# 初等函数中的亚纯方程的可解性

Miroslav Marinov* Nikola Veselinov†

arXiv:2602.09253v1 [math.GR] 9 Feb 2026

**摘要**

方程 $f(x) = a$，其中 $f$ 是复亚纯函数，$a \in \mathbb{C}$ 是参数，若其反函数映射 $x = f^{-1}(a)$ 可以表示为有限次算术运算（加法、减法、乘法和除法）、指数函数、复对数及常数的复合，则称该方程可用初等函数求解。Kanel-Belov、Malistov、Zaytsev 已证明，$\tan x - x$、$\exp x + x$、$x^x$ 等特定函数无法用初等函数求解；Zelenko 则研究了几乎所有至多具有指数增长的整满射函数。这些结果均基于 Khovanskii 建立的一维拓扑伽罗瓦理论。我们将此结果推广，证明所有导数有无穷多个根 $x_i$ 且不同取值的集合 $f(x_i)$ 为无限集的初等亚纯函数 $f$ 均无法用初等函数求解。

## 1 引言

关于能否在基域上通过有限次可接受运算的复合得到显式形式的解，这一问题对代数的发展具有深远意义。在发现了四次及以下多项式方程的一般根式解后，人们曾多次尝试为更高次方程寻求闭式解，但均未成功，因此一度认为这类解根本不存在。Ruffini 于1813年证明了这一点（Cauchy 后来对其证明作了完善），Abel 也于1824年独立证明了这一点。

思考这一问题时，Abel 奠定了代数曲线理论的基础，而 Galois 则最先注意到，根式可解性取决于一个与之相关的群，即如今所称的代数方程的伽罗瓦群。Liouville 继续了 Abel 关于代数形式和微分形式的研究，并在初等函数表示方面取得了显著进展；这里的初等函数是指算术运算、指数函数 exp 和对数函数 ln 的复合。他严格证明了某些微分方程无法用初等函数求解，例如 [8], 例如 $f'(x) = e^{-x^2}$。后来，Chebyshev、Ritt、Risch、Rosenlicht 等人的工作进一步拓展了伽罗瓦理论的这一方面。

Arnold 发现了方程不可解性的拓扑原因——例如，参见他关于五次方程的证明 [4]。他的学生 Khovanskii [7, 8] 在 1970年左右将一维版本的拓扑伽罗瓦理论方法形式化。拓扑伽罗瓦理论的基本概念与经典伽罗瓦理论相似，但适用于分析超越函数——前者研究有理数 $\mathbb{Q}$的扩张，而后者研究有理函数域 $\mathbb{C}(x)$的扩张。可解性的拓扑判据也基于通过 $f$定义的群，即单值化群。

考虑方程 $f(x) = a$，其中 $f\colon X \to \mathbb{C}$ 是定义在连通开集 $X \subseteq \mathbb{C}$ 上的亚纯初等函数，且 $a \in \mathbb{C}$ 是一个参数。我们旨在确定反函数 $f^{-1}(a)$ 何时也是初等函数。迄今为止的所有方法都依赖于分析特定的单值化群以及

*保加利亚科学院数学与信息学研究所，m.marinov1617@gmail.com
†HSSIMI，保加利亚科学院，nikola.veselinov.veselinov@gmail.com

根的结构，因此迄今的结果都是针对单个方程的，例如 tan(x) $-x=a$[5]、 $e^x+x=a$ 以及 Kanel-Belov、Malistov、Zaytsev 给出的 $x^x=a$ [6]。

Zelenko 的另一项近期成果是证明：当 $f$ 是全纯、满射，且任意两个临界点的临界值均不相同，并且对于某个正整数 $\rho$

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{z:|z|\geq R}\frac{\ln|f(z)|}{|z|^{\rho}}$$

有界。

我们将不可解 性推广到所有临界值集合为无限集的初等亚纯函数。 s

$$B=\{a\in\mathbb{C}:\ \exists x\in X: f(x)=a, f'(x)=0\}$$

是无限的。

**定理1.1**。设 $X\subseteq\mathbb{C}$ 是一个开连通集，且 $f:\ X\to\mathbb{C}$ 是一个具有无限多个临界值的初等亚纯函数。那么，方程 $f(x)=a$ 在初等函数中不可解。

所给出的证明结合了 Wielandt 关于无限集合上的本原群作用的结果（定理 2.3），以及本原性与分解之间的关系（定理5.3）；例如，Burda 关于代数函数的博士论文中陈述了这一关系。

## 2 辅助结果

我们简要回顾所需的理论，并着重说明主定理假设中的每个条件为何对我们的目的都很重要。关于拓扑伽罗瓦理论相关内容的表述与发展，我们遵循 Khovanskii [8]。

### 2.1 群论与复分析的结果

对于集合 $S$，我们用 Sym($S$) 表示对称群 $S$，用 Alt($S$) 表示 $S$ 上的交错群，并用 FSym($S$) 表示由有限长度的所有圈生成的 Sym($S$) 的子群。在此处的所有应用中，$S$ 都是无限的；特别地，Alt($S$) 不是可解群。

**定义 2.1**。设 $S$ 是一个集合，$G$ 是一个在 $S$ 上传递作用的群。称非空子集 $T\subseteq S$ 为 $G$ 的块，如果对每个 $x\in G$，要么 $x\cdot T=T$，要么 $(x\cdot T)\cap T=\emptyset$。

备注。每个在 $S$ 上传递作用的群 $G$ 都以 $S$ 和单点集 $\{a\mid a\in S\}$ 作为块，这些块称为**平凡的**。其他任何块都是**非平凡的**。

**定义 2.2**。设 $S$ 是一个集合，$G$ 是在 $S$ 上传递作用的群。那么，如果 $G$ 在 $S$ 上没有非平凡块，就称其为本原的。

**定理 2.3**。（Wielandt，[9, 定理 29。2]）设 $S$ 是一个无限集合，$G$ 是在 $S$ 上作用的本原群。若 $G$ 包含一个具有有限支撑的非恒等置换，则$\mathrm{Alt}(S)\leq G$。

备注。根据 [3, 定理 3.3A], ，如果 $G$ 包含一个对换，那么 even FSym($S$) $\leq G$ 也成立。当 $S$ 是有限集时，也有 Wielandt 定理的其他版本（例如，Jordan 定理 [3, 定理 3.3E]）。

**定义 2**。 **4.** 函数 $f:U\to\mathbb{C}$ 若满足以下条件，则称为亚纯 :

- 除了一个由孤立点组成的集合外，它处处全纯；也就是说，这些点中任意两个点，都存在一个开球包含其中一个而不包含另一个。
- 对于这些孤立点中的任意一个 $z_0 \in U$，都存在一个 $z_0$ 的邻域 $V \subseteq U$ 和一个整数 $n$，使得$(z - z_0)^n f(z)$ 在 $V$ 上全纯且不为零。

**定理 2.5**。(恒等定理) 设 $D \subseteq \mathbb{C}$ 是一个开集，且 $f : D \to \mathbb{C}$ 是亚纯函数且不恒等于零。那么，零点集合 $\{z \in D : f(z) = 0\}$ 是 $D$ 的一个离散子集；也就是说，零点的任何聚点都不在 $D$ 中。

下一个引理说明，当禁点集合有限或可数无限时，可以扰动任意路径，使其不经过禁点。

**引理 2.6**。设 $A$ 是 $\mathbb{C}$ 的至多可数子集，$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ 是一条连续路径，且 $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}_{>0}$ 是一个连续函数。那么存在一条路径 $\hat{}\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$，使得 $\hat{}\gamma(t) \notin A$ 且 $|\gamma(t) - \hat{}\gamma(t)| < \varphi(t)$。

证明。 参见 [8,引理 5.20]。 □

**定义 2.7**。 对于亚纯函数 $f : U \to \mathbb{C}$，其中 $U \subseteq \mathbb{C}$，点 $x_0$ 若满足临界 条件，即 $f'(x_0) = 0$，则称其为临界点。在此情形下，$f(x_0)$ 称为临界值。

我们强调，对于亚纯函数，所有临界点的阶均为有限阶，因此我们的研究范围不包括 $\exp(1/z)$ 这类函数。事实上，$\exp(1/z) = a$ 可通过$z =$ (自然对数 $a$)$^{-1}$求解，但这并不与所建立的理论相矛盾。

## 2.2 初等函数

初等函数是以下运算的复合:

- 算术运算（加法、减法、乘法和除法）；
- 指数函数与对数函数。

在本节中，我们给出精确定义，以便以严格的方式建立它们的相关性质。

**定义 2.8.** 一个微分域 $(K, D)$ 是零特征的域 $K$，配备映射 $D : K \to K$，并对所有 $u$、$v \in K$满足:

1. $D(u + v) = D(u) + D(v)$;
2. $D(uv) = uD(v) + vD(u)$.

**定义 2.9.** 设$(K, D)$ 为一个微分域。微分域扩张 $K \subset L$ 称为一个指数扩域，如果存在 $y \in L$ 满足线性微分方程

$$D(y) = gy$$

对某个 $g \in K$。

**例 2.10.** 我们定义指数函数$(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i}$！设 $K = \mathbb{C}(x)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的有理函数域。则扩张 $K \subset K$(指数函数$(x)$) 是带有 $g \equiv 1$ 的指数函数。

**定义 2.11.** 设$(K, D)$ 是一个微分域。若存在 $y \in L$ 使得.....，则称微分域扩张 $K \subset L$ 为对数扩域 。

$$D(y) \in K, \ but \ y \notin K.$$

**例 2.12.** 自然对数为 $\ln(x) := \exp^{-1}(x)$，即通过满足 $\exp(y) = x$ 的 $y$ 来定义；只要 $y$ 存在，该定义便是唯一的。设 $K = \mathbb{R}(x)$。那么 $K \subset K(\ln(x))$ 是一个对数扩域。

**定义 2.13.** 基微分域 $K_0$ 上的初等塔是一个有限链

$$K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_m,$$

其中每个扩张 $K_{i+1} \supset K_i$ 都是指数函数或对数函数。

**定义 2.14**。 如果存在一个初等塔，则称函数 $f$ 为初等函数。

$$K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_m$$

使得 $f(x) \in K_m$。

**例 2.15.** 函数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 由 $f(x) = \cos x +$ 指数函数$(x) - \dfrac{x}{2}$ 给出，它是初等函数，这是由于 $\cos x =$ 指数函数$(ix) +$ 指数函数$(-ix)$ 2 以及塔 $K_0 = \mathbb{C}(x)$、 $K_1 = K_0$(指数函数$(x)$)、 $K_2 = K_1$(指数函数$(ix)$)。我们强调，$n^{\text{th}}$ 根式 $\sqrt[n]{x}$ 不是算术运算，但可由指数函数和自然对数得到，如

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(x)\right).$$

# 3 一维拓扑伽罗瓦理论

**定义 3.1.** 取一个域 $K$、一个子集 $A \subseteq K$ 和一个函数 $f\colon A \to K$。若存在一个初等函数 $g$，使得对于 $f$的像中的所有 $a$，都有 $f(g(a)) = a$，则称方程 $f(x) = a$ 可用初等函数求解 。

**定义 3.2.** 如果存在一个嵌套子群链$G = G_0 \supset \cdots \supset G_\ell = e$，使得对于每个 $i = 1$，.....，$\ell$，都有 $G_i \triangleleft G_{i-1}$，且商群 $G_{i-1}/G_i$是阿贝尔群，则称群 $G$ 为深度为 $\ell \geq 0$ 的可解群。

**定义 3.3.** 设 $X$ 为一个拓扑空间。设 $f$ 和 $g$ 是定义在点 $x_0 \in X$的某些邻域上的函数。若存在 $x_0$ 的一个邻域 $U$，使得 $f$ 和 $g$ 在 $U$ 上有定义，并且 $f$ 和 $g$

$$f|_U = g|_U.$$

相对于 $x_0$的 $f$ 芽，记作$f_{x_0}$，是满足上述关系且对应某个 $U$的所有函数 $g$ 的集合。

**定义 3.4**。 至多可数的集合 $A$ 是芽 $f_a$ 的禁集，如果 $f_a$ 沿着每一条路径 $\gamma(t)$ 都存在正则延拓，其中 $\gamma(0) = a$ 且该路径除可能在 $a$处外从不与集合 $A$ 相交。

**定义 3.5**。 取复射影直线上的一点 $a \in \mathbb{CP}^1$ 。如果存在一条路径 $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{CP}^1$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$，使得芽沿这条路径无法正则延拓，但对于每个 $t$, $0 \leq t < 1$，它沿截断路径 $\gamma\colon [0,t] \to \mathbb{CP}^1$都存在正则延拓，则点 $b \in \mathbb{CP}^1$ 对芽 $f_a$ 而言是奇异 点。

**定义 3.6**。 在复射影直线 $\mathbb{CP}^1$ 上的点 $a$ 和 $b$ 处定义的两个芽 $f_a$ 和 $g_b$ 若等价，则芽 $g_b$ 可由芽 $f_a$ 沿某条路径解析延拓得到。

**定义 3.7**。一个正则 芽若其奇异点集合至多可数，则称为 $\mathscr{S}$-芽 $e.$

**定义 3.8**。 多值解析函数 $f\colon A \to B$, $A, B \subseteq \mathbb{C}$，若其每个正则芽都是一个 $\mathscr{S}$-芽，则称其为 $\mathscr{S}$-函数 。

**定理 3.9**。 所有 $\mathscr{S}$-函数构成的类 $\mathscr{S}$ 在以下运算下封闭：

*(1)* 求导：若 $f \in \mathscr{S}$，则 $f' \in \mathscr{S}$。*(2)* 积分：若 $f \in \mathscr{S}$ 且 $g' = f$，则 $g \in \mathscr{S}$。*(3)* 复合：若 $g$、$f \in \mathscr{S}$，则 $g \circ f \in \mathscr{S}$。*(4)* 亚纯运算：若 $f_i \in \mathscr{S}$、$i = 1$、……、$n$，函数 $F(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 是 $n$ 个变量的亚纯函数，且 $f = F(f_1, \ldots\ldots, f_n)$，则 $f \in \mathscr{S}$。*(5)* 求解代数方程：若 $f_i \in \mathscr{S}$、$i = 1$、……、$n$，且 $f^n + f_1 f^{n-1} + \ldots + f_n = 0$，则 $f \in \mathscr{S}$。*(6)* 求解线性微分方程：若 $f_i \in \mathscr{S}$、$i = 1$、……、$n$，且 $f^{(n)} + f_1 f^{(n-1)} + \ldots + f_n = 0$，则$f \in \mathscr{S}$。

备注。 算术运算和乘方都是亚纯运算，因此 $\mathscr{S}$-函数类在算术运算和乘方下封闭。

备注。 设 $f_a$ 是点 $a$ 处某个亚纯函数 $f$ 的所有芽组成的集合，其中 $a$ 不属于某个禁集 $A$（见定义 3.4）。取一条以 $a$ 为起点、位于 $\mathbb{CP}^1 \setminus A$ 中的闭路 $\gamma$。则沿着 $\gamma$ 对 $f_a$ 中任意芽进行解析延拓，所得仍是 $f_a$ 中的一个芽。

**定理 3.10**。 一个至多可数的集合是某个芽的禁集，当且仅当它包含该芽的奇异点集合。特别地，一个芽有禁集，当且仅当它是某个 $\mathscr{S}$-函数的芽。

**定义 3.11**。 我们为每条路径 $\gamma$ 指定一个从 $f_a$ 到自身的映射 $\tau$（在 $\mathbb{C} \setminus A$ 中同伦的路径会产生相同的 $\tau$）。通过路径复合得到的映射的复合运算，定义了一个同态 $\rho$，它从 $\mathbb{C} \setminus A$ 的基本群映到由 自同构群$(f_a)$ 构成的、 $f_a$ 的可逆变换群。我们称 $\rho$ 这个同态为 $A$-单值化。

备注。 根据凯莱定理，每个群都同构于一个置换群，即集合 $S_d$ 上的对称群 $\{1, 2, \ldots, d\}$ 的一个子群（此处及下文，我们允许 $d = \infty$，并将其用于可数群）。谈到单值化时，我们通常会指相应的置换群，而不是自同构群。

通过研究单值化群，我们得以对不可解性作出重要观察——它是 $\mathscr{S}$-函数 $f$ 的各个分支在禁集 $A$ 各点周围沿环路延拓时所对应的所有置换构成的群。现在我们给出一个精确定义。

**定义 3.12**。 具有禁集 $A$ 的 $\mathscr{S}$-函数 $f$ 的单值化群，是基本群 $\pi_1(\mathbb{C} \setminus A, a)$ 在群 自同构群$(f_a)$ 中的像，其中映射由 $\rho$给出。

**命题 3.13**。 以下性质成立。

(1) 定理 $A$-单值化群与 $\mathscr{S}$-函数所选取的点无关
$a$.(2) 该
$A$-单值化群 $\mathscr{S}$-函数 $f$ 在其分支上作传递作用 $f$.

证明。 这两个结论均由引理 2.6 得出。我们给出第二个结论的证明。
设 $f_{1,a}$ 和 $f_{2,a}$ 是函数 $f$ 在点 $a$处的任意两个芽。由于 $f_{1,a}$ 和 $f_{2,a}$ 等价，存在一条路径 $\gamma$，使得沿 $\gamma$ 解析延拓时，芽 $f_{1,a}$ 变为 $f_{2,a}$。根据引理 2.6，存在一条任意接近的路径 $\hat{}\gamma$，避开集合 $A$。若 $\hat{}\gamma$ 充分接近 $\gamma$，则相应的分支置换将 $f_{1,a}$ 映射为 $f_{2,a}$。

□

# 4 初等函数中的拓扑不可解性

考虑方程 $f(x) = a$，其中 $f\colon X \to \mathbb{C}$ 是在连通开集 $X \subseteq \mathbb{C}$上定义的非常数亚纯函数，而 $a \in \mathbb{C}$ 是一个参数。根据定理 2.5，对于任意 $a$，根的集合是离散的，因此反函数 $f^{-1}$ 是一个 $\mathscr{S}$-函数。

令 $a$ 在复平面中描绘一条闭曲线。那么根也会描绘出曲线，因为它们是路径连通集在连续映射下的原像。然而，这些根曲线不一定是闭合的，尽管它们的并集必定是闭集，因为它是闭集在连续映射下的原像。我们称这些曲线为局部分支。回想一下，临界点是 $f'(x) = 0$ 的根。

对于某个正则值 $a_0$（即不是临界点），将局部分支记为 $\{x_1(a_0)\dots, x_d(a_0)\}$。这个集合可能是无限的（但可数），我们会发现，在所研究的方程中，这种情况更为常见——在这种情况下，通常记作 $d = \infty$。对于每个 $i = 1, .., d$，定义 $x_i^\gamma(a_0)$ 为沿着环路（闭曲线） $\gamma$ 绕临界点对 $x_i(a_0)$进行解析延拓所得到的值的集合，其中解析延拓从 $a_0$ 开始。我们要求满足以下关键条件：

{/style}必须满足：{/style}任意局部分支都不包含临界点。

换言之，定义 3.4 中的禁集恰好是 $f$ 的临界点集合。由于沿着 $\gamma$ 不会发生根碰撞（重根必定是导数的根，但我们假设 $f' \neq 0$ 在 $\gamma$ 上），因此每个 $x_i^\gamma$ 都与某个 $x_j$（$a_0$）重叠。于是，$\gamma$ 诱导出一个良定义的置换 $\sigma_\gamma \in S_d$，使得

$$x_i^\gamma(a_0) = x_{\sigma_\gamma(i)}(a_0).$$

（直观地说，利用解析延拓 $\gamma$，我们便从一个局部分支“移动”到另一个局部分支。）映射 $\rho\colon \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{$临界点$\}, a_0) \to S_d$ 的像（由 $\rho(\gamma) = \sigma_\gamma$ 给出）是 $f$ 的单值化群。

引理 *4.1*。设 $x_c$ 是非恒定亚纯函数 $f\colon U \to \mathbb{C}$ 的一个孤立临界点，其阶为 $m$，也就是说，$f'(x_c) = f''(x_c) = \ldots = f^{(m)}(x_c) = 0$，但 $f^{(m+1)}(x_c) \neq 0$。那么，对于绕相应临界值 $a_c := f(x_c)$ 的任意充分小环路 $\gamma$，沿着 $\gamma$ 对 $f$ 的反函数分支进行解析延拓，会在 $a_c$ 附近多值反函数 $x = f^{-1}(a)$ 的局部分支上诱导一个长度为 $m+1$ 的循环，并固定其他原像。

证明。见 [1,第 304] 页。 □

如果 $\gamma$ 所围成的区域不包含任何临界点，那么 $\gamma$ 与一个常值映射同伦，因此没有任何根会发生置换。因此，只需考虑这样的曲线：先移动到临界点，再绕其作一整圈（或一段圆弧），然后返回基点，从而诱导出一个非平凡的置换。

**引理 4.2**。 指数函数和自然对数的单值化群同构于 $\mathbb{Z}$。

证明。 指数函数的像为 $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$。由于根据命题 3.13，单值化群通常与起点的选择无关，我们可以假设 $a$ 从 $-1$出发，沿着原点周围的单位圆 $\gamma$ 行进。局部分支为 $x_k(a) =$自然对数$a + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$。对于 $a = e^{i\theta}$，$\theta \in (-\pi, \pi)$，这变为$x_k(a) = (2\pi k + \theta)i$。如果沿着 $\gamma$作解析延拓，那么当 $\theta$ 遍历 $(-\pi, \pi)$ 时，对任意 $k$，原像 $x_k(a)$ 都移至 $x_{k+1}(a)$。这对应于这样一个置换：对任意 $k$， $k$ 映射到 $k+1$；由它生成的子群同构于 $\mathbb{Z}$。

回顾一下，对任意 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，自然对数 $z$ 的取值为自然对数 $|z| + (\arg z + 2\pi n)i$，$n \in \mathbb{Z}$。设 $a$ 沿绕原点的单位圆 $\gamma$ 行进，从 1 出发，即 $a = e^{i\theta}$，$\theta \in [0, 2\pi)$。以绕数 $w$ 环绕原点时，对数增加 $2w\pi i$，且单值化群为无限循环群，同构于 $\mathbb{Z}$。

□

为了理解一般情形下该群的可解性，只需注意指数函数与自然对数的群是阿贝尔群。对一个函数，称深度 为得到一个使该函数有定义的微分域所需的嵌套初等（指数函数或对数函数）扩张的个数，如定义 2.14 所述。

**命题 4.3**。 设 $N$ 为正整数，且 $f$ 为一个函数，其反函数是深度不超过 $N$ 的初等函数的复合。那么， $f$ 的单值化群是可解的。

证明。 我们对 $N$ 进行归纳。对于 $N = 1$，函数 $f^{-1}$由在 $\mathbb{C}(x)$ 上的单个初等扩张定义，因此属于以下情形之一：

($a$) 指数函数： $f^{-1} = \exp(g(x))$。由引理 4.2， $f$ 的单值化群同构于 $\mathbb{Z}$ ——一个无限阿贝尔群，因此是可解的。

($b$) 对数函数： $f^{-1} = \ln(g(x))$。由引理 4.2， $f$ 的单值化群同构于 $\mathbb{Z}$ ——一个无限阿贝尔群，因此是可解的。

假设结论对深度为 $\leq N$ 的情形成立。设 $f^{-1} = \phi \circ g$，其中 $\phi$是深度为 1 的初等函数，而 $g$ 的深度为 $N$。那么，根据归纳假设， $g^{-1}$ 和$\phi^{-1}$的单值化群 $G_g$ 和 $G_\phi$ 分别是可解的。由于 $\phi$ 的深度为 1，它表示指数扩张或对数扩域。由引理 4.2 可知，指数函数和自然对数都只会增加可解单值化，因此 $(\phi \circ g)^{-1}$的单值化群也可解。

根据归纳法，由一系列 $N$ 初等扩张定义的任意函数的反函数都具有可解的单值化群。

□

备注。 命题 4.3 所述的一般情形中的群可能不是阿贝尔群——在某些例子中，自然会得到正整数集上的对称群或交错群。

现在我们给出一个性质，其证明展现了根的集合具有离散性这一点的关键优势。

**引理 4.4**。 全置换群在根上具有传递作用。

证明。 如果取一个根，并沿着路径 $\gamma(t)$ 移动它，将其与另一个根连接起来，那么 $a(t) = f(x(t))$ 会描出一条闭曲线，因为 $x(0)$ 和 $x(1)$ 都是同一个 $a$的根。这条曲线 $\gamma$ 必须避开 $f(x)$ 为临界值的点；但由于这些点构成离散集合，这样的 $\gamma$ 总是存在。 □

**定理 4.5**。 (拓扑伽罗瓦判据) 方程 $f(x) = a$ 能用初等函数求解，当且仅当 $f(x)$ 的单值化群可解。

# 5 本原性与主要证明

**定义 5.1.** 设 $f\colon X \to \mathbb{C}$ 是从连通开集 $X$ 出发的非常数亚纯映射。其分支轨迹

$$B = \{a \in \mathbb{C} : \exists x \in X : f(x) = a, f'(x) = 0\}$$

是由临界值组成的离散集。

当分支轨迹是有限集时， $f(x) = a$ 的可解性归结为计算一个有限单值化群。关于这一主题的理论已十分成熟（例如，参见 [4, 7, 8]），因此，为方便起见，本文将始终只研究具有**无限分支轨迹**的函数。注意，这意味着临界点和临界值都不止有限多个。例如，函数$f(x) = (\text{指数函数}(x) - 1)^2$ 有无穷多个阶为 1 的临界点，但它们都只对应一个临界值；因此，我们关于不可解性的结果与 $(\text{指数函数}(x) - 1)^2 = a$ 可由初等函数表示这一事实并不矛盾。

在证明不可解性时，单值化群的本原性是一种极其有力的工具。事实证明，根据 Wielandt 定理，每个由无限多个圈（即绕过无限多个临界值的环路）生成的本原单值化群都保证不可解性。

**命题 5.2**。 设 $X \subseteq \mathbb{C}$ 是一个开连通集， $f\colon\ X \to \mathbb{C}$ 是一个具有无限单值化群 $G$ 的亚纯映射。假设 $G$ 是本原的。那么， $G$ 包含一个不可解子群，并且 $f(x) = a$ 在初等函数中不可解。

证明。由于分歧指数有限， $G$ 中的诱导循环具有有限支撑；因此，根据定理 2.3，群 $G$ 包含 Alt($\mathbb{Z}_{>0}$)，而该群不可解。 □

请回想，在我们的设定中，方程 $f(x) = a$ 中的函数 $f(x)$ 是亚纯且初等的（因此可以有限表示）。在本节余下部分，我们将利用这一点证明：即使 $f$ 的单值化群是非本原的，其（不可）解性始终由 $f$ 的一个分解中形如 $(g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_\ell)(x)$ 的函数的单值化群决定。

Ritt 的一个结果 [10] 表明，对于多项式和有理函数，非本原性等价于存在 $f$ 的一个非平凡分解，形式为 $(g \circ h)(x)$。拓扑伽罗瓦理论中也有类似结果。

**命题 5.3**。 [2, 定理 27] 设 $X \subseteq \mathbb{C}$ 是一个开连通集，且 $f\colon\ X \to \mathbb{C}$ 是一个单值化群为 $G$ 的亚纯映射。那么，当且仅当 $f$ 可表示为两个亚纯函数 $g\colon\ X \to Y$ 和 $h\colon\ Y \to \mathbb{C}$（其中 $Y \subseteq \mathbb{C}$ 为某个开连通集）的复合（$h \circ g$）（$x$）时， $G$ 是非本原的。此外， $g$ 和 $h$ 的单值化群都是 $G$ 的商群。

证明。 记 $f\colon (X, x_0) \to (Z, z_0)$，其中 $X$ 和 $Z$ 是拓扑空间，分别带有固定点 $x_0 \in X$ 和 $z_0 \in Z$。我们也将对 $(Y, y_0)$ 使用这一记法。

首先，假设 $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Z, z_0)$ 可分解为 $(X, x_0) \xrightarrow{g} (Y, y_0) \xrightarrow{h} (Z, z_0)$。那么，$f^{-1}(z_0)$ 可分成若干块，每块由 $h^{-1}(z_0)$ 中某点在 $g$ 下的原像构成。对于 $(Z, z_0)$ 中的任意环路，这些块总是彼此置换，因此并非所有块都是平凡的。

反过来，设 $G$ 在 $f^{-1}(z_0)$ 上的作用是非本原的。那么存在块 $B_0$， $B_1$，...， $B_n$，且并非全都平凡；不失一般性，设 $x_0 \in B_0$。记 $h\colon (Y,\ y_0) \to (Z,\ z_0)$ 为稳定块 $B_0$ 的映射。此外，根据块的定义，如果一个环路稳定 $x_0$，那么它也必定稳定 $B_0$；因此， $f$ 的诱导同态包含在某个 $g\colon (X,\ x_0) \to (Y,\ y_0)$ 的诱导同态中，并且通过 $h$ 分解，从而完成证明。 □

将具有非本原单值化群的亚纯函数进行分解，这一过程可以在分解所得的各函数上重复进行，直至得到由具有本原单值化群的亚纯函数构成的链。

**命题 5.4.** 设 $X \subseteq \mathbb{C}$ 是一个开连通集，且 $f\colon\ X \to \mathbb{C}$ 是一个初等亚纯函数。那么 $f$ 可以表示为一个有限链

$$f(x) = (g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_\ell)(x),\ \ell \in \mathbb{Z}_{>0},$$

其中，每个 $g_i$、 $1 \leq i \leq \ell$ 的单值化群都是本原群，且也是 $f$ 的单值化群的商群。

证明。 如果 $f$ 的单值化群是本原群，我们固定 $g_1 := f$，证明即告完成。假设它是非本原的。那么根据命题 5.3 $f$ 可以分解为 $g_1 \circ g_2$。对分解中的各项反复应用同样的推理。鉴于 $f$ 是初等的（即可以有限表示），我们必然能得到一条有限链，其中只包含具有本原单值化群的函数。 □

现在我们可以证明主要结果了。

**定理5.5**。 设 $X \subseteq \mathbb{C}$ 是一个开连通集，且 $f\colon\ X \to \mathbb{C}$ 是一个具有无限分支轨迹和无限单值化群 $G$ 的初等亚纯函数。那么方程 $f(x) = a$ 不能用初等函数求解。

证明。 由命题 5.4 可得 $f(x) = (g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_\ell)(x)$，其中每个 $g_i$ 都具有本原单值群，且 $\ell$ 是一个正整数。如果每个本原因子 $g_i$ 都有有限分支轨迹，那么整个复合将具有有限分支轨迹（例如参见 [10]），这与 $f$ 具有无限分支轨迹的假设矛盾。因此，至少有一个 $g_j$ 具有无限分支轨迹。注意，根据亚纯函数的定义，$g_j$ 的单值化群包含一个具有有限支撑的元素。因此，由命题 5.2 可知，$g_j$ 的单值化群包含 $\mathrm{Alt}(\mathbb{Z}_{>0})$，且不可解。但根据命题 5.4，$g_j$ 的单值化群是 $f$ 的单值化群的商群，由此可知 $f$ 不可解，证明完毕。

□

我们以以下猜想作结，该猜想基于有限的计算证据。

**猜想**。设 $X \subseteq \mathbb{C}$ 是一个连通开集，$f\colon X \to \mathbb{C}$ 是一个亚纯初等函数。若方程 $f(x) = a$ 可用初等函数求解，则存在一个有限序列 $g_1$，$g_2$，……，$g_\ell$，其中各项均为深度至多为 1 的可解函数，使得 $f(x) = (g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_\ell)(x)$。

**致谢**。本研究得到了保加利亚高中生数学与信息学研究所（HSSIMI）“教育与科学”资助项目下暑期研究学校的支持，我们对其提供的良好研究氛围深表感谢。

## 参考文献

[1] L. Ahlfors。《复分析：单复变解析函数理论导论》。国际纯粹与应用数学丛书。麦格劳-希尔，第 3 版，1979 年。

[2] Y. Burda.《伽罗瓦理论中的拓扑方法》。博士论文，多伦多大学，2012年。[3] J. Dixon 和 B. Mortimer。《置换群》，数学研究生教材第 163 卷。施普林格，1996年。[4] L. Goldmakher。《阿诺德关于五次方程不可解性的初等证明》。web.williams.edu/Mathematics/lg5/394/ArnoldQuintic.pdf。[5] A. Kanel-Belov、A. Malistov 和 R. Zaytsev。初等函数中的方程可解性。《纽结理论及其影响》，29(02):2040005，2020年2月。[6]A. Kanel-Belov 和 R. Zaytsev。初等函数中的不可解性，2024年。arXiv:2312.02174v2。[7] A. Khovanskii。《一维拓扑伽罗瓦理论》，2019年。arXiv:1904.03341v1。[8] A. Khovanskii、V. Timorin、V. Kiritchenko 和 L. Kadets。《拓扑伽罗瓦理论：有限项中方程的可解性与不可解性》。施普林格数学专著丛书。施普林格，2014年。[9] P. Neumann。《无限置换群》，2023年。arXiv:2307.11564v2。[10] J. Ritt。《素多项式与合成多项式》。《美国数学会会刊》，23(1):51–66，1922年。[11] L. Zelenko。有限阶整函数反函数对应黎曼曲面的泛单值群，2021年。