arXiv:2602.09313v1 [math.AT] 10 Feb 2026

按次数不可能：上同调与双稳态视觉悖论

LEWIS GHRIST 与 ROBERT GHRIST

摘要。彭罗斯三角形、楼梯及相关的“不可能物体”长期以来被认为与第一上同调有关 H^1：它体现了这样一种障碍——无法沿环路延拓局部一致的解释。本文为一类视觉悖论构建了一个上同调层级。我们将研究范围限定于由双稳态元素构成的系统——这类组件恰好具有两种局部状态，例如内克尔立方体向前／向后的取向、齿轮顺时针／逆时针的旋转，或对菱形镶嵌角作凸／凹解释——从而可以始终使用 $\mathbb{Z}_2$ 系数，将障碍理论化简为奇偶算术。由此揭示出一个从 H^0 到 H^2的悖论类别层级，而每一层级又由相对／绝对之分进一步细化，涵盖从歧义到不可能性，再到不可达性的情形。离散斯托克斯定理由此成为核心工具：在每个次数上，相对上同调的连接同态都将边界数据提升为内部障碍，为悖论逐级攀升这一层级提供了统一机制。

本文详细研究了三种典型系统——内克尔立方体场、齿轮啮合和菱形镶嵌。全文将上同调与图像及动画结合起来。为阐明其底层结构，我们引入单值化孔径法，这是一种动画技术，通过局部截面的构形空间揭示单值化现象。

1. 引言

彭罗斯三角形和楼梯由 L. Penrose 和 R. Penrose 于 [1], 提出，是典型的不可能物体：它们在局部上自洽，却无法获得全局一致的三维解释。1992年，R. Penrose 用 Čech 上同调的语言重新阐释了这些图形，并通过环带在以深度 [2]为系数的乘法群 $\mathbb{R}^+$ 上的上同调群 H^1 对三角形进行了分类。那篇论文还包含第二个图形，其谜团比三角形更深：见图 1[左侧]。在这幅图中，施罗德楼梯 [3, 4] 的多个副本——一种上升与下降方向含混不明的错觉（图 1[中间]）——环绕着一个具有七边形边界的环带区域。彭罗斯宣称，这个图形具有与内克尔立方体（图 1[右侧]）相同的歧义群；内克尔立方体是一种于 1832 [5]发现的双稳态线框。在指出七边形楼梯的悖论可由环带在以 $\mathbb{Z}_2$为系数的 H^1 所刻画之后，他以一句晦涩的提示作结：

> “我相信，这类思考或许能为进一步探索更为奇异的不可实现图形开辟引人入胜的可能性。”

本文在一个受彭罗斯七边形楼梯启发的简化框架中，回应了彭罗斯的挑战。我们建立了一个由 双稳态元素构成的视觉悖论的上同调层级体系——这些元素是具有歧义、恰好允许两种局部状态的组件。对双稳态系统的限制使得全文均可采用 $\mathbb{Z}_2$系数，从而简化代数运算，并揭示出一个清晰的分类体系：

底空间 H^0 检测到歧义：存在多个有效的全局解读。相对 H^1 检测到 冲突：边界强制不相容。

2020 数学主题分类。55N10, 52C23, 00A66, 68U05。关键词和短语。上同调、挠子、整体性、单值化、悖论。

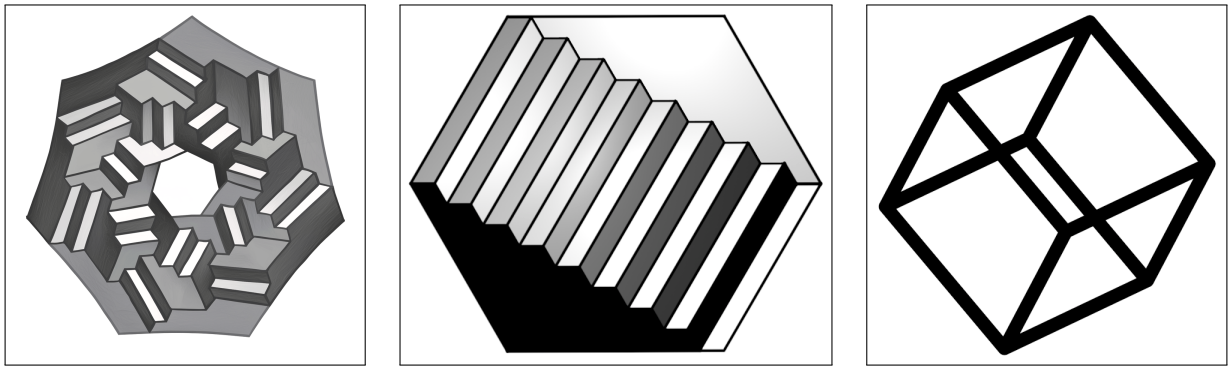

图1。 彭罗斯 [左侧] 的一幅 необычно 图形源自 [2]施罗德楼梯[中央] ，并具有经典内克尔立方体 [右侧]所呈现的双稳态歧义。

绝对 H^1 检测到 不可能性：不存在有效的全局解读。相对 H^2 检测到曲率：由边界整体性强制产生的局部缺陷。绝对 H^2 检测到不可达性：无法通过局部移动到达的扇区。

这些转变由单一机制驱动：相对上同调的连接同态 δ^* ，它与离散斯托克斯定理相一致。

该框架建立在近期一项通过网络扭子 [6], 对视觉悖论进行分类的研究之上；该研究提出扭子是构成不可能图形的数学结构，通过 H^1 （包括非阿贝尔例子在内的）一般结构群对悖论进行分类，并通过相对上同调分析由边界诱发的悖论。那篇论文奠定了本文所依托的框架。通过限制于双稳态元件，我们同时获得了简洁性——相关工具变得初等——以及沿上同调层级清晰向上的路径。从 H^0 经过相对与绝对 H^1 ，再迈向相对与绝对 H^2 的系统性上升，构成了本文的主线。具体贡献包括：识别出首批需要 H^2 才能检测和分类的视觉悖论；将离散斯托克斯定理确立为推动悖论从一个层级进入下一个层级的统一机制；以及提出一种新颖的动画技术，通过在构形空间上构造扭子，将整体性转换为可见的单值化。

这一系列思想与量子情境性的层上同调方法相关： [7, 8, 9],测量取决于具体情境，而一致赋值所面临的障碍同样由上同调刻画。这种平行关系并非偶然：两种情形都涉及无法整体化的局部数据，也都自然地以上同调、挠子和障碍的语言来表达。

现成的理论可以处理高维障碍。正如 $\mathbb{Z}_2$-挠子（双重覆盖、主 $\mathbb{Z}_2$-丛）由 H^1分类一样，*gerbe* 提供了下一个范畴层级，其分类由 H^2 或 H^3 给出，具体取决于结构 [10, 11]。这一框架也适用于离散与格点情形 [12]。然而，对于双稳态系统而言，无需动用完整的 gerbe 理论。始终采用 $\mathbb{Z}_2$ 系数后，障碍的分类便可归结为奇偶计数，而 H^2现象也可通过初等方法加以研究：相对上同调、杯积和次数平移。

在每个次数上，相对／绝对之分将边界强加的现象与内在现象区分开来：相对 障碍源于无法向内部延拓的边界数据；绝对

障碍则内在于约束结构。相对上同调的连接同态 δ^* 将次数为 k 的边界数据提升为次数为 $k+1$ 的内部障碍——由此得到的计算正是离散斯托克斯定理：

边界整体性转化为内部曲率。

这一单一机制贯穿全部五个层级：不相容的 H^0 边界数据导致相对 H^1冲突；具有非平凡 H^1 整体性的环则导致相对 H^2 曲率。对于每个次数上的相对与绝对情形，二者的区别在于障碍是否需要外部干预，还是由系统自身产生。

为了让扭子清晰可见，而不只是被计算出来，我们引入单值化孔径法 （MoMA）：这是一种将整体性转化为可感知单值化的动画技术。滑动窗口揭示局部截面；沿环路遍历一周后，显示的截面会翻转。这正是通过运动显现出来的扭子结构。

本文分三个部分展开。第一部分（§§2–3）介绍三种典型的双稳态系统，并通过约束图、耦合余链和离散斯托克斯定理，将它们的共同结构形式化。第二部分（§§4–7）通过以下内容构建层级：边界强制冲突（相对 H^1）、内在不可能性（绝对 H^1）、挠子视角，以及用于通过动画呈现单值化的单值化孔径法。第三部分（§§8–9）进一步讨论 H^2：边界强制曲率缺陷（相对 H^2），继而探讨通过杯积产生的接缝干涉，以及次数移位通量模型（绝对 H^2）。

本文中的插图旨在呈现上同调分级视觉悖论的本质，但有时静态图像仍不足以说明问题，动画则是更清晰的媒介。我们没有尝试将低质量动画嵌入附录或作为补充文件，而是选择公开发布一份附有解说的动画播放列表，用以展示本文中的各种系统（以及更多内容）。建议读者观看：

https://www.youtube.com/playlist?list=PL8erL0pXF3JaYUQHC5G0iFM0lXcGlexch

2. 三种双稳态系统

三种典型系统展现了通过成对约束相互作用的双稳态元件：内克尔立方体场、齿轮啮合和菱形镶嵌。我们将依次介绍每种系统，并着重说明它们共有的结构；这一结构将在第 3 节中将它们统一起来。

2.1. 内克尔立方体场。内克尔立方体是双稳态图像的典型代表：一个线框立方体具有两种稳定的深度解释，观察者可以随意在两者之间切换。将多个内克尔立方体排列成网格后，各种解释便会相互耦合。任选一个立方体，使其朝前或朝后；这一选择会约束相邻立方体，并在连通场中逐步传播。整个网格继承了单个元件双稳态所产生的恰好两种全局状态。与彭罗斯三角形不同，内克尔立方体网格本身并无内在悖论。但假设我们像图 2 中那样，将某些立方体固定为相反取向。从每个固定立方体传播而来的的一致约束会在内部发生冲突。这是一种相对悖论：障碍并非源于约束结构本身，而是源于不兼容的边界条件——按第 4 节的术语来说，就是冲突。我们将在第 5 节通过相对上同调将其形式化。

静态内克尔立方体的双稳态也有动态对应现象。让线框绕垂直轴旋转（图3）。它朝哪个方向转？前后歧义转变为旋转歧义：当观察者翻转深度解释时，感知到的旋转方向也会反转。这就是

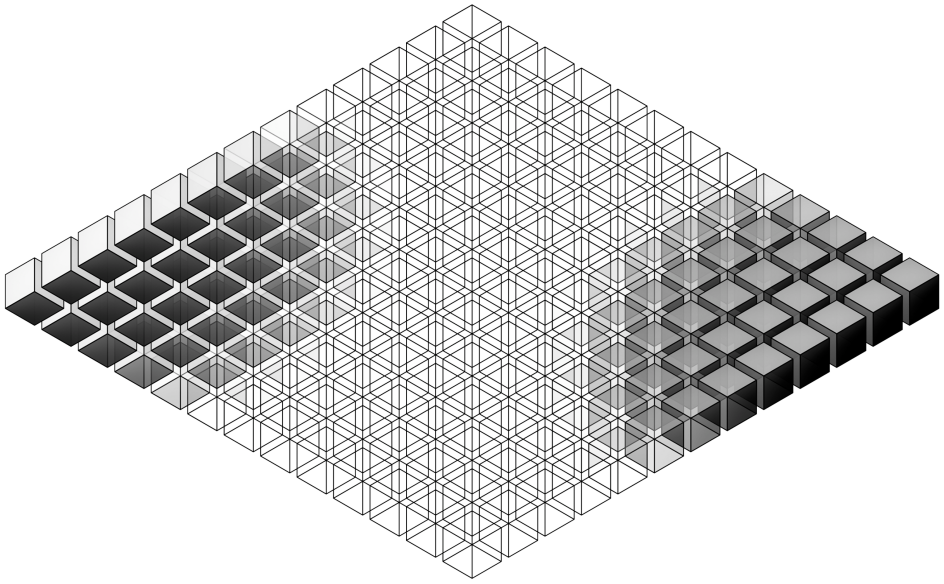

图 2。 内克尔立方体的二维场。为任意一个立方体选择取向，便会决定其所在连通分支中所有立方体的取向。将两个互不相交的立方体子集固定为相反状态，就会产生冲突——一种相对悖论。

“旋转舞者”错觉背后的机制，适用于任何具有前后对称性的线框或剪影。

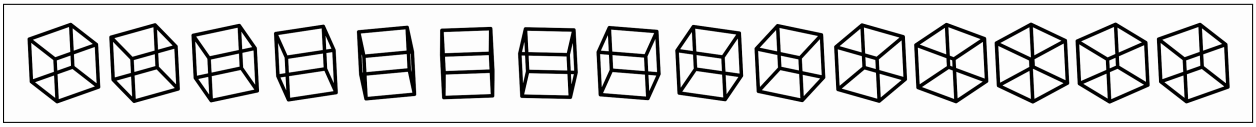

图3。 一个绕垂直轴旋转的内克尔立方体。静态图像中的深度歧义转变为旋转歧义：同一段动画既可以被感知为顺时针旋转，也可以被感知为逆时针旋转。

旋转双稳态将静态分类问题——这个立方体朝向哪边？——转变为动态问题——它朝哪个方向旋转？——同时保留了 $\mathbb{Z}_2$ 结构。动画不仅是说明手段，也是揭示悖论的工具，正如我们将在第 7 节看到的那样。

2.2. 齿轮啮合。 旋转双稳态在齿轮系统中得到了自然的机械体现。当两个外啮合（直齿）齿轮啮合时，它们的轮齿相互咬合，迫使它们反向 旋转：如果一个齿轮顺时针转动，它的相邻齿轮就必须逆时针转动。这种对立约束将孤立的双稳态转变为相互耦合的变量。为任意一个齿轮选择旋转方向，啮合关系便会决定其他齿轮的方向——前提是不会产生矛盾。

考虑 n 个外啮合齿轮组成一个环，每个齿轮都与两侧相邻的齿轮啮合（图 4）。如果 n 是偶数，沿环交替旋转即可满足所有对立约束，系统便能自由转动。如果 n是奇数，则无法实现这种交替——最后一个齿轮必须同时与相邻齿轮同向和反向。系统锁死：这是一个机械悖论，我们将其认定为一个非平凡的 H^1 类。

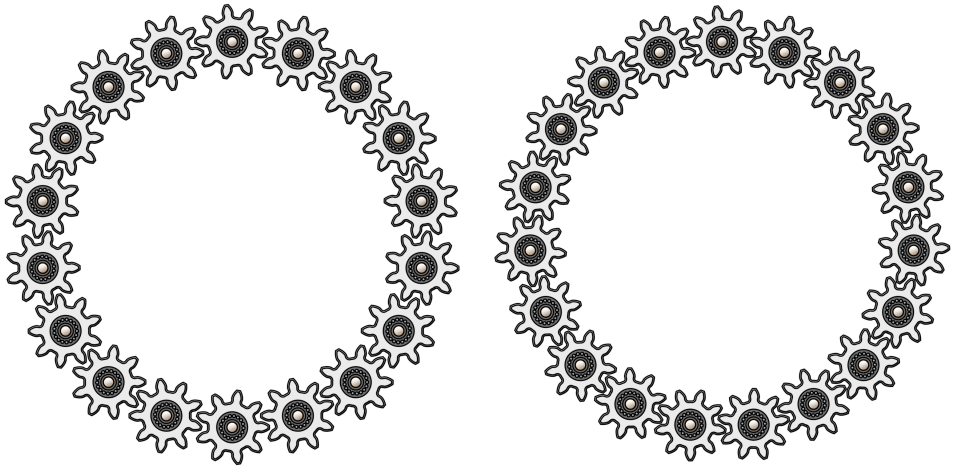

图 4. 环中的齿轮数量为偶数时，系统可以自由转动 [左], ；齿轮数量为奇数时，系统则会锁定 [右]。

平面齿轮啮合将这一概念扩展到了二维。由齿轮构成的正方形网格中，每个齿轮都与四个相邻齿轮啮合，其接触图是二分图：顶点分为两个集合（棋盘式着色），所有边都连接两个集合中的顶点。令一个集合中的齿轮顺时针旋转，另一个集合中的齿轮逆时针旋转，即可满足所有对立约束。更一般地，纯对立型齿轮啮合是一致的，当且仅当其接触图不含奇环。环形齿轮和皮带会在以对立约束为主的系统中引入一致约束；锥齿轮则将这一图景扩展到三维。本文仅讨论外啮合直齿圆柱齿轮。

2.3. 菱形镶嵌。 平面上的菱形镶嵌——由边长相等的平行四边形铺成的镶嵌——可以自然地解释为三维阶梯曲面的投影。规则的菱形铺砌由 60° 菱形构成，是沿 $(1,\ 1,\ 1)$ 方向投影单调曲面 $\mathbb{Z}^3$ 所得：也就是一堆立方体，其边界面投影后形成菱形，见图 5[左]。

双稳态元件是三度顶点：恰有三个菱形相交的角点。在这样的顶点处，相邻菱形呈现出投影中的立方体角——可以是凸 （朝向观察者），也可以是凹 （背向观察者）。这种二元选择就是双稳态变量。当两个三度顶点是同一个菱形的对角顶点时，它们便是相连的。要使阶梯曲面解释保持一致，相连的顶点必须处于相反状态：一个凸，另一个凹。这正是我们在啮合齿轮中遇到的对立约束，如今它由铺砌几何编码。菱形铺砌的约束图——由菱形对角线上的连接关系相连的三度顶点——构成一个六角格。这个图是二分图：所有环的长度都是偶数，因此凸／凹状态总能实现一致交替。不会产生障碍，正如偶数齿轮环可以自由转动一样。

彭罗斯 P3 铺砌 则有所不同。它由角度为 $72^\circ/108^\circ$ 和$36^\circ/144^\circ$的两种菱形原型砖构成，呈现出具有局部五重对称性的准周期序。其特征是五边形玫瑰花形：五个粗菱形围绕一个中心顶点排列，如图 5[右侧]所示。玫瑰花形包含五个三度角，它们在约束图中构成一个 5 环，每条边都带有一个对立约束。试图沿五边形交替排列凸角和凹角会失败

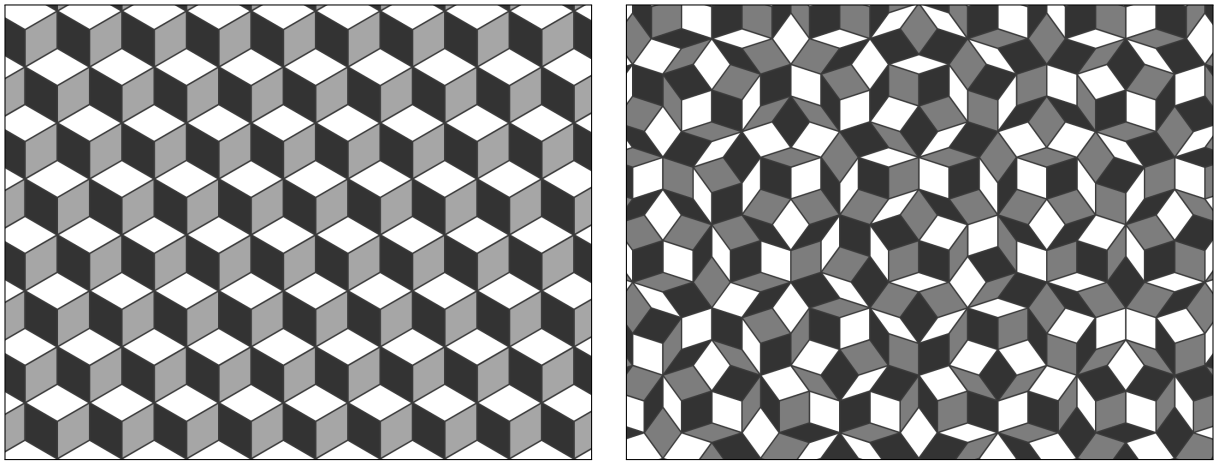

图5. 两种菱形镶嵌： [左]为规则菱形铺砌； [右]为以五重玫瑰花饰为中心的彭罗斯 P3 铺砌局部。

原因与五个啮合齿轮无法转动相同：环的长度为奇数，因此不存在一致的赋值。

这正是彭罗斯神秘的七边形阶梯（图 1[左]）的结构，只不过环长为5而非7。两种构型都由奇环中的双稳态元件及对立约束构成。施罗德阶梯恰好起到3度角点的作用：每个角点都有两种解释（上升或下降），相邻元件必须彼此不同，才能满足局部一致性。

更长的奇环——环长为15、35，乃至更长——贯穿 P3 铺砌，每个都呈现出相同的障碍。它们与齿轮啮合的对应关系十分精确：三度顶点相当于齿轮，连接关系相当于啮合接触，而对立约束（凸与凹）则相当于反向旋转。

3. 数学框架

上一节介绍的三个双稳态系统具有共同的结构，现将其精确表述。全文将采用以下对应关系：

一种状态 $x \in C^0(\Lambda;\mathbb{Z}_2)$为每个顶点指定一种二元感知：向前/向后、顺时针/逆时针，或凸/凹。

一种耦合 $\lambda \in C^1(\Lambda;\mathbb{Z}_2)$编码成对约束： $\lambda(e) = 0$ 要求一致； $\lambda(e) = 1$ 要求对立。

整体截面 是满足所有约束的状态： $\delta x = \lambda$。

存在性面临的障碍 是上同调类 $[\lambda] \in H^1(\Lambda;\mathbb{Z}_2)$。

关键要素是一个约束图 Λ，用以编码哪些元件相互作用；一个耦合余链 λ，用以规定如何耦合；以及一个曲率 $\mu = \delta\lambda$，用以在存在2-胞腔时度量局部受挫。核心结果是斯托克斯定理，它将边界全纯与内部曲率联系起来。

3.1. 约束与耦合。 约束图 Λ 以双稳态元件为顶点，并以边连接状态相互耦合的元件。在内克尔立方体场中，每个立方体是一个顶点；边连接共享同一面的立方体（一致约束）。在齿轮啮合中，每个齿轮是一个顶点；边连接啮合齿轮（对立约束）。在菱形镶嵌中，每个3度角点是一个顶点；边连接同一菱形的相对角点（对立约束）。请注意，在菱形情形中，Λ 的边并非 原始镶嵌的边——它们是跨越每个菱形、连接三度角的对角线。该镶嵌充当脚手架；一旦 Λ 被提取出来，原始的边便从分析中消失。图6针对P3 铺砌说明了这一点。

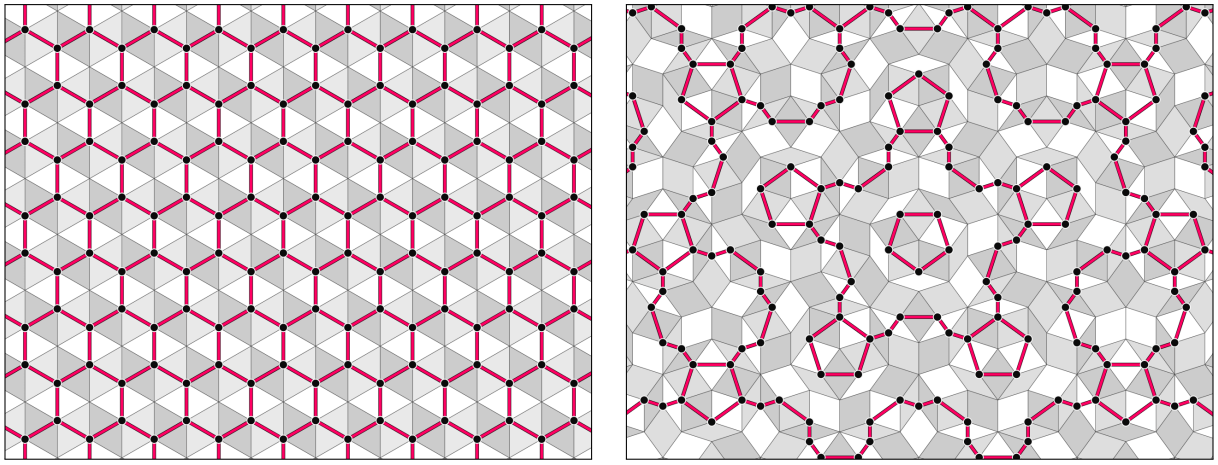

图6. 从图5中的两种菱形镶嵌 Λ 中提取的约束图。顶点为3度角点；红色边跨越菱形对角线连接相连的顶点对。菱形铺砌生成的六边形图只有偶圈 [（左侧）], , 而 P3 铺砌在每个玫瑰花形处都生成五边形，此外还有更长的偶圈和奇圈 [（右侧）]。

耦合余链 $\lambda \in C^1(\Lambda;\mathbb{Z}_2)$指定约束类型：$\lambda(e) = 0$ 表示e 的端点必须一致；$\lambda(e) = 1$ 表示它们必须相对。对于内克尔场，$\lambda \equiv 0$ （一致）；对于齿轮啮合和菱形镶嵌，$\lambda \equiv 1$ （对立）。

若状态 $x \in C^0(\Lambda;\mathbb{Z}_2)$满足全局一致性，则称其为全局一致，其中 $\delta x = \lambda$；上边界（δx）（e）$= x$（u）$+ x$（v）计算每条边两侧状态的奇偶性。解是否存在，取决于λ 是否为上边界。

对于某些系统，约束图 Λ 自然嵌入环境胞腔复形 X中：例如平面上的齿轮网格，以及空间中的内克尔立方体场。我们将 $\Lambda \subset X^{(1)}$ 视为 1-骨架的子图。不属于 Λ的 $X^{(1)}$ 边——自由边 ——不携带双稳态约束。

对于菱形镶嵌，约束边是对角线，而非镶嵌边，因此并不存在自然呈现出来的环境复形。我们通过添加自由边来构造 X，直到增广后的图围成多边形 2-胞腔。图7中，红色边构成 Λ；蓝色边则补全胞腔结构。

结果是一个胞腔复形 X，其具有 $\Lambda \subset X^{(1)}$。一个延拓 $\tilde{\lambda} \in C^1(X;\mathbb{Z}_2)$ 在 Λ 上与 λ 一致，并且在自由边上的取值可以任意选定。不同的延拓会产生不同的曲率，我们将在下文讨论。

3.2. 整体单值性判据。 方程 $\delta x = \lambda$ 可解，当且仅当 $[\lambda] = 0$ 属于 $H^1(\Lambda;\mathbb{Z}_2)$。附录 A 提供背景知识；关键在于对环进行奇偶计数。

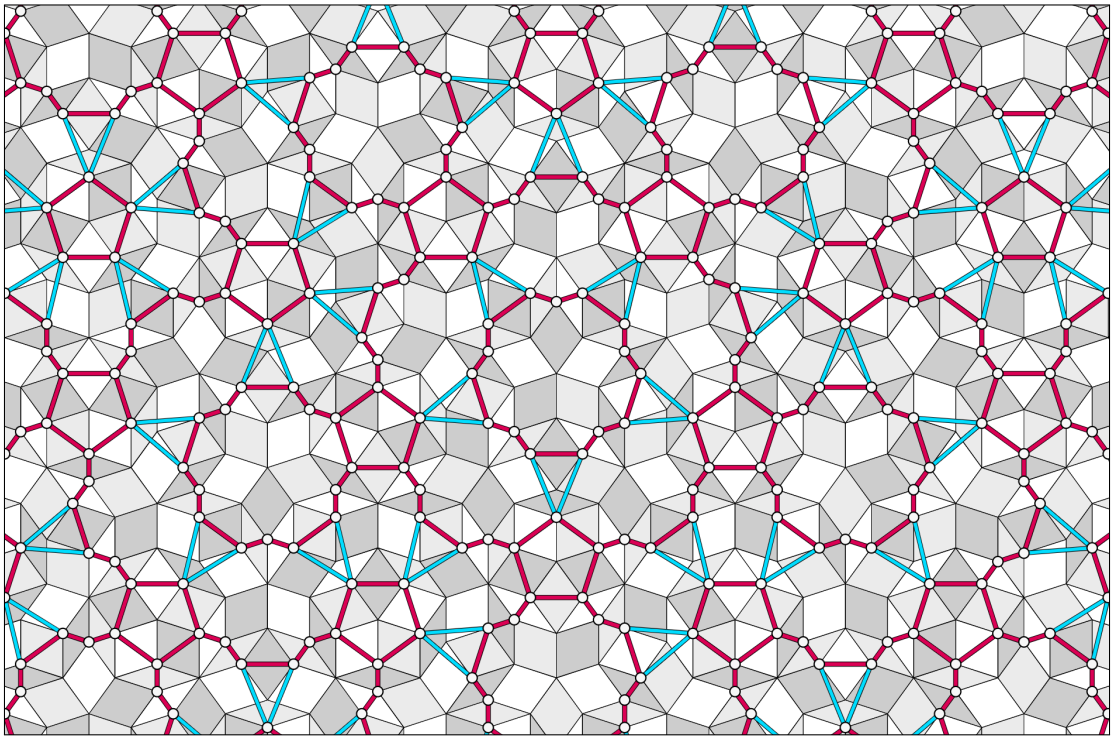

图7. P3 铺砌的一块区域及其对应的胞腔复形 X。红色边构成约束图 Λ，沿菱形对角线连接三度角。蓝色边（依据四度顶点）被加入，以构成正则二维胞腔结构。由红色边和蓝色边围成的2-胞腔填满了平面。

判据 3.1 (整体单值性判据)。 设 Λ 为一个连通图， $\lambda \in C^1(\Lambda;\mathbb{Z}_2)$ 为一个耦合上链。当且仅当 Λ 中的每个环 γ 都满足 $\sum_{e\in\gamma}\lambda(e) = 0$时，存在满足 $\delta x = \lambda$ 的全局状态 x 。

证明。 若 $\lambda = \delta x$，则对任意环 $\gamma = (v_0, v_1, \ldots\ldots, v_n = v_0)$，

$$\sum_{e\in\gamma}\lambda(e) = \sum_{i=0}^{n-1}\big(x(v_{i+1}) + x(v_i)\big) = 0,$$

因为每个顶点恰好出现两次。反过来，假设 λ 在每个环上的取值都为零。固定一个基点 v_0 ，并将 $x(v)$ 定义为沿从 v_0 到 v 的任意路径 p 对 $\sum_{e\in p}\lambda(e)$ 求和。此定义良好：从 v_0 到 v 的两条路径之差构成一个环，而 λ 在环上取值为零。根据构造，对每条边 $e = uv$，$(\delta x)(e) = x(v) + x(u) = \lambda(e)$。□

$\sum_{e\in\gamma}\lambda(e)$之和是 λ 绕 γ的整体性。非零整体性证实了不可能性——这是约束内在的绝对悖论。当所有环上的整体性均为零时，全局状态依然存在，但仍可能受到不相容边界数据的阻碍——这是一种相对悖论，表现为冲突，可通过相对上同调检测。

3.3. **曲率与斯托克斯定理**。 当 X 是二维时，将 λ延拓至 $X^{(1)}$ 并应用上边界，可得到曲率 $\mu = \delta\tilde{\lambda} \in C^2(X;\mathbb{Z}_2)$。若 $\Lambda = X^{(1)}$，则无需延拓；否则，不同的延拓会产生不同的曲率代表元。

˜对于边界边为 e_1，……，e_k的面 f，曲率为 $\mu(f) = \sum_i \lambda(e_i)$。若$\mu(f) = 0$，则该面是平坦的；若 $\mu(f) = 1$，则该面是受挫的。改变自由边上的延拓会翻转两个相邻面上的 μ，从而重新分配曲率。内禀量由下式确定：

引理 3.2 (扩张无关性)。设 $D \subset X$ 是一个 *2*-链，其边界 ∂D 完全位于约束图 Λ 中。那么，总曲率 $\sum_{f\subset D} \mu(f)$ 仅取决于 $\lambda|_{\partial D}$，而不取决于所选的延拓 ˜ λ。

˜ ˜证明。根据上边界的定义，$\sum_{f\subset D} \mu(f) = \sum_{f\subset D} (\delta\lambda)(f) = \sum_{e\in\partial D} \lambda(e)$；最后一个等式是因为 D 的每条内部边恰好出现在两个面边界中（在 $\mathbb{Z}_2$ 中相互抵消），而每条边界边只出现一次。由于 $\partial D \subset \Lambda$，边界和中的每条边都属于 Λ，其中 λ 根据定义与 λ 一致。□

此引理说明，只要满足 $\partial D \subset \Lambda$，我们便可以谈论“ D 内部的曲率”，而无需指定延拓。此后我们将默认采用这一约定。

上链与链通过求值配对：$\langle c,\ \tau\rangle = \sum_i c(\sigma_i)$，其中 c 是一个 k-上链，而 τ =$\sum_i \sigma_i$ 是一个 k-链。

定理 3.3 (斯托 克斯)。对于任意 k-上链 $c \in C^k(X;\ \mathbb{Z}_2)$ 以及任意 $(k+1)$-链 $\tau \in C_{k+1}(X;\ \mathbb{Z}_2)$，

$$\int_\tau \delta c \ = \ \int_{\partial\tau} c.$$

˜应用于曲率 $\mu = \delta\lambda$ 和 2-链 τ时，斯托克斯定理断言：

$$\sum_{f\subset\tau} \mu(f) \ = \ \sum_{e\in\partial\tau} \tilde{\lambda}(e).$$

当 $\partial\tau \subset \Lambda$ 时，右侧只取决于 $\lambda|_\Lambda$：内部曲率由边界整体性决定。在闭曲面上，总曲率为零。

这是本文的核心原则：边界不一致性无法消解——它必然会在某处局部化为曲率。后续各节的 H^2 构造都体现了这一点：非零整体性的边界圈会迫使内部受挫。

备注 3.4（规范视角）。该框架可以用规范理论来解释。耦合 λ 是一个离散联络，其曲率 $\mu = \delta\lambda$ 即为场强。规范变换$x \mapsto x + \xi$ 将 λ 替换为与其上同调的 $\lambda + \delta\xi$，同时保持上同调类 $[\lambda]$ 不变，并使μ 保持不变。这一视角在 §9.2 中至关重要；在该节中，双稳态变量从顶点转移到边：λ变为势，μ 变为指定通量，而障碍则从 H^1 转移到H^2。

4. 上同调层级

上同调并非始于一阶。群 $H^0(\Lambda;\mathbb{Z}_2)$ 控制着解的结构：如果 x 是 $\delta x = \lambda$的解，那么 $x + 1$也是；而当解存在时，它们总是成对出现，并由这一全局翻转联系起来。对于连通的约束图，$H^0(\Lambda;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ 在解集上自由且传递地作用，因此解集构成一个没有指定元素的主齐性空间。因此，能够获得一致全局解读的双稳态图像具有真正的不确定性：哪一种解读

才是正确的？两者都不具有优先地位，观看者的感知系统会在它们之间摆动。这就是歧义，即零阶现象，而内克尔立方体正是它的典型范例。

从 H^0 到 H^1，歧义让位于障碍，而障碍的性质取决于其来源。当一个原本一致的系统因不相容的边界条件而陷入矛盾时，就会产生相对悖论：内部可以容纳任一赋值，却无法同时容纳两者。这就是冲突 ——相互竞争影响的梯度，可由连接同态 $\delta^*\colon H^0(A) \to H^1(X,\ A)$形式化；它将不相容的零度边界数据提升为一度内部障碍。端点被固定为相反取向的内克尔区间，便是典型例子。

一个绝对 悖论不需要外部干预。当约束图中的某个环携带非零整体性时，$[\lambda] \neq 0$ 在 $H^1(\Lambda)$ 中，无论边界条件如何，都不存在全局状态。这就是不可能性，它内在于约束结构之中。奇数齿轮环便是典型例子。

边界数据转化为内部障碍的机制，是相对上同调的连接同态 δ^* 。给定 A上的余循环 α ，可将其任意扩展为 X 上的上链 $\tilde{\alpha}$，再取其上边界： $\delta^*[\alpha] = [\delta\tilde{\alpha}]$。但这恰恰就是斯托克斯所计算的内容。对于任意满足 $\partial\tau \subset A$ 的链 τ ：

$$\langle \delta\tilde{\alpha}, \tau\rangle \ = \ \langle \tilde{\alpha}, \partial\tau\rangle \ = \ \langle \alpha, \partial\tau\rangle,$$

中间的等式由上边界的定义得出，最后一个等式则因为 $\tilde{\alpha}$ 在 $A \supset \partial\tau$上与 α 一致。左侧的内部积分由右侧的边界积分决定。这就是离散斯托克斯公式，它表明 $\delta\tilde{\alpha}$ 只取决于 α，而非延拓——这正是使 δ^*定义良好的关键。

连接同态 δ^* 既是斯托克斯原理，也是障碍：它精确衡量边界数据无法向内延拓的程度。这一机制在各个次数上都普遍成立，我们将其提升为一条指导原则：

> **斯托克斯原理**。边界不一致性会转化为内部障碍。在每个次数 k，若 $H^k(A)$ 中的一个类无法向内延拓，它就会经由 δ^* 提升为$H^{k+1}(X, A)$中的一个类，其计算方式是对任意延拓取上边界。

连接同态与离散斯托克斯公式，是同一机制在各个次数上普遍运作的两种视角。在 $k=0$：内克尔场中被固定为相反状态的互不相交分支，在 $H^0(A)$ 中确定数据（如图 2 所示）；连接同态 $\delta^*\colon H^0(A) \to H^1(X, A)$ 将其映射为相对 H^1 障碍 —— 内部的冲突。在 $k=1$：具有非零整体性的环 γ 若以圆盘 D 为边界，就代表 $H^1(\gamma)$ 中的一个类；连接同态 $\delta^*\colon H^1(\gamma) \to H^2(D, \gamma)$ 将其映射为相对 H^2 障碍——必须局部化于D内部某处的曲率。斯托克斯公式

$$\sum_{f\subset D} \mu(f) \ = \ \sum_{e\in\gamma} \lambda(e)$$

直接给出了计算结果：右侧的边界全纯迫使左侧产生内部受挫。障碍无法消解；它必然会转移到某处。

同样的机制在更高一个次数上仍然成立，但要获取绝对 H^2 类，就必须超越相对上同调。有两种途径。杯积 $\alpha \smile \beta \in H^2(X)$衡量独立 H^1 类之间的干涉；若其非零，它们的庞加莱对偶接缝就必定相交，无论采用何种上循环代表元。另一种途径是，次数平移将

把双稳态变量置于边上而非顶点上，并以指定通量充当耦合的角色；此时寻找势的障碍便直接存在于 H^2中。

由每个次数上的相对／绝对之分细化后的完整层级如下：

$$\underset{ambiguity}{H^0(A)} \xrightarrow{\delta^*} \underset{conflict}{H^1(X,A)} \longrightarrow \underset{impossibility}{H^1(X)} \xrightarrow{\delta^*} \underset{curvature}{H^2(X,A)} \longrightarrow \underset{inaccessibility}{H^2(X)}$$

标有 δ^* 的箭头表示斯托克斯转移：次数为 k 的边界数据，提升为次数为 $k+1$的内部障碍。在每个次数上，这道间隙将边界强制产生的（相对）现象与内禀的（绝对）现象区分开来。[1] 当边界循环本身并非环境空间中的边界时，相对障碍便转化为绝对障碍——也就是说，产生边界数据的拓扑是内禀的，而非外加的。

这种层级中发生变化的是障碍的体验特征。歧义 (H^0)是多种有效解读并存，却没有任何依据可供取舍。冲突 (相对H^1)是彼此竞争的边界力在一个原本一致的系统中形成的梯度——内克尔区间中的视觉张力便是如此：靠近两端固定点的立方体有明确的定向，而中央立方体则逐渐淡化为线框不确定性。不可能性 (绝对 H^1)是内禀锁定，无需外部干预——就像无法转动的奇数齿轮环。曲率 (相对 H^2) 是由边界整体性所强制产生的局部挫折：缺陷可以在各面之间重新分布，却无法消失，并由离散高斯定律守恒。不可达性 (绝对 H^2)是由拓扑不变量将构型划分为不同扇区——局部运动不受限制，却仍无法抵达某些全局状态。

5. 相对 H^1：冲突

当对一个原本一致的系统施加不相容的边界条件时，悖论便可由歧义逐步产生。其结果是冲突：一种内部无法消解的相互竞争之影响的梯度。对（X, A）的长正合列精确刻画了这一点：连接同态 δ^* ： $H^0(A) \to H^1(X, A)$将零度边界数据提升为一度内部障碍。

机制始终相同。取一个具有平凡耦合的可缩域 X ，选取一个具有两个连通分支的子复形 A ，并将不同分支固定为不同状态。任何全局状态在所有分支上都会限制为相同 状态，因此将不同状态赋予不同分支的边界数据落在限制映射的像之外，从而在$H^1(X, A)$中给出一个非平凡类。其丰富性并不在于代数——它始终是 $\mathbb{Z}_2$ ——而在于所得冲突在空间中如何分布的几何。

5.1. 内克尔立方体场。 在 [6], 中引入的规范例子是内克尔区间：由一串内克尔立方体组成的线性链，其端点被强制取相反的取向（图 8）。底空间$X = P_n$ 是一个具有 $n+1$ 个顶点的路径，边界 $A = \{v_0, v_n\}$，而耦合 $\lambda \equiv 0$ 在整个空间中强制一致。由于 X 是可缩的， $H^1(X) = 0$ ，因此不存在绝对悖论。长正合列退化为

$$0 \to H^0(X) \xrightarrow{\text{res}} H^0(A) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, A) \to 0.$$

[1]空间 X 与 A 在每一层级的实例化各不相同：对于 H^0/H^1， X 是带有边界顶点 A的约束图 Λ ；对于 H^1/H^2， X 是带有 $A = \partial D \subset \Lambda$的环境二维复形。

这里 $H^0(X) \cong \mathbb{Z}_2$（两个均匀状态），而 $H^0(A) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$（四种边界赋值）。均匀状态限制后会得到相等的端点，因此 $\mathrm{im}(\mathrm{res}) = \{(0,0),(1,1)\}$，由正合性得到$H^1(X, A) \cong \mathbb{Z}_2$。边界数据 $\beta = (0,1)$——左侧立方体向前，右侧立方体向后——位于限制映射的像之外，从而证明存在非平凡的相对 H^1 类。

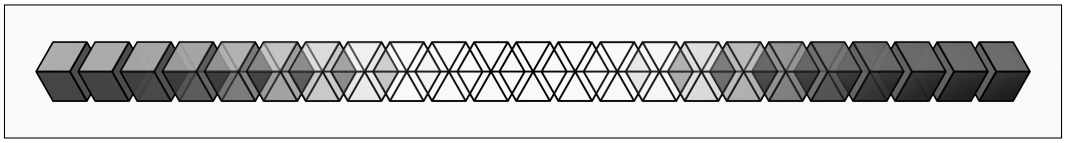

图 8. 内克尔区间：端点被强制取相反取向，从而产生相对H^1 悖论。靠近边界的立方体被强烈确定；中心立方体逐渐淡化为线框歧义。

在感知上，冲突表现为歧义梯度：靠近被强制端点的立方体显得高度确定，而中心立方体则淡化为线框不确定性，受困于从两端传播而来的不相容约束之间。这种感知梯度并非硬约束模型所预测——该模型仅记录障碍的存在——而是反映了视觉感知中的软约束或能量最小化过程。“冲突”一词捕捉了这一体验特征：与均匀且即时的不可能性不同，冲突是分布的、有程度之分的。

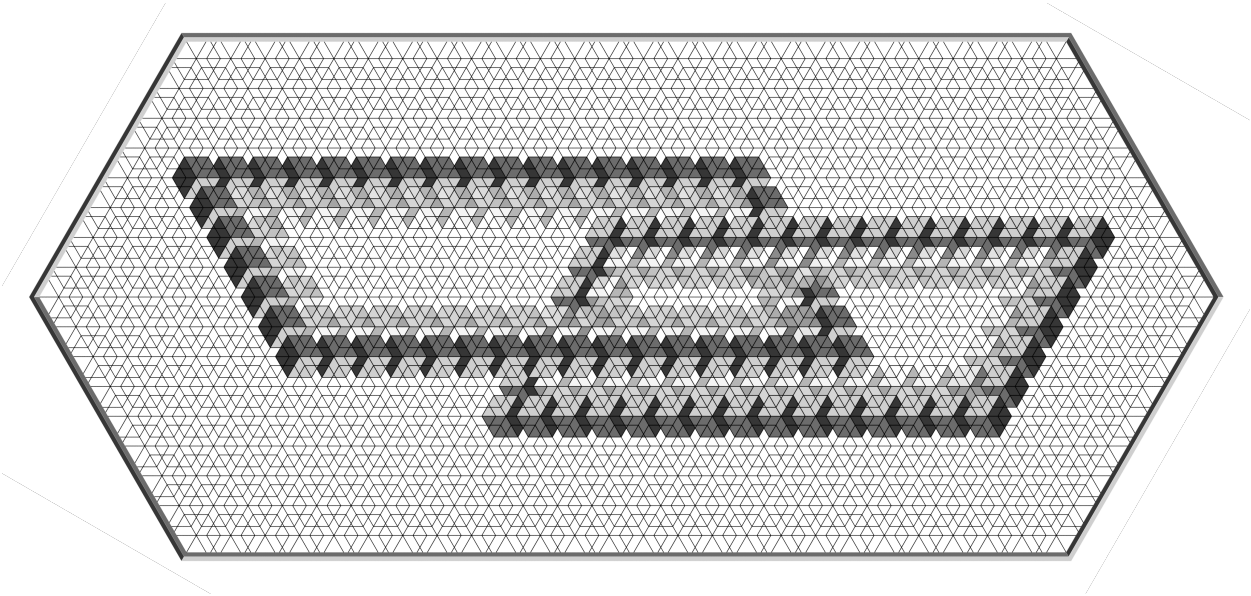

图 9. 一个三维内克尔立方体场，其中两个相链接的环被强制取相反取向。冲突区域在环之间穿行，其几何由链接所塑造——尽管上同调类 $H^1(X, A) \cong \mathbb{Z}_2$ 对此并不敏感。

同样的计算可以直接推广。任意连通、可缩的内克尔场 X 及其 $\lambda \equiv 0$，以及任意将 $A = A_1 \cup A_2$ 分解为互不相交的非空子集的方式，都会产生 $H^1(X, A) \cong \mathbb{Z}_2$：将$A_1$ 和 A_2 钉定为相反的取向，就会得到生成元。在二维中，一个带有

相距较远的钉定区域的平面网格会形成一个美妙的冲突区域，如图 2 所示。在三维中，边界分支的拓扑使图景更加丰富。图 9 展示了一个立方格，其中两个相链接的立方体环被迫具有相反的取向。上同调群 $H^1(X,\ A) \cong \mathbb{Z}_2$ 与两个未相链接的环或两个孤立点的情形相同——在这一代数层面上，相链接关系不可见。区别在于几何：冲突如何分布于空间中。上同调能够检测障碍是否存在；若要刻画它所处的位置，则需要更精细的不变量。

5.2. **带边界强制条件的菱形铺砌**。 同样的现象也出现在视觉内容更丰富的二维菱形铺砌中。考虑一个菱形铺砌的矩形区域，其约束图 Λ ——由跨越菱形对角线相连的三度顶点构成——是六角格的一部分。这个图是二分的：顶点分成两个类，所有边都连接不同类的顶点。将一类指定为凸，另一类指定为凹，所有对立约束便都得到满足。两种棋盘格解都存在；$[\lambda] = 0$ 在 $H^1(\Lambda)$中，而且不存在绝对悖论。

现在施加边界条件。令 $A = A_L \cup A_R$ 由区域左边和右边上的三度顶点组成。对于适当选取的区域宽度，A_L 和 A_R 都属于同一个二分类。任何全局棋盘格解都会给该类中的所有顶点指定相同的状态，因此两侧边界也会取相同状态。若强制令 A_L 为凸，而 A_R 为凹，则会得到不属于限制映射的像的边界数据；长正合列给出 $H^1(X,\ A)$，其生成元正是这些边界数据。

结果是提升到二维的内克尔区间：数学上完全相同（$H^1(X, A) \cong \mathbb{Z}_2$），但在视觉上呈现为阶梯曲面悖论，而非深度朝向悖论。左侧边界似乎向观察者凸出，右侧边界则向后退去，内部逐渐淡化为平坦的歧义。图 10 展示了这一结果。

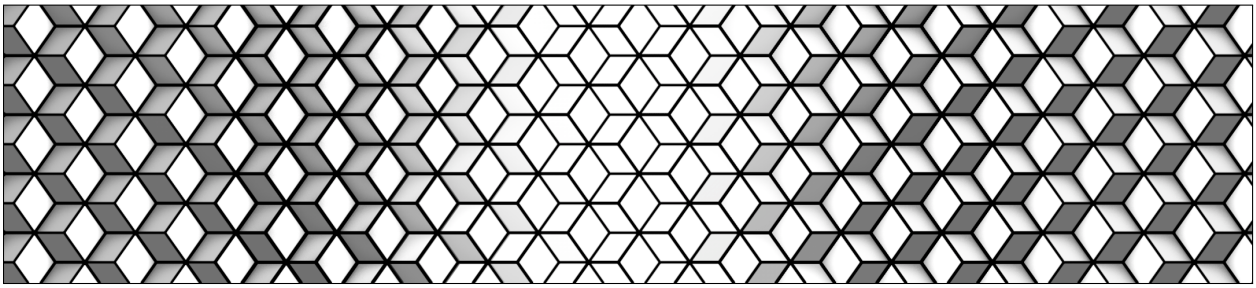

图 10. 一个菱形铺砌局部图案，其左侧边界通过明暗阴影被固定为一种取向，右侧边界则被固定为相反的取向；参见 图 8。

6. 绝对 H^1：不可能性

上一节中的相对悖论源于外部干预：将相距甚远的元素固定为互不相容的状态，造成了内部无法化解的冲突。现在我们转向不可能性悖论——这类悖论无需此类干预，耦合 λ 本身便会迫使某个环上出现非零整体性，使全局状态无论边界条件如何都不可能存在。

整体单值性判据（判据 3.1）提供了检验方法：λ 当且仅当每个环 γ 的整体性为零 $\sum_{e\in\gamma} \lambda(e) = 0$时，才承认一个全局状态。当某个环的整体性非零时，类$[\lambda] \in H^1(\Lambda;\mathbb{Z}_2)$是非平凡的，因此不存在解。这些是<僵局 id='9'>绝对的 </僵局>悖论，是约束结构所固有的。

6.1. 奇数齿轮环。 最清晰的例子出现在具有纯对立约束的齿轮系统中。对于环中的 n 外啮合齿轮，每个齿轮都与其两侧的邻居啮合，每条边承载$\lambda(e) = 1$，而环绕该环的整体性为 n模 2。当 n 为偶数时，交替旋转能够满足所有约束；当 n 为奇数时，系统锁死。我们在 §2.2 中观察到的运动学现象，如今被认识为一个非平凡的 H^1 类。

在曲面上，图景会更加丰富。考虑平坦环面 T^2 上由外啮合齿轮构成的矩形网格，该网格通过识别相对的边构成（图11）。每个齿轮都与四个相邻齿轮啮合；其约束图是环面上的标准正方格子。当水平和垂直方向的尺寸均为奇数时，两个基本环都具有非零整体性，表示类 $[\lambda] = \alpha + \beta \in H^1(T^2; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$，其中 α 和 β 分别是与水平环和垂直环对偶的生成元。这些是彼此独立的障碍：消除其中一个（例如，沿水平圆切开）后，另一个仍然存在。当我们在 §9.1 中考察杯积时，这种多重性将变得重要。

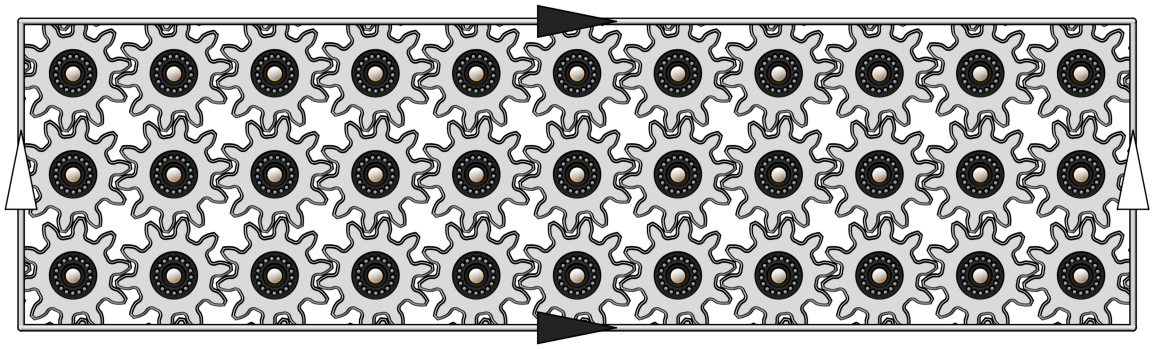

图11. 平坦环面上的平面齿轮啮合，沿经线和子午线方向的齿轮数均为奇数，因此在两个基本 H^1 类中产生非零整体性。

6.2. 菱形镶嵌与带状多面体。 §2.3 中介绍的 P3玫瑰花形是典型的平面示例。五个粗菱形围绕着一个中心顶点，其三度角点在约束图中构成一个 5-环，且每条边上都有 $\lambda \equiv 1$。整体性为 $5 \equiv 1$，这证明存在一个非平凡的 H^1 类：玫瑰花形周围无法对凸和凹作出一致赋值。这正是彭罗斯七边形阶梯（图 1[左侧]）的结构，只是环的长度不同——二者都是由带有对立约束的双稳态元件组成的奇数环。更长的奇数环也会出现同样的 H^1 缺陷障碍：图12 展示了一个局部凹凸赋值无法延拓至全局的示例。

同样的现象也能借助菱形带状多面体优美地迁移到闭曲面上——这类凸多面体的面全是菱形 [13]。菱形三十面体（RT30）由 30 个呈二十面体对称排列的黄金菱形组成（图 13[左侧]）。它的 20 个三度顶点位于 3-重对称轴上，而 30 个菱形面各对应一条约束边——即连接其两个三度角点的对角线。由此得到的约束图是十二面体图：包含 20 个顶点和 30 条边，十二个五边形面环绕着五重对称轴。每个五边形都是由对立约束构成的 5-环，且整体性非零——这正是球面上的 P3玫瑰花形。

具有 90 个菱形面的菱形九十面体（RE90）拥有更丰富的结构（见图 13[右侧]）。其 60 个三度顶点和 90 条约束边构成截角二十面体图——“足球

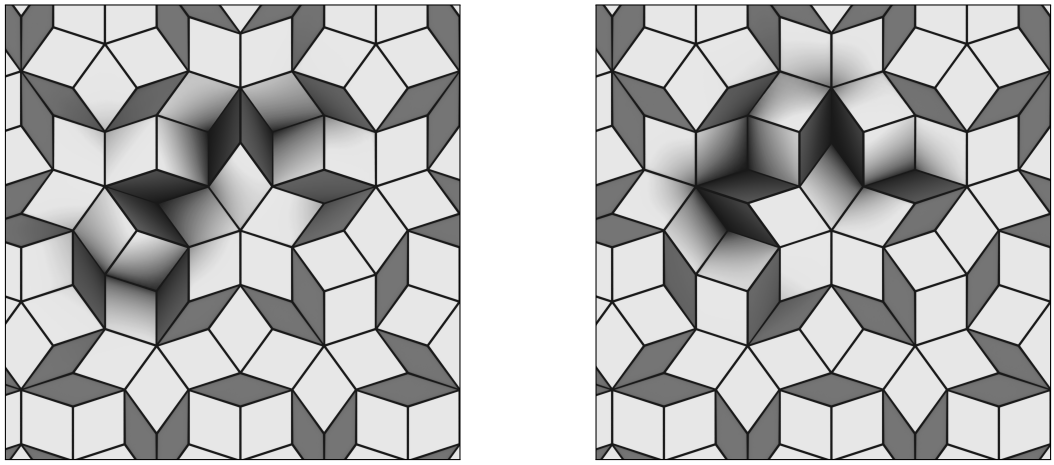

图12. 沿着 Λ中的一个奇圈，在P3菱形准铺砌中提升角点；两种提升（以明暗阴影表示）在局部上是一致的，但由于整体性非零，无法沿奇圈全局延拓。

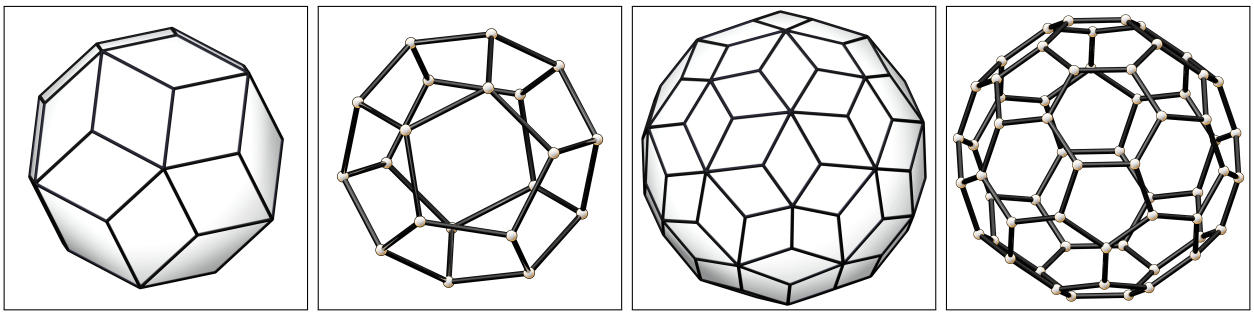

图13. [左侧]带有十二面体约束图的菱形三十面体RT30，与 [右侧] 带有截角二十面体约束图的菱形九十面体RE90形成对比；两者都有五边形玫瑰，但RE90还具有不存在整体性问题的六边形圈。

”图案，包含 12 个五边形面和 20 个六边形面。五边形会产生受挫五圈；六边形则允许一致交替。五重对称轴处的局部不可能性与三重轴处的局部一致性并存，但凸角和凹角却无法实现全局赋值。集中在五边形上的 H^1 障碍，无法通过对六边形作任何选择来消除。

6.3. 扭曲环与轴扭转类。 前面的例子仅由耦合余链 λ 推导出整体性：奇圈上的对立约束相加得到 $1 \in \mathbb{Z}_2$。但耦合所发挥的作用比表面看来更大。说 $\lambda(e) = 1$ ——相邻状态必须相互对立——预先假定了一种比较 两个状态空间的方式：“ u 处的顺时针”和“v 处的顺时针”必须含义相同。对于平面齿轮，平面的固定法向量为这种比较提供了规范的依据。但对于旋转轴在空间中变化的旋转物体，“顺时针”取决于通过右手定则选择轴的定向；当这些轴沿环路逐渐旋转时，返回时状态的命名可能会反转。耦合 $\lambda(e)$ 编码了整体 比较——既包括机械约束（相同或相反），也包括标签识别（取决于两条轴的相对几何关系）。

在上链层面，这些贡献彼此纠缠：将 λ 分解为“约束部分”和“标架部分”，需要进行规范选择（对轴的定向作出一致指定），而这种指定可能无法在全局上实现。

然而，在上同调类的层面上，会出现一种清晰且典范的分解。定义轴场沿环 γ 的扭曲类 $\omega(\gamma) \in H^1(\gamma;\mathbb{Z}_2)$如下： $\omega(\gamma) = 0$ 若能为环 γ 周围的所有旋转轴一致地定向（在每个顶点选择“向上”，使定向连续变化），则取此值； $\omega(\gamma) = 1$ 若不能，则取另一值。[2] 这与读者此前见过的整体单值性判据中的奇偶性检验相同——只是这里检验的是轴的定向，而非自旋态。

令 $[\lambda_0]$ 表示平坦标架类：如果所有轴都彼此平行，耦合所代表的上同调类。对于纯粹的一致，$[\lambda_0] = 0$；对于长度为 n 的环上的纯粹对立，模 2 为 $[\lambda_0] = n$ 。总整体单值性可分解为

$$[\lambda] \;=\; [\lambda_0] \;+\; \omega \quad \in H^1(\gamma;\mathbb{Z}_2).$$

这两项都是定义良好的上同调类——规范不变——尽管 λ 不存在典范的上链层面的分解。这正是使用上同调类而非代表元的好处：在转向 H^1 时，约束与标架之间如何分配整体单值性的歧义便消失了。

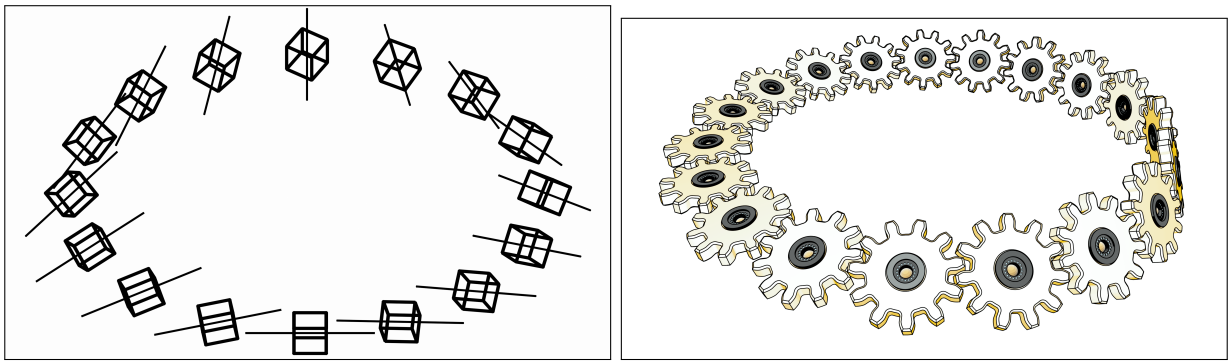

图14。 两个扭曲系统： [左]旋转的内克尔环是由内克尔立方体组成的一个环，每个立方体都绕着局部轴旋转，而这些轴沿环逐渐转动一周，并在绕行一圈后完成半周旋转； [右] 对应的齿轮系统是著名的莫比乌斯齿轮系统 [14]，其中奇数个齿轮带有整体扭曲，整体性为零。

考虑一个轴场完成半周旋转的 n-环上的两种耦合类型（$\omega = 1$）：

一致耦合 （$[\lambda_0] = 0$）：内克尔立方体绕着沿环逐渐转动的轴旋转（图 14[左]）。轴平行时，系统是一致的；半扭曲带来 $\omega = 1$，从而得到 $[\lambda] = 0 + 1 = 1$。几何扭曲造成了不可能性。

对立耦合($[\lambda_0] = n$模 2)：莫比乌斯带上的齿轮（图 14[右侧]）。在平面环上，$[\lambda] = n$ 模 2：奇数个齿轮会锁死。加入半扭转后， $[\lambda] = n + 1$ 模 2：奇数环现在可以自由转动，而偶数环会锁死。几何扭转消解了不可能性。

[2]这种扭曲类有一个名称：它是由无向旋转轴张成的线丛 $L \to \gamma$ 的第一斯蒂费尔-惠特尼类 $w_1(L)$。当用映射 $f : \gamma \to \mathbb{RP}^2$ 来编码轴时，有 $\omega = f^*(w_1)$，其中 w_1 生成 $H^1(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}_2)$。不熟悉特征类的读者不必担心，只需将 ω 视为其本来面目：对轴的可定向性进行奇偶性检验。

莫比乌斯齿轮环是一种广为人知的机械奇观——奇数个啮合齿轮尽管通常会受到奇偶性障碍 [14] 的阻碍，却仍可自由转动。解释如今一目了然：扭曲类 $\omega = 1$ 贡献了一个整体性单位，抵消了对立约束的组合奇偶性。同样的 ω，通过在 H^1中的相同加法，为一致耦合造成不可能性，并消解了对立耦合中的不可能性。

注 6.1。 内克尔深度双稳态——朝前或朝后的解释——是每个旋转立方体上独立于旋转方向的第二个 $\mathbb{Z}_2$ 变量。深度标记构成一个平凡局部系统：无论轴的几何形状如何，都能在整个环中保持一致的深度解读。旋转悖论完全存在于旋转之中，而非深度之中：同一几何基底上并存着两种 $\mathbb{Z}_2$ 结构，一种具有 $\omega = 0$ ，另一种具有 $\omega = 1$。

6.4. 挠子与双重覆盖。 这些例子背后的代数结构具有一种几何解释，这对第 7 节的可视化技术至关重要。连通图上的耦合 $\lambda \in C^1(\Lambda; \mathbb{Z}_2)$ 定义了一个双重覆盖：为每个顶点取两个副本，并对每条边 $e = uv$，按照 $\lambda(e)$ 连接这些副本。如果 $\lambda(e) = 0$，则连接 $0_u \leftrightarrow 0_v$ 和 $1_u \leftrightarrow 1_v$ （一致）；如果$\lambda(e) = 1$，则连接 $0_u \leftrightarrow 1_v$ 和 $1_u \leftrightarrow 0_v$ （对立）。

所得空间是 Λ 上一个 $\mathbb{Z}_2$-挠子的全空间。当 $[\lambda] = 0$ 时，该空间不连通——即 Λ 的两个互不相交的副本——选择一个连通分支即相当于选择一个全局状态。当$[\lambda] \neq 0$时，全空间是连通的：这是一个扭曲覆盖，沿任一奇整体单值化环行进都会回到对面的层。不可能对层作出一致选择；不存在整体截面。这一构造实现了一种基本分类：

$$\mathbb{Z}_2\text{-t连通复形 } X \text{ 上的扭子与 } H^1(X; \mathbb{Z}_2 \text{ 中的类一一对应}).$$

平凡类对应于不连通的双重覆盖 $X \times \mathbb{Z}_2$ ，而非平凡类对应于连通覆盖。精确陈述见附录 A 中的定理 A.1。

注记 6.2（图上的扭子与复形）。 双重覆盖构造在任意图 Λ上定义一个挠子，只需 1-骨架。当 $\Lambda = X^{(1)}$ 是某个 2-复形的完整 1-骨架且 $\delta\lambda = 0$ （平坦性）时，该挠子延拓到 X 上。当 $\delta\lambda \neq 0$ 时，曲率阻碍这一延拓：我们在 $X^{(1)}$ 上有一个挠子，但不存在到 X 上的平坦延拓。这一区分在 §8 中变得至关重要，其中曲率缺陷正是将 1- 骨架挠子延拓到 2- 胞腔上的障碍。

对于圆 S^1，分类结果恰好给出两个扭子：平凡覆盖（两个互不相交的圆）和连通双覆盖——莫比乌斯带的边界，它绕底空间两圈。这表明，对于诸如平面齿轮奇圈这样的例子（它在圆上定义了一个非平凡扭子），应该有一种通过双重覆盖来“看见”这个扭子的方法。这一视角——将扭子视为扭曲覆盖，并以单值化衡量沿环传输一周后无法闭合的程度——为通过动画将悖论可视化奠定了概念基础。

7. 单值化孔径法（MoMA）

如果用不透明遮罩遮住奇数齿轮环的一部分，只留下一个窗口，使一段相邻齿轮可见，那么在这个窗口内，齿轮可以自由旋转——在任意可缩子集上，约束方程都可解。现在让窗口沿齿轮环连续移动一周，并在每个位置更新显示的旋转状态，以保持局部一致性（见图 15[左]）。一周之后，窗口回到起始位置，但显示构型

发生了翻转：最初看起来顺时针旋转的齿轮，现在看起来变成了逆时针旋转。这种翻转就是 S^1 上非平凡 $\mathbb{Z}_2$-挠子的单值化，并通过动画清晰呈现出来。

对 $\delta x = \lambda$ 进行静态分析，可以确定是否存在整体截面：计算每个环上的整体性，如果其中任意一个非零，则该系统具有悖论。但这种分析有其局限性。分类定理（定理 A.1）保证，对于任意空间 X，存在 $|H^1(X;\mathbb{Z}_2)|$ 个不同的挠子——每个上同调类对应一个。耦合 λ 通过 $[\lambda]$ 选定其中一个；其他挠子作为数学对象依然存在，却无法通过整体性计算观察到，也不会被物理学选中。

单值化孔径法直接展现扭子结构：绕环路传输后，将整体性（一种代数计算）转化为单值化（可见的翻转）。单个孔径揭示了由 λ 选定的扭子。若要展现对应其他上同调类的“隐藏”扭子，则需要满足观测约束的多个孔径，从而在构形空间上构造新的扭子。

7.1. 孔径与局部截面。 孔孔径是一个可缩观察窗口 $U \subset X$，我们通过它观察双稳态系统。由于任何 $\mathbb{Z}_2$-挠子在可缩集合上都是平凡的，限制映射 $\mathcal{P}|_U \cong U \times \mathbb{Z}_2$ 恰好有两个局部截面——两种在整个窗口内赋予一致状态的方式。孔径显示其中一个截面：在 U 上平凡双重覆盖中选择一层。随着孔径在 X 中移动，所显示的截面会通过平行传输更新。

引理 7.1（孔径单值化）。 设 $\gamma : [0,1] \to X$ 是一条沿孔径移动的闭环，其初始显示为 $s_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$。沿 γ 传输 s_0 后，当且仅当挠子沿 γ具有平凡单值化时，才会返回同一层；否则，所显示的状态会整体翻转后返回。

证明直接来自覆盖空间理论：环路能够提升为环路，当且仅当它属于单值化同态 $\pi_1(X) \to \mathbb{Z}_2$的核。

7.2. 奇环上的单个孔径。 开篇示例——奇数齿轮环上的滑动窗口——具体体现了这一引理。挠子是非平凡的（$[\lambda] \neq 0$），因此沿生成环传输后会返回相反的层。动画使覆盖空间结构变得可感知：代数上被证明为“非零整体性”的现象，在视觉上显现为“旋转方向翻转了”。

同样的技术适用于菱形镶嵌中的奇数玫瑰形（图15）。让一个孔径绕 P3 五边形玫瑰形滑动，显示满足局部约束的凸/凹分配。绕行一周后，所显示的分配已反转。静态图像显示出不一致性；动画则展现其底层的挠子。

7.3. 双孔径与构形空间。 位于具有平凡整体性的环上的单个孔径不会揭示任何东西：所显示的截面原样返回，反映出由 λ 所选取的挠子的平凡单值化。然而，$H^1(S^1;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ 保证在任意环路上存在两个不同的挠子。具有零 holonomy 的耦合选取平凡的那个，但非平凡挠子作为一个数学对象而存在，并未被物理学选中。

为了展示这一隐藏的挠子，我们采用两个不相交的孔径，并施加反向旋转规则：所显示的局部截面必须不同。若一个孔径显示顺时针（或向前，或凸），另一个则显示逆时针（或向后，或凹）。该规则构造出一个新的 $\mathbb{Z}_2$-挠子——并非在 X 本身之上，而是在孔径对的构形空间之上。

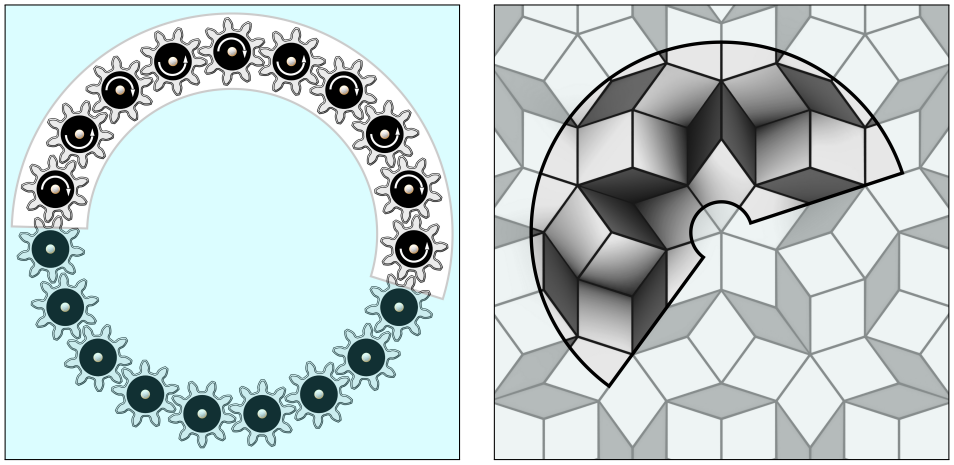

图15. 奇环上的单孔 MoMA。 [左]奇数齿轮环上的一个窗口允许局部旋转；沿环路滑动此孔径会产生非平凡的单值化。[右] 在 P3 准铺砌上使用相同技巧——在窗口内添加明暗阴影并旋转一整圈——揭示了凸/凹分配的扭子结构。

相关空间是无序构型空间

$$\mathcal{C}_2(X) = \big\{\{p, q\} \subset X : p \neq q\big\},$$

二元素子集的空间。对于 $X = S^1$，这个构形空间是一个莫比乌斯带：有序构型空间（$S^1 \times S^1$） $\setminus \Delta$ 是一个开圆柱，而对交换（p, q） $\mapsto$ （q, p）取商后，得到一个带有 π_1（$\mathcal{C}_2$（S^1）） $\cong \mathbb{Z}$ 的莫比乌斯带。

在每个构形 $\{p, q\}$ 处，反向旋转规则要求互补显示。具体而言，这意味着要选择哪个孔径显示状态 0，哪个显示状态 1——但由于孔径未标记，只有划分本身重要。恰好存在两种这样的划分，它们由全局 $\mathbb{Z}_2$-作用互换˜。这些选择构成的空间纤维化于 $\mathcal{C}_2$（X）之上，定义了一个 $\mathbb{Z}_2$-挠子 $\mathcal{P} \to \mathcal{C}_2$（$X$）。

7.4. 交换回路。双孔径挠子的单值化由交换回路检测：在 $\mathcal{C}_2(X)$ 中的一条路径，沿此路径两个孔径的位置平滑地互换。

令 $\{p, q\}$ 为初始构形，其中 p 和 q 由 X 中的一条路径 γ 相连。沿着 γ 将 p 滑向 q，同时将 q 滑向 p，使二者经过对方的初始位置。由于构形空间是无序的，端点 $\{q, p\} = \{p, q\}$：我们在 $\mathcal{C}_2(X)$ 中描出了一条闭合环路。

˜**引理 7.2**。交换回路在双孔径挠子 $\mathcal{P} \to \mathcal{C}_2(X)$ 中具有非平凡的单值化。

证明。平行传输保留每个孔径所显示的状态；交换会互换占据各个位置的孔径，因此也会置换状态与位置之间的对应关系。□

对于一个环（$X \simeq S^1$），构形空间 $\mathcal{C}_2(X)$ 是一个开莫比乌斯带，与 S^1 同伦等价。交换回路生成 $H^1(\mathcal{C}_2(X))$ $\cong \mathbb{Z}_2$ 环路，其非平凡的单值化将双孔径扭子分类为连通双覆盖。这揭示了隐藏的非平凡扭子，它

通过单孔径观测无法察觉：参见图16中的内克尔立方体和齿轮实例。

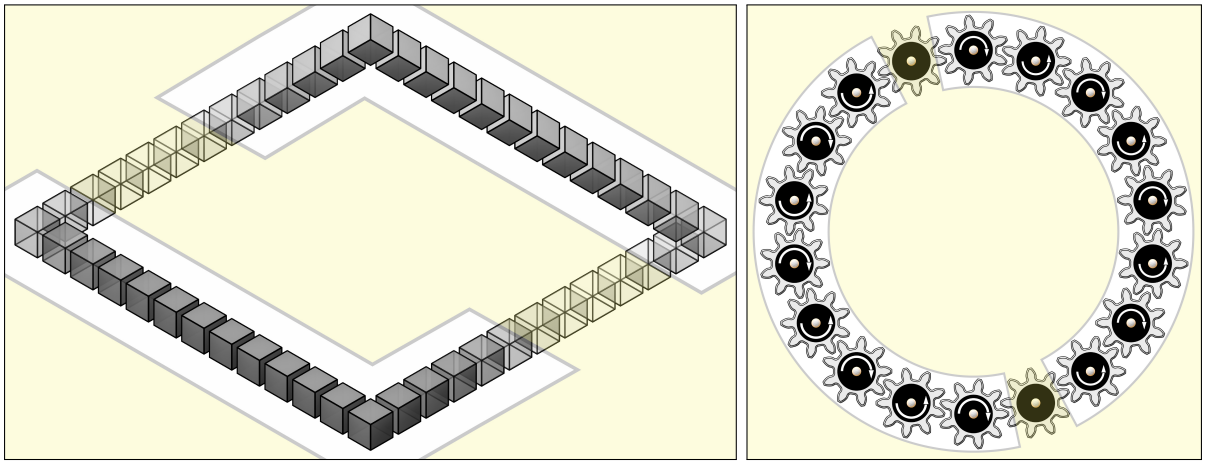

图16. 遵循反向旋转规则的双孔径 MoMA。 [左侧] 一个带有对跖滑动孔径的内克尔立方体环；交换回路揭示了构形空间上非平凡的单值化。 [右侧] 一个偶数齿轮环——整体性平凡，但双孔径在交换时呈现出隐藏的非平凡挠子。

这一构造可推广到二维场。图17展示了图 8 中内克尔区间的一种菱形铺砌变体。这里有两个孔径（对跖半空间），呈现相反的阶梯曲面取向；中间条带则逐渐淡化为平坦的歧义。随着整个孔径—条带分解绕图形中心旋转，这些孔径在平面上无序对的构形空间 $C_2(\mathbb{R}^2)$ 中描出交换回路。该空间的基本群为 $\mathbb{Z}$，因此支持与圆形情形相同的交换单值化。

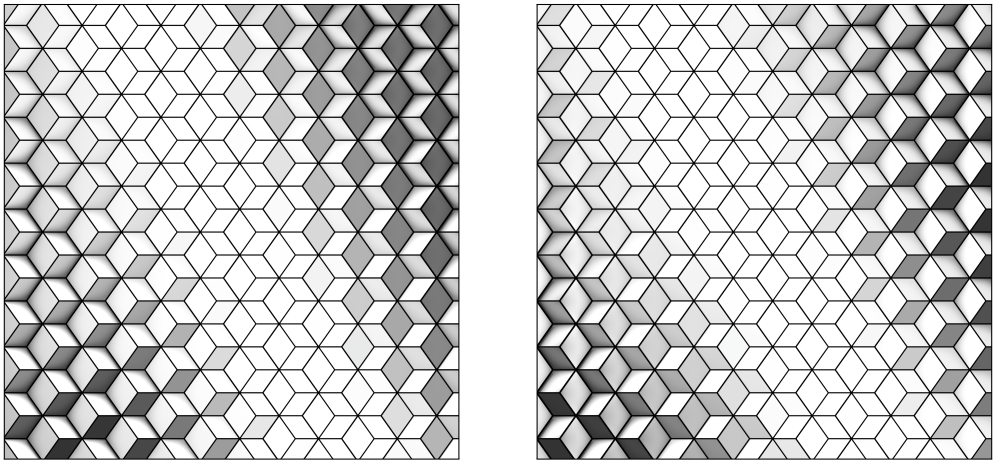

图17. 一幅菱形铺砌，其中双半平面孔径被一条模糊带隔开。将构形旋转半周会描出交换回路；交换之后，图示的取向（根据明暗阴影确定面法向量的取向）交换了位置。

7.5. **术语说明：整体性与单值化**。鉴于整体性在本文中的核心地位，以及单值化在 MoMA 名称中的用法，不妨回顾一下两者之间 [微妙而常被忽视的]区别：整体性之于单值化，犹如名词之于动词。

整体性是一个群元素——通过沿环对耦合余链求和得到的测量值：$\mathrm{hol}_\gamma(\lambda) = \sum_{e\in\gamma} \lambda(e) \in \mathbb{Z}_2$。同一上同调类中的不同上链可能具有不同的边值，但在每个环上都会得到相同的整体性。整体性是代数性的、可计算的、静态的：它回答“总的不匹配是什么？”

单值化是一种作用——纤维元素沿环路传输时会发生什么。给定一个挠子 $\mathcal{P} \to X$ 和一个环路 γ，从某个点 $p \in \mathcal{P}$开始，将 γ 提升到全空间；单值化关注的是返回时你到达何处。平凡的单值化意味着提升路径闭合；非平凡的单值化意味着你落在另一层上。单值化是几何性的、动态的、体验性的：它回答“当我绕行一圈时会发生什么？”两者的关系很直接：整体性决定单值化。如果 λ 表示挠子 $\mathcal{P}$，那么沿 γ 的非零整体性意味着沿γ存在非平凡的单值化，反之亦然。这就是分类定理（定理 A.1）的内容。

单孔 MoMA 将代数名词转化为体验性的动词：λ 的整体性通过显示的截面的单值化变得可见。双孔径 MoMA 构造了一个不同的 挠子——它存在于构形空间而非底空间上——其单值化揭示了原始整体性计算无法看见的结构。当然，构形空间挠子也有自己的整体性；但它并非由 λ 决定，而是由反向旋转规则决定，该规则在 $\mathcal{C}_2(X)$ 上构造出一个新的余循环。

8. 相对 H^2：曲率

第 6 节中的奇环由 $H^1(\Lambda)$ 分类：沿环的非零整体性会阻碍整体截面的存在。现在我们考察这样的环围成一个圆盘时会发生什么。离散斯托克斯定理迫使边界与内部之间存在关联：非零边界整体性意味着非零的总内部曲率。这是一种相对 H^2 现象——层级结构的第三层，在这里，边界上的不可能性通过连接同态 $\delta^*: H^1(\partial D) \to H^2(D, \partial D)$ 转化为内部的曲率 。

该机制与§5中将不相容的 H^0 边界数据提升为相对 H^1冲突的机制相同，现上移一个次数：边界不可能性变为内部曲率。设$D \subset X$ 为一个胞腔圆盘，其边界 ∂D 完全位于约束图 Λ中。对（$D, \partial D$）的长正合列包含

$$H^1(D) \xrightarrow{\mathrm{res}} H^1(\partial D) \xrightarrow{\delta^*} H^2(D, \partial D) \to H^2(D).$$

由于 D 是可缩的，$H^1(D) = H^2(D) = 0$，而正合性迫使一个同构

$$\delta^* : H^1(\partial D; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H^2(D, \partial D; \mathbb{Z}_2).$$

两个群都是 $\mathbb{Z}_2$。每个非平凡边界类都会提升为非平凡内部类。这就是 §4 中在 $k = 1$处的斯托克斯原理：非零整体性 $\sum_{e\in\partial D} \lambda(e) = 1$ 迫使总曲率 $\sum_{f\subset D} \mu(f) = 1$非零。 D 内部至少有一个面必须受挫；边界障碍会局部化，但无法消失。

8.1.曲率缺陷示例。P3 铺砌中的五边形玫瑰花形提供了典型示例。五个相连的角构成一个环 γ，位于 Λ 中，具有非零整体性，代表 $H^1(\gamma)$ 中的非平凡类；该环围成平面中的一个圆盘 D。连接同态将 $[\lambda|_\gamma]$ 提升为 $H^2(D,\ \partial D)$ 中的一个类。

同样的分析也适用于菱形带状多面体。RT30的十二面体约束图或RE90的截角二十面体图中，每个五边形面都是球面上围成一个圆盘的5环。相对类 $[\mu] \in H^2(D, \partial D)$迫使每个圆盘内部产生曲率。整体上，受挫区域在球面上成对分布——闭曲面上的总曲率消失——但在局部，每个玫瑰花形都带有其相对 H^2 缺陷。

其他领域也同样表现出这一现象。双曲平面的七阶菱形砖镶嵌由菱形排列而成，使约束图形成正七边形镶嵌 $\{7, 3\}$（见图18）。在该镶嵌中，中心周围7个“方框”的排列是图 1[左], 中彭罗斯七边形阶梯的一个版本，但未插入孔洞。在约束图中，每个七边形都是围成一个圆盘的7环，斯托克斯迫使其中产生局部曲率。

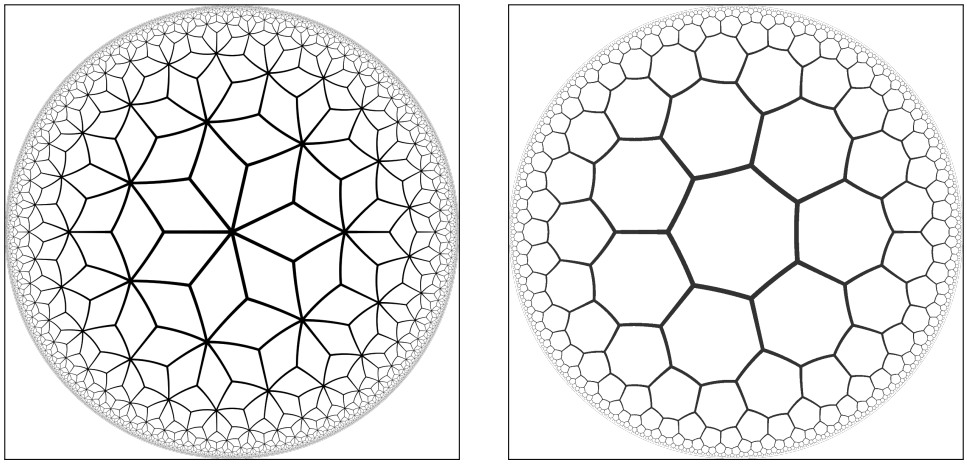

图18. [左] 双曲平面的 7-3 菱形铺砌。其约束图是七边形铺砌 [右]，其中每个 7-环都围出一个承载相对H^2 缺陷的圆盘。

一个共振实例出现在齿轮构型中，此时曲率的局部化更加明确。考虑三个方形齿轮网格的四分之一平面，它们的边经过斜切，并在一个角点相交，如同卦限的三个面在原点相交（图19）。每个四分之一平面都是一个带有$\lambda \equiv 1$的二分网格；每个四分之一平面都能自由旋转；任意一对四分之一平面都能无干涉地啮合。角点是障碍和曲率的所在之处，它将整个网格锁定。

底层基复形仅作示意：见图20。该复形中满是四边形，它们在各方面都平坦，包括四分之一平面之间的斜切边。唯一的扭棱单形位于角点，其边界是一个奇圈。三个齿轮相接之处，正是相对 H^2 类的支撑所在。请注意，删除三个角点齿轮并不能解除锁定（也不能消除上同调）：更大的奇圈承载着这一障碍。

8.2. 移动性与守恒。曲率 $\mu = \delta\lambda$ 取决于自由边上所选的延拓 λ。改变自由边 e 上的 $\lambda(e)$，会使与该边相邻的两个面上的 μ发生切换：曲率会从一个面转移到相邻面。这种移动遵循一条守恒律。

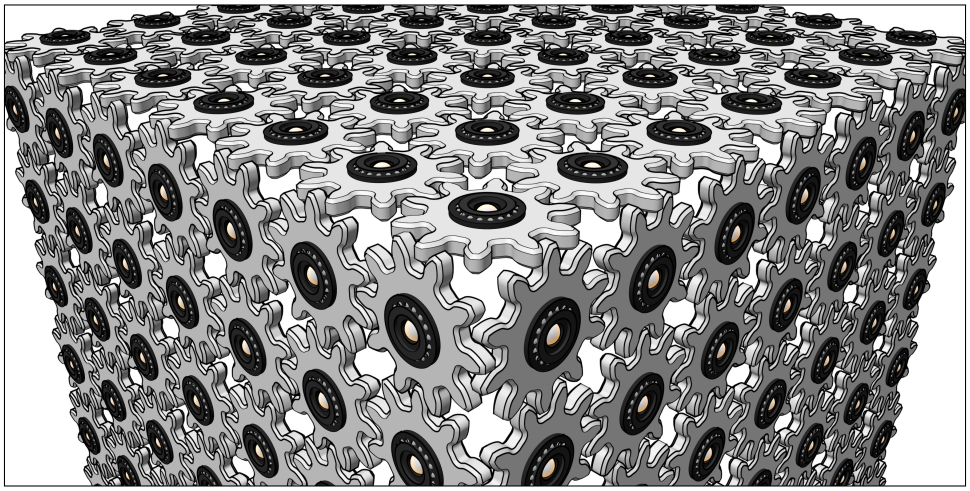

图19。 三个方形齿轮网格的四分之一平面在一个角点相交。它们相交处的三角形角点具有非平凡的边界整体性，因此产生了曲率缺陷。

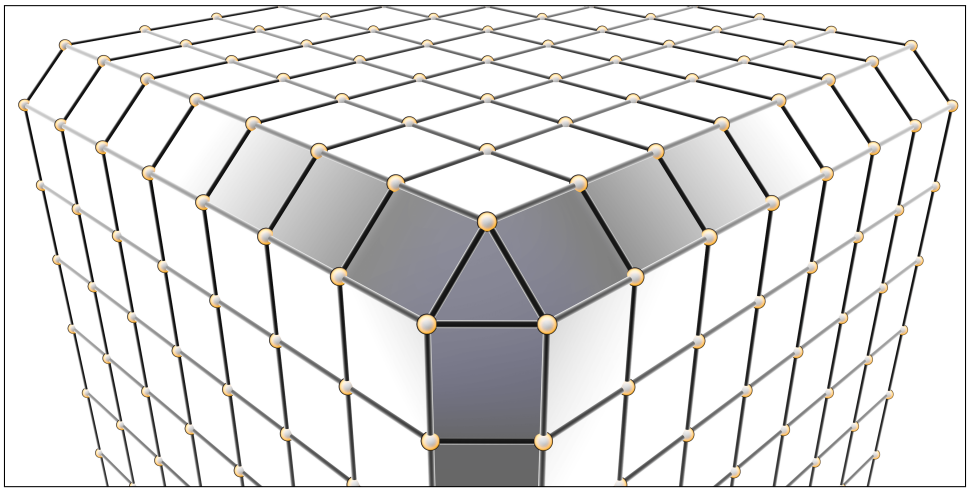

图20。 图19中的齿轮系统的基复形在角点处有一个三角形2-胞腔，局部曲率集中于此。

如果区域 D 具有 $\partial D \subset \Lambda$ ——即其整个边界都由约束边构成——那么总曲率$\sum_{f\subset D}\mu(f)$ 仅由 $\lambda|_{\partial D}$ 决定（引理 3.2）。曲率可以在D 的各个面之间重新分布，但不能越过受约束边界。相对类 $[\mu] \in H^2(D,\ \partial D)$ 是一个不变量；只有其代表元——具体哪些面受挫——取决于延拓。

在闭曲面上，斯托克斯定理约束全局总量：

$$\sum_{f\in X}\mu(f) = \sum_{e\in\partial X}\lambda(e) = 0.$$

受挫面成对出现；孤立缺陷在拓扑上是被禁止的。球形带形多面体遵循这一点：其五边形玫瑰各自受挫，却跨越球面成对，从而实现净中性。

平面 $\mathbb{R}^2$是非紧致的，因而不受此类约束。单个挫折区域可以孤立出现，其补偿配对可沿一条自由边链被推至任意远处。从我们的视角看，这仍是一种相对现象：该缺陷在圆盘 D 上连同 $\partial D \subset \Lambda$ 被检测为 $H^2(D, \partial D)$中的一个类。扩大 D 只是移动所考虑的区域；任何补偿缺陷都位于其外。

9. 绝对 H^2：不可达性

§8 的相对 H^2 现象——玫瑰花结缺陷、齿轮角、双曲七边形——都源于斯托克斯原理：连接同态将 H^1 边界类提升为 H^2内部曲率。这些都是真正的 H^2 类，但需要以一个边界循环作为输入。

双稳态系统能否呈现绝对 H^2 现象——即闭曲面上约束结构所固有的不可达性？双稳态元件位于顶点上；成对约束位于边上；约束图 Λ 是一维的。要在闭曲面上触及 H^2 ，就必须利用环境复形 X中的2-胞腔。

有两条可行路径。乘法路径使用杯积：给定闭曲面上的 H^1 类，它们的乘积 $\alpha \smile \beta \in H^2$ 衡量几何干涉——即扭子无法延拓处的接缝之间被迫产生的交点。这需要以 H^1 类为原料，但这类原料并非总是可得。相比之下，还有一条移位路径，它将双稳态变量放在边上而非顶点上，并在面上指定通量；这样一来，寻找势的障碍便直接存在于 H^2中，但代价是必须重新定义双稳态元件。

这两条路径触及不可达性的真正不同方面。通过杯积的乘法路径衡量现有 H^1 障碍之间的干涉——无法分离的接缝被迫发生碰撞。通过通量和势的度移位路径则捕捉不可达性的最纯粹形式：构型被一个守恒拓扑不变量划分为不同扇区，尽管局部运动自由，却彼此无法到达。这种体验在性质上不同于 H^1不可能性：系统并非被冻结，而是被划分开来。

9.1. 杯积：接缝干涉。上同调环 $H^*(X;\mathbb{Z}_2)$通过杯积 $\smile$承载乘法结构： $H^1(X) \times H^1(X) \to H^2(X)$。对于闭曲面上的类 $\alpha,\ \beta \in H^1$ 该乘积 $\alpha \smile \beta \in H^2$ 可通过庞加莱对偶获得几何解释：每个H^1 类都有一个对偶1-循环，可由一条闭曲线表示，而 $\langle \alpha \smile \beta,\ [X] \rangle$ 则计算这些对偶曲线的交数（模 2）。当杯积非零时，这些曲线必定相交。

对于由 $\alpha \in H^1(X)$ 分类的 $\mathbb{Z}_2$-挠子，庞加莱对偶可具体实现为一条接缝：沿着这条接缝切开后，选定的局部截面无法延续，因此跨越接缝时会发生层交换。在接缝之外，存在一致的截面；接缝正是局部平凡化相互冲突之处。不同的余循环代表元会移动接缝，但会保留其同调类。

环面齿轮啮合（图11）直观地展示了这一点。考虑环面上的 $N \times M$ 网格，其中外啮合齿轮的 T^2、N 和 M 均为奇数。耦合 $\lambda \equiv 1$ 在每个啮合点都强制形成对立，而两个基本环都具有非零整体性： $[\lambda] = \alpha + \beta$ 在 $H^1(T^2;\, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$。不存在全局自旋赋值。

矩形网格提供了一个典范分解。令 $\lambda_h \in C^1(T^2;\, \mathbb{Z}_2)$ 为支撑在水平边上的上链， λ_v 则为支撑在竖直边上的互补上链。于是 $\lambda = \lambda_h + \lambda_v$，并且根据构造， $[\lambda_h] = \alpha, [\lambda_v] = \beta$ 其中 $\alpha,\ \beta$ 是 $H^1(T^2;\, \mathbb{Z}_2)$ 的标准生成元。令 $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ 表示庞加莱对偶接缝 —— 局部截面必须交换对应扭子的层的位置：

杯积衡量这些接缝是否能够彼此分离：

$$\langle \alpha \smile \beta, [T^2] \rangle = \#(\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta) \equiv 1 \pmod 2.$$

当其非零时，无论选择哪一组上循环代表元，都无法使接缝彼此分离。在两个维度均为奇数的环面上，水平接缝和垂直接缝必然相交——这种交数由拓扑决定，而非所选的特定分解（图21）。允许的操作是余边界平移 $\alpha \mapsto \alpha + \delta\xi$，它们能重新定位接缝而不改变其同调类；杯积 $\alpha \smile \beta \neq 0$ 则阻碍通过这些操作找到接缝互不相交的代表元。从机械角度看，这意味着任何试图“消除”一个障碍的做法（例如沿水平接缝切开）都必然会穿过另一个障碍。

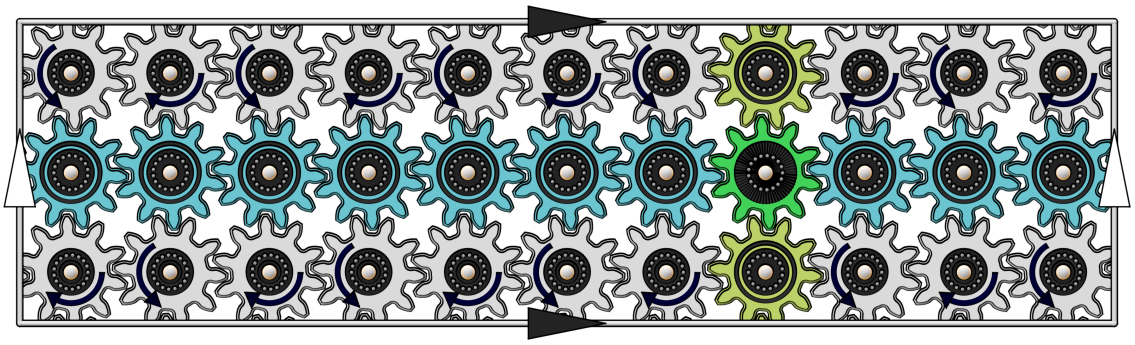

图21。 一个两个维度均为奇数的环面齿轮啮合。水平接缝和垂直接缝必然相交，并代表 H^1 中 H^2 类的非零杯积的庞加莱对偶。

当底空间不可定向时，一个类可能会与自身 相互干扰。在实射影平面上，上同调环为 $H^*(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^3)$，而杯平方 $\alpha^2 \neq 0$ 生成 H^2。要从齿轮中得到 $\mathbb{RP}^2$，可以考虑 S^2 上的二分网格——可自由旋转，不存在障碍——但通过受 §7.3 反向旋转规则约束的对踵孔来观察。对踵点对的构形空间是 $\mathbb{RP}^2$，反向旋转规则构造出一个由 $\alpha \in H^1(\mathbb{RP}^2)$ 分类的挠子。它的接缝是一条单侧加厚的赤道，并且不可避免地与自身相交（图22）。

9.2. 次数移位模型：通量与势。 杯积这条路径需要以 H^1 类作为原料——它衡量的是既有障碍之间的干涉。若要在不具备这一前提的情况下触及 H^2，我们就将双稳态变量所在的次数移位。

在前面的各节中，双稳态状态是 0-余链 $x \in C^0(X;\mathbb{Z}_2)$，它为顶点赋值，而耦合 $\lambda \in C^1$ 则规定了边约束。求解 $\delta x = \lambda$的障碍位于 H^1中。现在将所有内容的次数上移一级：双稳态状态变为边上的 1-余链，约束变为面上的 2-余链，而障碍则移至 H^2。

设 X 是一个带有固定胞腔分解的闭曲面。**通量** 是一个 2-上链 $\mu \in C^2(X;\mathbb{Z}_2)$，为每个面赋予一个奇偶性。 μ 的**势** 是一个 1-上链 $A \in C^1(X;\mathbb{Z}_2)$，满足 $\delta A = \mu$ ——每条边的状态沿每个边界的总和等于规定的面值。当且仅当 $[\mu] = 0$ 属于 $H^2(X;\mathbb{Z}_2)$ 时，一个通量才存在势。

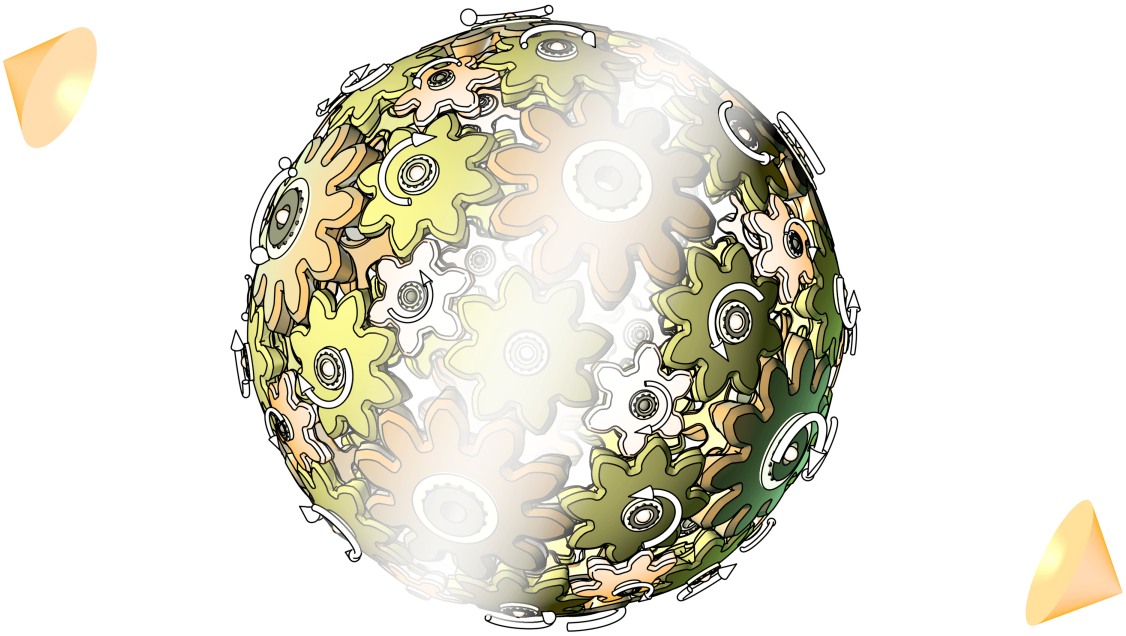

图22. 一对灯照亮齿轮啮合上的一对对踵孔 S^2，并遵循反向旋转规则。构形空间为 $\mathbb{RP}^2$；所构造的挠子具有上同调类 $\alpha \in H^1(\mathbb{RP}^2)$，其 $\alpha^2 \neq 0$。

在闭曲面上，斯托克斯定理约束总通量：对于任意势 A,

$$\sum_{f \in X} (\delta A)(f) = \langle \delta A, [X] \rangle = 0.$$

每个恰当通量的总奇偶性都是偶数。求值映射 $[\mu] \mapsto \sum_f \mu(f)$ 将 $H^2(X;\, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$与任意连通闭曲面对应起来：总奇偶性为奇数表示非平凡类，且不存在势。

这一障碍在实际操作中表现为不可达性。将边翻转定义为$A \mapsto A + \epsilon_e$ 翻转边 e上的势的操作；这会使通量改变 $\mu \mapsto \mu + \delta\epsilon_e$，恰好翻转两个相邻面。从任意构型出发，通过边翻转可达的通量构成陪集 $\mu + B^2(X)$。构型划分为 $|H^2(X)|$ 个扇区——对于闭曲面，有两个：奇偶性为偶数和奇数的通量，两者无法相互到达。

这是一种不同于 H^1 不可能性的障碍。奇数齿轮环无法移动，矛盾显而易见。这里的 H^2 障碍属于运动学范畴：每次边翻转都能自由执行，系统对局部移动的响应也很流畅，但某些构型却永远无法触及。系统并未锁死，而是被划分开来 ——这正是不可达性的标志。

这种不可达性可以通过一个简单的游戏直接体验。用特鲁歇风格的三角形铺满一个闭曲面，每个三角形都有两种状态：见图23。点击一条边会翻转其相邻的两个面。挑战是：从随机初始构形到达目标构型。每一步都可以自由执行，但在闭曲面上，奇偶性是守恒的——无论移动序列如何，有些目标都无法到达。 H^2 类恰好将构型划分为两个扇区，并且

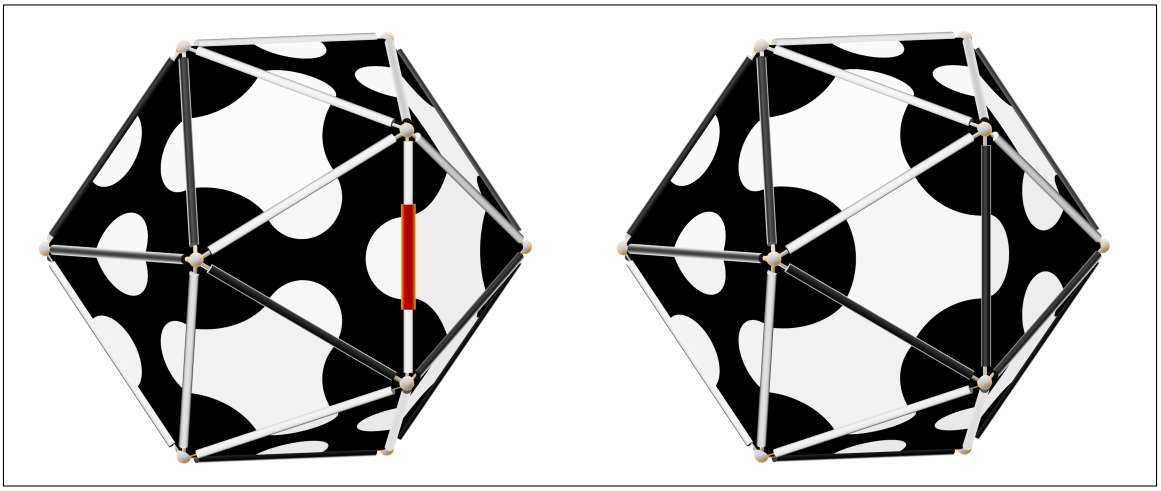

图23。 三角剖分球面上的特吕谢游戏。点击一条边 [左侧、红色]会切换其状态，并切换与之相邻的两个面片的状态 [右侧]；目标是达到目标面片构型。只有当初始面分布与目标面分布共享相同的 H^2 类时，才有可能获胜。

交互体验：https://github.com/robertghrist/truchet-icosahedron/

局部移动的任何序列都无法从一个构型跨越到另一个构型。这是一个简单的 H^2 可达性问题。

这个游戏让人联想到经典的 *Lights Out* 益智游戏：按下按钮会切换相邻灯的状态，目标是将所有灯熄灭 [15]。两者都可归结为 $\mathbb{Z}_2$ 线性代数；两者都呈现出“追逐缺陷”的动态，即局部修正会在其他地方产生新的问题。在我们的设定中，相关代数是胞腔上同调，而将可获胜构型与不可获胜构型区分开的守恒量就是 H^2 类。

可以在任意三角剖分曲面或胞腔曲面上进行游戏。对于带边界的曲面，可达性取决于是否能够切换边界边。对于**自由边界**（所有边都可点击），每个构型都可达：缺陷可以被推到边界并湮灭。对于**冻结边界**，障碍转移到相对上同调 $H^2(D,\ \partial D) \cong \mathbb{Z}_2$；相对于固定边界框架的奇偶性保持不变。

10. 结论

彭罗斯神秘的七边形楼梯利用了环路周围的双稳态歧义，并指向$\mathbb{Z}_2$ 系数与奇偶算术——这里的简单工具被提升为扭子与上同调分类的语言。我们所追溯的这一层级结构在内克尔立方体、齿轮、铺砌等中得到呼应。上同调在每一阶所探测到的内容对应于一种性质上截然不同的视觉悖论模式，而离散斯托克斯定理——由边界全纯诱导内部曲率——是驱动每一次转变的唯一机制。

在此过程中，这一框架阐明了若干此前仅被孤立理解的现象，从关于齿轮环与奇偶性的经典直觉，到莫比乌斯齿轮环和 P3 准铺砌；后者表现出一种相对的 H^2 缺陷——边界整体性迫使内部

曲率。环面齿轮啮合上的杯积揭示， H^2 不可达性可能是闭曲面上彼此独立的 H^1 障碍所导致的结果。

若干自然的推广正在触及这一框架的边界。对 $\mathbb{Z}_2$ 系数的限制促使我们放宽条件：具有指定传动比的齿轮系统需要有理系数或实系数；要完整描述阶梯曲面高度，则需要整数系数；以角度耦合旋转轴的锥齿轮，其整体性取值于 $SO(3)$。由偶圈与奇圈异质混合构成的 P3 准铺砌，要求约束数据随空间变化——这需要采用层的语言，而非统一的上链。此前的研究 [6]发展了用于静态悖论的层论方法，以及非阿贝尔网络托ors的一般理论；将这些工具与本文发展的层级结构相结合，是顺理成章的下一步。

上同调层级本身也在继续拓展。正如 H^1 分类扭子、 H^2 分类 gerbe 一样，H^3 分类 2-gerbe，这一模式仍将延续——尽管更高阶上同调障碍的物理或视觉实现仍有待发现。或许最有前景的方向是时间维度。单值化孔径法利用时间揭示空间结构，却将动画视为参数，而非底空间的一部分。要建立一种内在于视频 的悖论理论——其中不可能性源于帧序列，而非存在于任何单独一帧之中——就需要对时空复形进行上同调研究。理论工具已经就绪；视觉想象力尚未跟上。

参考文献

[1] Lionel S. Penrose 和 Roger Penrose。《不可能物体：一种特殊类型的视觉错觉》。《英国心理学杂志》，49(1):31–33，1958年。网址：https://doi.org/10.1111/j.2044-8295.1958.tb00634.x。[2] Roger Penrose。《不可能图形的上同调》。《列奥纳多》，25(3-4):245–247，1992年。网址：https://doi. org/10.2307/1575844。[3] Heinrich G. F. Schröder。《论观察经光学装置绘制的倒置物理图像时出现的一种光学反转》。《物理年鉴》，181(10):298–311，1858年。网址：https://doi.org/10.1002/ andp.18581811009。[4] James Donaldson。《施罗德阶梯》。载于 F. Macpherson（编），《错觉索引》，2017年。网址：https://www.illusionsindex.org/i/schroeder-s-stairs。[5] Louis Albert Necker。《关于在瑞士观察到的一些奇异光学现象，以及观看晶体或几何立体图形时出现的一种光学现象的观察》。《伦敦与爱丁堡哲学杂志和科学杂志》，1(5):329–337，1832年。网址：https://doi.org/10.1080/14786443208647909。[6] Robert Ghrist 和 Zoe Cooperband。《现实障碍：扭子与视觉悖论》。2025年7月。网址：https: //arxiv.org/abs/2507.01226，arXiv:2507.01226。[7] Samson Abramsky 和 Adam Brandenburger。《非局域性与情境性的层论结构》。《新物理学杂志》，13:113036，2011年。网址：https://doi.org/10.1088/1367-2630/13/11/113036，arXiv: 1102.0264。[8] Samson Abramsky、Rui Soares Barbosa、Kohei Kishida、Raymond Lal 和 Shane Mansfield。《情境性、上同调与悖论》。载于《第24届欧洲计算机科学逻辑协会计算机科学逻辑年会（CSL 2015）》，《莱布尼茨国际信息学会议论文集》（LIPIcs）第41卷，第211–228页。达格施图尔城堡，2015年。网址：https://doi.org/10.4230/LIPIcs.CSL.2015.211，arXiv:1502.03097。[9] Giovanni Carù。《情境性的上同调》。载于 Ross Duncan 和 Chris Heunen（编），《第13届量子物理与逻辑国际会议论文集（QPL 2016）》，《理论计算机科学电子会议论文集》第236卷，第25–41页，2017年。网址：https://doi.org/10.4204/EPTCS.236.2，arXiv:1701.00656。[10] Jean-Luc Brylinski。《环空间、特征类与几何量子化》。Birkhäuser，波士顿，1993年。[11] Ieke Moerdijk。《层栈与gerbe语言导论》，2002年。网址：https://arxiv.org/abs/math/ 0212266，arXiv:math/0212266。

[12] Alex Bullivant、Marcos Calçada、Zoltán Kádár、João Faria Martins 和 Paul Martin。《具有高阶规范对称性的（3+1）维高阶格、离散二维整体性与拓扑相》。2017年2月。网址：https://arxiv.org/abs/1702.00868, arXiv:1702.00868。[13] H. S. M. Coxeter。《正多胞体》。Dover，纽约，第3版，1973年。[14] Aaron M. Hoover。《莫比乌斯齿轮的设计、建模与制造》。加州大学伯克利分校 CS 285 课程结课项目，2006年5月。网址：https://people.eecs.berkeley.edu/~sequin/CS285/PROJ_06/A_Hoover/ AHoover_Report.pdf。[15] Marlow Anderson 和 Todd Feil。《用线性代数关灯》。《数学杂志》，71 303，1998 4 300 10 1080 0025570 1998 11996658 ( ): – 。网址：https://doi.org/ 。 / X. . . [16] Allen Hatcher。《代数拓扑》。剑桥大学出版社，剑桥，2002年。网址：https://pi.math. cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html。

附录 A. 上同调背景

本附录汇集了本文所用的上同调工具。我们仅使用 $\mathbb{Z}_2$ =$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$系数，因此无需考虑符号。若读者希望获得更全面的介绍，请参阅 Hatcher [16] 或任何标准教材；本文旨在统一记号，并回顾所需的具体事实。

A.1. **上链、上边界与上同调**。设 X 是一个胞腔复形。 k上链群为

$$C^k(X) = C^k(X;\mathbb{Z}_2) = \{f : \{k\text{-cells of } X\} \to \mathbb{Z}_2\},$$

一个 $\mathbb{Z}_2$-向量空间，其基与 k-胞腔对偶。上边界算子 δ： $C^k(X) \to C^{k+1}(X)$ 定义为

$$(\delta c)(e) = \sum_{f \subset \partial e} c(f),$$

对胞腔 e边界中的 k-胞腔求和。对于图，当$e = uv$时，$(\delta c)(e) = c(v) + c(u)$。对于 2-复形，$(\delta c)(f) = \sum_{e \subset \partial f} c(e)$。

恒等式 $\delta^2 = 0$ 成立，因为每个 $(k-1)$-胞腔在 $\partial(\partial e)$ 中出现的次数都是偶数。这给出了上同调群

$$H^k(X) = H^k(X;\mathbb{Z}_2) = \frac{\ker(\delta : C^k \to C^{k+1})}{\mathrm{im}(\delta : C^{k-1} \to C^k)} = \frac{Z^k(X)}{B^k(X)}.$$

对于图，关键特征是：1-上链 λ 是上边界，当且仅当对于每个环 γ， $\sum_{e \in \gamma} \lambda(e) = 0$。

A.2. **相对上同调与长正合列**。对于子复形 $A \subset X$，相对上链群为

$$C^k(X, A) = \{c \in C^k(X) : c|_A = 0\},$$

其上同调 $H^k(X, A)$ 以类似方式定义。这些构成一个长正合列

$$\cdots \to H^k(X) \xrightarrow{\mathrm{res}} H^k(A) \xrightarrow{\delta^*} H^{k+1}(X, A) \to H^{k+1}(X) \to \cdots$$

连接同态 δ^* 的计算如下：给定 A 上的余循环 a，任意将其延拓为 X 上的上链 $\tilde{a}$，然后 $\delta^*([a]) = [\delta\tilde{a}]$。此定义良好，并衡量向内延拓 a 的障碍：当且仅当 a 可延拓为整个 X 上的余循环时， $\delta^*([a]) = 0$ 。

当 X 可缩时，正合性迫使同构 δ^*： $H^k(A) \xrightarrow{\cong} H^{k+1}(X, A)$。

A.3. $\mathbb{Z}_2$-扭子与双重覆盖。 </style} $\mathbb{Z}_2$-扭子 </style}在 X 上的定义是一个没有首选层的双层覆盖空间：一个空间 $\mathcal{P}$，带有自由的 $\mathbb{Z}_2$作用以及投影 $\pi : \mathcal{P} \to X$，其纤维是$\mathbb{Z}_2$轨道。整体截面 </style}是在每个点上连续地选取一个层；当且仅当扭子存在整体截面时，它是平凡 </style}的。

在 S^1 上，恰有两个扭子：平凡的那个（两个互不相交的圆）和连通双覆盖（莫比乌斯带的边界）。连通覆盖不存在整体截面。

图 Λ 上的耦合 $\lambda \in C^1(\Lambda;\mathbb{Z}_2)$ 可通过以下构造确定一个扭子。为每个顶点取两个副本。对每条边 $e = uv$：如果 $\lambda(e) = 0$，就连接 $0_u \leftrightarrow 0_v$ 和 $1_u \leftrightarrow 1_v$；如果 $\lambda(e) = 1$，就连接 $0_u \leftrightarrow 1_v$ 和 $1_u \leftrightarrow 0_v$。由此得到的图是全空间 $\mathcal{P}$，当且仅当 $[\lambda] \neq 0$ 属于 $H^1(\Lambda)$ 时它是连通的。

定理 A.1 ($\mathbb{Z}_2$-扭子的分类)。 对于连通复形 X，存在一个自然的双射

$$\{isomorphism\ classes\ of\ \mathbb{Z}_2\text{-}torsors\ over\ X\} \longleftrightarrow H^1(X;\mathbb{Z}_2).$$

平凡挠子 r 对应于零；非平凡类对应于连通双覆盖。

§6.4 的双重覆盖构造将余循环 λ变为挠子$\mathcal{P}_\lambda$。上同调等价的余循环会产生同构挠子：若 $\lambda' = \lambda + \delta\xi$，则通过 ξ 重新标记片层即可得到同构。反过来，任何双重覆盖都能通过记录每条边上的两层是直连还是交叉连接来确定一个余循环。此对应关系保持群结构：挠子的张量积对应于余循环的加法。关于网络扭子和上同调的更多内容，请参见 [6]。

A.4. **杯积与庞加莱对偶**。 杯积 $\smile$：$H^p(X) \times H^q(X) \to H^{p+q}(X)$ 使 $H^*(X;\mathbb{Z}_2)$ 成为一个分次环，且满足结合律和交换律（在 $\mathbb{Z}_2$ 上，符号均为平凡）。在闭曲面上，$H^1 \times H^1 \to H^2$ 中的杯积可通过庞加莱对偶得到几何解释。

对于闭的 n 维流形 M，庞加莱对偶给出一个同构 PD：$H^k(M) \cong H_{n-k}(M)$。曲面的一个类 $\alpha \in H^1$ 对应一个可由闭曲线 γ_α 表示的同调类。杯积转化为交数：

$$\mathrm{PD}(\alpha \smile \beta) = \gamma_\alpha \cap \gamma_\beta.$$

特别地，$\alpha \smile \beta \neq 0$ 当且仅当代表曲线无法通过同痕变形彼此分开时成立。

A.5. $\mathbb{Z}_2$**-gerbe**。 就我们的目的而言，X 上的一个 $\mathbb{Z}_2$-gerbe 只不过是一个类 $[\mu] \in H^2(X;\mathbb{Z}_2)$。正如扭子刻画了选择截面时的歧义，gerbe 则刻画了选择平凡化时的歧义。平凡化 是一个 1-上链 A，满足 $\delta A = \mu$；这样的 A 存在当且仅当 $[\mu] = 0$。当平凡化存在时，它们构成一个关于 $H^1(X)$ 的挠子：选择一个势时的歧义，映照出低一个次数选择整体截面时的歧义。

宾夕法尼亚大学计算机与信息科学系，宾夕法尼亚州费城 19104

电子邮箱地址：lghrist@seas.upenn.edu

宾夕法尼亚大学数学系与电气及系统工程系，宾夕法尼亚州费城 PA19104

电子邮箱地址：ghrist@math.upenn.edu