# $V$-群的代数幂运算与作用可表示性

MARIA MANUEL CLEMENTINO与ANDREA MONTOLI

Abstract. 我们证明：当 $V$ 为笛卡尔量子化时， $V$-群的范畴——特别是预序群的范畴——相对于作为积 $V$-范畴结构之基础的点类是局部代数笛卡尔闭的。我们通过如下观察得到这一结论：这些点对应于从被视为单对象 $V$-范畴的 $V$-群到 $V$-群的范畴 $V$-Grp的($V$-Cat)-充实函子。此外，我们证明，对应于作为积 $V$-范畴结构之基础的点的作用是可表示的。

arXiv:2602.09241v1 [math.CT] 9 Feb 2026

## 1. Introduction

原模范畴 [3]的概念使得一大类结构的同调性质得以统一描述，其中包括群、环、李代数等非阿贝尔代数结构，以及初等拓扑斯的对偶。为了更好地区分这类范畴的行为，文献中考虑了一些附加条件。其中两个特别强的条件是作用可表示性 [2] 与局部代数笛卡尔闭性 [11]。前者从范畴论角度描述了如下事实：群之间的分裂满射对应于群作用，且这些作用可表示为到自同构群的同态。后者是局部笛卡尔闭性概念的代数对应物，通过用所谓的点的纤维化替换基本纤维化而得到。

近来人们发现，若将关注范围限制在适当的点类上，若干非原型模范畴仍保留了原型模范畴的大部分良好性质。这促成了 $S$-原型模范畴 [7], 的概念，其中 $S$ 是一个拉回稳定的点类。 $S$-原型模范畴的典型例子是幺半群范畴 Mon，其中的点类 $S$ 由 Schreier 点 [15]构成。在 [8]中，人们探讨了预序群范畴 OrdGrp 的一些范畴性质。特别是，人们发现，对于点类 $S$ 而言，OrdGrp 是 $S$-原型模范畴；该类中的点，其定义域可视为一个半直积，并配备乘积预序。随后，[8]中研究的一些性质在 [9] 中被推广到了 $V$-群，其中 $V$ 是一个交换幺量子化。预序群的情形是这一一般情形的一个实例，此时 $V = \mathbf{2}$ 是二元序 $0 \leq 1$。

此前提到的其他概念的相对版本已在 $S$-原型模范畴 [5, 16] 中得到研究。本文旨在证明：当 $V$ 是笛卡尔量子化（即相对于$V$中的序， $V$是笛卡尔幺半范畴）时， $V$-群的范畴 $V$-Grp 相对于其定义域具有积结构的点类 $S$ 是 $S$-原模的。此外，相对于同一类 $S$，它既是 $S$作用可表示的，也是 $S$局部代数笛卡儿闭的。此结论是将针对 [5, 16] 中幺半群范畴所证明的类似结果推广到 $V$-群的情形而得出的。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 06F15；18D20；18B35；18D15；18E13。
*Key words and phrases.* $V$-群， $S$-原模范畴，作用可表示性，局部代数笛卡尔闭性。

## 2. Protomodular and $S$-protomodular categories

我们先回顾原模范畴 [3] 的定义。表达这一概念有几种等价方式。对我们的目的而言，最合适的一种利用了所谓点的纤维化的一些性质。这里的点 指带有指定裂分的裂分满态射。更明确地说，范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个点 是一个对 $(f, s)$，其中 $f\colon A \to B$, $s\colon B \to A$，且 $fs = 1_B$。两个点 $(f, s)$ 和 $(f', s')$ 之间的态射是由一对态射 $(g, h)$ 构成，并满足下图向上和向下均交换：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & A' \\ {\scriptstyle f}\downarrow\uparrow{\scriptstyle s} & & {\scriptstyle f'}\downarrow\uparrow{\scriptstyle s'} \\ B & \xrightarrow[h]{} & B'. \end{array}$$

若范畴 $\mathcal{C}$ 具有拉回，则函子

$$\mathrm{cod}\colon \mathrm{Pt}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$$

其定义域为 $\mathcal{C}$中的点范畴，并将每个点对应到其余域，是一个称为点的纤维化的纤维化。

**定义 2.1** ([3])。 具有拉回的范畴 $\mathcal{C}$ 若点的纤维化中的所有基变换函子都是保守的，则称为原模范畴。

对于有基点范畴，原模性等价于裂分短五引理成立。这一概念涵盖了非阿贝尔代数结构的一些关键性质，例如群、环和李代数，但也包括若干代数性较弱的例子，例如任意初等托普斯的对偶。为了以范畴论的方式区分这些例子，不同作者考虑了一些附加条件。我们尤其关注以下条件：

**定义 2.2** ([11])。 有限完备范畴 $\mathcal{C}$ 称为局部代数笛卡尔闭，简称 LACC，若对于每个态射 $h\colon X \to Y$，点的纤维化 $h^*\colon \mathrm{Pt}_Y(\mathcal{C}) \to \mathrm{Pt}_X(\mathcal{C})$ 中相应的基变换函子都有一个右伴随。

这是一个相当严格的条件，许多原型模范畴的例子都不满足。具有这一性质的主要例子是群范畴，以及固定交换环上的李代数范畴。还有一些其他范畴，对于点的纤维化中的某些良好子纤维化也满足这一性质。为了准确表达这一相对条件，我们回顾以下定义：

**定义 2.3** ([7])。 设 $S$ 是有限完备范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个点类，且该点类在沿任意态射作拉回时保持不变。若满足以下条件，则称范畴 $\mathcal{C}$为 $S$-原型模：

**(1)** $S$ 中的每个点（$f, s$）都是强点，这意味着，在每个拉回图中

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\bar{g}} & A \\ {\scriptstyle \bar{f}}\downarrow\uparrow{\scriptstyle \bar{s}} & & {\scriptstyle f}\downarrow\uparrow{\scriptstyle s} \\ C & \xrightarrow[g]{} & B, \end{array}$$

态射 $\bar{g}$ 与 $s$ 是联合极端满态射；

**(2)** $\mathrm{SPt}(\mathcal{C})$ 在 $\mathrm{Pt}(\mathcal{C})$ 中对有限极限封闭。

类 $S$ 确定了点的纤维化的一个子纤维化：

$$S\text{-cod}\colon \mathrm{SPt}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C},$$

并且，在每个 $S$-原模范畴中，该子纤维化的基变换函子都是保守的 [7, 定理 3.2]。因此，特别地，每个原模范畴相对于 $S$ 所有点这一类，都是 $S$-原模的。

$S$-原模范畴的典型例子是幺半群范畴 Mon，相对于 $S$ Schreier 点这一类：

**定义 2.4** ([15])。幺半群范畴 Mon 中的一个点 $A \overset{s}{\underset{f}{\prec\succ}} B$称为 ***Schreier*** 点，如果对于任意 $a \in A$，在 $f$ 的核 Ker($f$) 中存在唯一的 $\alpha$，使得 $a = \alpha \cdot sf(a)$。

如 [15], 所示，Schreier 点对应于经典的幺半群作用，其中幺半群 $B$ 在幺半群 $X$ 上的作用是一个幺半群同态 $B \to$End($X$)，其中 End($X$) 是 $X$的自同态幺半群。这种对应关系通过半直积构造得到，推广了众所周知的事实：群的分裂满射对应于群作用。在幺半群的情形中，通过将研究限制于 Schreier 分裂满射，这种对应关系得以保留。 [5] 中指出，Mon 中 Schreier 点的类 $S$ 满足使 Mon 成为 $S$-原模范畴的所有条件。此外，群范畴 Grp 的许多代数性质和同调性质在 Mon 中仍然成立，只需将研究限制于 Schreier 点。

另一个与我们的目的相关的 $S$-原模范畴示例是 OrdGrp，其对象是预序群，即配备了预序（即自反且传递的关系）且群运算保序的群；其态射则是保序群同态。 [8]探讨了 OrdGrp 的一些范畴性质。特别地，那里注意到 OrdGrp 拥有一个良好的点类，使其成为一个 $S$-原模范畴。下面简要描述这一点类。在 OrdGrp 中，一个分裂扩张（连同其核）

$$X \xrightarrow{k} A \underset{p}{\overset{s}{\leftrightarrows}} B$$

满足：在 Grp 中， $A$ 同构于半直积 $X \rtimes_\varphi B$，且该分裂扩张同构于

$$X \xrightarrow{\langle 1,0\rangle} X \rtimes_\varphi B \underset{\pi_B}{\overset{\langle 0,1\rangle}{\leftrightarrows}} B. \tag{2.i}$$

正如 [8], 中所观察到的，在群 $X \rtimes_\varphi B$ 上可能存在许多预序结构，使 (2.i) 成为 OrdGrp 中的一个分裂扩张。令 $S$ 为 OrdGrp 中满足以下条件的点类 (2.i)：乘积投影 $\pi_X\colon X \rtimes_\varphi B \to X$ 是保序的（除非作用 $\varphi$是平凡的，否则它不是群同态）。这等价于说， $X \rtimes_\varphi B$ 上的预序是乘积预序；或者说，将该点限制在正锥上时，我们得到一个幺半群的 Schreier 点。 [8]证明了，关于这一点类 $S$，OrdGrp 是 $S$-原模的。如果将 OrdGrp 替换为关于笛卡尔量子化 $V$的 $V$-群范畴，下一节将证明同样的结论仍然成立。

局部代数笛卡尔闭性等性质，可以在 $S$原模范畴的背景下研究，方法是将注意力限制在点纤维化的子纤维化 $S$-cod: SPt($\mathcal{C}$) $\to \mathcal{C}$ 上：

**定义 2.5** ([16])。若原模范畴 $S\,\mathcal{C}$ 是 $S$局部代数笛卡尔闭的，或称 $S$-$LACC$，则对于每个态射 $h$: $X \to Y$，子纤维化 $S$-cod: 所对应的基变换函子:

$$h^*\colon \mathrm{SPt}_Y(\mathcal{C}) \to \mathrm{SPt}_X(\mathcal{C})$$

有一个右伴随。

已在 [16, 命题 4.4] 中证明，Mon 关于 $S$ 这类 Schreier 点是 $S$-局部代数笛卡儿闭。我们的一个主要目标是证明，同样的论证可以推广到预序群，更一般地说，推广到 $V$-群，至少当 $V$ 是笛卡儿量子化时如此。

另一个常用于对原型模范畴进行分类的附加条件是作用可表示性:

**定义 2.6** ([2])**.** 若带基点原模范范畴 $\mathcal{C}$ 满足以下条件，则称其为作用可表示：对每个对象 $X$，函子 Pt( $X$): $\mathcal{C} \to$ Set 将 $Y \in \mathcal{C}$ 映射到以 $Y$ 为余域、以 $X$ 为核的分裂扩张之同构类所成的集合，且该函子可表示。

这一条件也相当严格。同样，主要例子包括群范畴，其表示对象是自同构群；以及李代数范畴，其表示对象是导子的李代数。我们可以考虑这一概念的相对版本，即相对于一类良好的 $S$ 点:

**定义 2.7.** 我们称一个带基点的 $S$-原模范畴 $\mathcal{C}$ 是 $S$-作用可表示的，如果对每个对象 $X$，函子 SPt( $X$): $\mathcal{C} \to$ Set 将 $Y \in \mathcal{C}$ 映射到 $S$ 中以 $Y$ 为余域且以 $X$ 为核的分裂扩张的同构类集合，并且该函子可表示。

已在 [5, 第 5]节证明，对于 $S$ 这一类 Schreier 点，Mon 是 $S$-作用可表示的。我们将证明，当 $V$ 是笛卡尔量子化时，$V$-群范畴对某个合适的类 $S$是 $S$-作用可表示的。特别地，这一结论适用于预序群。（关于预序群中其他特殊点类的可表示性研究，请参见 [10, 第 5]节。）

## 3. $V$-categories and $V$-groups

设 $V$ 是一个交换幺量子化。这意味着 $V$ 是一个完备格，具有顶元素 $\top$ 和底元素 $\bot$，并配备一个对称且结合的张量积 $\otimes$，其单位元为 $\kappa$，且该张量积保持任意并。我们还假设任意并对有限交满足分配律。

从集合 $X$ 到集合 $Y$的 $V$-关系 是一个映射 $X \times Y \to V$。$V$-范畴 是一个有序对 $(X, a)$，其中 $X$ 是一个集合，且 $a\colon X \nrightarrow X$ 是一个 $V$- 关系，满足

$$1_X \leq a \text{ and } a \cdot a \leq a.$$

上述两个条件也可以等价地表述为:

(R): $(\forall\, x \in X) \quad \kappa \leq a(x, x)$,
(T): $(\forall\, x, x', x'' \in X) \quad a(x, x') \otimes a(x', x'') \leq a(x, x'')$.

性质 (R) 称为自反性 ，而 (T) 称为传递性；它们也分别称为单位元和结合律 公理。

一个 $V$-函子 $f\colon (X, a) \to (Y, b)$ 是一个映射 $f\colon \ X \to Y$，满足 $f \cdot a \leq b \cdot f$，或者换句话说 ，

$$(\forall x, x' \in X) \quad a(x, x') \leq b(f(x), f(x')).$$

$V$-范畴和 $V$-函子构成一个范畴，记作 $V$-Cat。

$V$-群是一个带有群结构（$X, +\colon X\times X\to X, i\colon X\to X, 0\colon I\to X$）的 $V$-范畴（$X, a$），满足 $+\colon (X,a)\otimes(X,a)\to(X,a)$ 是一个 $V$-函子。我们注意到，$0\colon (1,\kappa)\to(X,a)$，因为从 $(1,\kappa)$ 到 $(X,a)$ 的每个映射都是一个 $V$- 函子；但我们并不要求逆映射 $i\colon (X,a)\to(X,a)$ 是一个 $V$-函子。尽管我们的群不一定是阿贝尔群，我们仍将使用加法记号。两个 $V$-群之间的 $V$-同态 $f\colon (X,a)\to(Y,b)$ 是一个同时也是群同态的 $V$- 函子。我们将 $V$-Grp 记作由 $V$- 群和 $V$- 同态组成的范畴。

**例3.1**。 (1) 若 $V=\mathbf{2}=(\{\bot,\top\},\leq)$ 且 $\otimes=\wedge$，则 **2**-Cat 是预序集及单调映射构成的范畴 Ord，而 **2**-Grp 是文献 [8]中研究的预序群及保序群同态构成的范畴 OrdGrp。

(2) 当 $V=P_+=([0,\infty],\geq)$ 是完备实半直线，且 $\otimes=+$，于是 $\hom(u,v)=v\ominus u=\max(v-u,0)$，$P_+$-Cat 是 Lawvere（广义）度量空间及非扩张映射构成的范畴 Met，而 $P_+$-Grp 是范畴 MetGrp，其对象是（广义）度量群，即带有群运算且该运算为非扩张映射的 Lawvere 广义度量空间；其箭头则是非扩张群同态。

(3) 若改取 $P_{\max}$，使得在 $([0,\infty],\ \geq)$ 中取 $\otimes=\wedge$（注意，在实数的通常序下，这是最大值），则 $P_{\max}$-Cat 是超度量空间与非扩张映射构成的范畴 UMet，而 $P_{\max}$-Grp 是（广义）超度量群与非扩张群同态构成的范畴 UMetGrp。

我们尤其关注这样一种特殊情形：$V$ 是笛卡尔的，也就是说，张量积 $\otimes$ 就是笛卡尔积 $\wedge$，且 $\kappa=\top$。这种张量的一个关键性质是其幂等性，即对所有 $u\in V$，都有 $u\otimes u=u$。事实上，其幂等性可以按以下意义刻画它。

**引理 3.2**。若 $V$ 是一个交换幺量子化，具有幂等张量，且其单位元$\kappa$ 是 $\top$，那么 $V$ 是笛卡尔的。

证明。假设 $\kappa=\top$ 和 $\otimes$ 是幂等的。首先指出，如果 $u,\ v\in V$，那么 $u\leq v$当且仅当 $u\otimes v=u$。事实上，如果 $u\leq v$，那么 $u=u\otimes u\leq u\otimes v\leq u$；反之，如果 $u\otimes v=u$，那么 $u=u\otimes v\leq k\otimes v=v$。

现在我们知道，当 $\kappa=\top$, $u\otimes v\leq u\wedge v$时成立；为了证明逆命题，我们注意到，如果$u,\ v,\ w\in V$满足 $w\leq u$和 $w\leq v$，那么 $w\otimes(u\otimes v)=(w\otimes u)\otimes v=w\otimes v=w$，因此 $w\leq u\otimes v$。□

即使对于非幂等张量积，也可以考虑 $V$-群结构（$X,\ a$），它们是幂等的，即对于所有 $x,\ x'\in X$，都有 $a(x,\ x')\otimes a(x,\ x')=a(x,\ x')$。例如，每个具有预序的 $V$-群都是这种情况（即 $a(x,\ x')$ 要么是 $\bot$，要么是 $\top$）。

## 4. Action representability for $V$-groups

从现在起，我们假设 $V$ 是整体量子化，也就是说 $\kappa=\top$。正如在 [9],中所观察到的，这意味着 $V$-Grp 是一个带基点范畴。设

$$(X,a)\xrightarrow{\langle 1,0\rangle}(X\rtimes_\varphi Y,c)\underset{\pi_2}{\overset{\langle 0,1\rangle}{\rightleftarrows}}(Y,b) \tag{4.i}$$

是 $V$-Grp 中的一个分裂扩张，其中我们已将中间群与关于群作用 $\varphi\colon Y\to \mathrm{Aut}(X)$ 的群 $X$ 和 $Y$ 的半直积等同起来。这

这意味着，对于每个 $y \in Y$， $\varphi_y\colon (X,a) \to (X,a)$ 都是一个 $V$-函子 [9, 引理 7.1]。我们希望考察 $V$-Grp 中满足以下条件的点类 $S$：在 (4.i) 中， $c$ 是积结构 $a \otimes b$。对于所有群作用 $\varphi\colon Y \to \mathrm{Aut}(X)$，该积结构并不在 $V$-Grp 中给出分裂扩张。不过，能产生这种结果的作用可以用一个简单的特征来描述：

**定理 4.1** ([9], 定理 7.2)。设 $X$ 和 $Y$ 为群， $\varphi\colon Y \to \mathrm{Aut}(X)$ 为一个群作用，并设 $X \rtimes_\varphi Y$ 为在 Grp 中由 $\varphi$ 定义的半直积。以下断言等价：

*(i)* $(X,a) \xrightarrow{\langle 1,\, 0\rangle} (X \rtimes_\varphi Y, a\otimes b) \xrightarrow{\pi_2} (Y,b)$ $\langle 0\ 1\rangle$ 是 $V$-*Grp* 中的分裂扩张；*(ii)* 映射 $\varphi\colon (X\otimes Y, a\otimes b) \to (X\otimes Y, a\otimes b)$，其中 $(x,y) \mapsto (\varphi_y(x)\ y)$，是一个 $V$-函子。

给定一个 $V$-群 $(X,\ a)$，令

$$V\text{-}\mathrm{Aut}(X) = \{f\colon X \to X \mid f \text{ is an isomorphism in } V\text{-}\mathsf{Grp}\}.$$

$V$-Aut($X$) 可赋予以下结构 $c$，从而使其成为一个 $V$-群：

$$\forall\, f,g \in V\text{-}\mathrm{Aut}(X) \quad c(f,g) = \bigwedge_{x\in X} a(f(x),g(x)).$$

事实上， $V$-Aut($X$) 上的这一结构继承自幺半闭范畴 $V$-Cat 中指数对象 $[X,X]$ 的结构（例如参见 [13]）。因此我们可以立即得出，求值映射 ev： $X \otimes V\text{-}\mathrm{Aut}(X) \to X$，定义为 ev$(x,\ f) = f(x)$，是一个 $V$-函子。

定理 4.1 可补充如下：

**命题 4.2**。设 $(X,a)$ 和 $(Y,b)$ 为 $V$-群， $\varphi\colon Y \to \mathrm{Aut}(X)$ 为一个群作用，并设$X \rtimes_\varphi Y$ 为在 Grp 中由 $\varphi$ 定义的半直积。假设$Y$ 的 $V$-范畴结构是幂等的。以下断言等价：

*(i)* $(X,a) \xrightarrow{\langle 1,\, 0\rangle} (X \rtimes_\varphi Y, a\otimes b) \xrightarrow{\pi_2} (Y,b)$ $\langle 0\ 1\rangle$ 是 $V$-*Grp* 中的一个分裂扩张；*(ii)* 映射 $\varphi\colon (X\otimes Y, a\otimes b) \to (X\otimes Y, a\otimes b)$，其中 $(x,y) \mapsto (\varphi_y(x)\ y)$，是一个 $V$-函子；*(iii)* 群作用 $\varphi\colon Y \to$ *Aut(X)* 可以余限制为一个 $V$- 同态 $\varphi\colon Y \to V$-*Aut(X)*。

证明。我们只需证明 (ii) 与 (iii) 之间的等价性。

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)：对每个 $y \in Y$， $\varphi_y\colon (X,a) \to (X,a)$ 是一个 $V$-函子，作为下列 $V$-函子的复合

$$X \cong X\otimes 1 \xrightarrow{1_X\otimes y} X\otimes Y \xrightarrow{\overline{\varphi}} X\otimes Y \xrightarrow{\pi_1} X\ ,$$

因此，每个 $\varphi_y$ 都是 $V$-Grp 中的同构。再次利用 $\varphi$ 是一个 $V$-函子这一事实，且对每个 $x \in X$，下面的复合也是一个函子，

$$Y \cong 1\otimes Y \xrightarrow{x\otimes 1_Y} X\otimes Y \xrightarrow{\overline{\varphi}} X\otimes Y \xrightarrow{\pi_1} X\ ,$$

我们得到，对于每个 $y,\ y' \in Y$, $b(y,\ y') \le a(\varphi_y(x)\varphi_{y'}(x))$，由此可得

$$b(y,y') \le \bigwedge_{x\in X} a(\varphi_y(x),\varphi_{y'}(x)) = c(\varphi_y,\varphi_{y'}).$$

(iii) $\Longrightarrow$ (ii)：利用以下事实：对于所有 $y$， $\varphi_y$ 都是一个 $V$-函子，因此我们得到

$$\forall\, x,x' \in X \quad a(x,x') \le a(\varphi_y(x),\varphi_y(x')).$$

此外，由于根据假设 $\varphi$ 是一个 $V$-函子，我们有

$$\forall\, y, y' \in Y \quad b(y, y') \leq \bigwedge_{z \in X} a(\varphi_y(z), \varphi_{y'}(z)).$$

结合这两个事实，并利用 $b$的幂等性，我们得到

$$a(x,\ x') \otimes b(y,\ y') = a(x, x') \otimes b(y, y') \otimes b(y, y') \leq a(\varphi_y(x), \varphi_y(x')) \otimes a(\varphi_y(x'), \varphi_{y'}(x')) \otimes b(y, y')$$

根据 $\otimes$的传递性，它小于或等于

$$a(\varphi_y(x), \varphi_{y'}(x')) \otimes b(y, y').$$

□

当 $V$是笛卡尔量子化时，所有 $V$-群都具有幂等的 $V$-范畴结构。在这种特殊情况下，前述定理告诉我们，积$V$-范畴结构所对应的分裂扩张 **(4.i)**，与 $V$-同态 $\varphi\colon\ Y \to V\text{-Aut}(X)$ 相对应。换言之，范畴 $V$-Grp 相对于点的良好类 $S$是作用可表示的。为了精确陈述这一事实，我们首先需要指出，$V$-Grp 是一个$S$-原模范畴：

**命题 4.3**。若 $V$ 是笛卡尔量子化，则范畴 $V$-Grp 相对于其定义域具有积结构的点类 $S$，是 $S$-原模的。

证明。笛卡尔量子化上的积 $V$-范畴结构显然是拉回稳定的，并且在有限极限下封闭，因此类 $S$ 沿任意态射的拉回是稳定的，并且在有限极限下封闭。现设 **(4.i)** 为 $S$ 中的一个点。考虑如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} (X,a) & \xrightarrow{\langle 1,0\rangle} & (X \rtimes_\varphi Y, a \otimes b) & \xleftarrow{\langle 0,1\rangle} & (Y,b), \\ & \searrow^{f} & \uparrow{\scriptstyle m} & \swarrow_{g} & \\ & & Z & & \end{array}$$

其中 $m$ 是单态射。由于 Grp 是原模范畴，$m$是群同构。因此，我们可以将 $V$-群 $Z$ 等同于带有适当 $V$-范畴结构 $c$ 的 $(X \rtimes_\varphi Y, c)$，并将 $m$ 等同于恒等映射，从而 $c \leq a \otimes b$。[9] 中的命题 7.6 进而迫使$c = a \otimes b$，因为半直积上任何相容的 $V$-范畴结构都大于或等于积结构。因此 $m$ 是 $V$-群的同构。这表明 $S$ 中的每个点都是强的。□

**注记 4.4.** 在前一命题的证明中，我们仅利用量子化$V$ 是笛卡尔的这一事实来证明类 $S$ 在拉回下稳定且在有限极限下封闭。关于 $S$ 中每个点都是强的这一证明实际上对任意整体量子化都成立。

结合命题 4.2 和 4.3，我们立即得到以下结论：

**定理 4.5.** 若 $V$ 是笛卡尔的，则范畴 $V$-Grp 相对于 $S$ 类点（它们是积 $V$-范畴结构下的点），是 $S$-作用可表示的。函子 $\mathrm{SPt}(\ X)$ 的表示对象是 $V\text{-}\mathrm{Aut}(X)$。

前一个定理扩展了这样一个事实——我们在 [9, 第 8] 节中观察到，当$V$ 是笛卡尔的时，$V$-Grp$^{\mathrm{sym}}$（即对称 $V$-群的范畴，其中 $V$-群的 $V$-范畴结构是对称的）是作用可表示的。事实上，在 $V$-Grp$^{\mathrm{sym}}$ 中，每个点都具有积$V$-范畴结构，因此在这种情况下，我们的类 $S$ 与所有点构成的类一致。

## 5. $V$-Grp is $S$-LACC

在 [16, 命题 4.4]中，为证明 Mon 关于 Schreier 点类 $S$ 是 $S$-LACC，所用的论证依赖于这样一个观察：幺半群同态 $\varphi\colon Y \to \mathsf{End}(X)$，等价地可视为函子 $\Phi\colon Y \to \mathsf{Mon}$，其中幺半群 $Y$ 被看作一个只有一个对象的范畴。对于 $V$ 为笛卡尔的 $V$-群，也有一个非常相似的事实。事实上，任何$V$-群$(Y, b)$都可看作只有一个对象 $*$的范畴，并且具有规范的($V$-Cat)-富化，因为 $Y(*,*) = Y$ 是一个 $V$- 范畴。此外，$V$-Grp 可以按如下方式进行 ($V$-Cat)- 富化：给定~两个 $V$- 群 $(Z, d)$和$(W, d')$，$V$-Grp$((Z, d), (W, d'))$具有自然的 $V$-范畴结构 $d$，其定义如下：

$$\tilde{d}(f, g) = \bigwedge_{z \in Z} d'(f(z), g(z)),$$

同样，这继承自 $[(Z,\ d),\ (W,\ d')]$ 在 $V$-Cat 中的指数对象。因此，给定一个 $V$-同态$\varphi$: $Y \to V$-Aut$(X)$，其中 $(X,\ a)$ 和 $(Y,\ b)$ 是 $V$-群，映射

$$Y(*,*) \to V\text{-}\mathsf{Grp}(X, X)$$

将 $y$ 发送到 $\varphi_y$ 是一个 $V$-函子，因为根据假设，$\varphi\colon\ Y \to V$-Aut$(X)$ 是一个 $V$-函子，因此

$$b(y, y') \leq \bigwedge_{x \in X} a(\varphi_y(x), \varphi_{y'}(x)).$$

因此，我们得到一个 (V-Cat)-富化函子 $\Phi\colon (Y,\ b) \to V$-Grp，它将 $Y$ 中唯一的对象 $*$ 发送到 $(X,\ a)$，并将 $y \in Y(*,\ *)$ 发送到 $\varphi_y$。

我们用 $V$-Grp$^Y$ 表示由 ($V$-Cat)-富化函子 $(Y,\ b) \to V$-Grp 及其间的自然变换构成的范畴。

**定理 5.1.** 若 $V$ 是笛卡尔的，则范畴 $V$-Grp相对于由乘积 $V$-范畴结构下的点组成的类$S$，是 $S$-局部代数笛卡儿闭。

证明。设 $h\colon X \to Y$是 $V$-Grp 中的一个态射。根据命题 4.2，我们得到范畴 SPt$_Y(V$-Grp$)$ $\cong V$-Grp$^Y$ 之间的范畴等价。因此，要证明子纤维化 $S$-cod 的基变换函子：

$$h^*\colon \mathrm{SPt}_Y(V\text{-}\mathsf{Grp}) \to \mathrm{SPt}_X(V\text{-}\mathsf{Grp})$$

有右伴随，等价于证明函子

$$L_h\colon V\text{-}\mathsf{Grp}^Y \to V\text{-}\mathsf{Grp}^X$$

有右伴随，其中 $L_h = V$-Grp$^h$ 由与 $h$复合给出。$R_h$ 的右伴随$L_h$ 构造如下：对任意 $\psi\colon$ $X \to V$-Grp，$R_h(\psi)$ 是 $\psi$ 沿 $h$的右 Kan 延拓。由于 $X$ 是小范畴且 $V$-Grp 是完备的（见 [14, 推论 X.3.2]），该延拓存在，并且属于 $V$-Grp$^X$，这一点将在下文证明。

给定一个 $V$-Cat-函子 $\psi\colon\ X \to V$-Grp，其中 $(Z, c) := \psi(*)$ 且 $\psi_x := \psi(x)\colon\ Z \to Z$，令$_\sim\psi := R_h(\psi)\colon\ Y \to V$-Grp 定义为

$$W := \widetilde{\psi}(*) = \{u\colon Y \to Z \ \text{ map}\,;\, \psi_x(u(y)) = u(h(x) + y) \text{ for all } x \in X,\, y \in Y\},$$

加法按点定义，而 $V$-范畴结构定义为

$$\omega(u, v) = \bigwedge_{y \in Y} c(u(y), v(y)),$$

$\widetilde{\ }$显然这是一个 $V$-群，并且对每个 $y_0 \in Y$，$\psi_{y_0}\colon\ W \to W$ 定义为 $\sim\psi_{y_0}(u)(y) = u(y + y_0)$，它是一个 $V$-函子，因为

$$\omega(u,v) = \bigwedge_{y\in Y} c(u(y), v(y)) = \bigwedge_{y\in Y} c(u(y+y_0), v(y+y_0)) = \omega(\widetilde{\psi}_{y_0}(u), \widetilde{\psi}_{y_0}(v))$$

（因为 $Y$ 是一个群，所以 $y + y_0$ 覆盖了 $Y$ 的所有元素。）

伴随 $L_h \dashv R_h$ 的余单位 $\varepsilon\colon L_h R_h \to \mathrm{Id}^{V\text{-}\mathsf{Grp}^X}$ 对每个 $\psi \in V\text{-}\mathbf{Grp}^X$，$\widetilde{\ }$ 都定义为 $\varepsilon_*\colon W \to Z$，其中 $\varepsilon_*(u) = u(0_Y)$（其中 $Z = \psi(*)$ 和 $W = \psi(*)$ 如上所定义）；显然，$\varepsilon_*$ 是一个 $V$-同态。此外，对每个 $x \in X$，下图的交换性由 $W$ 的定义保证

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\varepsilon_*} & Z \\ {\scriptstyle \widetilde{\psi}_{h(x)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi_x} \\ W & \xrightarrow[\varepsilon_*]{} & Z. \end{array}$$

为了证明 $\varepsilon$ 的泛性质，给定 $\varphi \in V\text{-}\mathbf{Grp}^Y$ 和 $\alpha\colon L_h(\varphi) \Rightarrow \psi$，我们希望定义 $\alpha\colon \varphi \Rightarrow \widetilde{\psi}$，使得 $\alpha$ 是满足 $\varepsilon\cdot\alpha_h = \alpha$ 的唯一自然变换：令 $S := \varphi(*)$ 和 $\alpha_*\colon \overline{S} \to W$ 由 $u_s(y) := (\alpha_*(s)(\overline{u}))(y) = \alpha_*(\overline{\varphi_y(s)})$ 定义。可以直接验证 $\varepsilon_*\cdot(\alpha_h)_* = \alpha_*$：

$$\varepsilon_*((\overline{\alpha}_h)_*(s)) = u_s(0_Y) = \alpha_*(\varphi_0(s)) = \alpha_*(s),$$

并且 $\alpha$ 是满足该条件的唯一自然变换。 □

与我们在上一节末尾的观察类似，前一定理扩展了 [9, 第 8] 节的结果，该结果指出，当 $V$ 是笛卡尔时，$V\text{-}\mathbf{Grp}^{\mathrm{sym}}$ 对称 $V$-群范畴是局部代数笛卡儿闭的。

最后我们指出，关于 $V$-群的作用可表示性和局部代数笛卡儿闭性的结果似乎无法推广到右 $V$-群。所谓右 $V$-群，是指一个带有群运算 $+$ 的 $V$-范畴 $(X, a)$，使得对所有 $z \in X$，映射 $+z\colon (X,a) \to (X,a)$ 将 $x$ 映到 $x + z$，且为一个 $V$- 函子。我们的结果似乎不适用于这种情形，原因在于这些结果以定理 4.1 为基础，而其证明实质上用到了整个群运算 $+$ 是一个 $V$-函子的事实。我们还注意到，我们在 [9] 中的命题 3.1 表述得不恰当。事实上，平移不变条件要求以下两个等式成立：

$$(\forall x, x', x'' \in X)\ \ a(x', x'') = a(x' + x, x'' + x),$$

$$(\forall x, x', x'' \in X)\ \ a(x', x'') = a(x + x', x + x'').$$


## Acknowledgements

我们感谢 Dirk Hofmann 向我们建议了引理 3.2 的证明。

谨此致谢：本研究部分经费由科英布拉大学数学中心（CMUC, https://doi.org/10.54499/UID/00324/2025）在葡萄牙科学技术基金会（FCT）资助项目 UID/00324/2025 和 UID/PRR/00324/2025 的支持下提供。

第二作者是“弗朗切斯科·塞韦里”国家高等数学研究所下属的意大利代数结构、几何及其应用国家研究组（GNSAGA）的成员。

本研究得到格鲁吉亚绍塔·鲁斯塔韦利国家科学基金会（SRNSFG）的资助，资助项目编号为 FR-24-9660，项目名称为“通过 Schreier扩张研究类幺半群结构上同调理论的范畴方法”。

## References

[1] M. Barr, *Exact categories*, 载于：数学讲义，第 236 卷，第 1–120 页，Springer-Verlag（1971）[2] F. Borceux, G. Janelidze, G.M. Kelly, *On the representability of actions in a semi-abelian category*, 范畴论及其应用 14，244–286（2005）[3] D. Bourn, *Normalization equivalence, kernel equivalence and affine categories*, 载于：数学讲义，第 1488 卷，第 43–62 页，Springer-Verlag（1991）[4] D. Bourn, *Mal'cev categories and fibration of pointed objects*, Appl. Categ. Structures 4，307–327（1996）[5] D. Bourn, N. Martins-Ferreira, A. Montoli, M. Sobral, *Schreier split epimorphisms in monoids and in semir-ings*, Textos de Matem´atica（S´erie B），科英布拉大学数学系，第 45 卷（2013）[6] D. Bourn, N. Martins-Ferreira, A. Montoli, M. Sobral, *Schreier split epimorphisms between monoids*, Semi-group Forum 88，739–752（2014）[7] D. Bourn, N. Martins-Ferreira, A. Montoli, M. Sobral, *Monoids and pointed S-protomodular categories*, Homology, Homotopy and Applications 18 n.1，151–172（2016）[8] M.M. Clementino, N. Martins-Ferreira, A. Montoli, *On the categorical behaviour of preordered groups*, J. Pure Appl. Algebra 223，4226–4245（2019）[9] M.M. Clementino, A. Montoli, *On the categorical behaviour of V-groups*, J. Pure Appl. Algebra 225，106550（2021）[10] M.M. Clementino, C. Ruivo, *On split extensions of preordered groups*, Port. Math. 80，327–341（2023）[11] J.R.A. Gray, *Algebraic exponentiation in general categories*, Appl. Categ. Structures 20，543–567（2012）[12] B. J´onsson, A. Tarski, *Direct decompositions of finite algebraic systems*, 圣母大学数学讲座，圣母大学，印第安纳（1947）[13] F.W. Lawvere, *Metric spaces, generalized logic, and closed categories*, Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano 43，135–166（1973）。重刊于：范畴论及其应用重印本 1（2002）[14] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, 数学研究生教材 5，Springer-Verlag（1998）[15] N. Martins-Ferreira, A. Montoli, M. Sobral, *Semidirect products and crossed modules in monoids with opera-tions*, J. Pure Appl. Algebra 217，334–347（2013）[16] N. Martins-Ferreira, A. Montoli, M. Sobral, *On some categorical-algebraic conditions in S-protomodularcategories*, 计算机科学中的逻辑方法 13，1–11（2017）

CMUC, Department of Mathematics, University of Coimbra, 3000-143 Coimbra, Portugal*Email address*: mmc@mat.uc.ptDipartimento di Matematica “Federigo Enriques”, Università degli Studi di Milano, Via Saldini50, 20133 Milano, Italy*Email address*: andrea.montoli@unimi.it