arXiv:2602.09231v1 [math.AT] 9 Feb 2026

博弈族的多边纳什均衡存在性

´ ¨MATIJA BLAGOJEVIC 和 Christof Schutte

摘要。本文向博弈论引入两个全新的基本概念：多边纳什均衡和博弈族。我们从标准式的非合作博弈出发，展示这些概念如何相辅相成、无缝融入并自然拓展经典理论，同时使我们能够在对非合作博弈仅作最少假设的情况下，证明一个强有力的（多边）纳什均衡存在性结果。

经典理论中，非合作博弈的纳什均衡是一种全局策略，其性质是：无论哪位参与者单方面偏离均衡，都会使其自身利润降低。对于k边纳什均衡，我们现在要求，无论哪一群 k 参与者集体改变策略，所有偏离者的利润都会降低。由此，我们得到一个均衡的过滤序列，其中边数越高的均衡出现频率越低。直观而言，边数越高的均衡越能抵御联盟的形成，也会更有力地遏制偏离行为。此外，我们还推导出多边纳什均衡的存在性判据，并说明该判据如何反映边数越高的均衡越罕见这一现象。

此外，我们还证明，某些经典博弈具有高阶多方纳什均衡；在每种情况下，这些均衡都能从一个全新的视角，以直观且富有描述性的方式揭示这些博弈的结构。

许多外部条件都可能影响一个博弈。博弈族是由非合作博弈构成的参数化集合，其中参数会影响博弈的方方面面。通常，我们假设这种依赖关系是连续的，从而引入一种新的结构。这样，我们就不必逐个分析博弈，而是可以将整个博弈族作为一个整体来处理。这使参数在我们的理论中发挥核心作用，也使我们的关注点从寻找特殊策略转向寻找具有理想策略的特殊博弈。

尽管在某个特定博弈中，多方均衡日益罕见，我们的主要结果证明，博弈族中存在多方均衡。通过利用参数空间的可用性，我们能够对各个博弈单独施加尽可能弱的假设，同时仍然找到一个多方均衡。令人惊讶的是，Kneser图的团覆盖数在其中发挥了核心作用。

为说明这些新引入概念的相关性，我们最后介绍两个应用。第一个应用表明，在有限博弈族中存在具有多方均衡的博弈，从而为博弈论这一研究尤为深入的子领域开辟了新的基础研究方向。第二个应用拓展了诺贝尔奖得主肯尼斯·阿罗与 G´érard Debreu 于 1954年 的经典研究。该研究对由生产者、消费者和国家本身构成的国家经济进行了建模。我们表明，经典的微观经济学假设足以使国家能够确保其经济中任意高阶多方纳什均衡的存在。

引言

设想你和朋友正打算一起规划一次旅行，考虑的活动有两种：露营或去游乐园。既然你们是结伴旅行，如果独自参加某项活动，你们每个人都会感到不开心。不过，你们都觉得游乐园比露营更有意思。那么，你们该如何决定呢?

暂且假设你无法影响朋友选择什么活动。在这种情况下，为了获得最大的乐趣，你应该和朋友做同样的选择：如果他去露营，你就和他一起去；如果他选择去游乐园，你也跟着去。如果你无法说服朋友，就无法保证自己能获得最大的乐趣。这两个伙伴的处境可以用标准式非合作博弈来建模，它是所谓“约会困境”的一种变体。

Matija Blagojevi´c 的相关研究成果获得了德国人民学术基金会的资助，资助项目为其博士奖学金计划。

设 $N \in \mathbb{N}$ 为一个固定整数，表示非合作博弈中的玩家或参与者数量，并用整数 $\{1, \ldots, N\}$ 为他们编号。在我们的例子中， $N = 2$。每位玩家 i都有一个策略空间 E_i，其中包含 E: $= E_1 \times \cdots \times E_N$ 为全局策略空间。因此，在我们的例子中， $E_1 = E_1 = \{C, A\}$，其中 C 表示露营， A 表示游乐园，因此全局策略空间为 $E = \{(C, C), (C, A), (A, C), (A, A)\}$。玩家 i 通过选择策略 $x_i \in E_i$ 来"参与"非合作博弈。一个 n 元组 $(x_1, \ldots, x_n) \in E$ 称为全局策略。

每位玩家 i 都有一个收益函数 θ_i: $E \longrightarrow \mathbb{R}$，通常称为"效用函数"、"目标函数"、"收益函数"等，用来记录其偏好。当然，每位玩家都希望最大化自己的收益函数。在我们的例子中，我们设定

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} (C,C) & (C,A) & (A,C) & (A,A) \\ 3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \theta_2 = \begin{pmatrix} (C,C) & (C,A) & (A,C) & (A,A) \\ 3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

回想一下无法影响朋友的情形，在做出更优决策时，一个经典概念是纳什均衡。若一个全局策略 $x \in E$ 满足：对于每位玩家 i ，以及玩家 i在策略 $y_i \in E_i$上所有可能的单方面改变，玩家 i所获得的收益 $\theta_i(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_N)$都比他在纳什均衡中会获得的收益$\theta_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$差，那么该全局策略就称为纳什均衡。因此

$$\theta_i(y_i, x_{-i}) := \theta_i(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_N) \leq \theta_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N),$$

对于所有玩家 $1 \leq i \leq N$ 和所有策略 $y_i \in E_i$都成立。简而言之，我们可以将纳什均衡定义为一种全局策略，在这种策略下，没有玩家能够单方面 提高自己的利润。

在纳什均衡中，我们只考虑单边改变，这一事实促使人们最初将其称为非合作博弈，因为这排除了两个或更多玩家通过一致意见进行合作的可能性。

显然，我们的例子有两个纳什均衡，即两位朋友达成一致的全局策略，分别是(C, C)和(A, A)。如果在这些全局策略中，任一朋友改变自己的策略，他自己的愉悦程度就会降低。

如果两位朋友希望获得尽可能多的愉悦，他们都需要同时同意选择(A, A)。为此，他们可能需要对策略进行双边改变。有时，要实现总体上最优的策略，需要多个玩家合作，这一现实促使人们定义并研究更高阶的纳什均衡。换言之，我们关注这样的全局策略 $x \in E$ ：例如，对于任意由两名（不同）玩家 $I := \{i_1, i_2\} \subseteq [N] := \{1, \ldots, N\}$ 组成的子集，以及任意两种策略 $(y_{i_1}, y_{i_2}) \in E_{i_1} \times E_{i_2}$，其中任一玩家的收益都会变差，也就是说

$$\theta_{i_1}(y_I, x_{-I}) := \theta_{i_1}(x_1, \ldots, y_{i_1}, \ldots, y_{i_2}, \ldots, x_N) \leq \theta_{i_1}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N),$$

or

$$\theta_{i_2}(y_I, x_{-I}) := \theta_{i_2}(x_1, \ldots, y_{i_1}, \ldots, y_{i_2}, \ldots, x_N) \leq \theta_{i_2}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N).$$

我们将这种全局策略称为 x双边（或 2-边）纳什均衡。类似地，对于任意整数 k，若满足 $1 \leq k \leq N$，我们可以定义 k边纳什均衡。由此，我们在所有纳什均衡的集合上得到一个递降滤过。一个自然的问题是：对于某个（类）非合作博弈，是否存在某个 $1 \leq k \leq N$对应的 k边纳什均衡?

本文第一部分正式引入多边纳什均衡，并说明非合作博弈论中的许多经典概念如何顺畅地推广到这一框架中。我们讨论相关的最佳回应对应和 Nikaido–Isoda 函数，并推导出存在性判据；这些判据是非合作博弈经典结果的推广，因此尤其涵盖通常的（1 边）纳什均衡情形。

接下来，引入博弈族这一概念。乍一看，其定义恰如人们所预期：一族 $N \in \mathbb{N}$人博弈是由某个参数空间 B参数化的非合作博弈的集合。因此，特别地，策略空间和利润函数依赖于参数 $b \in B$。即便采用如此简单的定义，几乎所有经典

概念都从非合作博弈扩展到博弈族。所考虑的最相关情形是，博弈族并非仅仅是一个参数化集合，而是参数空间上的纤维丛。至此，我们展示该族如何获得一种统一结构，而参数空间在这一新理论中发挥着核心作用。我们通过将已引入的两个概念相互关联来结束本部分，并证明了博弈族的众多多边纳什均衡存在性准则。一个尤为突出的亮点是如下结果，即推论 6.9：

推论。 设 p为一个素数， $N \geq 1$ 为一个整数，并设 $\mathcal{E}/B := (\mathcal{E}^{(b)} : b \in B)$ 是一个由N个玩家组成的非合作博弈族，满足以下性质

– B 是一个紧的$\mathbb{F}p$-可定向流形，– E_i 是 B 上的纤维丛，具有紧全空间 E_i，且 E_i是 B 上有限维（实）向量丛 V_i 的子丛，其中每个 $1 \leq i \leq N$ 的纤维都是凸集，– E:
$= E_1 \times_B \cdots \times_B E_N$是 B上的纤维积丛，同时也是向量丛纤维积 V:
$= V_1 \times_B \cdots \times_B V_N \cong V_1 \oplus \cdots \oplus V_N$的子丛，– 对每个 $b \in B$、每个 $i \in [N]$和每个 $x_{-i} \in E_{-i}$，$\theta_i^{(b)}(\cdot, x_{-i})$: $E_i \longrightarrow \mathbb{R}$都是拟凹的。

如果单项式 $e(V_1)^{\xi(N,k)} \cdots e(V_N)^{\xi(N,k)}$ 属于$\mathbb{F}p$ 向量丛 $V_1, \ldots, V_N$ 的欧拉类，并且它在上同调 $H^*(B;\mathbb{F}p)$中不为零，那么存在一个参数 $b \in B$，使得族 $\mathcal{E}/B$ 中的非合作博弈 $\mathcal{E}^{(b)}$ 具有一个 k-边性纳什均衡。这里， $\xi(N,k)$ 表示 ***Kneser***图 $K(N,k)$上的团覆盖数。

正如前一个推论所示，对于我们的核心结果之一——定理6.8，参数空间上的条件涉及Kneser图 $\xi(N,k)$ 上的团覆盖数 $K(N,k)$，其中 N 是玩家人数，而 k 是纳什均衡的边性。这个数源于多边情形下最佳回应对应的结构，实际上是对 $k = 1$情形中一个近乎显而易见的现象的自然推广：Kneser图 $K(N,1)$ 是完全图，因此其团覆盖数为 1，这正是经典情形下非合作博弈只有一个“全局”最佳回应对应的原因。

最后，我们展示所引入概念和所确立存在性结果的两个应用。第一个应用从这样一个观察出发：所有 N人有限博弈构成一个单一的博弈族。随后我们证明，多方均衡确实会出现，而且并不少见：3人博弈族中包含无穷多个具有2方均衡的博弈。

第二个应用致敬了博弈论在经济学中的历史起源，并与诺贝尔奖得主肯尼斯·阿罗和 G´érard Debreu 的著名研究密切相关。他们成果的一大亮点，是将三种彼此不同的经济理论统一起来；在他们之前，这些理论通常被 [17, 5]分别研究：消费者理论、生产者理论，以及国家政策。在阿罗和 Debreu 的模型中，国家承担着一项特殊任务：确定商品价格，使经济中的贸易达到最大化。国家被建模为另一个由利益驱动的玩家，与所有生产者和消费者公平竞争。阿罗和 Debreu 将他们创建的模型命名为“抽象经济”，此名称后来也用于指代抽象经济，也称为广义纳什均衡问题。他们的成果首次证明了一个——或者更确切地说，是这个——抽象经济的纳什均衡存在性。这个抽象经济。

我们的例子在很大程度上受到原始抽象经济的启发，同时也将消费者与生产者的经典理论联系起来。然而，我们也关注多边纳什均衡的存在性，因为它们在经济中具有非常自然的解释：在一个 k阶方纳什均衡中，任何由 k 名参与者组成的群体都无法获得任何利润。因此，如果国家能够实现高阶方均衡，它就可以确信，任何理性的生产者或消费者群体都不会偏离该均衡全局策略。这正是高阶方纳什均衡对国家而言可取的原因：它确保了稳定性、可预测性，以及对越来越大的参与者群体偏离行为的韧性。

与Arrow和Debreu不同，我们采用一种更为传统但也更为现实的假设，即市场价格由消费者和生产者的行为决定，而不是假定它们由国家固定。对于价格，我们使用古诺竞争规则，该规则表明价格随供给增加而下降。就国家而言，我们则赋予它略有不同的任务：确保资源的可得性，并适当地规划生产。我们证明，在我们的模型中，只要有足够的生产可能性和足够的可用资源，国家就有可能创造一个具有任意高阶方纳什均衡的经济。因此，在这些条件下，不仅存在均衡，而且它还可以任意地稳定且具有韧性。

最后，本文新引入的概念揭示了一些重要而复杂的开放问题，这些问题与多个领域的研究密切相关，过去尚无法对此进行研究。

第1. 多边纳什均衡

本节将正式引入一个新概念： k人非合作博弈中的 N边纳什均衡，其中 $1 \leq k \leq N$ 为整数。类似的概念甚至也可以引入抽象经济和重复博弈的背景下。起初，我们选择最简单的设置，以便聚焦于这一新概念的重要性，同时避免非合作博弈推广形式所带来的复杂性。之后我们将讨论这些推广形式。

1. 定义与基本性质

我们首先介绍非合作博弈的概念，并回顾纳什均衡的定义。更多详情请参阅，例如 [20, 第4节。1]。

定义 1.1. 设 $N \geq 1$ 为一个整数。一个 N人非合作博弈， $\mathcal{E} = (E_i, \theta_i : 1 \leq i \leq N)$由以下数据给出

– 一组 N（度量）空间 $(E_1, \ldots, E_N)$，其中 $E := E_1 \times \cdots \times E_N$，以及
– 一个连续函数 $\theta_i : E \to \mathbb{R}$ for all $i \in \{1, \ldots, N\}$，称为 i 的收益函数（或效用函数）。

Selection of 2 (compact) sets, where 续的 functions, 相应的博弈称为完备博弈。

通常， N 表示参与者的数量， E_i 称为第 i个参与者的策略集合， θ_i 则称为参与者 i的利润或效用函数 。乘积 E 称为全局策略集合。

研究非合作博弈的核心问题之一，是理解所谓的博弈纳什均衡。我们从完整的定义开始。

定义 1.2。 设 $N \geq 1$为整数，且设 $\mathcal{E} = (E_i, \theta_i : 1 \leq i \leq N)$ 为一个 N玩家非合作博弈。全局策略 $x = (x_1, \ldots, x_N) \in E$是该博弈的纳什均衡 $\mathcal{E}$，如果对于每个 $1 \leq i \leq N$ 都有

$$\theta_i(x) = \sup\{\theta_i(x') : x' \in \{x_1\} \times \cdots \times \{x_{i-1}\} \times E_i \times \{x_{i+1}\} \times \cdots \times \{x_N\}\},$$

或等价地，对所有 $y_i \in E_i$

$$\theta_i(x) \geq \theta_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_N) =: \theta_i(y_i, x_{-i}).$$

博弈 $\mathcal{E}$ 的所有纳什均衡组成的集合记为 $\mathrm{Neq}(\mathcal{E})$。

这里引入纳什均衡语境中的一个常用记号：若 $b \in A_1 \times \cdots \times A_n$、$1 \leq i \leq n$和 $a_i \in A_i$，则 $(a_i, b_{-i}) \in A_1 \times \cdots \times A_n$是由 b将第 i个坐标替换为 a_i后得到的 n元组。因此 $(a_i, b_{-i}) := (b_1, \ldots, b_{i-1}, a_i, b_{i+1} \ldots, b_N)$。

用语言重述先前的定义，纳什均衡是博弈的一种状态：无论谁单方面改变自己的策略，都会遭受损失。这一定义可被视为一种强

有力论据，促使参与者选择与纳什均衡相一致的策略。人们知道，使自己的策略偏离纳什均衡将导致损失。

总而言之，传统上，对 N 人非合作博弈的研究，其核心问题被明确表述如下:

问题 1.3. 设 $N \geq 1$ 是一个整数，且 $\mathcal{E} = (E_i, \theta_i : 1 \leq i \leq N)$ 是一个 N 人非合作博弈。

(A) 博弈 $\mathcal{E}$ 是否存在纳什均衡? 换言之，Neq($\mathcal{E}$) 是否为 $\neq \emptyset$? (B) 如果博弈 $\mathcal{E}$ 存在均衡，那么关于空间 Neq($\mathcal{E}$) $\subseteq E$，我们能说些什么? 它的拓扑、几何、可能的代数结构是什么? 若其为有限集，它的基数是多少?

大多数经典研究以及当前的研究前沿，都集中于研究单边改变，以及对这些改变具有抵抗力的均衡。一个自然的问题是：是否存在能够抵抗参与者策略多方改变的均衡? 为将这一问题形式化，我们引入 k 方纳什均衡的概念。

定义 1.4。设 $N \geq 1$ 和 $1 \leq k \leq N$ 为整数，且设 $\mathcal{E} = (E_i, \theta_i : 1 \leq i \leq N)$ 为一个 N 玩家非合作博弈。全局策略 $x = (x_1, \ldots, x_N) \in E$ 是该博弈的 k-侧纳什均衡，如果对于 k 的每个元素子集 $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \in \binom{[N]}{k}$ （其中 $[N]$）以及每个指标 $i \in I$，都有

$$\theta_i(x) = \sup\big\{\theta_i(x') : x' \in \{x_1\} \times \cdots \times \{x_{i_1-1}\} \times E_{i_1} \times \{x_{i_1+1}\} \times \cdots \times \{x_{i_k-1}\} \times E_{i_k} \times \{x_{i_k+1}\} \times \cdots \times \{x_N\}\big\}.$$

不失一般性，我们假设 $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N$。等价地说，对于所有的 $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}) \in E_{i_1} \times \cdots \times E_{i_k}$ 和所有 $i \in I$， x 是一个 k-侧纳什均衡。

$$\theta_i(x) \geq \theta_i(x_1, \ldots, x_{i_1-1}, y_{i_1}, x_{i_1+1}, \ldots, x_{k_1-1}, y_{k_1}, x_{k_1+1}, \ldots, x_N) =: \theta_i(y_I, x_{-I}).$$

博弈 $\mathcal{E}$ 的所有 k-侧纳什均衡的集合记为 Neq$_k$($\mathcal{E}$)。

这里我们进一步说明此前引入的记号。对于 $b \in A_1 \times \cdots \times A_n$ 和 $I := \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq [n] := \{1, \ldots, n\}$，我们记作 $b_I := (b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}) \in A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_k} =: A_I$。这很好地扩展了常用记号，因为 $b_{\{i\}} = (b_i) \in A_i$。接着，对于 $b_I \in A_I$，我们记作

$$(b_I, a_{-I}) := (a_1, \ldots, a_{i_1-1}, b_{i_1}, a_{i_1+1}, \ldots, a_{i_k-1}, b_{i_k}, a_{i_k+1}, \ldots, a_N).$$

请注意，我们默认 N 元组中各项的顺序保持不变。这个记号在整篇手稿中都会派上用场。

显然，每个 k 方纳什均衡本身也是纳什均衡。更一般地说，所有纳什均衡的集合存在一个递降滤过:

$$\mathrm{Neq}(\mathcal{E}) = \mathrm{Neq}_1(\mathcal{E}) \supseteq \mathrm{Neq}_2(\mathcal{E}) \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Neq}_N(\mathcal{E}). \tag{1}$$

显然，高阶多方纳什均衡越来越少见，因此上述滤过从某一项开始可能为空。另一方面，如果该滤过并非平凡，则博弈对于多个参与者可能合作以实现其他更理想结果的情形，具有更高的稳定性。

2. 多方均衡示例

为了说明多方均衡的性质，我们介绍几个具有经典动机的非合作博弈。第一个例子中的非合作博弈将存在一个（$N-1$）方均衡，但不存在 N 方均衡。

例2.1。考虑以下博弈，由名为 A、B_1、……、B_{N-1} 的 N位参与者进行，策略空间为 $E_A = E_{B_1} = \cdots = E_{B_{N-1}} = [0,1]$。按照惯例，设 $E := E_A \times E_{B_1} \times \cdots \times E_{B_{N-1}}$，因此在本例中，$E = [0,1]^N$ 是一个 N维立方体。用 $a \in E_A$ 表示参与者 A的选择，用 $b_i \in E_{B_i}$ 表示参与者 B_i的选择。现在，

– 玩家 B_i的收益函数就是投影函数:

$$\theta_{B_i}\colon E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (a, b_1, \ldots, b_{N-1}) \longmapsto b_i,$$

– 玩家 A 的收益函数是一个截断投影函数，定义如下:

$$\theta_A\colon E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (a, b_1, \ldots, b_{N-1}) \longmapsto \begin{cases} a, & \text{if } a + \max\{b_1, \ldots, b_{N-1}\} < 1, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

当 $N = 2$ 时，这个博弈本质上是对囚徒困境的一种单边重新表述。直观地说，我们可以把这个博弈想象成这样一种情形： A 是一名嫌疑人，而 B_i 正在提出针对 A 的证据。

这个博弈在 $(N-1)$-重均衡点 $(a, 1, \ldots\ldots, 1) \in E$ 处存在均衡。我们可以轻松验证其定义：如果只允许 $N-1$ 参与者改变策略，那么 A 要么无法改变自己的策略，而 B_i 没有改变的动机，因此会维持选择 $b_1 = \cdots = b_{N-1} = 1$；要么 A 也参与策略变更，此时至少有一名 B_i 没有机会将策略从 1 改掉，因此 A 无法增加自己的利润。然而，如果允许所有 N 参与者改变策略，那么就存在一些策略，使 A 能够改善自己的处境。

这在某种程度上反映了一个相当明显的现实：同时影响越来越多的证人，会变得越来越困难。

第二个例子是一个简单的多数投票模型，其灵感来自Drew Fudenberg和Jean Tirole于1991年出版的经典著作 [15], ，而且它也存在多方均衡。

例2.2。 假设有奇数个参与者 $N = 2n+1$，标记为 $\{1, \ldots, N\}$，他们投票选出其中一人担任领导者，因此 $E_i = \{1, \ldots, N\}$，其中 $1 \le i \le N$。得票最多的候选人当选领导者；若出现平票，则得票最多者中标签最小的人当选。平局判定规则相当随意，但不会影响我们即将给出的结论。很自然地，可以假设每位候选人都希望自己当选领导者，并且对其他候选人则没有偏好。更明确地说，利润函数定义如下

$$\theta_i(j \text{ elected as leader}) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

将当选领导者解释为博弈的结果后，我们看到每一种可能的结果都是纳什均衡结果，也就是说，每位候选人都可能在某个纳什均衡（策略）中当选。然而，并非所有全局策略都是纳什均衡。例如，由 $x_1 = \cdots = x_{n+1} = 2$ 和 $x_{n+2} = \cdots = x_{2n+1} = 1$ 给出的全局策略 x 不是纳什均衡，因为参与者1可以改为投票给自己来增加其利润，从而获得多数选票。

作为纳什均衡的一个例子，全局策略 $x = (1, \ldots\ldots, 1) \in E$ 是纳什均衡。事实上，它还是一个 n 阶纳什均衡，因为无论哪 n 位参与者改变其选票，都无法改变 $N = 2n+1$ 票的多数，因此无法改变博弈的结果，当然也就无法增加其利润函数。当然， $n+1$ 阶或更高阶纳什均衡并不存在，因为 $n+1$ 位参与者将拥有多数选票，但由于偏好不同，他们无法就选出哪位领导者达成一致。

然而，也存在边性较低的纳什均衡。例如，由$x_1 = \cdots = x_{n+2} = 1$和 $x_{n+3} = \cdots = x_{2n+1} = n+2$给出的全局策略 x 是1-侧向纳什均衡，但不是2-侧向纳什均衡。在这种情况下，任何单个策略变更都不会改变当选领导者；但是，如果玩家 $n+2$ 和另一名玩家将其选票改投给 $n+2$，那么他就会获得多数。一般而言，参与者之间的一致意见越高，均衡的边性就越高。

这反映了一个显而易见的现象：由很大比例的选民选出的官员很可能会长期保持当选状态。若要替换一位广受支持的现任者，就需要大量选民共同改变其选票——这正好体现了纳什均衡更高的边性。

因此，在这里，多边纳什均衡的滤过在我们的模型中有直接体现。

我们的最后一个例子是所谓的古诺竞争，以法国经济学家奥古斯丁·古诺命名，它凸显了参与者之间的对抗如何阻碍双边纳什均衡的存在。我们的阐述基于1958年的经典著作《微观经济理论》（James M. Henderson与Richard E. Quandt著） [17]。

例2.3. 考虑一个由 N 家生产相同同质资源的企业构成的寡头垄断。假设每家企业 $i \in [N]$ 可以选择一个生产水平 $x_i \in [0,\infty)$，因此 $E_i := [0,\infty)$。市场价格由总供给的某个单调递减函数决定，设$p\colon\ [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$是一个严格单调递减函数。相应地，各企业的利润由下式给出

$$\theta_i(x) = \underbrace{x_i \cdot p(x_1 + \cdots + x_N)}_{\text{revenue}} - \underbrace{c_i(x_i)}_{\text{costs}},$$

其中 $c_i\colon\ [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ 是企业特定的成本函数，表示生产相应企业的同质资源所产生的生产成本。

换言之，古诺竞争可以概括如下：每家企业都希望尽可能多地出售该资源，但供给增加会压低销售价格。

为简化我们的分析，我们将仅限于 $N = 2$ 的情形，并采用如下给出的非常简单的价格函数和成本函数

$$p(x) = 100 - \frac{1}{2}x, \qquad c_1(x_1) = 5x_1, \qquad c_2(x_2) = \frac{1}{2}x_2^2.$$

于是，两名参与者的利润可以显式计算为

$$\theta_1(x_1,x_2) = 95x_1 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1x_2, \qquad \theta_2(x_1,x_2) = 100x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2 - x_2^2.$$

我们在对手的策略保持不变的条件下，通过最大化利润函数来计算每位玩家对其对手策略的最佳响应。为此，我们使用一阶必要条件。

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial x_1}(x_1,x_2) = 0, \qquad \frac{\partial\theta_2}{\partial x_2}(x_1,x_2) = 0,$$

即

$$95 - x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0, \qquad 100 - \frac{1}{2}x_1 - 2x_2 = 0.$$

将第一位玩家对 x_2 的最佳响应记为 $\Phi_1(x_2)$，相应地，将第二位玩家的最佳响应记为 $\Phi_2(x_1)$，我们得到

$$\Phi_1(x_2) = 95 - \frac{1}{2}x_2, \qquad \Phi_2(x_1) = 50 - \frac{1}{4}x_1.$$

求解线性方程组并检验二阶导数条件后可知，存在唯一的纳什均衡 $x^* = (x_1^*,\ x_2^*) = (80,\ 30)$，并且

$$p(x_1^*,x_2^*) = 45, \qquad \theta_1(x_1^*,x_2^*) = 3200, \qquad \theta_2(x_1^*,x_2^*) = 900.$$

现在我们来考虑这个纳什均衡是否也是双边均衡。我们计算其余的偏导数：

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{2}x_1, \qquad \frac{\partial\theta_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{2}x_2.$$

在均衡点 $x^* = (80,30)$ 处，偏导数均为负，因此两个参与者都希望对方减少生产。因此，该均衡点不是双边均衡，因为双方通过双边改变策略都能获得更高的收益。例如，对于参与者1，全局策略 $(y_1, y_2) = (95, 0)$ 会带来利润 $\theta_1(y_1, y_2) = 4512.5$，这高于均衡利润3200。因此，古诺竞争不存在双边纳什均衡。

这凸显了一个常见现象：只要有两位利益相悖的玩家，就不存在双边均衡，这意味着他们永远无法达成双边协议。

3. 从多边纳什均衡到多个重合

我们以研究非合作博弈的经典框架为基础，迈出发展多边纳什均衡理论的初步步伐。

3.1. 最佳回应对应与均衡的存在性。

研究非合作博弈的一个基本对象是所谓的最佳回应对应，它是一种集值映射，用于描述每位参与者针对对手任何可能策略所作出的最优回应。关于集值映射分析的背景知识，可参阅 Aubin 和 Frankowska 的经典著作 [4]。在本节中 $N \geq 1$ 是一个整数，且 $\mathcal{E} := (E_i, \theta_i : 1 \leq i \leq N)$是一个非合作博弈。我们先回顾经典语境中的若干定义。

定义 3.1. 玩家 i 边际函数（其中 $1 \leq i \leq N$）定义如下：

$$\begin{aligned} \phi_i \colon E = E_1 \times \cdots \times E_N &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \\ x = (x_1, \ldots, x_N) &\longmapsto \sup\{\theta_i(y_i, x_{-i}) : y_i \in E_i\}. \end{aligned}$$

通常假设利润函数 θ_i 是有界实函数，此时边际函数 $\phi_i \colon E \longrightarrow \mathrm{R}$ 也是实函数。

定义 3.2. 玩家 i 最佳回应对应（其中 $1 \leq i \leq N$）定义如下：

$$\begin{aligned} \Phi_i \colon E = E_1 \times \cdots \times E_N &\longrightarrow 2^{E_i}, \\ x = (x_1, \ldots, x_N) &\longmapsto \{y_i \in E_i : \theta_i(y_i, x_{-i}) = \phi(x_1, \ldots, x_N)\}. \end{aligned}$$

我们将各参与者的最佳回应对应 Φ_i 汇总为整个博弈的（全局）最佳回应对应：

$$\Phi \colon E \longrightarrow 2^E, \qquad x \longmapsto \Phi_1(x) \times \Phi_2(x) \times \cdots \times \Phi_N(x). \tag{2}$$

一项最重要的经典结果表明，非合作博弈的纳什均衡恰好是其最佳回应对应的不动点。

定理 3.3. 全局策略 $x \in E$ 是纳什均衡，当且仅当 $x \in \Phi(x)$；换言之，它是最佳回应对应 Φ 的不动点。

我们将证明这一结果关于多方均衡的一个推广，其中该定理是一个特例。

在本节余下部分，令 k 为满足 $1 \leq k \leq N$的整数。定义k方边际函数时需要格外谨慎。与之前一样，$\mathcal{E} = (E_i, \theta_i : 1 \leq i \leq N)$ 是一个固定的非合作博弈。

定义 3.4。 令 $I \in \binom{[N]}{k}$ 为 k 个参与者的一个子集。参与者 I 的 k方边际函数 定义为

$$\begin{aligned} \phi_I \colon E = E_1 \times \cdots \times E_N &\longrightarrow (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^I, \\ x = (x_1, \ldots, x_N) &\longmapsto (\sup\{\theta_i(y_I, x_{-I}) : y_I \in E_I\})_{i \in I}, \end{aligned}$$

其中 $E_I := \prod_{i \in I} E_i$. 对于 $\phi_I(x_1, \ldots, x_N)$ 的第 i 个坐标，我们记作 $\phi_I(x_1, \ldots, x_N)_i$其中$i \in I$。

与经典边际函数的一个重要区别在于， ϕ_I 现在取值于 $(\mathbf{R}\cup\{\infty\})^I$，而不是单个实数或无穷大。这是因为不存在对任何特定玩家的偏好。尽管如此，这并不会使最佳回应对应的定义变得复杂。

定义 3.5。 设 $I \in \binom{[N]}{k}$ 是 k 个参与者的子集。参与者 I 的 k-边最佳回应对应定义为

$$\begin{aligned}\Phi_I \colon E = E_1 \times \cdots \times E_N &\longrightarrow 2^{E_I},\\ x = (x_1, \ldots, x_N) &\longmapsto \big\{y_I \in E_I : (\forall i \in I)\ \theta_i(y_I, x_{-I}) = \phi_I(x_1, \ldots, x_N)_i\big\}.\end{aligned}$$

有了这个定义，我们现在可以陈述定理 3.3 关于多边纳什均衡的推广。

定理 3.6。 考虑以下集值映射：

$$F \colon E \xrightarrow{\Delta} \prod_{I\in\binom{[N]}{k}} E \xrightarrow{\prod \Phi_I} \prod_{I\in\binom{[N]}{k}} 2^{E_I}, \quad x \longmapsto (x)_{I\in\binom{[N]}{k}} \longmapsto \big(\Phi_I(x)\big)_{I\in\binom{[N]}{k}},$$

$$G \colon E \xrightarrow{\Delta} \prod_{I\in\binom{[N]}{k}} E \xrightarrow{\prod \pi_I} \prod_{I\in\binom{[N]}{k}} 2^{E_I}, \quad x \longmapsto (x)_{I\in\binom{[N]}{k}} \longmapsto \big(\{\pi_I(x)\}\big)_{I\in\binom{[N]}{k}}.$$

这里， $\Delta\colon E \longrightarrow \prod_{I\in\binom{[N]}{k}} E$ 是对角嵌入，而映射 $\pi_I\colon E \longrightarrow E_I$ 是由集合 I确定的相应因子上的典范投影。

全局策略 $x \in E$ 是 $\mathcal{E}$ 的 k-边纳什均衡，当且仅当 $F(x) \cap G(x) \neq \emptyset$。

证明。 假设 $x \in E$ 是一个 k方纳什均衡。根据定义，对于所有 $I \in \binom{[N]}{k}$、所有 $i \in I$ 以及所有 $y_I \in E_I$，我们有

$$\theta_i(x) \;=\; \sup\Big\{\theta_i(y_I, x_{-I}) : y_I \in E_I\Big\},$$

或者等价地，根据边际函数的定义 ϕ_I

$$\theta_i(x) = \phi_I(x)_i.$$

由于玩家 $i \in I$ 是任意的，我们有

$$(\theta_{i_j}(x))_{i_j\in I} = \phi_I(x) \in (\mathbb{R}\cup\{\infty\})^I.$$

现在，利用 Φ_I 的定义，我们得出

$$x_I = \pi_I(x) \in \Phi_I(x),$$

这正是所要证明的。上述所有论证都可以反向进行，因此我们证明了该定理的断言。□

注意，在 $k = 1$ 的情形下，前一定理中的集值映射 G 变为$G(x) = \{x\}$，因此它由恒等映射 $\mathrm{Id}\colon E \longrightarrow E$所诱导，这意味着该定理的陈述恰好归结为定理3.3。

前一 个定理可以换一种说法：存在一一对应 e

$$\mathrm{Neq}_k \;\longleftrightarrow\; \mathrm{Graph}(F) \cap \mathrm{Graph}(G)$$

关系，将 k 边纳什均衡与 $\mathcal{E}$ 中 F 的图和对角线 G的交集中的元素对应起来。

还有另一种定义多边最佳回应对应的方法，这次它为策略 $x \in E$ 成为 k边纳什均衡提供了一个同时不动点判据。考虑对多边最佳回应对应作如下修改

$$\overline{\Phi}_I \colon E \longrightarrow 2^E, \quad x \longmapsto \{(y_I, z_{-I}) \in E \colon z_{-I} \in E_{-I},\ \theta_I(y_I, x_{-I}) = \phi_I(x)\}.$$

现在，所有修改后的最佳回应对应 Φ_I 的定义域和陪域都相同，因此可以推导出同时不动点存在性判据。

定理 3.7。 $\mathcal{E}$ 的 k方纳什均衡是满足以下条件的点 $x \in E$： x 同时是所有 Φ_I 的不动点，其中 $I \in \binom{[N]}{k}$。

证明。假设 $x \in E$ 是一个 k-方纳什均衡。等价地，对于所有 $I \in \binom{[N]}{k}$、所有 $i \in I$和所有 $y_I \in E_I$，都有 $\theta_i(y_I, x_{-I}) \leq \theta_i(x_I, x_{-I})$。再次如定义 1.4 所示，这等价于 $\theta_i(x_I, x_{-I}) = \sup\{\theta_i(y_I, x_{-I}) : y_I \in E_I\}$。由于这对所有 $i \in I$都成立，根据 ϕ_I的定义可得 $\theta_I(x_I, x_{-I}) = \phi_I(x)$。但根据 Φ_I的定义，我们有

$$x = (x_I, x_{-I}) \in \{(y_I, z_{-I}) \in E : z_{-I} \in E_{-I},\ \theta_I(y_I, x_{-I}) = \phi_I(x)\} = \overline{\Phi}_I(x),$$

对于所有 $I \in \binom{[N]}{k}$，证明完毕。 □

推论 3.8. 假设采用此前引入的记号： $\mathcal{E}$ 的 A k-方纳什均衡存在，当且仅当

$$\Delta(E \times E) \cap \bigcap_{I \in \binom{[N]}{k}} \mathrm{Graph}(\overline{\Phi}_I) \neq \emptyset.$$

这里 $\Delta(E \times E) := \{(x, x) : x \in E\}$ 是 $E \times E$ 中的对角线。

请注意，对于 $k = 1$，表达式 $\bigcap_{I \in \binom{[N]}{k}} \mathrm{Graph}(\Phi_I)$ 恰好还原了经典最佳反应对应 $\mathrm{Graph}(\Phi)$ 的图。因此，在这种情况下，前一个推论表述为：当且仅当 $\Delta(E \times E) \cap \mathrm{Graph}(\Phi) \neq \emptyset$ 时，存在纳什均衡。

3.2. **凸性与上半连续性**。我们在凸性假设成立的条件下分析最佳回应对应 Φ_I，该对应在定义 3.5中引入。我们首先回顾一个经典引理，其证明可见于经典文献。为求完整，我们在此给出证明。

引理 3.9。设 $K \subseteq X$ 是赋范（实向量）空间 X 的一个紧凸子集，并且 $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ 是连续拟凹函数。那么集合

$$M_f := \mathrm{argmax}(f) := \left\{x \in K : f(x) = \max\{f(x') : x' \in K\}\right\}$$

是凸的。

证明。 任取两个点 $y_1, y_2 \in M_f$ 以及任意一个 $0 \leq t \leq 1$。令 $y_t = (1-t)y_1 + ty_2$ 为 y_1 和 y_2的凸组合。 K 的凸性意味着 $y_t \in K$。另一方面，根据定义， f的拟凹性推出 $f(y_t) \geq \min\{f(y_1), f(y_2)\}$。由于 M_f被定义为 f和 $y_1, y_2 \in M_f$的最大值集合，因此必有 $y_t \in M_f$。所以， M_f是凸的。□

我们可以利用这个引理证明最佳回应对应的以下性质。这是对经典最佳反应对应中相同引理的推广；该引理常被用作证明非合作博弈中经典纳什均衡存在性的关键步骤。

引理 3.10。 设 $\mathcal{E} = (E_i, \theta_i : 1 \leq i \leq N)$ 是一个非合作博弈，其中所有策略空间E_i 都是赋范空间中的紧子集，且所有收益函数 θ_i 都是拟凹的。那么，对所有 $I \subseteq N$，最佳回应对应 Φ_I 都是凸值的。

证明。 根据 Φ_I 和 ϕ_I 的定义可知

$$\begin{aligned}
\Phi_I(x_1, \ldots, x_N) &= \left\{y_I \in E_I : (\forall i \in I)\ \theta_i(y_I, x_{-I}) = \phi_I(x_1, \ldots, x_N)_i\right\} \\
&= \bigcap_{i \in I} \left\{y_I \in E_I : \theta_i(y_I, x_{-I}) = \phi_I(x_1, \ldots, x_N)_i\right\} \\
&= \bigcap_{i \in I} \left\{y_I \in E_I : \theta_i(y_I, x_{-I}) = \sup\{\theta_i(y_I, x_{-I}) : y_I \in E_I\}\right\} \\
&= \bigcap_{i \in I} \mathrm{argmax}\, \theta_i(\cdot, x_{-I}).
\end{aligned}$$

在最后一步中，我们使用了如下记号 $\theta_i(\cdot,\ x_{-I})$ 表示函数 $E_I \longrightarrow \mathbb{R}$，其定义为 $y_I \longmapsto \theta_i(y_I,\ x_{-I})$；由于根据假设，$\theta_i$ 是拟凹的，因此该函数也是拟凹的。现在，根据引理 3.9，每个集合 $\operatorname{argmax}\theta_i(\cdot,\ x_{-I})$ 都是凸集，因此它们的交集 $\Phi_I(x_1,\ \ldots,\ x_N)$ 必定是凸集。□

接下来我们讨论最佳回应对应的半连续性，再次仿照非合作博弈的经典结果。下面我们将使用Claude Berge于1959年提出的著名最大值定理，并在此加以陈述。关于证明以及集值映射的背景概念，可参见例如Frankowska与Aubin关于集值分析的经典著作 [4, 定理17.31]。亦可对照Berge 1997年的论文 [6, 第VI.3章，定理 1]。

定理 3.11. 设 X 与 Y 为度量空间，实值函数 $f\colon X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ 连续，且设 $F\colon X \longrightarrow 2^Y$ 为严格的、紧值的、既下半连续又上半连续的集值映射。则

(1) 边际函数 $\varphi\colon X \longrightarrow R$ 由 $\varphi(x) := \max\{f(x,y) :\ y \in F(x)\}$ 定义，且连续；*(2)* 边际集值映射 $\Phi\colon X \longrightarrow 2^Y$ 由 $\Phi(x) := \{y \in F(x) :\ f(x,y) = \varphi(x)\}$ 给出，且上半连续并且严格。

集值分析的另一个经典结果是所谓的闭图引理。证明参见 Aubin 和 Frankowska 的经典著作 [4, Thm.17.11]。

引理 3.12. 设 $F\colon X \longrightarrow 2^Y$ 为一个集值映射。若 F 是闭值的、上半连续的，且在 X 中具有闭定义域，那么其图 $\operatorname{Graph}(F)$ 在 $X \times Y$ 中是闭的。此外，若 Y 是紧的，则该结论是一个等价命题。

利用 Berge 最大值定理（定理 3.11）和闭图引理（引理 3.12），我们可以证明以下关于多边最佳回应对应的引理。

引理 3.13。 设 $\mathcal{E} = (E_i, \theta_i :\ 1 \le i \le N)$ 是一个非合作博弈，且所有策略空间 E_i 都是紧度量空间。那么，对于所有 $k \in [N]$ 和所有 $I \in \binom{[N]}{k}$，最佳回应对应 Φ_I 是上半连续的集值映射。

证明。 回顾 Φ_I 的定义：

$$\Phi_I(x) = \big\{y_I \in E_I : (\forall i \in I)\ \theta_i(y_I, x_{-I}) = \phi_I(x_1, \ldots, x_N)_i\big\}.$$

与前一个证明一样，我们等价地有

$$\Phi_I(x) = \bigcap_{i \in I} \big\{y_I \in E_I : \theta_i(y_I, x_{-I}) = \phi_I(x_1, \ldots, x_N)_i\big\}.$$

为便于记号，对于 $i \in I$，简写如下

$$\Phi_{I,i}(x) := \big\{y_I \in E_I : \theta_i(y_I, x_{-I}) = \phi_I(x_1, \ldots, x_N)_i\big\}.$$

因此，$\Phi_I(x) = \bigcap_{i \in I} \Phi_{I,\,i}(x)$，特别是 $\operatorname{Graph}(\Phi_I) = \bigcap_{i \in I} \operatorname{Graph}(\Phi_{I,\,i})$。现在考虑连续函数

$$\theta_i(\cdot, x_{-I})\colon E_I \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad y_I \longmapsto \theta_i(y_I, x_{-I}).$$

我们如下应用 Berge最大值定理。为此，按照定理 3.11 中的记号，令 $X = E$、$Y = E_I$ 和 $f = \theta_i(\cdot,\ x_{-I})$。映射 $F\colon E \longrightarrow 2^{E_I}$ 是常值集值映射 $x \longmapsto E_I$，其图为 $\operatorname{Graph}(F) = E \times E_I$，显然它是连续且紧值的。将这些选择代入定理 3.11 中边际函数和边际对应的定义，我们得到 $\theta_i(\cdot,\ x_{-I})$ 的边际函数恰好是 $\phi_I(x_1,\ \ldots,\ x_N)_i$，而边际对应确实是 $\Phi_{I,\,i}$。因此，$\Phi_{I,\,i}$ 是上半连续的。

由引理 3.12 可知 $\operatorname{图}(\Phi_{I,i}) \subseteq E \times E_I$ 是闭集。由于闭集的交集仍为闭集，$\operatorname{图}(\Phi_I) = \bigcap_{i \in I} \operatorname{图}(\Phi_{I,i})$ 也为闭集。再次使用引理 3.12，我们得到 Φ_I 是上半连续的，这正是我们要证明的结论。□

3.3. **Nikaido–Isoda 函数与均衡的存在性。** 研究非合作博弈，尤其是抽象经济时，一个有用的工具是所谓的 Nikaido–Isoda 函数。该函数最早由 Hukukane、Nikaido 和 Kazuo Isoda 于 1955年在其论文 [18] 中提出。我们无需考察一族边际函数并推导出一族最佳响应对应，而是可以通过理解 Nikaido–Isoda 函数的边际函数，确定非合作博弈甚至抽象经济的均衡。

我们先回顾经典理论，然后介绍一种修改方法，使其能够推广到多边纳什均衡。本节中，我们也沿用此前表示非合作博弈的记号 $\mathcal{E} := (E_i,\ \theta_i\colon\ 1 \le i \le N)$。

定义 3.14. 非合作博弈 $\mathcal{E}$ 的*Nikaido–Isoda*函数定义为

$$\begin{aligned}\Psi_c\colon E \times E &\longrightarrow \mathbb{R},\\ (x,y) &\longmapsto \sum_{i\in[N]} \left(\theta_i(y_i, x_{-i}) - \theta_i(x_i, x_{-i})\right).\end{aligned}$$

我们引入下标 Ψ_c，用于指代 Nikaido–Isoda 函数的经典定义，因为我们很快就需要对其进行修改，并将该修改记为 Ψ。在此之前，先介绍关于经典二阶堂–矶田函数的主要结果。

定理 3.15. 设 Ψ_c 为非合作博弈 $\mathcal{E}$ 的 *Nikaido–Isoda* 函数，并按通常方式定义与 Ψ_c 相关联的边际函数 V_c

$$\begin{aligned}V_c\colon E &\longrightarrow \mathbb{R}\cup\{\infty\},\\ x &\longmapsto \sup\left\{\Psi_c(x,y) : y \in E\right\}.\end{aligned}$$

当且仅当 $V_c(x) = 0$ 时，全局策略 $x \in E$ 是 $\mathcal{E}$ 的纳什均衡。

关于这一经典结果的证明，参见例如原始文献 [18]；对于抽象经济的情形，可参见例如 [14, 定理 1]。

我们旨在为多边纳什均衡的情形引入一种类似于 Nikaido–Isoda 函数的函数，使相应的定理 3.15 能够成立。为此，我们首先对经典二阶堂–矶田函数作出修正。

定义 3.16. 非合作博弈 $\mathcal{E}$ 的修正的西海道–矶田函数定义为：

$$\begin{aligned}\Psi\colon E \times E &\longrightarrow \mathbb{R},\\ (x,y) &\longmapsto \max_{i\in[N]} \left(\theta_i(y_i, x_{-i}) - \theta_i(x_i, x_{-i})\right).\end{aligned}$$

修正的 Nikaido–Isoda 函数也有类似于定理 3.15 的结果成立。

定理 3.17. 设 Ψ 是非合作博弈 $\mathcal{E}$ 的修正的西海道–矶田函数。按通常方式定义与 Ψ 相关联的边际函数：

$$\begin{aligned}V\colon E &\longrightarrow \mathbb{R}\cup\{\infty\},\\ x &\longmapsto \sup\{\Psi(x,y) : y \in E\}.\end{aligned}$$

当且仅当 $V(x) = 0$ 时，全局策略 $x \in E$ 是 $\mathcal{E}$ 的纳什均衡。

我们暂不证明前面的论断，因为事实证明它是接下来一个结果的特例——该结果是我们对多边纳什均衡的推广。为此，我们先引入多边二阶堂–矶田函数。

定义 3.18。 设 $N \ge 1$ 和 $1 \le k \le N$ 为整数，且 $\mathcal{E} = (E_i,\ \theta_i\colon\ 1 \le i \le N)$ 是一个 N 人非合作博弈。$\mathcal{E}$ 的 k-侧 *Nikaido–Isoda* 函数 定义为

$$\begin{aligned}\Psi_k\colon E \times E &\longrightarrow \mathbb{R},\\ (x,y) &\longmapsto \max_{I\in\binom{[N]}{k}} \max_{i\in I} \left(\theta_i(y_I, x_{-I}) - \theta_i(x_I, x_{-I})\right).\end{aligned}$$

引入 k-侧 Nikaido–Isoda 函数的概念后，我们可以表述对前述定理的推广。

定理 3.19. 令 Ψ_k 为非合作博弈 $\mathcal{E}$ 的 k 边 *Nikaido–Isoda* 函数。按通常方式定义与 Ψ_k 相关联的边际函数：

$$V_k\colon E \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{\infty\},$$
$$x \longmapsto \sup\{\Psi_k(x,y) : y \in E\}.$$

当且仅当 $V_k(x) =$ 时，全局策略 $x \in E$ 是 k 边纳什均衡 0.

证明。注意，对所有 $x \in E$，$V_k(x) \geq 0$。事实上，定义上确界 $\sup\{\Psi_k(x,y) : y \in E\}$ 时，$V_k(x)$ 的一个元素特别是 $\Psi_k(x,x)$，我们可以计算得

$$\Psi_k(x,x) = \max_{I\in\binom{[N]}{k}} \max_{i\in I} (\theta_i(x_I, x_{-I}) - \theta_i(x_I, x_{-I})) = \max_{I\in\binom{[N]}{k}} \max_{i\in I} 0 = 0.$$

因此，上确界 $V_k(x) \geq 0$ 必须至少 $\Psi_k(x,x) = 0$。

假设 $x \in E$ 是 k 边纳什均衡。那么根据定义，对于每个子集 $I \in \binom{[N]}{k}$、所有 $i \in I$ 以及所有 $y_I \in E_I$，都有

$$\theta_i(y_I, x_{-I}) \leq \theta_i(x_I, x_{-I}) \quad\Longleftrightarrow\quad \theta_i(y_I, x_{-I}) - \theta_i(x_I, x_{-I}) \leq 0.$$

因此，

$$\Psi_k(x,y) = \max_{I\in\binom{[N]}{k}} \max_{i\in I} (\theta_i(y_I, x_{-I}) - \theta_i(x_I, x_{-I})) \leq 0,$$

于是 $V_k(x) \leq 0$。结合前面的观察可知，$V_k(x) = 0$，正如所声称的 d.

反过来，假设对于某个 $x \in E$，$V_k(x) = 0$。换言之，

$$\sup\{\Psi_k(x,y) : y \in E\} = 0.$$

因此，对于每个 $y \in E$，都有

$$\Psi_k(x,y) = \max_{I\in\binom{[N]}{k}} \max_{i\in I} (\theta_i(y_I, x_{-I}) - \theta_i(x_I, x_{-I})) \leq 0.$$

所以特别地，对于所有 $I \in \binom{[N]}{k}$ 和所有 $i \in I$，都有 $\theta_i(y_I, x_{-I}) - \theta_i(x_I, x_{-I}) \leq 0$，或者等价地，$\theta_i(y_I, x_{-I}) \leq \theta_i(x_I, x_{-I})$，这正是 k-方纳什均衡 □ 的定义

特别要注意，定理3.19对 3.17 的推广是 $k = 1$。

我们已经指出，多边纳什均衡存在一个滤过，这意味着对于$1 \leq k < N$，$k+1$边纳什均衡的集合总是 k边纳什均衡集合的子集。我们在下面的引理中展示这一现象。

引理 3.20。 设 $1 \leq k < l \leq N$ 和 $x \in E$。则 $V_k(x) \leq V_l(k)$。

证明。我们声称，对于每个 $y \in E$，都存在 $y^* \in E$，使得 $\Psi_l(x,y^*) \geq \Psi_k(x,y)$。这意味着，$\{\Psi_k(x,y) : y \in E\}$中的每个元素都小于 $\{\Psi_l(x,y) : y \in E\}$中的某个元素，因此 $V_l = \sup\{\Psi_l(x,y) : y \in E\}$必定大于 $V_k(x) = \sup\{\Psi_k(x,y) : y \in E\}$。

事实上，令 $y \in E$ 为任意值，并考虑

$$\Psi_k(x,y) = \max_{I\in\binom{[N]}{k}} \max_{i\in I} (\theta_i(y_I, x_{-I}) - \theta_i(x_I, x_{-I})) \leq 0.$$

由于最大值有限，因此必定存在某个固定的 $i^* \in I^*$ 使其取到：

$$\Psi_k(x,y) = \theta_{i^*}(y_{I^*}, x_{-I^*}) - \theta_{i^*}(x_{I^*}, x_{-I^*}).$$

定义 $y^* \in E$ 为 $y^* := (y_{I^*}, x_{-I^*})$，并任取满足 $I^* \subseteq J$ 的 $J\in\binom{[N]}{l}$。注意，根据 y^* 的构造，我们便有 $(y^*_{I^*}, x_{-I^*}) = (y^*_J, x_{-J})$。由此，我们计算得

$$\Psi_l(x,y^*) = \max_{I\in\binom{[N]}{k}} \max_{i\in I} (\theta_i(y_I, x_{-I}) - \theta_i(x_I, x_{-I}))$$

$$\begin{aligned}&\geq \theta_{i*}(y_J^*, x_{-J}) - \theta_i(y_J^*, x_{-J})\\&= \theta_{i*}(y_{I^*}^*, x_{-I^*}) - \theta_i(y_{I^*}^*, x_{-I^*})\\&= \Psi_k(x, y),\end{aligned}$$

如所述。 □

回想一下， $V_k(x) \geq 0$ 以及定理 3.19。该定理指出， $x \in E$ 是一个 k边纳什均衡，当且仅当 $V_k(x) = 0$。若 $V_l \geq V_k$ 对于 $1 \leq k < l \leq N$成立，我们便可看到 $\mathrm{Neq}_k(\mathcal{E}) = \{x \in E\colon\ V_k(x) = 0\} \supseteq \{x \in E\colon\ V_l(x) = 0\} = \mathrm{Neq}_l(\mathcal{E})$，从而再次得到多边纳什均衡的滤过。

现在，我们沿用经典方法，引入与新定义的多边二阶堂–矶田函数相关联的最佳回应对应。我们再次从回顾经典方法开始。

定义3.21。 令 $\Psi_c\colon\ E \times E \longrightarrow \mathrm{R}$为 $\mathcal{E}$ 的经典二阶堂–矶田函数，其相关联的边际函数为 $V_c\colon\ E \longrightarrow \mathrm{R} \cup \{\infty\}$。*Nikaido–Isoda* 最佳回应对应 是如下集值映射

$$\begin{aligned}R_c\colon E &\longrightarrow 2^E,\\x &\longmapsto \{y \in E : \Psi_c(x, y) = V_c(x)\}.\end{aligned}$$

有趣的是，在这个经典情形中，我们刚刚重新得到与非合作博弈 $\mathcal{E}$相关联的最佳回应对应 $\Phi\colon\ E \longrightarrow 2^E$ 。

定理3.22。 在保留先前所作的假设和记号的前提下，对于所有全局策略$x \in E$ ，均有 $\Phi(x) = R_c(x)$。

关于这一事实的证明，参见 [7] 或 [8, 命题3。4]。简言之，在经典情形中，Nikaido 和 Isoda 方法并没有带来太多益处。我们很快就会看到，在多边情形下，这种情况会发生巨大变化。

因此，利用全局策略定理3.22和定理3.3 可立即推出$x \in E$ 是纳什均衡，当且仅当 x是对应 R_c的不动点，即$x \in R_c(x)$。

如前所述，定理3.22 不能推广到多边最佳回应对应，不过其推论的一个类似结论仍然成立。为此，我们将引入多边 Nikaido–Isoda 最佳回应对应；事实上，它现在不同于多边最佳回应对应。

定理 3.23. 设 $N \geq 1$ 与 $1 \leq k \leq N$ 为整数，并设 $\mathcal{E} = (E_i, \theta_i\colon\ 1 \leq i \leq N)$ 为一个 N 玩家非合作博弈。假设 Ψ_k 与 V_k 如上定义。 k 边 *Nikaido–Isoda* 最佳回应对应定义为

$$\begin{aligned}R_k\colon E &\longrightarrow 2^E,\\x &\longmapsto \{y \in E : \Psi_k(x, y) = V_k(x)\}.\end{aligned}$$

则全局策略 $x \in E$ 是 k 边纳什均衡，当且仅当 $x \in R_k(x)$。

证明。 假设全局策略 $x \in E$ 是一个 k 边纳什均衡。根据定理 3.19，这等价于等式 $V_k(x) = 0$。但这样一来， $V_k(x) = 0 = \Psi_k(x, x)$，因此 $x \in R_k(x)$，此由 R_k 的定义可得。

另一方面，假设 $x \in R_k(x)$。根据定义， $\Psi_k(x, x) = V_k(x)$，因此$V_k(x) = 0$。同样，定理 3.19 的等价性表明，现在 x 是一个 k方纳什均衡。

□

利用该定理，我们可以简化对 k方纳什均衡的搜索，因为我们无需寻找集值映射像的交集

$$F\colon E \longrightarrow \prod_{I\in\binom{[N]}{k}} 2^{E_I} \qquad \text{and} \qquad G\colon E \longrightarrow \prod_{I\in\binom{[N]}{k}} E_I,$$

来自 T 定理 3.6，我们只需寻找集值映射 $R_k\colon \quad E \longrightarrow 2^E$.

4. 备注

关于非合作博弈中的多方均衡，有几点值得一提。

4.1. 偏好关系。 本节引入的偏好关系是预序关系。我们讨论预序关系的一些一般性质。

ρ 是 A 上的预序，它是一种自反且传递的关系。它在 A 上定义了一个等价关系$\sim_\rho$ ：当且仅当 $a\rho b$ 且 $b\rho a$时， $a \sim_\rho b$ 。在此等价关系下，商集 $A/\sim_\rho$成为一个全序集。稍微滥用一下记号，若 $a\rho a'$，我们就令 $[a]\rho[a']$ ，其中 $[a]$ 表示元素 $a \in A$的等价类。这里， ρ 既表示 $A/\sim_\rho$上的序关系，也表示 A上的预序关系。

每个收益函数 $\theta_i\colon E \longrightarrow$ R都通过拉回构造在 E 上诱导出一个全预序 $\prec_i$ 。也就是说，对于 x, $y \in E$ ，我们令

$$x \prec_i y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \theta_i(x) \leq \theta_i(y).$$

请注意，可能出现 $x \prec_i y$ 且 $y \prec_i x$ ，但 $x \neq y$的情况。显然，不同的收益函数可能诱导出相同的预序。然而，整个博弈完全由这些预序($\prec_1$， ...， $\prec_N$)刻画。特别是， $x \in E$是否为一个 k方纳什均衡，仅取决于这些预序。

全预序的集合 ($\prec_1$、.....、 $\prec_N$) 在 E 上引入了一个额外的偏预序，定义如下

$$x \prec y \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall i \in [N])\ x \prec_i y.$$

偏预序 $\prec$ 进一步通过以下方式在 E 上诱导出一个等价关系

$$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \prec y \ \wedge\ y \prec x.$$

换言之，若 $x \sim y$ ，则所有参与者对策略 x 和 y 无差异；从利润函数的角度来看，这些策略实质上是相同的。注意，若此预序是全预序，则利润函数 (θ_1、.....、 θ_N) 实质上相同，也就是说，它们以相同的方式看待任意两种策略。因此，所有参与者的偏好都相同。

如果我们考虑带有商序关系的 $E/\sim$ ，就会发现 N-横向纳什均衡至多只有一个；此外，它还是由 $\prec$ 诱导的商序下的唯一最大元。事实上，假设 x 和 x' 是两个不同的 N-横向纳什均衡。由于 x 是一个 N-横向纳什均衡，因此特别有 $[x'] \prec [x]$；但 x' 也是一个 N-横向纳什均衡，所以 $[x] \prec [x']$。关系 $\prec$ 是由预序 $\prec$ 诱导的商序，因此根据反对称性可得 $[x] = [x']$。

如果相对于 $\prec$存在多个极大策略，那么它们就不是 N边纳什均衡，但它们是帕累托最优的。若想进一步了解从偏好关系的角度研究非合作博弈的方法，请参阅关于 纯交换经济的文献，例如可参阅Henderson和Quandt关于微观经济的经典著作，其中有入门介绍 [17] ，以及 Tatsuro Ichiishi的经典著作 [20]。

4.2. **Nikaido–Isoda 最佳回应对应**。 在定理3.23的判据中，我们已经证明，非合作博弈的 k 边纳什均衡是Nikaido–Isoda 最佳回应对应 R_k的不动点。我们在此重述其定义

$$\begin{aligned} R_k \colon E &\longrightarrow 2^E, \\ x &\longmapsto \{y \in E : \Psi_k(x,y) = V_k(x)\}. \end{aligned}$$

尽管这个判据看起来相当简单，但实际上，用经典方法验证并不容易。这主要是因为多边二阶堂–矶田函数 Ψ_k不具备许多方便的性质。如果假设利润函数 θ_i 连续且有界，那么函数 Ψ_k 也是连续且有界的，因为它是连续有界函数的最大值。最大值定理 3.11 进而可得， V_k 也是连续的，并且 R_k 是上半连续的。

遗憾的是，“良好性质”到此为止。比如，如果我们想使用经典的卡库塔尼不动点定理，就会遇到一个问题。首先，回顾一下卡库塔尼结果的表述。

定理 4.1. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 是欧几里得空间的一个非空、紧、凸子集。假设 $F\colon E \longrightarrow 2^E$ 是一个上半连续、凸值的集值映射。那么 F 有一个不动点。

现在，为了应用 Kakutani 不动点定理，我们需要 R_k 具有凸值，但事实上，它可能不具有凸值。经典二阶堂–矶田函数的通常论证依赖于这样的假设：利润函数 θ_i 是凹函数，并且按照定义3.14中的方式，通过求和定义的 Nikaido–矶田函数也是凹函数。

$$\begin{aligned} \Psi_c \colon E \times E &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x,y) &\longmapsto \sum_{i\in[N]} \left(\theta_i(y_i, x_{-i}) - \theta_i(x_i, x_{-i})\right), \end{aligned}$$

它是凹函数之和，因此也是凹函数。但凹函数的最大值未必是凹函数。

有人可能会问：为什么不也通过求和来表示多边二阶堂–矶田函数？因为这样一来，定理 3.19 中的关键结论就不成立：为了证明 $V_k(x) = 0$ 意味着 x 是一个 k边均衡，我们必须证明对任意 $I \in \binom{[N]}{k}$，都有：

$$\max_{i\in I} \left(\theta_i(y_I, x_{-I}) - \theta_i(x_I, x_{-I})\right) \leq 0.$$

但如果 Ψ_k 表示为这些项之和，就无法从总和中分离出这一项。因此，我们无法验证 x 确实是一个 k边均衡。定理3.23中 Nikaido–Isoda 最佳回应判据的证明依赖于这一定理。

第2 部分：非合作博弈族

5. 定义与基本性质

受阿蒂亚在其著作中对向量空间族的阐述启发，我们先以一种非常直观且朴素的方式定义非合作博弈族 [3]。本节引入并讨论的概念也可扩展到抽象经济和重复博弈的语境中。

定义 5.1. 设 $N \geq 1$ 为一个整数， B 为某个参数（拓扑）空间。假设对于每个点 $b \in B$，都有一个 N 人非合作博弈 $\mathcal{E}^{(b)} := (E_i^{(b)},\ \theta_i^{(b)} : 1 \leq i \leq N)$。非合作博弈的集合 $\mathcal{E}/B := (\mathcal{E}^{(b)} : b \in B)$ 称为关于 B 的非合作博弈族。

从博弈论的角度来看，对这个定义的一种可能解释是，参数 $b \in B$ 是赋予博弈的外在信号，它会影响所有参与者的收益和策略空间。

要扩展非合作博弈的基本概念，我们无需比定义5.1 所提供的更多结构。

令 $E_i := \bigsqcup_{b\in B} E_i^{(b)}$ 为对每个 $1 \le i \le N$ 而言， $E_i^{(b)}$ 在 B 上的不交并。暂且不对这些 E_i 假设任何额外结构。{style id='7'>全局策略空间 E of $\mathcal{E}/B$ 是策略空间 E_i 在 B 上的逐纤维积，即

$$E := E_1 \times_B \cdots \times_B E_N := \bigsqcup_{b\in B} E_1^{(b)} \times \cdots \times E_N^{(b)} = \bigsqcup_{b\in B} E^{(b)} \subseteq E_1 \times \cdots \times E_N,$$

其中 $E^{(b)} := E_1^{(b)} \times \cdots \times E_N^{(b)}$。我们刚刚引入的每个对象都带有到参数空间 B 的自然投影：

$$\pi_i \colon E_i \longrightarrow B,\ e_i \longmapsto b, \qquad \pi \colon E \longrightarrow B,\ e \longmapsto b,$$

对于 $e_i \in E_i^{(b)} \subseteq E_i$ 和 $e \in E^{(b)} \subseteq E$。

现在，参与者的收益函数族

$$(\theta_1^{(b)} \colon E^{(b)} \longrightarrow \mathbb{R} : b \in B), \ldots, (\theta_N^{(b)} \colon E^{(b)} \longrightarrow \mathbb{R} : b \in B)$$

定义参与者的收益函数在 E 上为

$$\theta_i \colon E \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \theta_i^{(b)}(x),$$

对于 $x \in E^{(b)} = E_1^{(b)} \times \cdots \times E_N^{(b)} = E$和 $1 \le i \le N$。

相应地，可以用类似方式定义边际函数。对于 $b \in B$ ，令$\phi_i^{(b)}$ ： $E^{(b)} \longrightarrow$ R为博弈 $\mathcal{E}^{(b)}$ 中玩家 i的边际函数。也就是说，

$$\phi_i^{(b)} \colon E^{(b)} = E_1^{(b)} \times \cdots \times E_N^{(b)} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$
$$x = (x_1, \ldots, x_N) \longmapsto \sup\{\theta_i^{(b)}(y_i, x_{-i}) : y_i \in E_i^{(b)}\},$$

参见定义 3.1。那么，我们将边际函数定义为非合作博弈族$\mathcal{E}/B$ 的

$$\phi_i \colon E \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \phi_i^{(b)}(x),$$

对于 $x \in E^{(b)} \subseteq \bigsqcup_{b\in B} E^{(b)} = E$ 和 $1 \le i \le N$。

在此框架下，也可以引入最佳回应对应的概念。按照定义 $\mathcal{E}^{(b)}$，如定义 3.2中一样，记博弈 $\Phi^{(b)}$ 的 $E^{(b)} \longrightarrow 2^{E^{(b)}}$为，我们将非合作博弈族的最佳回应对应 $\mathcal{E}/B$ 定义为

$$\Phi \colon E \longrightarrow 2^E, \quad x \longmapsto \Phi^{(b)}(x), \tag{3}$$

对于 $x \in E^{(b)} \subseteq \bigsqcup_{b\in B} E^{(b)} = E$。

与经典概念相比， $\mathcal{E}/B$ 的最佳回应对应具有一个新颖性质：下图交换

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\ \Phi\ } & 2^E \\ & {\scriptstyle \widehat{\pi}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \widetilde{\pi}} & \\ & 2^B & \end{array} \tag{4}$$

其中 $\widehat{\pi}$： $E \longrightarrow 2^B$ 由 $e \longmapsto \{\pi(e)\}$ 给出，适用于 $e \in E$；而 $\widetilde{\pi}$： $2^E \longrightarrow 2^B$ 由 $U \longmapsto \pi(U)$ 给出，适用于 $U \subseteq E$。按照纤维丛术语，我们可以说， $\mathcal{E}/B$ 的最佳回应对应是一个纤维式集值映射。

沿用定理 3.3 的证明思路，并考虑非合作博弈族的定义，可以证明以下结论。

定理 5.2. 假设采用目前为止引入的记号：存在一个参数 $b \in B$，使得族 $\mathcal{E}/B$ 中的非合作博弈 $\mathcal{E}^{(b)}$ 存在纳什均衡，当且仅当 $\mathcal{E}/B$ 的最佳回应对应 $\Phi\colon E \longrightarrow 2^E$ 有一个不动点。

证明。若 $e \in E$ 是 Φ的不动点，则 $e \in \Phi^{(\pi(e))}(e)$，因此由定理3.3 可知 e是纳什均衡。另一方面，若 $e \in E^{(b)}$ 是纳什均衡，则它是$\Phi^{(b)}$ 的不动点，从而由构造可知，它也是 Φ的不动点。□

与单个非合作博弈的经典情形一样，非合作博弈族的核心问题如下。

问题 5.3. 设 $N \geq 1$ 为整数，并设 $\mathcal{E}/B := (\mathcal{E}^{(b)} : b \in B)$ 为 B 上的非合作博弈族。

(A) 是否存在点 $b \in B$，使得非合作博弈 $\mathcal{E}^{(b)}$ 具有纳什均衡，换言之，是否存在 $b \in B$，使得纳什均衡集$(\mathcal{E}^{(b)}) \neq \emptyset$? (B) 关于 B 的子空间 $\{b \in B : \text{纳什均衡集}(\mathcal{E}^{(b)}) \neq \emptyset\}$，可以作何说明？(C) 关于 E 的子空间 $\bigsqcup_{b\in B}$ 纳什均衡集$(\mathcal{E}^{(b)}) \subseteq \bigsqcup_{b\in B} E^{(b)}$，可以作何说明?

为了研究我们刚才提出的问题，需要对博弈族 $\mathcal{E}/B := (\mathcal{E}^{(b)} : b \in B)$ 作出一些额外假设。首先，我们假设所有参与者的策略空间 E_i 都是位于 B之上的纤维丛的全空间。于是，全局策略空间 E 确实是纤维积 $E_1 \times_B \cdots \times_B E_N$，因此最佳回应对应 $\Phi\colon E \longrightarrow 2^E$将每个点 $e \in E$ 映射到纤维 $\pi^{-1}(\{\pi(e)\})$中位于 E 之上的一个子空间，其中基点为 $\pi(e)$。其次，令每个 E_i成为位于 B之上的向量丛 V_i 的子丛。因此，特别地，全局策略空间 E 是（实）向量丛 $V_1 \times_B \cdots \times_B V_N$的一个子丛。

我们所作的假设使我们能够使用业已确立的丛理论语言和工具。关于这一理论的许多经典资料均可获得，例如 [3, 19]。在这一框架下，我们进一步推导出博弈族存在纳什均衡的判据。

从现在起，假设 $\mathcal{E}/B := (\mathcal{E}^{(b)} : b \in B)$是一个满足以下性质的博弈族

– E_i 是 B上的纤维丛，也是对所有 $1 \leq i \leq N$而言， B 上的有限维（实）向量丛V_i 的子丛，– $E := E_1 \times_B \cdots \times_B E_N$ 是 B 上的纤维积丛，同时也是向量丛 $V_1 \times_B \cdots \times_B V_N \cong V_1 \oplus \cdots \oplus V_N$的纤维积的子丛，– 边际函数 $\phi_i\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$关于 E 上的继承拓扑连续，对所有 $1 \leq i \leq N$均如此，– 最佳回应对应 $\Phi\colon E \longrightarrow 2^E$ 关于 E上的拓扑上半连续。

这样，这些空间便被赋予了恰当的拓扑，而这些映射相对于这些选择都是连续的。这些假设并不苛刻，因为它们涵盖了所有相关情形。特别要注意的是，如果满足3.11最大值定理中相当温和的假设，那么该定理就意味着边际函数连续，因此连这一假设也并不苛刻。

为推导新的纳什均衡存在性判据，我们首先考虑丛 $E \times_B E$ 沿投影映射 $\pi\colon E \longrightarrow B$ 的拉回，如下方拉回方形图所示

$$\begin{array}{ccc} \pi^*(E \times_B E) & \xrightarrow{\Pi} & E \times_B E \\ \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \pi \times_B \pi} \\ E & \xrightarrow{\pi} & B. \end{array} \tag{5}$$

回忆一下，根据拉回的定义

$$\pi^*(E \times_B E) := \{(e, (e', e'')) \in E \times (E \times_B E) : \pi(e) = (\pi \times_B \pi)(e', e'')\}.$$

由于最佳回应对应 $\Phi\colon E \longrightarrow 2^E$ 是逐纤维的，也就是说它满足性质（4），因此它诱导出丛 $\pi^*(E \times_B E)$ 的集值截面 $\widetilde{\Phi}\colon E \longrightarrow 2^{\pi^*(E\times_B E)}$，其定义为

$$\widetilde{\Phi}(e) := \{e\} \times \{e\} \times \Phi(e) \subseteq \mu^{-1}(\{e\}) \subseteq \pi^*(E \times_B E).$$

$\widetilde{\Phi}$ 是集值截面这一事实意味着 $\mu\big(\widetilde{\Phi}(e)\big) = \{e\}$。

由 $\delta(e) = (e, e, e)$给出的丛 $\pi^*(E \times_B E)$的（单值）截面 $\delta\colon E \longrightarrow \pi^*(E \times_B E)$，通过 $\Delta(e) = \{\delta(e)\}$诱导出集值截面 $\Delta\colon E \longrightarrow 2^{\pi^*(E\times_B E)}$。这个截面可称为纤维积的对角截面。

现在，博弈族存在纳什均衡的新判据可表述如下。

定理 5.4. 假设采用迄今引入的记号：存在一个参数 $b \in B$，使得族 $\mathcal{E}/B$ 中的非合作博弈 $\mathcal{E}^{(b)}$ 存在纳什均衡，当且仅当存在一个点 $e \in \pi^{-1}(\{b\})$，使得 $\Delta(e) \cap \widetilde{\Phi}(e) \neq \emptyset$，换言之

$$\bigcup_{\epsilon\in E} \widetilde{\Phi}(\epsilon) \cap \bigcup_{\epsilon\in E} \Delta(\epsilon) \neq \emptyset.$$

证明。根据定理 5.2：存在一个参数 $b \in B$，使得族 $\mathcal{E}/B$ 中的非合作博弈 $\mathcal{E}^{(b)}$ 存在纳什均衡，当且仅当 $\mathcal{E}/B$ 的最佳回应对应 $\Phi\colon E \longrightarrow 2^E$ 有一个不动点。换言之，存在一个点 $e \in E$，使得 $e \in \Phi(e)$，因此 $(e, e, e) \in \Delta(e) \cap \Phi(e)$。

反过来，如果 $(w, u, v) \in \Delta(e) \cap \Phi(e)$，那么对于某个 $e \in E$，有 $(w, u, v) = (e, e, e)$；此外，对于某个 $e' \in E$，有 $(w, u, v) \in \{e'\} \times \{e'\} \times \Phi(e')$。因此，$(e, e, e) \in \{e'\} \times \{e'\} \times \Phi(e')$，这意味着 $e = e'$ 和 $e \in \Phi(e)$，也就是说，最佳回应对应 Φ 有一个不动点。证明完毕。□

最后一个判据是前一个判据以及拉回图（$\Pi\colon \pi^*(E \times_B E) \longrightarrow E \times_B E$）中纤维映射5的直接推论。

推论 5.5。假设采用迄今引入的记号：存在一个参数 $b \in B$，使得族 $\mathcal{E}/B$ 中的非合作博弈 $\mathcal{E}^{(b)}$ 存在纳什均衡，当且仅当

$$\Pi\Big(\bigcup_{\epsilon\in E} \widetilde{\Phi}(\epsilon)\Big) \cap \Pi\Big(\bigcup_{\epsilon\in E} \Delta(\epsilon)\Big) \neq \emptyset.$$

证明。证明直接由前一定理和以下蕴含关系得出：若 $(e', e'') \in \Pi\big(\bigcup_{\epsilon\in E} \Delta(\epsilon)\big)$，则 $e' = e'' =: e$；若 $(e, e) \in \{e'''\} \times \Phi(e''')$，则 $e = e'''$ 且 $e \in \Phi(e)$。□

注意，集合 $\Pi\big(\bigcup_{\epsilon\in E} \widetilde{\Phi}(\epsilon)\big)$ 由博弈$\mathcal{E}^{(b)}$ 的所有最佳回应对应的图组成，这些图汇集为纤维积 $E \times_B E$的一个子集。

我们刚刚得到的纳什均衡存在判据，相较于其他判据对我们有一个显著优势。它使我们能够使用下面这个被认为是公知结果的交叉引理。关于该引理的精确表述和完整证明，参见例如 [9, 引理 4。3]除非另有说明，我们假设采用适当的（上）同调理论，例如系数取自 $\mathbb{F}_p$（含有 p 个元素的有限域）的奇异（上）同调理论。

引理 5.6。设 p 为素数，$k \geq 1$ 为整数，且 B 为紧的$\mathbb{F}_p$-可定向流形。假设 $V \xrightarrow{p} B$ 是 B 上的一个实向量丛，并且满足其 k次$\mathbb{F}_p$-欧拉类的幂不为零，即 $e(V)^k \neq 0$ 属于 $H^*(B;\mathbb{F}_p)$。

设 T_0，……，T_k 为向量丛 V的全空间的子集，且具有如下性质：所有同态

$$H^{\dim(B)}(B;\mathbb{F}_p) \xrightarrow{(p|_{T_i})^*} H^{\dim(B)}(T_i;\mathbb{F}_p)$$

由投影映射 $p|_{T_i}$ 的限制所诱导的均为单射，其中 $0 \le i \le k$。则

$$T_0 \cap \cdots \cap T_k \neq \emptyset.$$

结合定理 5.4 和引理 5.6，我们证明了关于博弈族存在纳什均衡的首个结果。

定理 5.7。 设 p 为素数， $N \ge 1$ 为整数，并设 $\mathcal{E}/B := (\mathcal{E}^{(b)} : b \in B)$ 为一个由N名玩家组成的非合作博弈族，满足以下性质

– B 是一个紧的$\mathbb{F}_p$-可定向流形，– E_i 是覆盖 B 的纤维丛，其紧全空间为 E_i，且对所有 $1 \le i \le N$，它都是覆盖 B 的有限维（实）向量丛 V_i 的子丛，– $E := E_1 \times_B \cdots \times_B E_N$是覆盖 B的纤维积丛，同时也是向量丛 $V := V_1 \times_B \cdots \times_B V_N \cong V_1 \oplus \cdots \oplus V_N$的纤维积的子丛，– $\mathcal{E}/B$ 的最佳回应对应 $\Phi\colon E \longrightarrow 2^E$ 为紧值的，– 由投影映射 $\pi \times_B \pi\colon E \times_B E \longrightarrow B$ 诱导的上同调同态，

$$H^{\dim(B)}(B;\mathbb{F}_p) \xrightarrow{(\pi\times_B\pi)^*} H^{\dim(B)}\big(\Pi\big(\bigcup_{e\in E}\widetilde{\Phi}(e)\big);\mathbb{F}_p\big)$$

是单射。

若向量丛 $V_1, \ldots, V_N$ 的欧拉类中的单项式 $e(V)^2 = e(V_1)^2 \cdots e(V_N)^2$ 在上同调 $H^*(B;\mathbb{F}_p)$ 中不为零，则存在一个参数 $b \in B$，使得族 $\mathcal{E}/B$ 中的非合作博弈 $\mathcal{E}^{(b)}$ 具有纳什均衡。

证明。 该结果由推论 5.5 和引理 5.6 取

– T_0 为 $V \times_N V$ 的子空间 $\Pi\big(\bigcup_{\epsilon\in E}\widetilde{\Phi}(\epsilon)\big)$，且 – T_1 为圆盘丛 $D(V \times_N V)$ 与 $V \times_N V$ 的对角向量子丛的总丛的交集。

$\Phi(e)$ 在其内部。这是由于假设 $E_1, \ldots, E_N$和 B具有紧致性而得以实现的。这样，我们便使 T_1 成为紧集，并且

这里的圆盘丛经过选取，使其包含集合 $\Pi\big(\bigcup_{\epsilon\in E}$

$$H^*(B;\mathbb{F}_p) \longrightarrow H^*(T_1;\mathbb{F}_p)$$

是一个同构（在所有次数上）。 □

请注意，无须假设向量丛 V_1、……、V_N具有 $\mathbb{F}_p$-可定向性，因为我们考虑的是欧拉类的平方，或者更准确地说，是 Whitney $V \oplus V$的欧拉类；后者尤其总是可定向的。

我们的定理的一大亮点是，对各个博弈的假设相当宽松，尤其是与博弈论中较为经典的假设相比。

6. 非合作博弈族的多边纳什均衡

到目前为止，我们引入的非合作博弈的推广可以很容易地扩展到抽象经济和重复博弈，并且还可以无缝地结合起来。因此，本节将简要说明第1 节定义的概念如何推广到博弈族，随后证明多边纳什均衡的一个存在性结果。

设 $N \ge 1$ 和 $1 \le k \le N$ 为（固定的）整数，并设 $\mathcal{E}/B := (\mathcal{E}^{(b)} : b \in B)$ 是定义在 B 上的一个非合作博弈族。对于子集 $I := \{i_1, \ldots, i_k\} \in \binom{[N]}{k}$，我们仍使用先前引入的 E_I 记号，不过这次用它来表示纤维积

$$E_I := E_{i_1} \times_B \cdots \times_B E_{i_k} := \bigsqcup_{b\in B} E_{i_1}^{(b)} \times \cdots \times E_{i_k}^{(b)} = \bigsqcup_{b\in B} E_I^{(b)}.$$

针对博弈族， $\mathcal{E}/B$多边边际函数和多边最佳回应对应（现针对博弈族）的定义，与第 3 节中的相应定义完全相同，

定义 3.4 和定义 3.5。为求完整起见，我们现在在博弈族的背景下陈述这些定义。

与子集 $I \in \binom{[N]}{k}$ 相关联的博弈族 $\mathcal{E}/B$ 的边际函数定义为

$$\begin{aligned}\phi_I^{(b)} \colon E^{(b)} = E_1^{(b)} \times \cdots \times E_N^{(b)} &\longrightarrow (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^I,\\ x = (x_1, \ldots, x_N) &\longmapsto (\sup\{\theta_i^{(b)}(y_I, x_{-I}) : y_I \in E_I^{(b)}\})_{i \in I}.\end{aligned}$$

我们再次使用记号 $E_I^{(b)} := \prod_{i \in I} E_i^{(b)}$ 。因此，与子集 $I \in \binom{[N]}{k}$ 相关联的 k 边最佳回应对应 $\mathcal{E}/B$ 定义为

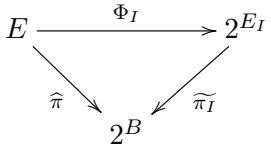
$$\begin{aligned}\Phi_I^{(b)} \colon E^{(b)} = E_1^{(b)} \times \cdots \times E_N^{(b)} &\longrightarrow 2^{E_I^{(b)}},\\ x = (x_1, \ldots, x_N) &\longmapsto \left\{y_I \in E_I^{(b)} : (\forall i \in I)\ \theta_i^{(b)}(y_I, x_{-I}) = \phi_I^{(b)}(x_1, \ldots, x_N)_i\right\}.\end{aligned}$$

与之前一样，我们可以将集值映射 Φ_I 合并为一个纤维映射：

$$\begin{aligned}\Phi_I \colon E := E_1 \times \cdots \times E_N &\longrightarrow 2^{E_I},\\ x = (x_1, \ldots, x_N) &\longmapsto \Phi_I^b,\end{aligned}$$

对于 $x \in E^{(b)} \subseteq \bigsqcup_{b \in B} E^{(b)} = E$。

博弈族 $\mathcal{E}/B$的多边最佳回应对应按构造也是纤维映射，就像之前构造的博弈族 Φ的最佳回应对应一样，见（3）。换言之，对于每个 $I \in \binom{[N]}{k}$，下图交换。



其中，与前面一样，$\widehat{\pi} \colon e \longmapsto \{\pi(e)\}$，这里稍微滥用一下记号，用 $\widetilde{\pi} \colon U \longmapsto \pi(U)$ 表示投影映射。

定理 3.7 中修正的最佳回应对应的定义可以推广到博弈族。事实上，对于 $I \in \binom{[N]}{k}$ ，我们有

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}_I^{(b)} \colon E^{(b)} &\longrightarrow 2^{E^{(b)}},\\ x = (x_1, \ldots, x_N) &\longmapsto \overline{\Phi}_I^{(b)}(x) := \{(y_I, z_{-I}) \in E^{(b)} \colon z_{-I} \in E_{-I}^{(b)},\ \theta_I^{(b)}(y_I, x_{-I}) = \phi_I^{(b)}(x)\},\end{aligned}$$

因此我们可以定义

$$\overline{\Phi}_I \colon E \longrightarrow 2^E, \qquad x \longmapsto \overline{\Phi}_I^{(b)}(x),$$

对于 $x \in E^{(b)} \subseteq \bigsqcup_{b \in B} E^{(b)} = E$，现在我们得到定理 3.7的一个类似结果，即下面的存在性判据。

定理 6.1。 设 $\mathcal{E}/B := (\mathcal{E}^{(b)} : b \in B)$ 是定义在 B 上的非合作博弈族。那么，存在一个参数 $b \in B$，使得 $\mathcal{E}^{(b)}$ 具有一个 k-侧纳什均衡，当且仅当修正的最佳回应对应 Φ_I 对于 $I \in \binom{[N]}{k}$ 存在同时不动点，也就是说，存在 $x \in E$，使得对于所有 $I \in \binom{[N]}{k}$，$x \in \Phi_I(x)$ 。

证明。 注意，修正的最佳回应对应按构造即为纤维式集值映射。该断言显然由定理 3.7。 □

定理的推论3.7 也适用于博弈族。

推论 6.2。 假设采用迄今为止引入的记号：当且仅当存在 $\mathcal{E}/B$ 的 A k方纳什均衡

$$\Delta(E \times_B E) \cap \bigcap_{I \in \binom{[N]}{k}} \mathrm{Graph}(\overline{\Phi}_I) \neq \emptyset.$$

这里 $\Delta(E \times E) := \{(e, e) : e \in E\}$ 表示 $E \times E$ 中的对角线。

证明。 我们只说明与推论 3.8 的证明之间的细微差别，因为这里我们取的是 $E \times_B E$ <style id='10'} 的逐纤维积，而非乘积。集值映射 $\Phi_I : E \longrightarrow 2^E$ 是逐纤维的，因此 $\mathrm{Graph}(\Phi_I) \subseteq E \times_B E$。结论现由以下观察得出：根据定义，

$$\Delta(E \times_B E) = \bigsqcup_{b \in B} \Delta(E^{(b)} \times E^{(b)}) \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Graph}(\overline{\Phi}_I) = \bigsqcup_{b \in B} \mathrm{Graph}(\overline{\Phi}_I^{(b)}).$$

若 $x = (e_1, e_2) \in \Delta(E \times_B E) \cap \bigcap_{I \in \binom{[N]}{k}} \mathrm{Graph}(\Phi_I)$，则 $e_1 = e_2 =: e$ 对于 $e \in E^{(b)}$，其中 $b \in B$ 固定。因此，根据集值映射图的定义，对于每个 $I \in \binom{[N]}{k}$，$e \in \Phi_I(e)$ 都是 Φ_I 的不动点。定理的证明至此结束。□

如第 5 节中一样，假设 $\mathcal{E}/B := (\mathcal{E}^{(b)} : b \in B)$ 是一个具有以下性质的博弈族

– E_i 是位于 B之上的一个纤维丛，对所有 $1 \leq i \leq N$而言，它是有限维（实）向量丛V_i 之上的子丛； – $E := E_1 \times_B \cdots \times_B E_N$是位于 B之上的纤维积丛，同时也是向量丛 $V_1 \times_B \cdots \times_B V_N \cong V_1 \oplus \cdots \oplus V_N$的纤维积的子丛；– 对所有 $1 \leq i \leq N$而言，边际函数 ϕ_i: $E \longrightarrow \mathrm{R}$关于 E上的继承拓扑连续；– 最佳回应对应 Φ: $E \longrightarrow 2^E$ 关于 E上的拓扑是上半连续的。

沿着第 5节的思路，我们进一步推导出现在关于多边纳什均衡存在性的判据。首先固定一个子集 $I \in \binom{[N]}{k}$，并再次考虑沿投影映射 $E \times_B E$ π: $E \longrightarrow B$ 对丛进行的拉回。换言之，存在一个拉回方形图

$$\begin{array}{ccc} \pi^*(E \times_B E) & \xrightarrow{\Pi} & E \times_B E \\ \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \pi \times_B \pi} \\ E & \xrightarrow{\pi} & B. \end{array} \tag{6}$$

由于现在最佳回应对应 Φ_I: $E \longrightarrow 2^E$ 是纤维上的，因此它导出了丛 $\pi^*(E \times_B E)$ 的集值截面 $\widetilde{\Phi}_I$: $E \longrightarrow 2^{\pi^*(E \times_B E)}$，定义如下

$$\widetilde{\Phi}_I(e) := \{e\} \times \{e\} \times \overline{\Phi}_I(e) \subseteq \mu^{-1}(\{e\}) \subseteq \pi^*(E \times_B E).$$

和之前一样， Φ_I 是集值截面这一事实意味着 $\mu(\Phi_I(e)) = \{e\}$。

同样，丛 $\pi^*(E \times_B E)$ 的截面 δ: $E \longrightarrow \pi^*(E \times_B E)$, $\delta(e) = (e, e, e)$ 导出对角集值截面 Δ: $E \longrightarrow 2^{\pi^*(E \times_B E)}$，其定义为 $\Delta(e) = \{\delta(e)\}$。

现在，我们得到一个类似于定理 5.4 的博弈族多边纳什均衡存在性判据。

定理 6.3。 假设采用前文引入的记号：存在一个参数 $b \in B$，使得族 $\mathcal{E}/B$ 中的非合作博弈 $\mathcal{E}^{(b)}$ 存在一个 k方纳什均衡，当且仅当存在一点 $e \in \pi^{-1}(\{b\})$，满足 $\Delta(e) \cap \bigcap_{I \in \binom{[N]}{k}} \widetilde{\Phi}_I(e) \neq \emptyset$, 换言之

$$\bigcap_{I \in \binom{[N]}{k}} \Big(\bigcup_{\epsilon \in E} \widetilde{\Phi}_I(\epsilon) \Big) \cap \bigcup_{\epsilon \in E} \Delta(\epsilon) \neq \emptyset.$$

证明。根据定理 6.1：存在一个参数 $b \in B$，使得族 $\mathcal{E}/B$ 中的非合作博弈 $\mathcal{E}^{(b)}$ 存在一个 k方纳什均衡，当且仅当针对 $I \in \binom{[N]}{k}$ 的修正最佳反应对应 Φ_I 存在一个同时不动点，即存在 $e \in E$，使得对所有 $I \in \binom{[N]}{k}$都有$e \in \Phi_I(e)$。这意味着存在一点 $e \in E$，使得 $e \in \bigcap_{I\in\binom{[N]}{k}} \Phi_I(e)$，因此 $(e,e,e) \in \Delta(e) \cap \bigcap_{I\in\binom{[N]}{k}} \Phi_I(e)$。

反过来，如果 $(w,u,v) \in \Delta(e) \cap \bigcap_{I\in\binom{[N]}{k}} \Phi_I(e)$，那么对于某个 $e \in E$，$(w,u,v) = (e,e,e)$；此外，对于某个 $e' \in E$，且对所有 $I \in \binom{[N]}{k}$，都有 $(w,u,v) \in \{e'\} \times \{e'\} \times \Phi_I(e')$。因此，对所有 $I \in \binom{[N]}{k}$，$(e,e,e) \in \{e'\} \times \{e'\} \times \Phi_I(e')$，这意味着 $e = e'$，且对所有 $I \in \binom{[N]}{k}$，$e \in \Phi_I(e)$。因此，所有修正的最佳回应对应 Φ_I 在 $e \in E$ 处有公共不动点。证明完毕。 □

我们还推导出推论 5.5 中的判据的一个类似结论，现在是在多方纳什均衡的背景下。回顾一下，我们使用拉回图（ Π: $\pi^*(E \times_B E) \longrightarrow E \times_B E$ 中的纤维映射（6）。

推论 6.4。假设采用迄今引入的记号：存在一个参数 $b \in B$，使得族 $\mathcal{E}/B$ 中的非合作博弈 $\mathcal{E}^{(b)}$ 存在一个 k方纳什均衡，当且仅当

$$\bigcap_{I\in\binom{[N]}{k}} \Pi\Big(\bigcup_{\epsilon\in E} \widetilde{\Phi}_I(\epsilon)\Big) \cap \Pi\Big(\bigcup_{\epsilon\in E} \Delta(\epsilon)\Big) \neq \emptyset.$$

证明。这一结论直接由前一定理和以下蕴含关系得出：若点 $(e',e'') \in \Pi\big(\bigcup_{\epsilon\in E} \Delta(\epsilon)\big)$，则 $e' = e'' =: e$；若点 $(e,e) \in \{e'''\} \times \Phi_I(e''')$，则$e = e'''$ 且 $e \in \Phi_I(e)$。□

现在，结合推论6.4 中的判据和引理 5.6，我们证明了首个关于博弈族存在多边纳什均衡的结果。

定理 6.5。设 p为素数，$N \geq 1$和 $1 \leq k \leq N$ 为整数，并设 $\mathcal{E}/B := (\mathcal{E}^{(b)} : b \in B)$ 为一个 N玩家非合作博弈族，满足以下性质

– B 是一个紧的$\mathbb{F}_p$-可定向流形，– E_i 是 B 上的一个纤维丛，其紧全空间为 E_i，且 E_i是 B 上有限维（实）向量丛 V_i 的子丛，对所有 $1 \leq i \leq N$均如此，– $E := E_1 \times_B \cdots \times_B E_N$是 B上的纤维积丛，同时也是向量丛 $V := V_1 \times_B \cdots \times_B V_N \cong V_1 \oplus \cdots \oplus V_N$的纤维积的子丛，– $\mathcal{E}/B$ 的最佳回应对应 Φ: $E \longrightarrow 2^E$ 是紧值的，– 对每个 $I \in \binom{[N]}{k}$，由投影映射 $\pi \times_B \pi$: $E \times_B E \longrightarrow B$诱导的上同调同态，

$$H^{\dim(B)}(B;\mathbb{F}_p) \xrightarrow{(\pi\times_B\pi)^*} H^{\dim(B)}\big(\Pi\big(\textstyle\bigcup_{e\in E} \widetilde{\Phi}_I(e)\big);\mathbb{F}_p\big)$$

是单射。

如果向量丛 $V_1,\ldots,V_N$ 的欧拉类在上同调 $H^*(B;\mathbb{F}_p)$中对应的单项式 $e(V)\binom{N}{k} = e(V_1)\binom{N}{k}\cdots e(V_N)\binom{N}{k}$ 在 $\mathbb{F}_p$ 中不为零，那么存在一个参数 $b \in B$，使得族 $\mathcal{E}/B$ 中的非合作博弈 $\mathcal{E}^{(b)}$ 具有一个 k方纳什均衡。

证明。该结果由推论5.5 和引理 5.6 取

– $T_1,\ldots,T\binom{N}{k}$ 作为 $V \times_N V$ 中对应于 $I \in \binom{[N]}{k}$ 的子空间 $\Pi\big(\bigcup_{e\in E} \widetilde{\Phi}_I(e)\big)$，并令 – T_0 为圆盘丛 $D(V \times_N V)$ 与 $V \times_N V$的对角向量子丛的总丛的交集。

这里选择圆盘丛，使其内部包含所有集合 $\Pi\big(\bigcup_{e\in E}\widetilde{\Phi}_I(e)\big)$ $(I\in\binom{[N]}{k})$ 。这得益于假设 $E_1,\dots,E_N$和 B具有紧致性。这样，我们就使得 $T_1,\dots,T\binom{N}{k}$ 成为紧集，并且

$$H^{\dim(B)}(B;\mathbb{F}_p)\longrightarrow H^{\dim(B)}(T_i;\mathbb{F}_p)$$

对所有 $1\le i\le\binom{N}{k}$ 都是单射。 □

我们的定理的一大亮点是，对各个博弈的假设相当宽松，尤其是与博弈论中较为经典的假设相比更是如此。为说明这一点，我们还给出了前一定理的一个推论。该推论依赖于对博弈族的收益函数所作的假设，而非对其最佳回应对应的图的上同调所作的假设。

推论 6.6. 设 p 是素数， $N\ge 1$ 是整数，并设 $\mathcal{E}/B:=(\mathcal{E}^{(b)}:\ b\in B)$ 是一个具有以下性质的 N 人非合作博弈族

– B 是一个紧的 $\mathbb{F}p$-可定向流形，– E_i 是位于 B 上的纤维丛，其紧全空间为 E_i，且 E_i 是有限维（实）向量丛 V_i （位于 B 上）的子丛；对于所有 $1\le i\le N$，其每个纤维均为凸集，– $E:=E_1\times_B\cdots\times_B E_N$ 是位于 B 上的纤维积丛，同时也是向量丛 $V:=V_1\times_B\cdots\times_B V_N\cong V_1\oplus\cdots\oplus V_N$ 的纤维积的子丛，– 对每个 $b\in B$、每个 $i\in[N]$ 和每个 $x_{-i}\in E_{-i}$， $\theta_i^{(b)}(\cdot,x_{-i})\colon E_i\longrightarrow\mathbb{R}$ 都是拟凹的。

如果单项式 $e(V_1)\binom{N}{k}\cdots e(V_N)\binom{N}{k}$ 在 $\mathbb{F}p$向量丛 V_1，……，V_N 的欧拉类中于上同调 $H^*(B;\mathbb{F}p)$ 中不消失，则存在参数 $b\in B$，使得族 $\mathcal{E}/B$ 中的非合作博弈 $\mathcal{E}^{(b)}$ 具有纳什均衡。

证明。为简化记号，我们常常用与原映射相同的符号来表示映射的限制。为了将定理6.5 应用于当前情形，我们只需证明上同调中的映射

$$H^{\dim(B)}(B;\mathbb{F}_p)\xrightarrow{(\pi\times_B\pi)^*}H^{\dim(B)}\big(\Pi\big(\bigcup_{e\in E}\widetilde{\Phi}_I(e)\big);\mathbb{F}_p\big)$$

对每个 $I\in\binom{[N]}{k}$ 都是单射。考虑交换图（5）的如下导数：

$$\begin{array}{ccc}\bigcup_{e\in E}\widetilde{\Phi}_I(e) & \xrightarrow{\Pi} & \Pi\big(\bigcup_{e\in E}\widetilde{\Phi}_I(e)\big)\\ \downarrow{\scriptstyle\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\pi\times_B\pi}\\ E & \xrightarrow{\pi} & B.\end{array}$$

应用上同调函子 $H^*(\cdot\,;\mathrm{F}p)$，我们得到交换图：

$$\begin{array}{ccc}H^*\big(\bigcup_{e\in E}\widetilde{\Phi}_I(e);\mathbb{F}_p\big) & \xleftarrow{\Pi^*} & H^*\big(\Pi\big(\bigcup_{e\in E}\widetilde{\Phi}_I(e)\big);\mathbb{F}_p\big)\\ \uparrow{\scriptstyle\mu^*} & & \uparrow{\scriptstyle(\pi\times_B\pi)^*}\\ H^*(E;\mathbb{F}_p) & \xleftarrow{\pi^*} & H^*(B;\mathbb{F}_p).\end{array}$$

由于 $\Pi^*\circ(\pi\times_B\pi)^*=\mu^*\circ\pi^*$，为证明 $(\pi\times_B\pi)^*$ 是单射，只需证明 $\mu^*\circ\pi^*$ 是单射。

根据引理 3.10，函数 $\theta_i^{(b)}(\cdot,x_{-i})\colon E_i\longrightarrow\mathrm{R}$ 的拟凹性推出最佳回应对应 $\Phi_I(e)$ 的凸性，因此对每个 $e\in E$，集值截面 $\Phi_I(e)$ 都成立。因此，映射 μ 是维托里斯映射；根据维托里斯定理 [27],~，它在所有次数上诱导出一个同构 $\mu^*\colon H^*(E;\mathrm{F}p)\longrightarrow H^*(\bigcup_{e\in E}\Phi_I(e);\mathrm{F}p)$。

另一方面，由于我们假设 E_1、.....、E_N 中的纤维是凸的，因此 E 的纤维也凸； E 是 E_1、.....、E_N 在 B 上的纤维积，这意味着 π 同样是维托里斯映射。因此， π^*: $H^*(B;\mathrm{F}_p) \longrightarrow H^*(E;\mathrm{F}_p)$ 是一个同构。

In s总之，我们已经证明了 $(\pi \times_B \pi)^*$ 是单射，因此完成了证明。 □

拟凹性假设刻画了经济学中著名的边际报酬递减定律，其大致含义是：对于每增加一个单位的投入，产出的增量都必须递减。

前面的推论 6.6还可以通过放宽向量丛 $V \longrightarrow B$ 的条件而进一步改进如下。为此，我们以一种特定的方式组织丛 $\pi^*(E \times_B E)$ 的 $\binom{N}{k}$ 集值截面$\widetilde{\Phi}_I$: $E \longrightarrow 2^{\pi^*(E\times_B E)}$ 。

首先，我们注意到修正的最佳回应对应 Φ_I具有以下性质。令$I_1, I_2 \in \binom{[N]}{k}$ 并假设 $I_1 \cap I_2 = \emptyset$。设 $b \in B$ 是任意的，并进一步假设，对于某个 $x, y \in E^{(b)}$，有 $y \in \Phi^{(b)}_{I_1}(x)$ 和 $y \in \Phi^{(b)}_{I_2}(x)$。那么，根据修正的最佳回应对应的定义，我们有

$$y \in \overline{\Phi}^{(b)}_{I_1}(x) := \{(y_{I_1}, z_{-I_1}) \in E^{(b)} : z_{-I_1} \in E^{(b)}_{-I_1},\ \theta^{(b)}_{I_1}(y_{I_1}, x_{-I_1}) = \phi^{(b)}_{I_1}(x)\},$$
$$y \in \overline{\Phi}^{(b)}_{I_2}(x) := \{(y_{I_2}, z_{-I_2}) \in E^{(b)} : z_{-I_2} \in E^{(b)}_{-I_2},\ \theta^{(b)}_{I_2}(y_{I_2}, x_{-I_2}) = \phi^{(b)}_{I_2}(x)\}.$$

由于我们假设 $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ ，以下等价关系成立：

$$y \in \overline{\Phi}^{(b)}_{I_1}(x) \cap \overline{\Phi}^{(b)}_{I_2}(x)$$

当且仅当

$$y \in \{(y_{I_1\cup I_2}, z_{-I_1\cup I_2}) : z_{-I_1\cup I_2} \in E^{(b)}_{-I_1\cup I_2},\ \theta^{(b)}_{I_1}(y_{I_1}, x_{-I_1}) = \phi^{(b)}_{I_1}(x),\ \theta^{(b)}_{I_2}(y_{I_2}, x_{-I_2}) = \phi^{(b)}_{I_2}(x)\}.$$

这一观察引出了以下与任意一组集值映射相关的定义

$$\overline{\Phi}^{(b)}_{\{I_1,I_2,\dots,I_r\}}(x) \colon E^{(b)} \longrightarrow 2^{E^{(b)}}$$

$\{I_1, \dots, I_r\} \in \binom{[N]}{k}$ 两两不相交的 k 元素子集：

$$\overline{\Phi}^{(b)}_{\{I_1,I_2,\dots,I_r\}}(x) := \bigcap_{m=1}^{r} \overline{\Phi}^{(b)}_{I_m}(x) =$$
$$\left\{(y_{\bigcup_{m=1}^r I_m}, z_{-\bigcup_{m=1}^r I_m}) : z_{-\bigcup_{m=1}^r I_m} \in E^{(b)}_{-\bigcup_{m=1}^r I_m},\ (\forall 1 \le m \le r)\ \theta^{(b)}_{I_m}(y_{I_m}, x_{-I_m}) = \phi^{(b)}_{I_m}(x)\right\}.$$

显然，这可以推广到整个族的集值映射 $\Phi_{I_1,\ I_2,\ \dots\dots I_r}$: $E \longrightarrow 2^E$ ，其定义为

$$\overline{\Phi}_{\{I_1,I_2,\dots,I_r\}}(x) = \overline{\Phi}^{(b)}_{\{I_1,I_2,\dots,I_r\}}(x)$$

对于 $x \in E^{(b)} \subseteq E$。注意，根据构造

$$\overline{\Phi}_{\{I_1,I_2,\dots,I_r\}}(x) = \bigcap_{m=1}^{r} \overline{\Phi}_{I_m}(x)$$

对每个 $x \in E$ 均成立。与前面的构造类似，我们刚刚引入的集值映射 $\Phi_{\{I_1,I_2,\dots,I_r\}}$: $E \longrightarrow 2^E$ 通过如下设定，诱导出丛 $\pi^*(E \times_B E)$ 的相应集值截面 $\widetilde{\Phi}_{\{I_1,I_2,\dots,I_r\}}$: $E \longrightarrow 2^{\pi^*(E\times_B E)}$

$$\widetilde{\Phi}_{\{I_1,I_2,\dots,I_r\}}(x) := \{x\} \times \{x\} \times \overline{\Phi}_{\{I_1,I_2,\dots,I_r\}}(x) \subseteq \mu^{-1}(\{x\}) \subseteq \pi^*(E \times_B E).$$

因此，通过像上文那样对修正的最佳回应对应进行分组，可以用包含更少集合的交集来替代定理 6.3 和推论 6.4 中的同时重合条件所产生的交集。

为了了解分组后交集中会剩下多少个集合，我们需要考虑以下问题：族 $\xi(N,k)$ 的划分 $\{\mathcal{P}_1,\dots,\mathcal{P}_\ell\} \subseteq 2^{\binom{[N]}{k}}$ 的最小基数是多少？该划分需满足如下性质：属于划分中同一元素（例如 $\mathcal{P}_i$）的任意两个 k 元子集 $[N]$ 必须互不相交。对于这样的划分 $\{\mathcal{P}_1,\dots,\mathcal{P}_\ell\}$ ($\binom{[N]}{k}$)，我们有

$$\bigcap_{I\in\binom{[N]}{k}} \widetilde{\Phi}_I = \bigcap_{i=1}^{\ell} \bigcap_{I\in\mathcal{P}_i} \widetilde{\Phi}_I = \bigcap_{i=1}^{\ell} \widetilde{\Phi}_{\mathcal{P}_i}, \tag{7}$$

这就是我们感兴趣的原因：了解基数 ℓ 对应的最小可能数目 $\xi(N,k)$。显然，对于所有$k \geq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1$，都有 $\xi(N,1) = N$, $\xi(N,k) \leq \binom{N}{k}$ 以及 $\xi(N,k) = \binom{N}{k}$。此外，我们还有以下引理。

引理 6.7。设 $N \geq 1$ 和 $1 \leq k \leq N$ 为整数。那么， $\xi(N,k)$ 与 *Kneser*图 $K(N,k)$的团覆盖数相同。

在论证这个引理之前，我们先回顾相关概念。若想了解更多内容，可参阅 Douglas B. West 所著的经典著作 《图论导引》，以及 2001 [28, 定义 5.3。18]。我们从 Kneser 图开始。

设 $N \geq 1$ 和 $1 \leq k \leq N$ 是整数。Kneser图 $K(N,\ k)$ 定义如下：– 顶点集 $V(K(N,\ k)) = \binom{[N]}{k}$ 是 $[N]$的所有 k元子集组成的集合；– 对于两个顶点 $I,\ J \in V(K(N,\ k))$，它们之间有一条边，当且仅当 $\{I,J\} \in E(K(N,\ k))$, if

并且仅当 $I \cap J = \emptyset$。

因此，在 Kneser 图中，恰好只有那些互不相交的 $[N]$ 子集之间有边相连。例如， $K(N,\ 1)$ 是一个有 N 个顶点的完全图，而 $K(N,\ N)$ 是一个只有一个顶点且没有边的图。

接下来，回顾图中团的定义。图 G 的子图 C 称为大小为 $c \geq 1$的团，如果它与一个有 c 个顶点的完全图同构。因此，Kneser图中的团是由 $\binom{[N]}{k}$中两两不相交的子集构成的集合。

最后，在回到引理6.7之前，回顾一下什么是团覆盖数。图 G的团覆盖数，记为 $\theta(G)$，是覆盖图$C_1,\dots,C_{\theta(G)}$ 的顶点所需的最少团数 G，也就是说， G:

$$V(G) = V(C_1) \cup \cdots \cup V(C_{\theta(G)}).$$

现在， $K(N,k)$ 的团覆盖恰好是将 $\binom{[N]}{k}$ 划分为若干两两不交集合的集合，正如引理6.7 所述。

如前所述， $K(N,1)$ 是一个以 N 个顶点为顶点的完全图，因此其团覆盖数为1。这意味着，在情形 $k = 1$ 下，交集中只需有一个成员（7），这对应于经典情形中的最佳回应对应可以合并为一个“全局”最佳回应对应这一事实。

鉴于刚才所述对 $\binom{N}{k}$ 集值截面 $\widetilde{\Phi}_I$的 $\pi^*(E\times_{B\sim}E)$ 重新组织为 $\xi(N,k)$ 的“交集”集值截面 $\pi^*(E\times_B E)$（形式为 $\Phi_{\{I_1,I_2,\dots,I_r\}}$），我们进一步改进了定理6.5 和推论6.6。

定理6.8。设 p为素数， $N \geq 1$和 $1 \leq k \leq N$ 为整数，并设 $\mathcal{E}/B := (\mathcal{E}^{(b)} :\ b \in B)$是满足以下性质的一个 N人非合作博弈族

– B 是一个紧的$\mathbb{F}_p$-可定向流形，– E_i 是位于 B 上的纤维丛，其紧全空间 E_i是有限维（实）向量丛 V_i 在 B 上的子丛，对所有 $1 \leq i \leq N$均成立，– $E :\ = E_1 \times_B \cdots \times_B E_N$是位于 B上的纤维积丛，同时也是向量丛 $V :\ = V_1 \times_B \cdots \times_B V_N \cong V_1 \oplus \cdots \oplus V_N$的纤维积的子丛，– $\mathcal{E}/B$ 的最佳回应对应 Φ: $E \longrightarrow 2^E$ 是紧值的，

– 对每个 $I \in \binom{[N]}{k}$，由投影映射 $\pi \times_B \pi$: $E \times_B E \longrightarrow B$所诱导的上同调同态，

$$H^{\dim(B)}(B;\mathbb{F}_p) \xrightarrow{(\pi\times_B\pi)^*} H^{\dim(B)}\big(\Pi\big(\bigcup_{e\in E}\widetilde{\Phi}_I(e)\big);\mathbb{F}_p\big)$$

是单射。

若单项式 $e(V)^{\xi(N,k)} = e(V_1)^{\xi(N,k)}\cdots e(V_N)^{\xi(N,k)}$ 在$\mathbb{F}_p$ 向量丛的欧拉类$V_1,\ldots,V_N$ 中，在上同调 $H^*(B;\mathbb{F}_p)$中不为零，则存在一个参数 $b \in B$，使得该博弈族中的非合作博弈 $\mathcal{E}^{(b)}$ $\mathcal{E}/B$ 具有一个 k边纳什均衡。

推论 6.6 的改进是以下结果。下面给出的推论证明很容易扩展为前一个定理的证明。

推论 6.9. 设 p 为素数，$N \geq 1$ 为整数，并设 $\mathcal{E}/B := (\mathcal{E}^{(b)} : b \in B)$ 为一个N人非合作博弈族，且具有以下性质

– B 是一个紧的$\mathbb{F}_p$-可定向流形，– E_i 是位于 B 上的纤维丛，具有紧全空间 E_i；对于所有 $1 \leq i \leq N$，它都是有限维（实）向量丛 V_i （位于 B 上）的子丛，且每个纤维都是凸的，– $E := E_1 \times_B \cdots \times_B E_N$是位于 B上的纤维积丛，同时也是向量丛 V:
$= V_1 \times_B \cdots \times_B V_N \cong V_1 \oplus \cdots \oplus V_N$的纤维积的子丛，– $\theta_i^{(b)}(\cdot, x_{-i}) : E_i \longrightarrow \mathbb{R}$对于每个 $b \in B$、每个 $i \in [N]$和每个 $x_{-i} \in E_{-i}$都是拟凹的。

如果单项式 $e(V_1)^{\xi(N,k)}\cdots e(V_N)^{\xi(N,k)}$ 在$\mathbb{F}_p$上的向量丛 $V_1,\ldots,V_N$的欧拉类中不为零（即在上同调 $H^*(B;\mathbb{F}_p)$中不为零），那么存在一个参数 $b \in B$，使得族 $\mathcal{E}/B$ 中的非合作博弈 $\mathcal{E}^{(b)}$ 具有一个 k方纳什均衡。

证明。设 $\ell := \xi(N, k)$。选取一个现有划分 $\{\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_\ell\}$ 作为族 $\binom{[N]}{k}$ 的划分，使其具有如下性质：任意两个 k元子集（取自 $[N]$ ），只要属于该划分的同一元素（记为 $\mathcal{P}_i$），就必须互不相交。

根据定理6.3的判据：存在 $b \in B$ 使得 $\mathcal{E}^{(b)}$ （来自族$\mathcal{E}/B$ ）具有 k-边纳什均衡，当且仅当存在 $e \in \pi^{-1}(\{b\})$ 使得

$$\bigcap_{I\in\binom{[N]}{k}}\Big(\bigcup_{\epsilon\in E}\widetilde{\Phi}_I(\epsilon)\Big) \cap \bigcup_{\epsilon\in E}\Delta(\epsilon) \neq \emptyset.$$

由于该等式序列成立

$$\bigcap_{I\in\binom{[N]}{k}}\Big(\bigcup_{\epsilon\in E}\widetilde{\Phi}_I(\epsilon)\Big) = \bigcup_{\epsilon\in E}\Big(\bigcap_{I\in\binom{[N]}{k}}\widetilde{\Phi}_I(\epsilon)\Big) = \bigcup_{\epsilon\in E}\Big(\bigcap_{i=1}^{\ell}\bigcap_{I\in\mathcal{P}_i}\widetilde{\Phi}_I\Big) = \bigcup_{\epsilon\in E}\Big(\bigcap_{i=1}^{\ell}\widetilde{\Phi}_{\mathcal{P}_i}\Big) = \bigcap_{i=1}^{\ell}\Big(\bigcup_{\epsilon\in E}\widetilde{\Phi}_{\mathcal{P}_i}\Big)$$

推论6.4的证明给出如下精细判据：存在参数 $b \in B$使得 $\mathcal{E}^{(b)}$ （来自族 $\mathcal{E}/B$ ）具有 k-边纳什均衡，当且仅当

$$\bigcap_{i=1}^{\ell}\Pi\Big(\bigcup_{\epsilon\in E}\widetilde{\Phi}_{\mathcal{P}_i}\Big) \cap \Pi\Big(\bigcup_{\epsilon\in E}\Delta(\epsilon)\Big) \neq \emptyset.$$

现在，我们仿照推论6.6 的证明，使用我们刚刚推导出的判据来代替推论 6.4。为了像定理 5.6 的证明中那样使用引理 6.5，只需证明上同调中的映射

$$H^{\dim(B)}(B;\mathbb{F}_p) \xrightarrow{(\pi\times_B\pi)^*} H^{\dim(B)}\big(\Pi\big(\bigcup_{e\in E}\widetilde{\Phi}_{\mathcal{P}_i}(e)\big);\mathbb{F}_p\big)$$

对每个 $1 \le i \le \ell$都是单射。再次考虑交换图（5）：

$$\begin{array}{ccc} \bigcup_{e\in E} \widetilde{\Phi}_{\mathcal{P}_i}(e) & \xrightarrow{\Pi} & \Pi\big(\bigcup_{e\in E} \widetilde{\Phi}_{\mathcal{P}_i}(e)\big) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \pi\times_B \pi} \\ E & \xrightarrow{\pi} & B. \end{array}$$

上同调函子 $H^*(\cdot\,; \mathbb{F}_p)$ 给出如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} H^*\big(\bigcup_{e\in E} \widetilde{\Phi}_{\mathcal{P}_i}(e); \mathbb{F}_p\big) & \xleftarrow{\Pi^*} & H^*\big(\Pi\big(\bigcup_{e\in E} \widetilde{\Phi}_{\mathcal{P}_i}(e)\big); \mathbb{F}_p\big) \\ \uparrow{\scriptstyle \mu^*} & & \uparrow{\scriptstyle (\pi\times_B \pi)^*} \\ H^*(E; \mathbb{F}_p) & \xleftarrow{\pi^*} & H^*(B; \mathbb{F}_p). \end{array}$$

由于 $\Pi^* \circ (\pi \times_B \pi)^* = \mu^* \circ \pi^*$，$(\pi \times_B \pi)^*$ 的单射性可由复合映射 $\mu^* \circ \pi^*$的单射性推出。因此，我们分析同态 μ^* 和 π^*。

根据引理 3.10，函数 $\theta_i^{(b)}(\cdot, x_{-i})\colon E_i \longrightarrow \mathbb{R}$ 的拟凹性~推出最佳回应对应 $\Phi_I(e)$ 的凸性，因此，对于每个 $e \in E$，集值截面 $\Phi_I(e)^{\sim}$ ~。由于 $\Phi_{\mathcal{P}_i}(e) = \bigcap_{I\in\mathcal{P}_i} \Phi_I(e)$，且凸集的非空交集~总是凸的，集值截面 $\Phi_{\mathcal{P}_i}$ 也具有凸值。因此，映射 μ 是维托里斯映射，根据维托里斯定理 [27],，它在所有次数上诱导同构 $\mu^*\colon H^*(E; \mathbb{F}_p) \longrightarrow\sim H^*(\bigcup_{e\in E} \Phi_{\mathcal{P}_i}(e); \mathbb{F}_p)$。

另一方面，正如我们已经看到的，$E_1, \ldots, E_N$中纤维的凸性蕴含了 E中纤维的凸性，这意味着 π 也是一个维托里斯映射。因此，$\pi^*\colon H^*(B; \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^*(E; \mathbb{F}_p)$是一个同构。

总之，$(\pi \times_B \pi)^*$ 是单射，因此我们完成了证明。 □

7. 例子

本节将介绍满足推论 6.6 和/或推论 6.9的不同博弈族例子。

7.1. 第一个简单例子。对于一个整数 $d \ge 1$，令$\mathbb{R}P^d$ 表示维数为 d的实射影空间。令 $V^d := \{(L, v) \in \mathbb{R}P^d \times \mathbb{R}^{d+1}\colon v \in L\}$ 为$\mathbb{R}P^d$上的典范向量丛的全空间。

设 $N \ge 1$ 和 $1 \le k \le N$ 为整数，并设博弈族 $\mathcal{E}/\mathbb{R}P^d$ 定义如下。假设每个策略空间 E_i 都是向量丛 V^d 的子丛，且纤维紧且凸。假设对于每个 $L \in \mathbb{R}P^d$、每个 $i \in [N]$ 以及每个固定的 $x_{-i} \in E_{-i}$，收益函数 $\theta_i^{(L)}(\cdot, x_{-i})\colon E_i \longrightarrow \mathbb{R}$ 都是拟凹的。

根据推论 6.9 以及实射影空间上典范向量丛的斯蒂费尔–惠特尼类的众所周知的性质 [22, 第 4],，若 $n \cdot \xi(n, k) \le d$，则存在一条直线 $L \in \mathbb{R}P^d$，使得博弈族 $\mathcal{E}^{(l)}$ 中的非合作博弈 $\mathcal{E}/\mathbb{R}P^d$ 具有k方纳什均衡。

7.2. 有限博弈。 自约翰·纳什在其博士论文 [23] 中最初定义非合作博弈以来，人们便一直在研究有限非合作博弈。在此情形下，有限 一词指的是最初假设策略空间 E_1、……、 E_N 是有限集。在有限博弈的框架内，这有限多个策略属于全局策略空间 $E := E_1 \times \cdots \times E_N$，通常称为纯策略。

然而，并非所有有限博弈都有均衡，而且，策略数量有限这一假设很快就被证明严重限制了建模的可能性。对有限博弈最广为人知的扩展是所谓的混合策略。

在介绍混合策略的常见解释之前，我们先以精确的方式对其加以定义。照例假设有 N 位参与者，且玩家 i 有 d_i 种纯策略可选。于是，他的策略空间 E_i 不再是基数为 d_i的有限集合，而变为由 d_i 个元素上的概率分布$\pi^{(i)}$ 构成的空间。换言之， E_i $=\Delta_{d_i-1}:=\mathrm{conv}\{e_1,\ldots,e_{d_i}\}$ 是 d_i上的标准单纯形。这里， $e_1,\ldots,e_{d_i}$ $\in \mathbf{R}^{d_i}$表示 $\mathbf{R}^{d_i}$中的标准基向量。现在， Δ_{d_i-1} 的顶点代表纯策略。如果一个策略$\pi^{(i)} \in \Delta_{d_i-1}$ 还满足 $\pi^{(i)} \in \mathrm{relint}\ \left(\mathrm{conv}\{e_{k_1},e_{k_2},\ldots,e_{k_l}\}\right)$，其中 $\{e_{k_1},e_{k_2},\ldots,e_{k_l}\}$是顶点的某个子集，那么我们就称 $\pi^{(i)}$ 是纯策略 $\{e_{k_1},e_{k_2},\ldots,e_{k_l}\}$的一个（真正的）混合。

收益函数最初仅针对纯策略定义，现以仿射方式扩展到混合策略。更确切地说，玩家 i 的纯策略收益记录在 $X_i \in \mathbf{R}^{d_1+d_2+\cdots+d_N}$中，形成所谓的纯策略收益（张量）向量，其定义如下：

$$X_i(j_1,\ldots,j_N)=\theta_i(e_{j_1},\ldots,e_{j_N}),\quad \text{for}\quad 1\le j_k\le d_k,\ 1\le k\le N.$$

于是，纯策略收益函数的仿射扩展定义如下：

$$\theta_i(\pi^{(1)},\pi^{(2)},\ldots,\pi^{(N)}):=\sum_{j_1=1}^{d_1}\sum_{j_2=1}^{d_2}\cdots\sum_{j_N=1}^{d_N}\pi^{(1)}_{j_1}\cdot\pi^{(2)}_{j_2}\cdots\pi^{(N)}_{j_N}\cdot X_i(j_1,\ldots,j_N), \tag{8}$$

其中 $\pi^{(i)} \in \Delta_{d_i-1} \subseteq \mathbf{R}^{d_i}$。因此

$$\theta_i\colon \Delta_{d_1-1}\times\Delta_{d_2-1}\times\cdots\times\Delta_{d_N-1}\longrightarrow\mathbb{R}.$$

注意，收益函数是关于 $d_1+d_2+\cdots+d_N$个变量的多线性多项式。若将 θ_i 视为 $\pi^{(i)}$ 的函数，并固定其他所有参数 $\pi^{(1)}$，$\ldots$，$\pi^{(i-1)}$，$\pi^{(i+1)}$，$\ldots$，$\pi^{(N)}$，则 θ_i是线性的，因为 $\pi^{(i)}$ 的坐标在每个单项式中都只出现一次。

混合策略最初是证明有限博弈存在纯策略纳什均衡时的一个中间步骤，但另一方面，它们也有现实意义。一个能很好地说明混合策略价值的例子，见于著名的经典检查博弈。我们在此的讲解基于 Fudenberg 和 Ti- role 的经典著作 [15, 例 1。7]。该博弈刻画了现实生活中老板(B) 与员工(E)之间常见的两难处境：老板雇用员工，并支付工资 $w \in \mathbb{R}_{>0}$，以换取价值为 $v \in \mathbb{R}$的产出。员工可以选择付出 $g>0$的个人努力，其中$g<w$；也可以选择不工作，且不付出任何个人成本。老板可以选择以成本 $h>0$进行检查，其中 $h<w$；也可以选择不检查，且不承担任何成本。如果员工被抓到怠工，老板就不支付员工工资 w。老板不得根据员工的产出决定是否支付工资，并且假定员工与老板同时作出选择。这是一个收益（张量）向量以如下矩阵组织的2人非合作博弈：

$$X_{(E)}=\begin{pmatrix}0 & w\\ w-g & w-g\end{pmatrix},\qquad X_{(B)}=\begin{pmatrix}-h & -w\\ v-w-h & v-w\end{pmatrix}.$$

这里，员工的选择是上排不工作、下排工作；列则代表老板的选择，左列表示老板选择检查员工，右列表示老板选择不检查员工。很容易看出，这个博弈不存在纯策略纳什均衡，只需观察每种情况下都有一名玩家更愿意改变自己的策略即可。

尽管如此，混合策略纳什均衡确实存在。在这个模型中，混合策略表示这样一种假设：同一博弈在没有记忆的情况下重复进行多次，且两位玩家都会随机选择策略。允许玩家随机选择策略后，Fudenberg 和 Tirole 表明，检查博弈的（完全混合）纳什均衡为：员工以概率 g/w 不工作，老板以概率 h/w 进行检查。值得注意的是，均衡点出奇地不取决于工作的价值 v。

一般而言，一个有限博弈完全由整数 d_1、……、$d_N \in \mathbb{N}$ 和收益向量 X_1、……、$X_N \in \mathbb{R}^{d_1+\cdots+d_N}$ 定义。因此，令 $B_N := \{(\mathrm{d}, \mathrm{X}) : \mathrm{d} \in \mathbb{N}^N, \mathrm{X} \in \mathbb{R}^{d_1+\cdots+d_N}\}$。那么，所有有限 N 人博弈构成一个参数空间 B_N 上的博弈族，我们记作 $\mathcal{F}/B_N$。对于 $b = (\mathrm{d}, \mathrm{X}) \in B_N$ 和 $1 \le i \le N$，有 $\mathcal{F}_i^{(b)} = \Delta_{d_i}$，且参与者 i 的收益函数定义于式（8）中。

自纳什取得突破以来，对有限（非合作）博弈的研究向多个方向拓展，推动了进一步的扩展、推广与应用，并最终以深远的方式塑造了整个博弈论。因此，不可能对有限博弈相关研究的历史作出简洁、完整且全面的梳理。下面我们回顾与多边纳什均衡存在性研究相关的结果。

其中一条研究路线源于这样一个问题：有限博弈可以有多少个纳什均衡？或者更进一步，所有均衡构成的集合是什么？纳什的著名结果[24] 表明，有限博弈至少有一个均衡。威尔逊 [29, 定理 1] 于 1971 年证明，“一般”的有限博弈总是有奇数个纳什均衡。与此同时，哈萨尼在其 [16] 1973 年的研究中证明，每个具有“一般”收益向量的有限博弈都有有限个均衡。这里，“一般”指除去一个闭包的勒贝格测度为零的集合后，所有的收益向量。对于具有一般收益的博弈，McKelvey 和 McLennan 在 [21]给出了均衡数量的紧上界。关于“非一般”有限博弈的研究，例如见 Sturmfels [26], Datta [11, 10, 12], 以及近期 Portakal 与 Sturmfels 的研究 [25], Abo、Portakal 与 Sodomaco [1]。在众多结果中，我们仅回顾 [10, 定理 1] ，其内容如下：

定理。每个实代数簇都同构于某个三人博弈的（完全混合）纳什均衡集合，也同构于某个 N 人博弈的（完全混合）纳什均衡集合，其中每位玩家都有两种纯策略。

由于“一般的”有限博弈只有有限个纳什均衡，因此其中任何一个都是多方均衡的可能性都很小。另一方面，根据 Datta [10, 定理 1], ，任意实代数簇都是某个有限博弈的纳什均衡集合。因此，可以预期，该簇按多方均衡（1）所作的滤过并非平凡。因此，自然会问：这个族 $\mathcal{F}/B_N$ 是否包含具有 k-侧向均衡的博弈？

鉴于 Datta 关于所谓三人博弈普适性的结果，下面我们构造一个具有 2-侧向纳什均衡的三人有限博弈。

为简化表述，我们借用 Sturmfels [26] 的记号，并将这 3 名参与者记为 A、B 和 C。所有策略空间均重合 $E_A = E_B = E_C = \Delta_1$ 于一维标准单纯形 $\Delta_1 = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \ge 0、y_2 \ge 0、y_1 + y_2 = 1\}$。将参与者 A、B、C 的选择分别记为 a、b、c。现在，我们构造利润向量

$$\mathcal{X} := (X_A(i,j,k), X_B(i,j,k), X_B(i,j,k) : i,j,k \in \{0,1\}) \in \mathbb{R}^{3\cdot 8} \tag{9}$$

使得该博弈具有一个 2-侧向均衡。与经典纳什均衡相比，主要困难在于：对于 2-侧向纳什均衡，我们不再优化线性函数，而是优化二次函数。

事实上，如果对于所有 $u = (u_1, u_2) \in \Delta_1$ 以及所有 $v = (v_1, v_2) \in \Delta_1$，以下不等式均成立，那么策略 $(a, b, c) \in \Delta_1 \times \Delta_1 \times \Delta_1$ 就是一个 2-侧向纳什均衡

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k\in\{0,1\}} X_A(i,j,k) a_i b_j c_k &\ge \sum_{i,j,k\in\{0,1\}} X_A(i,j,k) u_i v_j c_k, \\
\sum_{i,j,k\in\{0,1\}} X_B(i,j,k) a_i b_j c_k &\ge \sum_{i,j,k\in\{0,1\}} X_B(i,j,k) u_i v_j c_k, \\
\sum_{i,j,k\in\{0,1\}} X_A(i,j,k) a_i b_j c_k &\ge \sum_{i,j,k\in\{0,1\}} X_A(i,j,k) u_i b_j v_k,
\end{aligned}$$

$$\sum_{i,j,k\in\{0,1\}} X_C(i,j,k)a_ib_jc_k \geq \sum_{i,j,k\in\{0,1\}} X_C(i,j,k)u_ib_jv_k,$$
$$\sum_{i,j,k\in\{0,1\}} X_B(i,j,k)a_ib_jc_k \geq \sum_{i,j,k\in\{0,1\}} X_B(i,j,k)a_iu_jv_k,$$
$$\sum_{i,j,k\in\{0,1\}} X_C(i,j,k)a_ib_jc_k \geq \sum_{i,j,k\in\{0,1\}} X_C(i,j,k)a_iu_jv_k.$$

等价地，对于所有 $(u_1,\ u_2)$，$(v_1,\ v_2) \in \Delta_1$，均应满足

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j,k\in\{0,1\}} X_A(i,j,k)c_k(a_ib_j - u_iv_j) \geq 0,\\
&\sum_{i,j,k\in\{0,1\}} X_B(i,j,k)c_k(a_ib_j - u_iv_j) \geq 0,\\
&\sum_{i,j,k\in\{0,1\}} X_A(i,j,k)b_j(a_ic_k - u_iv_k) \geq 0,\\
&\sum_{i,j,k\in\{0,1\}} X_C(i,j,k)b_j(a_ic_k - u_iv_k) \geq 0,\\
&\sum_{i,j,k\in\{0,1\}} X_B(i,j,k)a_i(b_jc_k - u_jv_k) \geq 0,\\
&\sum_{i,j,k\in\{0,1\}} X_C(i,j,k)a_i(b_jc_k - u_jv_k) \geq 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

现在，让我们考察是否存在一个利润向量（9），或者换句话说3人有限博弈，使得 $a = b = c = (0,\ 1) \in \Delta_1$ 是与该利润向量相关联的有限博弈的2方纳什均衡。因此，令 a、b 和 c 为常数，不等式组（10）变为

$$\begin{aligned}
&-X_A(1,1,2)u_1v_1 - X_A(1,2,2)u_1v_2 - X_A(2,1,2)u_2v_1 + X_A(2,2,2)(1-u_2v_2) \geq 0,\\
&-X_B(1,1,2)u_1v_1 - X_B(1,2,2)u_1v_2 - X_B(2,1,2)u_2v_1 + X_B(2,2,2)(1-u_2v_2) \geq 0,\\
&-X_A(1,2,1)u_1v_1 - X_A(1,2,2)u_1v_2 - X_A(2,2,1)u_2v_1 + X_A(2,2,2)(1-u_2v_2) \geq 0,\\
&-X_C(1,2,1)u_1v_1 - X_C(1,2,2)u_1v_2 - X_C(2,2,1)u_2v_1 + X_C(2,2,2)(1-u_2v_2) \geq 0,\\
&-X_B(2,1,1)u_1v_1 - X_B(2,1,2)u_1v_2 - X_B(2,2,1)u_2v_1 + X_B(2,2,2)(1-u_2v_2) \geq 0,\\
&-X_C(2,1,1)u_1v_1 - X_C(2,1,2)u_1v_2 - X_C(2,2,1)u_2v_1 + X_C(2,2,2)(1-u_2v_2) \geq 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

显然，在9中满足不等式（$\mathbb{R}^{3\cdot 8}$）的利润向量集合非空，而且显然也是无限的。

总之，在有限博弈的情形下，多方均衡现象并不罕见，应当对其进行系统研究。因此，针对有限博弈的纳什均衡所提出和讨论的所有问题，如今在多边纳什均衡的语境下又获得了新的生命力。

7.3. **微观经济**。受肯尼斯·阿罗和 ′Debreu [2]，经典诺贝尔奖获奖研究的启发，我们建立了一个由 N 生产者和M 消费者组成的国家经济模型。关于微观经济的类似研究方法，还可参阅Henderson和Quandt [17]以及鲍莫尔 [5]的经典著作。然而，这些著作中介绍的模型以及更早的经济模型，大多分别处理生产者、消费者和国家。相反，Arrow和Debreu将这三个经济类别统一到一个模型中，并称之为抽象经济。我们的参与者也由生产者和消费者组成，但国家承担着不同的任务。我们构建了一个由两个无限格拉斯曼流形的笛卡尔积参数化的 $N+M$-参与者博弈族 $G_n(\mathbb{R}^\infty) \times G_m(\mathbb{R}^\infty)$ 作为我们的模型。有关格拉斯曼流形拓扑性质的更多背景信息，请参见 [22, 第 5]节。

生产者在经济中的作用是创造在市场上销售的商品。任何销售商品的公司或个人（我们将服务视为商品），在经济学意义上都是生产者。这些商品由某些投入创造，这些投入统称为生产要素。生产要素的例子包括原材料、基础设施、劳动、企业家精神等。我们不讨论生产要素的具体经济理论，而是假设所有可能的生产要素（ξ_i : $i \in \mathbb{N}$）都已列举。我们选择符号 ξ_i ，因为生产要素的经典记号 x_i 已被参与者 i的策略预留。

经济中的消费者购买商品并消费这些商品，以满足个人需求并获得满足感。例如，消费者可能购买食品、住房和能源，也可能购买奢侈品、便利品和服务。消费者从所购买的商品中获得的所有可能益处，统称为效用 ，每位消费者的目标都是最大化自己的效用。将所有可能的商品（q_i : $i \in \mathbb{N}$）也依次编号。这里我们采用商品 i的经典记号 q_i 。特别是，为了简化起见，我们假设可能的产品数量和可能的商品数量都可数无限。

每位生产者 $i \in [n]$ 的预算有限，因此只能负担生产要素 $\mathcal{B}_i \subseteq \mathbb{R}^\infty$的一个有界子集$\mathbb{R}^\infty$。我们假设每个 $\mathcal{B}_i$ 都是凸集，因为如果生产者负担得起两种生产要素组合，那么也负担得起它们的任意凸组合。此外，不失一般性，我们假设对于每个$i \in [n]$，都有 $0 \in \text{int}(\mathcal{B}_i)$。

在我们的模型中，国家负责确保生产要素的供应并规划生产周期，因此在某种程度上类似于社会主义。国家可以通过建设基础设施、进行城市规划设计、政治与经济规划、立法等来实现这一点。模型通过假设国家选择一个生产要素的 n 维子空间 $U \subseteq \mathbb{R}^\infty$ 来体现国家的职责。我们假设生产者可以在其预算范围内购买可用生产要素的任意线性组合，因此生产者的选择 i 是集合 $E_i^U := U \cap \mathcal{B}$ 中的一个元素。

同样，我们假设国家可以针对商品的一个 m 维子空间 $V \subseteq \mathbb{R}^\infty$ 规划生产。消费者的预算有限，因此设消费者 j （$n+1 \leq j \leq n+m$）的预算空间为 $\mathcal{C}_j \subseteq \mathbb{R}^\infty$。根据前面的同一逻辑，我们可以假设 $\mathcal{C}_j$ 是凸的，且 $0 \in \text{int}(\mathcal{C}_j)$。每位消费者都可以购买其负担得起的商品的任意线性组合，因此消费者 j 的策略空间为 $E_j^V := \mathcal{C}_j \cap V$。

请注意，在我们的模型中，国家无权设定市场价格。与最初的抽象经济相比，这或许更贴近现实；在原模型中，假定由国家设定市场价格。相反，我们将采用一种广为人知的经典市场价格经济模型。

首先，我们来讨论生产者。生产者 i 生产商品 j的生产函数记为 $f_{i,j} : \mathbb{R}^\infty \longrightarrow [0, \infty)$。它取决于生产者 i投入的生产要素 $\xi^{(i)} := (\xi_j^{(i)} : j \in \mathbb{N})$。我们假设，所有生产要素在生产过程中都会被完全消耗，生产者也不会因生产要素浪费而遭受损失。假设生产函数 $f_{i,j}$ 连续且二阶可微，并且必须满足生产要素边际生产力递减定律 [17, 第 3 节1]。这意味着生产函数必须是凹函数。此外，如果没有生产要素，生产者就无法生产，这意味着必然有 $f_{i,j}(0) = 0$。最后，$f_{i,j}$ 对每个坐标都是非递减的，也就是说，如果生产者获得了更多某种资源，而其他资源保持不变，那么他也能生产更多。因此，假设其余坐标保持不变，所有生产函数 $f_{i,j}$ 对每个坐标都是凹且非递减的。

生产者通过按市场价格出售其生产的商品来获取收入。将商品 j 的市场价格记为 p_j。我们假设 p_j 遵循古诺竞争

模型假设 [17, 第 6 节。2]。最初，古诺竞争假设商品p_j： $[0,\infty)$ $\longrightarrow$ $[0,\infty)$的价格函数 j 是国家该商品总生产量的严格单调递减凹函数 j，旨在表示当对某种商品的需求得到满足时，价格会下降。由于我们的模型包含消费者，不同于原始的古诺竞争模型，因此我们可以准确地将市场价格建模为某种商品总需求的严格单调递减凹函数，其中总需求由消费者的消费行为决定。由于商品 j的总需求只是所有消费者对该商品消费量的总和 $\sum_{k=n+1}^{n+m} q_j^{(k)}$ ，因此我们得出，生产者 i的收入 R_i 可表示为

$$R_i = \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j \cdot f_{i,j}$$

回想一下，由于生产者只生产来自有限维子空间U的商品，因此除了有限多个生产函数外，其余生产函数都必须为零。这意味着，收入 R_i 表达式中的求和实际上是有限和。解释生产者承担的成本后，我们马上会对此作出更精确的说明。

每个生产者 i 都有一项与其生产水平无关的固定成本，记为 TFC_i ，表示总固定成本，用于支付建筑维护、会计成本及类似开支。此外，每位生产者 i都必须为其作为投入使用的生产要素付费。这些成本由函数 $\mathrm{TVC}_i\colon \mathrm{R}^\infty \longrightarrow \mathrm{R}$ 表示，即总可变成本。由于假设生产要素的价格恒定，函数 TVC_i 是线性的，可表示为作为投入使用的生产要素数量的线性组合。生产者 $i \in [n]$ 的利润是其收入与成本之差，即

$$\begin{aligned}\theta_i^{(U,V)}\colon E_1^U \times \cdots \times E_n^U \times E_{n+1}^V \times E_{n+m}^V &\longrightarrow \mathbb{R},\\ (\xi^{(1)},\ldots,\xi^{(n)},q^{(n+1)},\ldots,q^{(n+m)}) &\longmapsto \sum_{j\in\mathbb{N}} f_{i,j}(\xi^{(i)})\cdot p_j\Big(\sum_{k=n+1}^{n+m} q_j^{(k)}\Big)\\ &\qquad - \mathrm{TVC}_i(\xi^{(i)}) - \mathrm{TFC}_i\,.\end{aligned}$$

根据乘积法则， θ_i 是凹函数之和，因此为凹函数。

接下来，我们考虑消费者。我们用效用函数 u_j来描述消费者 $n+1 \le j \le n+m$ 的总满足感。由于消费者从购买的商品中获得效用，$u_j\colon \mathrm{R}^\infty \longrightarrow \mathrm{R}$ 取决于他消费的商品组合 $q^{(j)}$ 。严格来说，消费者无须了解其效用函数的具体数值。只需假设消费者能够一致且连续地判断两个可能的商品组合中哪一个更受偏好，或者判断两者是否无差异。这些判断在所有可能的商品组合空间 R^∞上构成一个预序。在这些假设下，德布鲁表示定理 [13] 保证存在一个连续效用函数 u_j ，能够准确反映消费者的偏好。

根据边际效用递减定律 [17, 第 2 节2] ，每个消费者的效用函数都是凹函数 $n+1 \le j \le n+m$。因此，效用函数在每个坐标上也都是凹的。最后，与 Arrow 和 Debreu 一样，我们也允许消费者 j 持有生产者 i的股份，在这种情况下，他可以获得其利润的百分比 $\alpha_{j,i} \in [0,1]$ 。同样，我们也允许消费者共享效用，这意味着一位消费者的购买在一定程度上可能增加另一位消费者的效用。如果消费者 j 受益于消费者 k的效用，我们用相同的记号 $\alpha_{j,k} \in [0,1]$ 表示消费者 j效用的增幅百分比。在经典文献中，这些影响称为外部经济。

最后，我们可以将消费者的 j 收益函数表示如下：

$$\theta_j^{(U,V)}\colon E_1^U \times \cdots \times E_n^U \times E_{n+1}^V \times E_{n+m}^V \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$(\xi^{(1)},\dots,\xi^{(n)},q^{(n+1)},\dots,q^{(n+m)}) \longmapsto u_j(q^{(j)}) + \sum_{k=n+1}^{n+m} \alpha_{j,k}u_k(q^{(n+1)},\dots,q^{(n+m)}) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{j,k}\theta_k(\xi^{(1)},\dots,\xi^{(n)}).$$

同样，由于 θ_j的表达式中的每一项（其中 $n+1 \le j \le n+m$）都是凹的，因此 θ_j也是凹的。

总之，我们在底空间 $B = G_n(\mathbb{R}^\infty) \times G_m(\mathbb{R}^\infty)$ 上定义了一个非合作博弈族，其中有 $N := n+m$ 位参与者，

– 策略空间 $E_1, \dots, E_n$ 是向量丛 $V_1 =$ 全空间的子集 $\cdots = V_n$，该向量丛是关于投影映射 $G_n(\mathbb{R}^\infty) \times G_m(\mathbb{R}^\infty) \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty)$ 的典范向量丛 $E(\gamma^n) \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty)$ 的拉回，– 策略空间 $E_{n+1}, \dots, E_{n+m}$ 是向量丛 $V_{n+1} = \cdots = V_{n+m}$ 全空间的子集，该向量丛是关于投影映射 $G_n(\mathbb{R}^\infty) \times G_m(\mathbb{R}^\infty) \longrightarrow G_m(\mathbb{R}^\infty)$ 的典范向量丛 $E(\gamma^m) \longrightarrow G_m(\mathbb{R}^\infty)$ 的拉回，并且 – 策略空间的纤维非空、凸且紧。

由于收益函数是凹函数，推论 6.9 的所有假设都已满足，唯独 B 是有限维可定向流形这一点除外。为解决这一问题，我们进行如下处理。

令 k 为满足 $1 \le k \le N$ 的整数，并令 $d \gg 1$ 为一个非常大的整数，它将取决于整数参数 n、m和 k。考虑将 B 用其子空间 B_d 进行“近似”：$= G_n(\mathbb{R}^d) \times G_m(\mathbb{R}^d)$，并令 $V_1^d = \cdots = V_n^d$和 $V_{n+1}^d = \cdots = V_{n+m}^d$ 分别为 $V_1 = \cdots = V_n$ 和 $V_{n+1} = \cdots = V_{n+m}$ 在 B_d上的限制向量丛。现在， B_d 是一个有限维 $\mathbb{F}_2$-可定向流形。于是，根据推论 6.9，如果单项式

$$e(V_1^d)^{\xi(N,k)} \cdots e(V_N^d)^{\xi(N,k)} = w_n(V_1^d)^{\xi(N,k)} \cdots w_n(V_n^d)^{\xi(N,k)} w_m(V_{n+1}^d)^{\xi(N,k)} \cdots w_n(V_{n+m}^d)^{\xi(N,k)} \neq 0$$

在 $H^*(B_d; \mathbb{F}_2)$ 中不为零，则存在 $(U, V) \in B_d$，使得相应的非合作博弈具有一个 k方纳什均衡。这里， $w_i(V)$ 表示向量丛 V的第 i个斯蒂费尔–惠特尼类，并且众所周知，$w_{\dim(V)}(V)$与 V 的 $\mathbb{F}_2$欧拉类一致。

回顾一下， B 的上同调可描述为没有任何截断的多项式代数，即

$$H^*(B;\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[w_1(\gamma^n),\dots,w_n(\gamma^n),w_1(\gamma^m),\dots,w_m(\gamma^m)],$$

并且 $H^*(B_d;\mathbb{F}_2)$“近似于” $H^*(B;\mathbb{F}_2)$。因此，对于每个 $n, m, 1 \le k \le n+m$，满足 $N = m+n$，都存在一个整数 $d \gg 1$，使得

$$w_n(V_n^d)^{\xi(N,k)} w_m(V_{n+1}^d)^{\xi(N,k)} \cdots w_n(V_{n+m}^d)^{\xi(N,k)} \neq 0.$$

现在，根据推论 6.9，对于这些参数，存在 $(U, V) \in B_d \subseteq B$，使得相应的非合作博弈具有一个 k-方纳什均衡。注意， k 是任意的。

从经济学角度来说，这意味着存在一个可用生产要素的子空间V^* 和一个计划生产商品的子空间 U^*，它们能够保证国家经济存在任意高阶方纳什均衡。因此，如果国家能够确保 V^* 生产要素的供应，并规划生产 U^* 商品，就能确保其经济中存在任意高阶方均衡。根据定义，更高阶方均衡会使规模更大的玩家群体也不愿偏离均衡策略。对国家而言，这意味着没有理性的玩家群体会偏离均衡策略，从而确保经济的稳定性和可预测性。

参考文献

[1] Hirotachi Abo、Irem Portakal 和 Luca Sodomaco，《纳什均衡的向量丛方法》，arXiv 预印本，arXiv:2504.03456（2025），35页。[2] Kenneth J. Arrow 和 Gerard Debreu，《竞争经济均衡的存在性》，Econometrica 22（1954年），第3期，265–290页。[3] Michael F. Atiyah，《 K-理论》，W. A. Benjamin, Inc.，纽约—阿姆斯特丹，1967年，D. W. Ander- son 讲义。[4] Jean-Pierre Aubin 和 H´el`ene Frankowska，《集值分析》，Birkh¨auser，2009年。[5] William J. Baumol，《经济理论与运筹分析》，第2版，Prentice-hall，恩格尔伍德克利夫斯，1965年。[6] Claude Berge，《拓扑空间》，Dover Publications, Inc.，米尼奥拉，纽约州，1997年。[7] Matija Blagojevi´c，《纳什均衡问题：超越凸性》，硕士论文，柏林自由大学，德国柏林，2024年9月，42页。[8] Matija Blagojevi´c 和 Christof Sch¨utte，《广义纳什均衡问题的拓扑学》，arXiv 预印本，arXiv:2507.03753（2025），13页。[9] Pavle V. M. Blagojevi´c、Benjamin Matschke 和 G¨unter M. Ziegler，《彩色 Tverberg–Vre´cica 型问题的最优界》，Adv. Math. 226（2011年），第6期，5198–5215页。[10] Ruchira S. Datta，《纳什均衡的普适性》，Math. Oper. Res. 28（2003年），第3期，424–432页。MR 1997243[11] ，《利用计算机代数求纳什均衡》，《2003年国际符号与代数计算研讨会论文集》，ACM，纽约，2003年，第74–79页。[12] ，《利用多项式代数求有限博弈的所有纳什均衡》，Econom. Theory 42（2010年），第1期，55–96页。[13] Gerard Debreu，《用数值函数表示偏好排序》，《决策过程》，Thrall, Robert M.; Coombs, Clyde H.; Raiffa , Howard（编）（R. M Thrall、C. H Coombs 和 R. L. Davis 编），John Wiley and Sons Inc.，1954年，第173–178页。[14] Francisco Facchinei 和 Christian Kanzow，《广义纳什均衡问题》，Ann. Oper. Res. 175（2010年），177–211页。[15] Drew Fudenberg 和 Jean Tirole，《博弈论》，麻省理工学院出版社，剑桥，马萨诸塞州，1991年。[16] J. C. Harsanyi，《均衡点个数的奇数性：一个新的证明》，Internat. J. Game Theory 2（1973年），235–250页。[17] James Mitchell Henderson 和 Richard E. Quandt，《微观经济理论：数学方法》，经济学手册丛书，McGraw-Hill，纽约，1958年。[18] Nikaido Hukukane 和 Kazuo Isoda，《关于非合作凸博弈的注记》，Pac. J. Math. 5（1955年），第5期，807–815页。[19] Dale Husemoller，《纤维丛》，第3版，数学研究生教材，第20卷，施普林格出版社，纽约，1994年。[20] Tatsuro Ichiishi，《经济分析的博弈论》，Academic Press，1983年。[21] Richard D. McKelvey 和 Andrew McLennan，《正则完全混合纳什均衡的最大数量》，J. Econom. Theory 72（1997年），第2期，411–425页。[22] John W. Milnor 和 James D. Stasheff，《特征类》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1974年，《数学年刊研究》，第76号。[23] John F. Nash, Jr.，《非合作博弈》，ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，1950年，博士论文——普林斯顿大学。[24] ，《非合作博弈》，Ann. of Math. (2) 54（1951年），286–295页。[25] Irem Portakal 和 Bernd Sturmfels，《依赖均衡的几何学》，Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste 54（2022年），第5号文章，26页。[26] Bernd Sturmfels，《求解多项式方程组》，CBMS 数学区域会议丛书，第97卷，数学科学会议委员会，华盛顿特区；由美国数学学会出版，普罗维登斯，罗得岛州，2002年。.[27] Leopold Vietoris，《关于紧致空间的高阶连通性及一类保持连通性的映射》，Math. Ann. 97（1927年），第1期，454–472页。[28] Douglas B. West，《图论导论》，第2版，图论精选书目，Pearson，2001年。[29] Robert Wilson，《计算 N 人博弈的均衡》，SIAM J. Appl. Math. 21（1971年），80–87页。电子邮箱：matib03@zedat.fu-berlin.de 柏林自由大学，14195 柏林，德国 电子邮箱：schuette@zib.de

Zuse 研究所 ，14195 柏林 ，德国