta - \theta_0\|_{\mathcal{R}} \leq M_0$，则根据（A.23），我们可以将上述公式中的 M替换为 $M_0 + \sup_{\theta_0 \in S} \|\theta_0\|_{\mathcal{R}}$，并令 $L = L(M_0 + \sup_{\theta_0 \in S} \|\theta_0\|_{\mathcal{R}})$，由此得出$\|\theta - \theta_0\|_{(H^\kappa(\mathcal{Z}))^*} \leq \frac{\delta_N}{L}$蕴含 $d_G(\theta, \theta_0) \leq \delta_N$。这就证明了第二个不等式。

接下来，我们改写第二个不等式的右侧。注意，对于任意的 $\theta_0 \in \Theta$ 和 $r > 0$,$B_{(H^\kappa)^*}(\theta_0, r) := \{\theta \in \Theta : \|\theta - \theta_0\|_{(H^\kappa)_*} \leq r\}$ 和 $B_{\mathcal{R}}(\theta_0, r) := \{\theta \in \Theta : \|\theta - \theta_0\|_{\mathcal{R}} \leq r\}$ 是对称博雷尔集，当且仅当 $\theta_0 = 0$。因此

$$\begin{aligned}&\Pi_N(\theta \in \Theta : \|\theta - \theta_0\|_{(H^\kappa)^*} \leq \tfrac{\delta_N}{L}, \|\theta - \theta_0\|_{\mathcal{R}} \leq M_0) \\ =& \Pi_N(\theta \in B_{(H^\kappa)^*}(\theta_0, \tfrac{\delta_N}{L}) \cap B_{\mathcal{R}}(\theta_0, M_0)) \\ =& \Pi_N(\theta - \theta_0 \in B_{(H^\kappa)^*}(0, \tfrac{\delta_N}{L}) \cap B_{\mathcal{R}}(0, M_0)).\end{aligned}$$

现在我们希望从下方估计最后一个方程右端。由于 S 在$\mathcal{H}$范数下有界，因此 $S \subset \mathcal{H}$。特别地，$\theta_0 \in \mathcal{H}$。由于$B_{(H^\kappa)^*}(0, \frac{\delta_N}{L}) \cap B_{\mathcal{R}}(0, M) \subset \mathcal{R}$是对称的 Borel 集，且$\mathcal{R}$ 根据假设 4.3是可分的，因此我们可以应用 [4, 推论 2.618]中的小球概率估计，得到

$$\begin{aligned}&\Pi_N(\theta - \theta_0 \in B_{(H^\kappa)^*}(0, \tfrac{\delta_N}{L}) \cap B_{\mathcal{R}}(0, M_0)) \\ \geq& \exp(-\tfrac{1}{2}\|\theta_0\|_{\mathcal{H}}^2)\Pi_N(\theta \in B_{(H^\kappa)^*}(0, \tfrac{\delta_N}{L}) \cap B_{\mathcal{R}}(0, M_0)) \\ \geq& \exp\left(-\frac{1}{2}\sup_{\theta_0 \in S}\|\theta_0\|_{\mathcal{H}}^2\right)\Pi_N(\theta \in B_{(H^\kappa)^*}(0, \tfrac{\delta_N}{L}) \cap B_{\mathcal{R}}(0, M_0)),\end{aligned}$$

其中，在第二个不等式中，我们使用了集合 S 在$\mathcal{H}$ 范数下有界这一假设。根据高斯相关不等式，参见例如 [15, 定理 B.1。2]，

$$\Pi_N(\theta \in B_{(H^\kappa)^*}(0, \tfrac{\delta_N}{L}) \cap B_{\mathcal{R}}(0, M_0)) \geq \Pi_N(\theta \in B_{(H^\kappa)^*}(0, \tfrac{\delta_N}{L}))\Pi_N(\theta \in B_{\mathcal{R}}(0, M_0)).$$

通过令 M_0 足够大，我们可以确保 $\Pi_N(\theta \in B_{\mathcal{R}}(0,\ M_0)) \geq \frac{1}{2}$。根据 [15, 第- 34]，页公式 (2.22) 与 (2.24) 之间的论证，存在某个不依赖于 S 的 $0 < a < \infty$，使得

$$\Pi_N(\theta \in B_{(H^\kappa)^*}(0, \tfrac{\delta_N}{L})) \geq \exp\left(-aN\delta_N^2\right),$$

对于 L，如式 (A.23) 所示。结合前述步骤可知

$$\Pi_N(\mathcal{B}_N(\theta_0)) \geq \exp\left(-\log 2 - \frac{1}{2}\sup_{\theta_0 \in S}\|\theta_0\|_{\mathcal{H}}^2 - aN\delta_N^2\right).$$

由式 (4.8) 可得 $N\delta_N^2 \to \infty$，其中 $N \to \infty$。因此，存在某个 A 满足式 (4.18)。命题命题 4.8的证明 ■

如果集合 S 中的候选真实参数在 $\mathcal{H}$ 范数下无界，那么命题 4.8 的证明技巧无法按原样应用。这是因为其中的一个中间步骤应用了[4, 推论 2.6。18], 该推论用到了以下性质： θ_0 属于的再生核希尔伯特空间 Π_N。例如，若 $S = B_{\mathcal{R}}(C)$ 对某个 $0 < C < \infty$成立，则 S 在 $\mathcal{H}$ 范数下无界。若其有界，则由 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{R}$的连续嵌入可知，$\mathcal{H}$ 范数与 $\mathcal{R}$ 范数等价；但当 $\mathcal{H}$ 为无限维时，这并不成立。

appendix a.3 一致后验收缩与可区分性的证明 L^2

证明定理 *4.10*。我们证明第一个结论。给定如下假设： $S \subset \mathcal{R}$ 在$\mathcal{H}$范数下有界，我们可以应用命题 4.8 从而断定$\sup_{\theta_0 \in S}\|\theta_0\|_{\mathcal{R}}$是有限的。再次由命题 4.8，对每一个 $M > 0$ 以及对 $U = U$（$M + \sup_{\theta_0 \in S}\|\theta_0\|_{\mathcal{R}}$），存在某个 $0 < \mathbf{A} = \mathbf{A}$（$S$，$U$）$< \infty$使得（4.18）成立，即

$$\forall \theta_0 \in S, N \in \mathbb{N}, \quad \Pi_N(\mathcal{B}_N(\theta_0, U(M + \sup_{\theta_0 \in S}\|\theta_0\|_{\mathcal{R}}))) \geq e^{-\mathbf{A}N\delta_N^2}.$$

由（4.2），U（$M + \sup_{\theta_0 \in S}\|\theta_0\|_{\mathcal{R}}$）随 M增大，并且根据（4.11）下方的讨论，$\mathcal{B}_N$（θ_0，U）关于$\mathcal{U}$递增。因此，对于相同的A （与前一式中相同），下列结论对每一个 $M_1 \geq M$成立：

$$\forall \theta_0 \in S, N \in \mathbb{N}, \quad \Pi_N(\mathcal{B}_N(\theta_0, U(M_1 + \sup_{\theta_0 \in S}\|\theta_0\|_{\mathcal{R}}))) \geq e^{-\mathbf{A}N\delta_N^2}.$$

这意味着，如有必要，我们可以进一步增大 M，以确保存在某个 $\mathrm{B} > \mathrm{A} + 2$ 和某个 $m = m(M, L)$，它们不依赖于 θ_0，使集合 $(\Theta_N(M))_{N \in \mathbb{N}}$ 也满足 (4.15a) 和 (4.15b)。特别地，对于任意这样的 M，以及任意 $0 < b < \mathrm{B} - (\mathrm{A} + 2)$，定理 4.5 的最终结论成立：对于任意 $0 < c < 1$，存在充分大的且独立于 c 的 $m = m(\mathrm{A}\ b, m)$，使得对于 $U = U(M)$、由 (4.12) 给出的且满足 $u \leftarrow U$ 的 C_U、某个 $N^*(c) \in \mathbb{N}$，以及每个$N \geq N^*(c)$，(4.16) 均成立：

$$P_{\theta_0}^N\left(\Pi_N(\{\theta \in \Theta_N(M) : d_G(\theta, \theta_0) \leq m\delta_N C_U^{-1/2}\}|D_N) \leq 1 - e^{-bN\delta_N^2}\right) \leq (1 + c)\frac{2(U^2 + 1)}{N\delta_N^2}.$$

特别地，m、δ_N、C_U、b、c和 U均不依赖于 θ_0。固定任意一个 $0 < c < 1$，即可得到第一个结论。

接下来，我们证明第二个结论（4.20），论证方法与 [15, 定理 2.31]的证明相同。若假设 4.2 成立，则存在某个 $\eta > 0$ 以及某个 $L' = L'(M)$，二者均不依赖于 θ_0，使得

$$\|\theta - \theta_0\|_{L^2_\zeta(\mathcal{Z},W)} \le L' d_G(\theta,\theta_0)^\eta, \quad \forall(\theta,\theta_0) \in \Theta_N(M) \times S.$$

因此，

$$\left\{\theta \in \Theta_N(M) : d_G(\theta,\theta_0) \le m C_U^{-1/2}\delta_N\right\} \subseteq \left\{\theta \in \Theta_N(M) : \|\theta - \theta_0\|_{L^2_\zeta(\mathcal{Z},W)} \le L'(m C_U^{-1/2}\delta_N)^\eta\right\}.$$

上述集合包含关系和第一个结论随即推出（4.20）。 ■

附录 A.4 索博列夫范数和上确界范数下的一致后验收缩与可区分性的证明

定理 *4.14* 的证明。 证明与命题 [15,4.1 的证明基本相同。3]。回顾 $\lesssim$ 中的记号“$\lesssim$”，第1.4节，以及 d_z 表示定义域 $\mathcal{Z}$的维数的记号，并回顾 Sobolev 嵌入和索博列夫范数的插值不等式，参见例如 [15, 公式 (A.4)、(A.5)]:

(A.24a) $$\forall \alpha > d_z/2,\ 0 < \eta < \alpha - d_z/2,\ f \in H^\alpha: \quad \|f\|_\infty \lesssim \|f\|_{C^\eta} \lesssim \|f\|_{H^\alpha}$$

(A.24b) $$\forall \beta_1,\beta_2 \ge 0,\ \theta \in [0,1],\ u \in H^{\beta_1} \cap H^{\beta_2}: \quad \|u\|_{H^{\theta\beta_1+(1-\theta)\beta_2}} \lesssim \|u\|^{\theta}_{H^{\beta_1}} \|u\|^{1-\theta}_{H^{\beta_2}}.$$

我们先证明（4.22）。任取 $\beta' \in [0,\beta)$。对于代换 $\beta_1 \leftarrow 0$，$\beta_2 \leftarrow \beta$ 以及 $\theta \leftarrow (\beta-\beta')/\beta$，可得 $(1-\theta) \leftarrow \beta'/\beta$以及 $\theta\beta_1 + (1-\theta)\beta_2 \leftarrow \beta'$。将这些代换代入（A.24b）可得

(A.25) $$\|u\|_{H^{\beta'}} \lesssim \|u\|^{(\beta-\beta')/\beta}_{L^2} \|u\|^{\beta'/\beta}_{H^\beta}, \quad \forall u \in H^\beta.$$

根据以下假设 ζ是定义在$\mathcal{Z}$ 上的概率测度，且具有勒贝格密度p_ζ，其本质下确界严格为正，我们可以应用引理(i) 的a.1 中的结论，从而得到

$$\|u\|_{L^2} \lesssim \|u\|_{L^2_\zeta}, \quad \forall u \in L^2_\zeta(\mathcal{Z}).$$

根据假设 4.3，$\Pi'(\mathrm{R}) = 1$，因此根据定义 4.4，对于每个 N，都有 $\Pi_N(\mathrm{R}) = 1$。根据假设，R 连续嵌入 $H^\beta(\mathrm{Z})$，其中 $\beta > d_z/2$，因此对 Π_N-几乎处处的 θ 以及每个 $\theta_0 \in S$，都有 $\theta - \theta_0 \in H^\beta$；由三角不等式可知，$\|\theta-\theta_0\|_{H^\beta} \lesssim \|\theta\|_{\mathrm{R}} + \|\theta_0\|_{\mathrm{R}}$。回顾定理 4.10，$M$的选取满足 $\sup_{\theta_0\in S}\|\theta_0\|_{\mathrm{R}} < M < \infty$，即 $S \subset B_{\mathcal{R}}(M)$。考虑到对满足 (4.23) 中 $\|\theta\|_{\mathcal{R}} \le M$ 的θ的限制，可得

$$\forall(\theta,\theta_0) \in B_{\mathcal{R}}(M) \times S, \quad \|\theta-\theta_0\|^{\beta'/\beta}_{H^\beta} \lesssim (2M)^{\beta'/\beta} =: C_1 = C_1(\beta,\beta',M).$$

根据（A.25），代入 $u \leftarrow \theta - \theta_0$，并根据前述不等式，可得

$$\forall(\theta,\theta_0) \in B_{\mathcal{R}}(M) \times S, \quad \|\theta-\theta_0\|_{H^{\beta'}} \lesssim C_1 \|\theta-\theta_0\|^{(\beta-\beta')/\beta}_{L^2_\zeta}.$$

接下来注意到 $\Theta_N(M) \subset \{\theta \in \Theta: \ \|\theta\|_{\mathcal{R}} \le M\}$，根据 4.9 对 $\Theta_N(M)$ 的定义。根据前面的论证，

$$\begin{aligned}&\left\{\theta \in \Theta_N(M) : \|\theta-\theta_0\|_{L^2_\zeta} \le L'(m C_U^{-1/2}\delta_N)^\eta\right\}\\ &\subseteq \left\{\theta \in \Theta : \|\theta\|_{\mathcal{R}} \le M, \|\theta-\theta_0\|_{H^{\beta'}} \lesssim C_1\left(L'(m C_U^{-1/2}\delta_N)^\eta\right)^{(\beta-\beta')/\beta}\right\}.\end{aligned}$$

这意味着，对于 $P_{\theta_0}^N$-几乎每个 D_N 的实现，

$$\begin{aligned}&\Pi_N\left(\left\{\theta\in\Theta_N(M):\|\theta-\theta_0\|_{L^2_\zeta}\le L'(mC_U^{-1/2}\delta_N)^\eta\right\}\middle|D_N\right)\\&\le\Pi_N\left(\left\{\theta\in\Theta:\|\theta\|_{\mathcal{R}}\le M,\|\theta-\theta_0\|_{H^{\beta'}}\lesssim C_1\left(L'(mC_U^{-1/2}\delta_N)^\eta\right)^{(\beta-\beta')/\beta}\right\}\middle|D_N\right).\end{aligned}$$

特别地，如果上述不等式右侧小于或等于某个 $a>0$，那么不等式左侧也如此。因此，对于 $C_0:=L'(mC^{-1}{}_U{}^{2})^\eta$，可得

$$\begin{aligned}&P_{\theta_0}^N\left(\Pi_N\left(\left\{\theta\in\Theta_N(M):\|\theta-\theta_0\|_{L^2_\zeta}\le C\delta_N^\eta\right\}\middle|D_N\right)\le1-e^{-bN\delta_N^2}\right)\\\ge&P_{\theta_0}^N\left(\Pi_N\left(\left\{\theta\in\Theta:\|\theta\|_{\mathcal{R}}\le M,\|\theta-\theta_0\|_{H^{\beta'}}\lesssim C_1\left(C_0\delta_N\right)^\eta)^{(\beta-\beta')/\beta}\right\}\middle|D_N\right)\le1-e^{-bN\delta_N^2}\right).\end{aligned}$$

现在，由于 4.20 给出了 L^2_ζ 度量下的一致后验收缩结果，对于适当的 C，可由此推出 4.22 所述的 $H^{\beta'}$ 度量下一致后验收缩的结论。

为证明 4.23 所述由上确界范数诱导的度量下一致后验收缩这一第二个结论，我们采用类似的论证。将（A.24a）应用于 $\alpha\leftarrow\beta'$，可得存在某个常数 D，使得对每个 $u\in H^{\beta'}$，$\|u\|_\infty\le D\|u\|_{H^{\beta'}}$。因此，

$$\{\theta\in\Theta:\|\theta\|_{\mathcal{R}}\le M,\|\theta-\theta_0\|_{H^{\beta'}}\le C\delta_N^{\eta(\beta-\beta')/\beta}\}\subseteq\{\theta\in\Theta:\|\theta\|_{\mathcal{R}}\le M,\|\theta-\theta_0\|_\infty\le CD\delta_N^{\eta(\beta-\beta')/\beta}\}.$$

因此，对于 D_N 的 $P_{\theta_0}^N$-几乎每个实现，

$$\begin{aligned}&\Pi_N(\{\theta\in\Theta:\|\theta\|_{\mathcal{R}}\le M,\|\theta-\theta_0\|_{H^{\beta'}}\le C\delta_N^{\eta(\beta-\beta')/\beta}\}|D_N)\\\le&\Pi_N(\{\theta\in\Theta:\|\theta\|_{\mathcal{R}}\le M,\|\theta-\theta_0\|_\infty\le CD\delta_N^{\eta(\beta-\beta')/\beta}\}|D_N).\end{aligned}$$

特别地，若上述不等式右侧小于或等于某个 $a>0$，则该不等式左侧也小于或等于它。因此，对于 $C':=CD$，可得

$$\begin{aligned}&P_{\theta_0}^N\left(\Pi_N(\{\theta\in\Theta:\|\theta\|_{\mathcal{R}}\le M,\|\theta-\theta_0\|_{H^{\beta'}}\le C\delta_N^{\eta(\beta-\beta')/\beta}\}|D_N)\le1-e^{-bN\delta_N^2}\right)\\\ge&P_{\theta_0}^N\left(\Pi_N(\{\theta\in\Theta:\|\theta\|_{\mathcal{R}}\le M,\|\theta-\theta_0\|_\infty\le C'\delta_N^{\eta(\beta-\beta')/\beta}\}|D_N)\le1-e^{-bN\delta_N^2}\right)\end{aligned}$$

因此，由4.23中的结论，即关于由上确界范数诱导的度量的一致后验收缩，可由4.22中的结论，即关于 $H^{\beta'}$度量的一致后验收缩，推出。至此，定理4.14的证明结束。■

附录B 简单假设的可区分性

定理 L^2_ζ-的后验收缩结果 [15, 2.31] 对于单个未知的 $\theta_0\in\mathcal{H}\cap\mathcal{R}$立即推出存在 L^2_ζ 一些假设检验，它们能够区分简单假设与由球的补集给出的备择假设，其中该补集与原假设之间的距离至少为后验收缩率。回想一下，讨论式（3.3）时指出，极小极大可区分性的速率代表极小极大分离率的上界。根据上述观察可知，极小极大 L^2_ζ-分离率不超过后验收缩率。回想序列$(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$、集合$(\Theta_N)_{N\in\mathbb{N}}$以及映射$U\mapsto C_U$，它们分别定义于式（4.8）、（4.9）和（4.12）中。

定理 *b.1.* 假设对每个 $M > 0$，假设 *4.1* 在 $U = U(M)$ 和 $L = L(M)$ 下成立。假设 M 和 $m = m(M, L)$ 对每个 $N \in \mathbb{N}$ 和 $\theta_0 \in B_{\mathcal{R}}(M)$ 都满足式（*4.15b*）。此外，假设 *4.2* 在 $\eta > 0$、L' 和 δ_0 下成立。则存在一个通用常数 $0 < K < \infty$，使得对每个 $m > 2m$，都存在检验 $(\Psi_N)_{N\in\mathbb{N}}$，使得以下检验的第一类和第二类错误

(B.1) $$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs. \quad H_{1,N} := \left\{\theta \in \Theta_N : \|\theta - \theta_0\|_{L^2_\zeta} > L'(mC_U^{-1/2})^\eta \delta_N^\eta\right\}$$

以……为上界

(B.2) $$P^N_{\theta_0}(\Psi_N = 1) \le \frac{1}{K}\exp(-(Km^2 - 1)N\delta_N^2), \qquad \sup_{\theta\in H_{1,N}} P^N_\theta(\Psi_N = 0) \le \exp(-KmN\delta_N^2).$$

定理 B.1 包含备择假设与原假设恰好以速率 δ_N^η 分离的极限情形，因为前置因子 $L'(mC^{-1}/{}_U{}^2)^\eta$ 之于 δ_N^η，在备择假设 $H_{1,\ N}$ 于（B.1）的定义中相对于 N 为常数；参见注 3.7。

证明 定理 *B.1*。 由于所述假设包含 引理 A.2 的假设，我们可以应用 引理 A.2 的结论及其证明中的任一陈述。根据 引理 A.2 的结论，存在通用常数 $0 < K < \infty$ 及检验 $(\Psi_N)_{N\in\mathbb{N}}$，使得对每个 $m > 2m$，（A.1）成立。对第 1 类错误在（A.1）中的界，给出了第 1 类错误在（B.2）中的界。

为得到 (b.2) 中第二类错误的界，我们首先注意到，(a.1) 中的备择假设具有如下形式：$\{\theta \in \Theta_N : h(p_\theta, p_{\theta_0}) > m\delta_N\}$。回顾半度量 d_G 在 Θ 上的定义 (4.10)。由 (a.2) 中的下界 $C_U^{1/2} d_G(\theta, \vartheta) \le h(p_\theta, p_\vartheta)$，我们得出

(B.3) $$\{\theta \in \Theta_N : d_G(\theta, \theta_0) > m\delta_N C_U^{-1/2}\} \subset \{\theta \in \Theta_N : h(p_\theta, p_{\theta_0}) > m\delta_N\}.$$

根据假设 假设 4.2 对 $\eta > 0$、L' 和 δ_0 成立，可知对每个 $\delta \le \delta_0$，$\{\theta \in \Theta_N : d_G(\theta_1, \theta_2) \le \delta\} \subset \{\theta \in \Theta_N : \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^2_\zeta(\mathcal{Z}W)} \le L'\delta^\eta\}$，例如参见 [15, 定理 2.3 的证明。1] 因此，在 Θ_N 中取补集可知，对每个 $\delta \le \delta_0$，

$$\{\theta \in \Theta_N : \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^2_\zeta(\mathcal{Z},W)} > L'\delta^\eta\} \subset \{\theta \in \Theta_N : d_G(\theta_1, \theta_2) > \delta\}.$$

特别地，对于所有充分大的 $N \in \mathbb{N}$，使得 $m\delta_N C^{-1}/{}_U{}^2 \le \delta_0$，以下结论也成立：

(B.4) $$H_{1,N} = \{\theta \in \Theta_N : \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^2_\zeta(\mathcal{Z},W)} > L'(m\delta_N C_U^{-1/2})^\eta\} \subset \{\theta \in \Theta_N : d_G(\theta_1, \theta_2) > m\delta_N C_U^{-1/2}\},$$

其中我们使用了 $H_{1,N}$ 在 (B.1) 中的定义。结合 (B.3) 和 (B.4)，得到 $H_{1,N} \subset \{\theta \in \Theta_N : h(p_\theta, p_\vartheta) > m\delta_N\}$。因此，根据 (a.1) 中第二类错误的上界，

$$\sup_{\theta\in H_{1,N}} P^N_\theta(\Psi_N = 0) \le \sup_{\theta\in\Theta_N : h(p_\theta,p_\vartheta)>m\delta_N} P^N_\theta(\Psi_N = 0) \le e^{-KmN\delta_N^2},$$

这就证明了 (b.2) 中第二类错误的上界。至此，定理 b.1 的证明完成。 ∎