arXiv:2602.09344v1 [math.LO] 10 Feb 2026

直觉主义模态逻辑的稳定典范规则

Cheng Liao

摘要

本文为直觉主义模态逻辑发展了稳定典范规则。这类规则最初分别由 [1] 和 [2] 引入，用于超直觉主义逻辑和传递正规模态逻辑。我们首先证明，每个直觉主义模态多结论后承关系都可以用稳定典范规则公理化。因此，我们可以不失一般性地假定，本文所讨论的规则都是稳定典范规则。事实证明，这一思路很有用。特别是，借助稳定典范规则，我们为直觉主义模态逻辑中的 Blok-Esakia 定理给出了另一种证明。该定理最初由 [3] 证明，我们还将其推广到多结论后承关系。我们还证明了直觉主义模态多结论后承关系中的 Dummett-Lemmon猜想；据我们所知，这是一个新结果。

1 引言

在非经典逻辑的研究中，语义方法总体而言，尤其是统一公理化技术，发挥着核心作用。Zakharyaschev 于 20 世纪 80 年代提出了典范公式 这一重要方法，用于超直觉主义逻辑[1]，并证明每个超直觉主义逻辑都可以由典范公式公理化 [4]。其基本思想如下：对于每个公式，利用选择滤过的一种变体，可以得到一个有限的有限反驳模式集合（即一个带有参数集合的有限直觉主义框架）。典范公式以句法方式编码这些有限反驳模式，使得它们的合取等价于原公式。Zakharyaschev [5, 6]随后又在一系列论文中为传递正规模态逻辑发展了典范公式，并证明每个$\mathbf{K4}$的正规扩张都可以由模态典范公式公理化。沿用同样的思想，Je˘r´abek [7] 将该结果推广到多结论规则，并表明$\mathbf{K4}$ 上的每个正规模态多结论后承关系都可以由典范规则公理化。事实证明，典范公式和典范规则为研究超直觉主义逻辑和模态逻辑提供了一种统一方法，因而非常有用。例如，利用典范公式，Zakharyaschev 证明了 Dummett-Lemmon猜想，该猜想断言一个超直觉主义逻辑是 Kripke

[1]这些都是直觉主义命题演算的扩展。

完备的，当且仅当其最小模态伴侣为 [8], and借助典范规则，Je˘r´abek 为直觉主义命题演算中的可容许性的可判定性给出了另一种证明 [7]。

然而，发展典范公式与规则的机制属于模型论范畴，且相当复杂。Bezhanishvili 等人 [9, 10, 2] 通过对偶性，发展了研究典范公式与规则的代数方法。他们表明，从代数角度看，Zakharyaschev 针对超直觉主义逻辑提出的典范公式，刻画了局部有限的海廷代数的 $\vee$-自由约化，而公式中编码的所谓闭域条件 对应于某些元素的并保持性 [9]。

此外，代数视角提出了一个自然问题：我们能否基于同样局部有限的海廷代数的 $\rightarrow$-自由约化来发展典范公式与规则？这一想法促成了稳定典范公式与规则的研究。G.Bezhanishvili、N. Bezhanishvili、Iemhoff 及其合作者首先 [11, 12, 2, 1], 提出了编码这些 $\rightarrow$-自由约化的稳定典范公式与规则；它们是 Zakharyaschev 的典范公式和 Je˘r´abek 的典范规则的替代方案。由于稳定典范公式与规则编码的是通过取过滤而非选择性过滤构造的有限反驳模式，因此它们可应用于非传递逻辑，而 Zakharyaschev 的典范公式和 Je˘r´abek 的典范规则则无法应用于这些逻辑。[2] 特别地，文献 [2] 证明了，每个正规模态多结论后承关系都可以通过稳定典范规则公理化；这部分回答了关于为文献 [14, 问题 9 中提出的 $\mathbf{K}$ 的扩张发展典范公式的问题。5]。

尽管对稳定典范公式与规则的研究仍处于起步阶段，但人们已经投入了相当多的努力，将稳定典范公式与规则推广到不同的语境，并发展相关理论。例如，在她的博士论文中， [13], Ilin 对满足有限模型性质且可由某类稳定公式公理化的稳定逻辑 进行了深入分析。Melzer [15] 为宽松逻辑发展了稳定典范公式，而 Cleani [16, 17] 则将稳定典范公式与规则推广到双超直觉主义逻辑的语境，并用它们证明了该语境下的 Blok-Esakia 定理和 Dummett-Lemmon猜想。

另一方面，与超直觉主义逻辑和经典模态逻辑相比，直觉主义模态逻辑（即超直觉主义逻辑加上模态算子）领域要复杂得多，也鲜为人知。Fisher Servi 引入了直觉主义模态逻辑 [18], ，其基本目标是从直觉主义的视角定义模态。这些逻辑适用于各种各样的情境，从计算机科学 [19] 到认知逻辑 [20]。然而，研究直觉主义模态逻辑，远非简单地结合对经典模态逻辑和超直觉主义逻辑的研究。事实上，仍有一些基本的哲学和技术问题尚待解决。例如，与经典模态逻辑不同，在直觉主义模态逻辑中， $\Box$ 和 $\Diamond$ 并非彼此对偶。一个自然的问题是：什么样的关系才算是

[2]更多详情请见 [13]。

这两个算子之间的合理关系？关于同时具有 $\Box$ 和 $\Diamond$的直觉主义模态逻辑是否具有有限模型性质[3]，我们仍知之甚少。因此，这一领域或许仍能从一些新的、统一而有效的方法中获益。

鉴于上述情况，本文将为直觉主义模态逻辑发展稳定典范规则。这些规则一方面将加深我们对稳定典范公式与规则理论的理解，并验证其广泛适用性；另一方面，也可能为我们提供一种研究直觉主义模态逻辑的统一方法，从而为进一步研究铺平道路。

特别地，我们证明每一个直觉主义模态多结论后承关系都可由稳定典范规则公理化。遵循 [16, 17], 的主要证明策略，我们给出直觉主义模态逻辑的 Blok-Esakia 定理的另一种证明 [23] ，并将其推广到多结论后承关系，从而确立直觉主义模态多结论后承关系的格同构于双模态多结论后承关系（$\mathbf{Grz} \otimes \mathbf{K}$）$\oplus \mathbf{Mix}^R$的扩张格。通过调整 [16, 17], 的证明策略，我们给出关于直觉主义模态多结论后承关系的 Dummett-Lemmon猜想的一个证明，指出一个直觉主义模态多结论后承关系是 Kripke 完备的，当且仅当其最小模态伴侣是 Kripke 完备的；据我们所知，这是一个新结果。[4]

本文的结构如下。第 2 节介绍全文所需的一般预备知识。第 3 节中，我们为直觉主义模态逻辑发展稳定典范规则。利用对偶理论，我们还给出了直觉主义模态逻辑的稳定典范规则的对偶描述。第 4 节讨论稳定典范规则的应用。我们首先介绍直觉主义模态逻辑的 G¨odel 翻译，然后利用双模态逻辑的稳定典范规则证明 Blok-Esakia 定理。随后，借助 Blok-Esakia 定理和直觉主义模态逻辑的稳定典范规则，我们证明直觉主义模态多结论后承关系的 Dummett-Lemmon猜想。在第 5 节中，我们总结全文，并讨论未来研究的可能方向。

2 预备知识

本节将介绍本文中通篇会用到的基本符号、定义和事实。我们假定读者熟悉标准的集合论符号、初等格论，以及拓扑学和一阶逻辑中的一些基本概念。我们也期待读者熟悉范畴论中的对偶性概念，但这并非必要。

[3]参见 [21] 中的一个例子，另一个较新的结果见 [22]。[4]在 [16] 中的原始证明存在一个漏洞，已在 [17]中得到修正。我们的证明在某些重要方面不同于 [17] 的证明，并且当限制在超直觉主义逻辑的情形下时，也能填补这一漏洞。

2.1 有序集

我们先介绍与有序集相关的以下符号和定义。

定义 2.1（极大元与被动元）。设 X 为一个集合，R 为 X 上的传递二元关系，且 $U \subseteq X$。如果对于任意 $y \in U$，Rxy都蕴含 $x = y$，则称 $x \in U$ 为 U的一个 R-极大元。我们将 U中所有 R-极大元构成的集合定义为 $\max_R(U)$。

若对于所有 $y \in U$，Rxy都蕴含 $x = y$，则称元素 $x \in U$ 在 U中为 R-被动的，U中所有 R-被动元构成的集合记为 $pas_R(U)$。

定义 2.2。对于集合 X上的任意自反且传递（二元）关系 R，若子集 $C \subseteq X$ 是关系 $\backsim_R$ 下的一个等价类，其中 $x \backsim_R y$ 当且仅当 xRy 且 yRx，则称 $C \subseteq X$ 为一个 R-簇。

如果一个 R-簇包含多个元素，则称其为真的。
对于任意 $U \subseteq X, U$，若 $U \cap C \neq \emptyset$ 且 $C \setminus U \neq \emptyset$，则称其切开一个 R-簇 C。

注2.3。照例，对于集合 X上的任意等价关系 R，我们用 $[x]$（或$[x]_R$）表示满足 $x \in X$的 x 的等价类。

根据定义，如果 U 要么包含 C，要么与 C不相交，则它不会切开 R-簇 C。

定义 2.4（上集与下集）。设 $(A, \trianglelefteq)$ 是一个偏序集（偏序集），且设 $B \subseteq A$。如果 $x \in B$、$y \in A$ 和$x \trianglelefteq y$ 蕴含 $y \in B$，则称 B 上闭，或称为上集。若 $C \subseteq A$，则记 $\uparrow C$ 为包含 C的最小上集，即 $\{y \in A \mid \exists x \in C\colon\ x \trianglelefteq y\}$。我们用 $Up(A)$ 表示 $(A, \trianglelefteq)$ 的所有上集构成的集合。

类似地，如果 $x \in B$、$y \in A$ 和 $y \trianglelefteq x$ 蕴含 $y \in B$，我们称 B 下闭，或称为下集。如果 $C \subseteq A$，我们定义 $\downarrow C = \{y \in A \mid \exists x \in C\colon\ y \trianglelefteq x\}$。

2.2 普遍代数

接下来我们回顾一些关于普遍代数的事实。本小节的所有内容均可见于 [24]。

定义 2.5（代数）。设 A 是一个非空集合，$\tau\colon\ \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ 是一个签名，其中 $\mathcal{F}$ 是函数符号的集合，且 $F = \{f^A \mid f \in \mathcal{F}, f^A\colon\ A^{\tau(f)} \to A\}$，我们称 (A, F) 为签名 τ 下的一个代数（或简称 τ-代数）。若上下文清楚，我们将用 A 同时表示该代数及其底层集合（也称为载体）。

注记 2.6。为方便起见，我们将对函数符号及其相应的解释使用相同的记号。

[5]直观地说，这表示不存在一条从 x 出发的 R-路径，它先离开 U，然后又返回 U。

设 (A, F) 是一个 τ-代数。若$F' \subseteq F$，则称 (A, F') 为 (A, F) 的约化 。根据上述注记，我们也可以将 (A, F) 的约化写作 $(A, F)|_{\tau'}$，或简单地写作 $A|_{\tau'}$，其中 $\tau' \subseteq \tau$。

设 $\mathcal{K}$ 是一个 τ-代数类，下面介绍以下类算子：

$\mathbb{I}(\mathcal{K}) := \{A \mid A$ 与某个 $B \in \mathcal{K}\}$ 同构；$\mathbb{H}(\mathcal{K}) := \{A \mid A$ 是某个 $B \in \mathcal{K}\}$ 的同态像；$\mathbb{S}(\mathcal{K}) := \mathbb{I}$（$\{A \mid A$ 是某个 $B \in \mathcal{K}\}$ 的子代数）；$\mathbb{P}(\mathcal{K}) := \mathbb{I}$（$\{A \mid A$ 是某些 $\{B_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{K}\}$ 的积）；$\mathbb{P}_u(\mathcal{K}) := \mathbb{I}$（$\{A \mid A$ 是某些 $\{B_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{K}\}$ 的超积）。

设 τ 是任意签名。若一个 τ-代数类是某个全称句集合[6]的模型类，则称它为一类全称类。

定义 2.7。若 $\mathcal{K}$ 是一个 τ-代数类，我们用 $Uni(\mathcal{K})$ 表示包含 $\mathcal{K}$ 的最小一类全称类。$Uni(\mathcal{K})$ 也称为由 $\mathcal{K}$生成的一类全称类。

下面给出一个有用的刻画，用我们刚刚定义的算子来描述 Uni 。

定理 2.8. *[24,* 定理 *2.20]* 全称类在 $\mathbb{S}$ 和 $\mathbb{P}_u$ 下封闭。此外：

$$Uni(\mathcal{K}) = \mathbb{S}\mathbb{P}_u(\mathcal{K}).$$

现在我们介绍另一类重要的代数，称为簇。

定义 2.9（簇）。设 τ 是任意签名，τ-代数的一个类 V 若在 $\mathbb{H}$、$\mathbb{S}$ 和 $\mathbb{P}$ 下封闭，则称为一个簇。

设 $\mathcal{K}$ 是 τ-代数的一个类，我们用 $Var(\mathcal{K})$ 表示包含 $\mathcal{K}$ 的最小簇。$Var(\mathcal{K})$ 也称为由 $\mathcal{K}$生成的簇。

与全称类类似，簇由称为方程的特殊公式定义。

定义 2.10（方程）。一阶句 φ 称为方程，如果它的形式为 $\forall v_1 ... \forall v_n(\sigma(v_1, \ldots, v_n) = \tau(v_1, \ldots, v_n))$，其中 $\sigma(v_1, \ldots, v_n)$ 和 $\tau(v_1, \ldots, v_n)$ 是项，其自由变量均属于 $\{v_1, ..., v_n\}$。

下面的结果称为伯克霍夫定理。

定理 2.11。 *[24,* 定理 *11。9]* 设 τ 为任意签名，且设 V为一类 τ-代数。那么，当且仅当 V 可由方程定义时，V 才是一个簇；也就是说，存在一个方程集合 Φ，使得：

$$V = \{A \text{ is an algebra in } \tau \mid A \vDash \Phi\}.$$

[6] "Un一阶逻辑意义上的"普遍"。参见 [25, De f. 5.6]。

2.3 演绎系统

现在我们介绍两种演绎系统，并将在全文中对它们进行探讨。以下介绍主要基于 [26]。

定义 2.12. 签名 上、变量集合 X上的公式集合（记作 $Form_v(X)$）是包含 X 的最小集合，并满足：对于任意 $f \in v$，若 $\varphi_1, ..., \varphi_n \in Form_v(X)$，则 $f(\varphi_1, ..., \varphi_n) \in Form_v(X)$，其中 f 的元数为 n。

令 $Prop$ 为一个固定的可数无限变量集合，我们将$Form_v(Prop)$记作 $Form_v$。替换 s 是从 $Prop$到 $Form_v$的映射，它可以按显然的方式递归扩展为从 $Form_v$到 $Form_v$的映射 $\bar{s}$。

首先，我们定义什么是逻辑。

定义 2.13. 在 $Form_v$上的逻辑 是一个集合 $L \subseteq Form_v$，满足：若 $\varphi \in L$，则对于每个替换 s，都有 $\bar{s}(\varphi) \in L$。

注 2.14。 根据上述定义，经典命题逻辑是定义在$Form_{\wedge、\vee和\neg}$上的逻辑。

定义 2.15 （多结论规则）。 签名v 下、变量集合 X 上的一个多结论规则是 $Form_v(X)$的有限子集 Γ/Δ 组成的有序对。

注 2.16。 在 $\Delta = \{\psi\}$的情况下，我们简单地用 Γ/ψ 表示 Γ/Δ；若$\Gamma = \{\varphi\}$，也同理。

我们记作 $Rul_v(X)$，表示签名 v下、变量集合 X上的所有多结论规则组成的集合，并令 Rul_v 表示 $Rul_v(Prop)$。

由于逻辑定义在公式上，多结论后承关系定义在多结论规则上。

定义 2.17 （多结论后承关系）。 在 Rul_v 上的一个多结论后承关系是一个集合 $S \subseteq Rul_v$，满足以下条件（“;”表示集合论意义上的并集）：

- 若 $\Gamma/\Delta \in S$，则对所有替换 s，都有 $\bar{s}[\Gamma]/\bar{s}[\Delta] \in S$。
- $\varphi/\varphi \in S$ 对所有公式 φ。
- 若 $\Gamma/\Delta \in S$，则 Γ；Γ'/Δ；对于任意有限公式集 Γ' 和 Δ'，都有 $\Delta' \in S$。
- Γ/Δ；$\varphi \in S$ 且 Γ；$\varphi/\Delta \in S$，则 $\Gamma/\Delta \in S$（切规则）。

若 L 是一个逻辑，且 Δ 是公式集合，我们用 $L \oplus \Delta$ 表示包含 Δ 且扩张 L 的最小逻辑，并称该逻辑由 Δ 在 L 上公理化。类似地，我们定义 $S \oplus \Sigma$，其中 S 是一个多结论后承关系，而 Σ 是一组多结论规则。

接下来，我们定义同一签名下代数上的公式和规则的解释。设 $\mathfrak{A}$ v-代数，且 A 为其载体，则 $\mathfrak{A}$ 上的赋值是

¯一个从 $Prop$ 到 A的映射 V，以最显然的方式递归扩展后，可得到一个从 $Form_v$ 到 A 的映射 V。

下文中，我们假定所考虑的每个代数都有顶元素（或最大元素，记作 1）。这会使下面对有效性 的定义更加简单；由于本文只考虑这类代数，因此不会造成任何问题。关于代数语义中更一般的有效性定义，可参见 [27]。

定义 2.18（有效性）。若对于签名 υ 中的任意规则 Γ/Δ，在 υ-代数_ _$\mathfrak{A}$ 上，对任意赋值 V，若对任意 $\gamma \in \Gamma$均有 $V(\gamma) = 1$，则存在某个 $\delta \in \Delta$ 使得 $V(\delta) = 1$，其中 1 是 $\mathfrak{A}$的顶元素，则称规则 Γ/Δ 在 υ-代数_ _$\mathfrak{A}$ 上有效。我们将此记作 $\mathfrak{A} \vDash \Gamma/\Delta$。

签名 υ 中的公式 φ在 υ-代数 $\mathfrak{A}$上有效，当且仅当规则 $/\varphi$在 $\mathfrak{A}$上有效；我们将此记作 $\mathfrak{A} \vDash \varphi$。

注 2.19。按照上述定义，规则 Γ/Δ在 υ-代数类 $\mathcal{K}$ 上的有效性概念，以及规则集合 S 在υ-代数 $\mathfrak{A}$ 上的有效性概念，都按通常方式定义；我们分别将它们记作 $\mathcal{K} \vDash \Gamma/\Delta$ 和 $\mathfrak{A} \vDash S$。

那么，对于任意逻辑 L，如果 $\mathcal{K} \vDash \varphi$ 蕴含 $\varphi \in L$，我们就称 L 相对于一类代数$\mathcal{K}$ 是完备 的。类似地，我们定义多结论后承关系的完备性。

最后，我们固定两种有用的记法。令 $\mathcal{A}_\upsilon$ 为所有 υ-代数构成的类， S 为一个逻辑或多结论后承关系，我们用 $Alg(S)$表示所有验证 S的 υ-代数构成的集合，即 $Alg(S) = \{\mathfrak{A} \in \mathcal{A}_\upsilon \mid \mathfrak{A} \vDash S\}$。反过来，如果 $\mathcal{K}$ 是一个 υ-代数集合，我们定义 $Ru(\mathcal{K}) = \{\Gamma/\Delta \in Rul_\upsilon \mid \mathcal{K} \vDash \Gamma/\Delta\}$ 和 $Th(\mathcal{K}) = \{\varphi \in Form_\upsilon \mid \mathcal{K} \vDash \varphi\}$。

2.4 双模态逻辑与直觉主义模态逻辑

在介绍了普遍代数和演绎系统的一般理论之后，我们现在将它们应用于更具体的情境中。

双模态签名 $bi = \{\wedge, \vee, \neg, \top, \bot, \Box_I, \Box_M\}$以及双模态公式 $Form_{bi}$ 的集合递归定义如下：

$$\varphi ::= p \mid \top \mid \bot \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \neg\varphi \mid \Box_I\varphi \mid \Box_M\varphi$$

通常， $\varphi \to \psi$ 表示 $\neg\varphi \vee \psi$，其中 φ 和 ψ为任意双模态公式。

注 2.20。下标 I 表示“直觉主义”，而下标 M表示“模态”。使用这些下标的原因要到本文后面才会明了。此处我们仅用它们来区分这两个算子。

定义 2.21。如果以下条件成立，则 L 在 $Form_{bi}$ 上的双模态逻辑 为：

- $\mathbf{CPC}$[7] $\subseteq L$

[7]它表示经典命题演算。

- $\Box_I(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow(\Box_I\varphi \wedge \Box_I\psi) \in L$和 $\Box_M(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow(\Box_M\varphi \wedge \Box_M\psi) \in L$
- $\varphi \to \psi \in L$蕴含 $\Box_I\varphi \to \Box_I\psi \in L$且 $\Box_M\varphi \to \Box_M\psi \in L$(规则)
- $\varphi \in L$蕴含 $\Box_I\varphi \in L$且 $\Box_M\varphi \in L$(必然化规则)
- $\varphi \to \psi$ 且 $\varphi \in L$ 蕴含 $\psi \in L$ (肯定前件规则)

我们用 $\mathbf{K} \otimes\mathbf{K}$ 表示最小双模态逻辑。之所以采用这种记号，是因为若将签名限制为 $\{\wedge, \vee, \neg, \top, \bot, \Box_I\}$或 $\{\wedge, \vee, \neg, \top, \bot, \Box_M\}$[8]，最小双模态逻辑就只是最小正规模态逻辑 $\mathbf{K}$。那么，$\mathbf{S4} \otimes\mathbf{K}$ 是 $(\mathbf{K} \otimes \mathbf{K}) \oplus(\Box_I p \to p) \oplus($ $\Box_I p \to \Box_I\Box_I p)$，而 $\mathbf{Grz} \otimes \mathbf{K}$是 $(\mathbf{S4} \otimes \mathbf{K}) \oplus\Box_I(\Box_I(p \to\Box_I p) \to p) \to p$[9]。

接下来，我们引入双模态多结论后承关系如下:

定义 2.22. A双模态多结论后承关系 是一个定义在 M 上的多结论后承关系 Rul_{bi} , 满足以下条件:

- $/\varphi \in M$ 只要 $\varphi \in \mathbf{K} \otimes\mathbf{K}$
- $\varphi/\Box_I\varphi \in M$并且 $\varphi/\Box_M\varphi \in M$
- $\varphi \to \psi,\ \ \varphi/\psi \in M$

注：2.23. 为方便起见，当不必区分它们是逻辑还是多结论后承关系时，双模态逻辑有时仅指双模态演绎系统。直觉主义模态逻辑也同样如此

Rul_{bi} 中的元素称为双模态多结论规则。如果 L是一个双模态逻辑，那么 $\mathbf{NExt}(L)$是所有扩展 L 的双模态逻辑构成的格，其中 $\oplus$ 为并，交集为交。类似地，当 M 是一个双模态多结论后承关系时，我们定义$\mathbf{NExt}(M)$。显然，对于任意 $L \in \mathbf{NExt}(\mathbf{K} \otimes\mathbf{K})$，都存在一个最小的双模态多结论后承关系 L^R ，它包含所有满足 $\varphi \in L$的 $/\varphi$。特别地，我们将对应于$\mathbf{K} \otimes \mathbf{K}$ 的关系记作$\mathbf{K} \otimes\mathbf{K}^R$ （最小的双模态多结论后承关系），将对应于$\mathbf{S4} \otimes \mathbf{K}$ 的关系记作$\mathbf{S4} \otimes\mathbf{K}^R$。反过来，对于任意 $M \in \mathbf{NExt}(\mathbf{K} \otimes \mathbf{K})$，$Taut(M) = \{\varphi \in Form_{bi} \mid /\varphi \in M\}$是一个双模态逻辑。

下面的命题使我们能够将关于多结论后承关系的结果转化为关于逻辑的结果。证明是显然的。

命题 2.24。 映射 $(-)^R$ 和 $Taut(-)$ 互为逆完备格同构，分别对应 $\mathbf{NExt}(\mathbf{K} \otimes \mathbf{K})$ 与 $\mathbf{NExt}(\mathbf{K} \otimes \mathbf{K}^R)$ 的子格；该子格由满足 $Taut(M)^R = M$ 的所有双模态多结论后承关系M组成。

接下来，我们回顾双模态逻辑的代数语义。

[8]无论哪种情况，我们都更倾向于只使用 $\Box$ ，而不是 $\Box_I$ 或 $\Box_M$。[9]限制到签名 $\{\wedge, \vee, \neg, \top, \bot, \Box_I\}$ 时，$\mathbf{S4} \otimes \mathbf{K}$ 就是 $\mathbf{S4}$，而 $\mathbf{Grz} \otimes \mathbf{K}$ 就是 $\mathbf{Grz}$。关于这些正规模态逻辑的更多信息，请参见 [14] 。

定义 2.25。 模态代数 是一个元组 $\mathfrak{A} = (A, \Box)$，其中 A 是布尔代数， $\Box 1 = 1$ 和 $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$ 对于任意 $a, b \in A$。

一个 $K \otimes K$-代数 （或双模态代数）是一个元组 $\mathfrak{A} = (A, \Box_I, \Box_M)$，其中 $(A, \Box_I)$ 和 $(A, \Box_M)$ 都是模态代数。

对于任意双模态逻辑 L，如果一个双模态代数验证了L，我们就称它为 L-代数 。

注记 2.26. 特别地，双模态代数 $\mathfrak{A} = (A, \Box_I, \Box_M)$ 是一个 $S4 \otimes K$-代数 ，当且仅当 $\Box_I a \leq a$ 并且 $\Box_I a \leq \Box_I \Box_I a$对任意 $a \in A$成立（或等价地， $\Box_I a \to a = 1$并且 $\Box_I a \to \Box_I \Box_I a = 1$）。双模态代数 $\mathfrak{A} = (A, \Box_I, \Box_M)$ 是一个$Grz \otimes K$-代数 ，当且仅当 $\Box_I(\Box_I(a \to \Box_I a) \to a) \leq a$对任意 $a \in A$[10]成立。

令**BMA** 为所有双模态代数构成的类。根据定理 2.11，**BMA**是一个簇。分别用**Var(BMA)**和**Uni(BMA)**表示**BMA** 的子簇格和全子类格，我们通常有如下结果。它表明，簇与逻辑之间存在对应关系，而全称类与多结论后承关系之间也存在对应关系。关于模态代数和（一元）正规模态逻辑的类似结果的证明，可见 [28, 定理 2.5] 和 [14,定理 7.56]。

定理 2.27. 以下映射构成互为逆映射的同构对：

- *Alg:* $\mathbf{NExt}(\boldsymbol{K} \otimes \boldsymbol{K}) \to \boldsymbol{Var}(\mathbf{BMA})$ *and Th:* $\boldsymbol{Var}(\mathbf{BMA}) \to \mathbf{NExt}(\boldsymbol{K} \otimes \boldsymbol{K})$
- *Alg:* $\mathbf{NExt}(\boldsymbol{K} \otimes \boldsymbol{K}^R) \to \boldsymbol{Uni}(\mathbf{BMA})$ *and Ru:* $\boldsymbol{Uni}(\mathbf{BMA}) \to \mathbf{NExt}(\boldsymbol{K} \otimes \boldsymbol{K}^R)$

推论 2.28. 每个双模态逻辑（分别地，每个双模态多结论后承关系）都相对于某个双模态代数簇（分别地，某个双模态代数全称类）是完备的。

同样，我们可以为直觉主义模态逻辑定义两个演绎系统，并给出相应的代数语义。

直觉主义模态签名 $i_\Box = \{\wedge, \vee, \to, \top, \bot, \Box\}$以及直觉主义模态公式的集合 $Form_{i_\Box}$ 递归定义如下：

$$\varphi ::= p \mid \top \mid \bot \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \to \varphi \mid \Box\varphi$$

$\varphi \leftrightarrow \psi$ 表示 $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ 。

令 **IPC** 表示直觉主义命题演算，直觉主义模态逻辑 定义如下：

定义 2.29。 一个建立在 $Form_{i_\Box}$ 之上的逻辑 L ，若满足以下条件，则称为直觉主义模态逻辑：

[10]众所周知，每个 Grz-代数都是一个 $S4$-代数，因为**Grz** 是**S4**的扩展。参见 [14]。

- **IPC** $\subseteq L$
- $\Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \in L$
- $\varphi \to \psi \in L$ 蕴含 $\Box\varphi \to \Box\psi \in L$ (规则)
- $\varphi \in L$ 蕴含 $\Box\varphi \in L$ (必然化规则)
- $\varphi \to \psi$, $\varphi \in L$ 蕴含 $\psi \in L$ (肯定前件规则)

我们将最小的直觉主义模态逻辑记为 $\mathbf{IntK}_\Box$，而$\mathbf{IntS4}_\Box$ 就是$\mathbf{IntK}_\Box \oplus (\Box p \to p) \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$。

定义 2.30。直觉主义模态多结论后承关系是一个定义在 $Rul_{i_\Box}$ 上的多结论后承关系 M，满足以下条件：

- $/\varphi \in M$ 当且仅当 $\varphi \in \mathbf{IntK}_\Box$
- $\varphi/\Box\varphi \in M$
- $\varphi \to \psi$, $\varphi/\psi \in M$

$Rul_{i_\Box}$ 中的元素称为直觉主义模态多结论规则。接下来，我们以与双模态逻辑和双模态多结论后承关系相同的方式，定义记号$\mathbf{NExt}(L)$、$\mathbf{NExt}(M)$、$\mathbf{IntK}^R_\Box$ 和$\mathbf{IntS4}^R_\Box$，其中 L 是一个直觉主义逻辑，M 是同一意义下的直觉主义多结论后承关系。

我们也有命题 2.24 的如下对应项。

命题 2.31。映射 $(-)^R$ 和 $Taut(-)$ 互为逆映射，构成$\mathbf{NExt}(\mathbf{IntK}_\Box)$ 与 $\mathbf{NExt}(\mathbf{IntK}^R_\Box)$ 的子格之间的完备格同构；该子格由所有满足 $Taut(M)^R = M$ 的直觉主义模态多结论后承关系 M 组成。

直觉主义模态逻辑的代数语义由所谓的模态海廷代数给出。我们从海廷代数的定义开始。

定义 2.32。若（$\mathfrak{A} =$，A，$\wedge$，$\vee$，$\to$，0，1）中（A，$\wedge$，$\vee$，0，1）是有界分配格，并且对任意 a、b、$c \in A$、$c \wedge a \leq b$，当且仅当 $c \leq a \to b$ 成立，则称元组 $\mathfrak{A} =$（A，$\wedge$，$\vee$，$\to$，0，1）为海廷代数。

定义 2.33。模态海廷代数是一个元组 $\mathfrak{A} =$（A，$\wedge$，$\vee$，$\to$，0，1，$\Box$），其中（A，$\wedge$，$\vee$，$\to$，0，1）是海廷代数，且对任意 a、$b \in A$，$\Box 1 = 1$ 和 $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$。

为简单起见，我们将 $\mathfrak{A} =$（A，$\wedge$，$\vee$，$\to$，0，1，$\Box$）记作 $\mathfrak{A} =$（A，$\Box$），其中假设 A 是海廷代数。

令$\mathbf{MHA}$ 为所有模态海廷代数构成的类。根据定理 2.11，$\mathbf{MHA}$是一个簇。令$\mathbf{Var(MHA)}$和$\mathbf{Uni(MHA)}$分别表示$\mathbf{MHA}$ 的子簇格和全子类格。于是得到以下结果。关于海廷代数和超直觉主义逻辑中类似结果的证明，可见 [14, 定理 7.56] 和 [7, 定理 2.2]。

定理 2.34。 以下映射构成互逆同构对：

- 代数： $\mathbf{NExt}(\boldsymbol{IntK}_{\Box}) \to \boldsymbol{Var}(\mathbf{MHA})$ 以及定理： $\boldsymbol{Var}(\mathbf{MHA}) \to \mathbf{NExt}(\boldsymbol{IntK}_{\Box})$
- 代数： $\mathbf{NExt}(\boldsymbol{IntK}^{R}_{\Box}) \to \boldsymbol{Uni}(\mathbf{MHA})$以及 $\boldsymbol{Ru}$： $\boldsymbol{Uni}(\mathbf{MHA}) \to \mathbf{NExt}(\boldsymbol{IntK}^{R}_{\Box})$

推论 2.35。 每个直觉主义模态逻辑（分别地，直觉主义模态多结论后承关系）都相对于某个模态海廷代数簇（分别地，一类模态海廷代数全称类）是完备的。

2.5 对偶性

最后，我们回顾有界分配格和海廷代数的对偶描述，本文将频繁用到这些描述。

我们从有界分配格的 Priestley 对偶开始，关于这一内容请参阅 [29]。

定义 2.36 （Priestley 空间）。 元组 $(X, \leq)$（其中 $\leq$ 是 X上的偏序）是一个 ***Priestley* 空间**，当且仅当 X 是紧空间，并且对于任意 $x, y \in X$，若$x \not\leq y$，则存在 X 的既开又闭的上集 U，使得 $x \in U$，而 $y \notin U$。

定义 2.37 （Priestley 态射）。 对于 Priestley 空间 $(X, \leq)$ 和 $(Y, \leq)$，映射 $f : X \to Y$ 是一个 ***Priestley* 态射**，当且仅当 f 连续且保序。

令**有界分配格范畴** 表示由有界分配格及其有界格同态构成的范畴，并令 $\mathbf{PS}$ 表示由 Priestley 空间及其 Priestley 态射构成的范畴。建立 Priestley 对偶的函子 $(-)_* : \textbf{有界分配格范畴} \to \mathbf{PS}$ 和 $(-)^* : \mathbf{PS} \to \textbf{有界分配格范畴}$ 构造如下。对于有界分配格 $\mathfrak{A}$，其对偶 $\mathfrak{A}_*$ 是 $\mathfrak{A}$ 的所有素滤子 X_A 构成的集合，以 $\subseteq$为序，并以 $\{\beta(a) \mid a \in A\} \cup \{X_A \setminus \beta(a)$[11] $\mid a \in A\}$ 为 $\beta(a) = \{x \in X_A \mid a \in x\}$的基。对于有界格同态 $h : A \to B$，其对偶 h_* 定义为 h^{-1}。对于 Priestley 空间 $\mathcal{X} = (X, \leq)$，其对偶 $\mathcal{X}^*$ 是 $\mathcal{X}$ 的开闭上集构成的有界分配格，其中交为交、并为并。对于 Priestley 态射 $f : X \to Y$，其对偶 $f^* : Y^* \to X^*$ 定义为f^{-1}。

我们在以下定理中概述 Priestley 对偶的一些有用细节。

定理 2.38. 有界分配格范畴 与 **普里斯特利空间范畴**对偶等价，这由 $(-)^*$和 $(-)_*$见证。具体而言，对于任意有界分配格 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \cong (\mathfrak{A}_*)^*$由 β 见证，其中 $\beta(a) = \{x \in A_* \mid a \in x\}$；对于任意 ***Priestley* 空间** $\mathcal{X}$，有 $\mathcal{X} \cong (\mathcal{X}^*)_*$ 由 ϵ 见证，其中 $\epsilon(x) = \{U \in X^* \mid x \in U\}$。

因此，海廷代数的对偶描述由 Esakia 对偶给出。读者可参考 [30]了解更多详情。

[11]为方便起见，我们也可以将 $X_A \setminus \beta(a)$ 记作 δ_a。

定义 2.39（Esakia 空间）。若 Priestley 空间 $(X, \leq)$ 满足：对于 X 的任意闭开集 U，$\downarrow U$ 都是闭开集，则称其为 ***Esakia*** 空间。

注记 2.40。运用一般拓扑中的一个简单论证，可以轻易验证，Esakia 空间的每个开闭子集都具有 $\bigcup_{1\leq i\leq n}(U_i \setminus V_i)$ 的形式，其中 $n \in \mathbb{N}$ 和 U_i，V_i' 均为开闭上集。

对于任意拓扑空间 X，我们将用 $Clop(X)$ 表示 X 的所有开闭子集组成的集合。

定义 2.41。对于 Esakia 空间 $(X, \leq)$ 和 $(Y, \leq)$，若 $f: X \to Y$ 连续、保序，并且对于任意 $x \in X$，$f(x)$，只要 $\leq z$，就存在 $y \geq x$ 使得 $f(y) = z$，则称其为 ***Esakia*** 态射。

令 **ES** 为以 Esakia 空间及 Esakia 态射为对象和态射的范畴，**HA**为以海廷代数及海廷代数同态为对象和态射的范畴。建立 Esakia 对偶的函子 $(-)_* : \mathbf{HA} \to \mathbf{ES}$ 和 $(-)^* : \mathbf{ES} \to \mathbf{HA}$ 构造如下：$(-)_*$ 与上文相同。对于 Esakia 空间 $\mathcal{X} = (X, \leq)$，其对偶 $\mathcal{X}^*$ 是 $\mathcal{X}$ 的开闭上集构成的海廷代数，其中 $U \to V = X \setminus \downarrow(U \setminus V)$。并且，对于任意 Esakia 态射 f，有 $f^* = f^{-1}$。特别地，我们有以下定理。

定理 2.42。**海廷代数** 与**Esakia 空间范畴**对偶等价，该对偶等价由 $(-)^*$ 和 $(-)_*$见证。特别地，对于任意海廷代数 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A} \cong (\mathfrak{A}_*)^*$ 由 β 见证，其中 $\beta(a) = \{x \in A_* \mid a \in x\}$；对于任意 ***Esakia*** 空间 $\mathcal{X}$，有 $\mathcal{X} \cong (\mathcal{X}^*)_*$由 ϵ 见证，其中 $\epsilon(x) = \{U \in X^* \mid x \in U\}$。

我们以一些关于模态空间的有用结果结束本节。

定义 2.43（Stone 空间）。如果一个拓扑空间是紧豪斯多夫空间，且具有开闭集基，则称其为***Stone*** 空间。

注 2.44。布尔代数范畴（其态射为布尔代数同态）与 Stone 空间范畴（其态射为连续映射）对偶等价。这种对偶性称为***Stone*** 对偶，本文不单独讨论它。只需注意，对于任意布尔代数 $\mathfrak{A}$，其对偶 Stone 空间就是去掉序关系后的对偶 Esakia 空间。

定义 2.45（模态空间）。模态空间 (X, R)由一个 Stone 空间X 和定义在 X 上的二元关系 R 构成，并满足以下两个条件：

- 对于任意 $x \in X$，集合 $R[x] = \{y \in X \mid xRy\}$ 是闭集。
- 对于 X的任意开闭子集 U，存在某个 $y \in U\}$使得 $R^{-1}[U] = \{x \in X \mid xRy$ 是开闭的。

注记 2.46. 带有其"对应映射"的模态空间范畴，与带有其同态的模态代数范畴对偶等价。我们将在第 4 节需要时，才详细说明这种对偶性（实际上是双模态空间与双模态代数之间的对偶性）。

鉴于前面提到的对偶性，我们可以在模态空间上为单结论模态逻辑[12]定义赋值，这并不奇怪：模态空间(X, R)上的赋值是一个映射 V：$Prop \to Clop(X)$，并可按标准方式扩展到所有模态公式 [13]。对于任意模态公式 φ，我们记作$(X, R) \vDash \varphi$，表示对于任意赋值 V，都有 $V(\varphi) = X$。于是，对于任意单结论模态逻辑 L，若对于任意 $\varphi \in L$，都有$(X, R) \vDash \varphi$，则称模态空间(X, R)为 L-空间。特别地，$S4$-空间是一个模态空间(X, R)，其中 R 是自反且传递的。

我们回顾关于 Grz-空间的以下有用结果，其证明见 [31, 第 3] 章。

定理 2.47。对于任意 Grz-空间 (X, R) 以及 $U \in Clop(X)$，以下结论成立：

- $max_R(U)$ 是闭集。
- $max_R(U) \subseteq pas_R(U)$。
- $max_R(U)$ 不会切分任何 R-簇。

至此，我们的一般预备知识部分告一段落。现在可以开始发展直觉主义模态逻辑的稳定典范规则理论了。

3 直觉主义模态逻辑的稳定典范规则

我们首先引入稳定典范规则，并证明每个直觉主义模态多结论后承关系都可以由稳定典范规则公理化。然后，利用在 [32], 中构造的对偶性，我们给出稳定典范规则的对偶（几何）刻画，这对其应用非常有用。

我们从稳定映射的定义开始。

定义 3.1. 设 $\mathfrak{A} = (A, \Box)$ 和 $\mathfrak{B} = (B, \Box)$ 是模态海廷代数，且 $h : A \to B$ 是一个有界格同态。我们称 h 为稳定的，如果对任意 $a \in A$，都有 $h(\Box a) \leq \Box h(a)$ 。

这个定义类似于 [2, 中经典模态逻辑情形下给出的定义 3.1] 。

定义 3.2. 设 $\mathfrak{A} = (A, \Box)$、$\mathfrak{B} = (B, \Box)$ 是模态海廷代数，$D^{\to} \subseteq A \times A$ 且 $D^{\Box} \subseteq A$。有界格嵌入 $h : A \to B$ 满足

- $D^{\to}$ 的闭域条件（简称 CDC）：如果对于任意（a, b），$h（a \to b） = h（a） \to h（b） \in D^{\to}$。

[12]它们只是限定为一个模态算子的双模态逻辑。[13]通常人们仍用 V 表示扩展映射。

- $D^{\Box}$ 的闭域条件 （简称 CDC）：如果对于任意 $a \in D^{\Box}$， h（$\Box a$） $= \Box h$（a）。

下面的命题将每条直觉主义模态多结论规则与有限多个有限反驳模式联系起来，这通过满足某些参数下 CDC 的稳定有界格嵌入实现。

命题 3.3. 对于每条直觉主义模态多结论规则 Γ/Δ，都存在 $(\mathfrak{A}_1, D_1^{\rightarrow}, D_1^{\Box})$ ...,$(\mathfrak{A}_n, D_n^{\rightarrow}, D_n^{\Box})$，使得每个 $\mathfrak{A}_i$ 都是有限模态海廷代数， $D_i^{\rightarrow} \subseteq A_i \times A_i$ 且 $D_i^{\Box} \subseteq A_i$；并且对于每个模态海廷代数 $\mathfrak{B} = (B, \Box)$，有 $\mathfrak{B} \nvDash \Gamma/\Delta$ 当且仅当存在 $i \leq n$ 以及一个稳定有界格嵌入 h: $A_i \to B$，满足关于 $D_i^{\rightarrow}$ 和 $D_i^{\Box}$ 的 CDC。

证明。 设 Γ/Δ 是任意一条直觉主义模态多结论规则。若 $\Gamma/\Delta \in \mathbf{IntK}_{\Box}^{R}$，则取 $n = 0$。假设 $\Gamma/\Delta \notin \mathbf{IntK}_{\Box}^{R}$，令 Θ 为 $\Gamma \cup \Delta$ 中各公式的所有子公式构成的集合。显然， Θ 是有限的。设 $|\Theta| = m$；由于有界分配格簇是局部有限的，因此满足以下两个条件的三元组 $(\mathfrak{A}, D^{\rightarrow}, D^{\Box})$ 在同构意义下只有有限多个：

i) $\mathfrak{A} = (A, \Box)$ 是一个有限模态海廷代数，且 $\mathfrak{A}|_{\{\wedge,\vee,1,0\}}$ 作为有界分配格至多由 m 生成，并且 $\mathfrak{A} \nvDash \Gamma/\Delta$。ii) $D^{\rightarrow} = \{(V(\varphi)\ V(\psi)) \mid \varphi \to \psi \in \Theta\}$ 且 $D^{\Box} = \{V(\psi) \mid \Box\psi \in \Theta\}$，其中 V 是 $\mathfrak{A}$ 上的一个赋值，用以见证 $\mathfrak{A} \nvDash \Gamma/\Delta$。

设 $(\mathfrak{A}_1, D_1^{\rightarrow}, D_1^{\Box})$ ....., $(\mathfrak{A}_n, D_n^{\rightarrow}, D_n^{\Box})$ 为此类有序对的枚举。对于任意模态海廷代数 $\mathfrak{B} = (B, \Box)$，我们证明， $\mathfrak{B} \nvDash \Gamma/\Delta$ 当且仅当存在 $i \leq n$ 和一个稳定有界格嵌入 h： $A_i \to B$，使其对 $D_i^{\rightarrow}$ 满足 CDC，且 $D_i^{\Box}$。

对于从右到左方向，假设存在 $i \leq n$ 和一个稳定有界格嵌入 h： $A_i \to B$，使其对 $D_i^{\rightarrow}$ 满足 CDC，且 $D_i^{\Box}$。定义 $\mathfrak{B}$ 上的赋值 V_B：对于任意命题字母 p，令 $V_B(p) = h(V_i(p))$，其中 V_i 是 $\mathfrak{A}_i$ 上的赋值，用以见证 $\mathfrak{A}_i \nvDash \Gamma/\Delta$。接着，我们通过归纳证明，对于任意 $\psi \in \Theta$，$V_B(\psi) = h(V_i(\psi))$。我们只考虑以下两种情形，其他情形均显然（h 是一个有界格嵌入）：

如果 $\psi = \Box\varphi$，那么作为 $\Box\varphi \in \Theta$， $V_i(\varphi) \in D_i^{\Box}$。

$$\begin{array}{lcll} V_B(\Box\varphi) & = & \Box V_B(\varphi) & \\ & = & \Box h(V_i(\varphi)) & (\mathrm{IH}) \\ & = & h(\Box V_i(\varphi)) & (\mathrm{CDC}) \\ & = & h(V_i(\Box\varphi)). & \end{array}$$

若 $\psi = \varphi \to \chi$，则由于 $\varphi \to \chi \in \Theta$，$(V_i(\varphi)\ V_i(\chi)) \in D_i^{\rightarrow}$。

$$\begin{array}{lcll} V_B(\varphi \to \chi) & = & V_B(\varphi) \to V_B(\chi) & \\ & = & h(V_i(\varphi)) \to h(V_i(\chi)) & (\mathrm{IH}) \\ & = & h(V_i(\varphi) \to V_i(\chi)) & (\mathrm{CDC}) \\ & = & h(V_i(\varphi \to \chi)). & \end{array}$$

由于对于任意 $\gamma \in \Gamma$， $V_i(\gamma) = 1_{A_i}$，且 h 是有界格嵌入，因此对于任意 $\gamma \in \Gamma$, $V_B(\gamma) = h(V_i(\gamma)) = h(1_{A_i}) = 1_B$。由于对于任意 $\delta \in \Delta$， $V_i(\delta) \neq 1_{A_i}$，且 h 是有界格嵌入，因此对于任意 $\delta \in \Delta$, $V_B(\delta) = h(V_i(\delta)) \neq 1_B$。因此 $\mathfrak{B} \nvdash \Gamma/\Delta$。

对于从左到右方向，设 $\mathfrak{B} \nvdash \Gamma/\Delta$。存在一个赋值$V_B$ 在 B 上，使得对于任意 $\gamma \in \Gamma$， $V_B(\gamma) = 1_B$；并且对于任意 $\delta \in \Delta$, $V_B(\delta) \neq 1_B$。令 B' 为由 $V_B(\Theta) = \{V_B(\varphi) \mid \varphi \in \Theta\}$生成的 B 的有界子格。注意到，由于有界分配格簇是局部有限的，B' 是有限的。显然， $|V_B(\Theta)| \leq |\Theta|_\omega$。令 $D^{\Box} = \{V_B(\psi) \mid \Box\psi \in \Theta\}$，且$D^{\rightarrow} = \{(V_B(\varphi)\ V_B(\psi)) \mid \varphi \to \psi \in \Theta\}$。我们如下定义 $\to'$ 和 $\Box'$ 在 B' 上的取值：对于任意 a, $a \to' b = \bigvee\{d \in B' \mid d \wedge a \leq b\}$,$b \in B'$； $\Box' a = \bigvee\{\Box b \mid \Box b \trianglelefteq \Box a$ 以及 b, $\Box b \in B'\}$ 对于任意 $a \in B'$。

我们首先验证 $(B', \to', \Box')$ 是一个模态海廷代数。显然，根据 $\to'$ 的定义，$(B', \to')$ 是一个海廷代数。由于 $\Box 1 = 1$ 和 $1 \in B'$，因此有 $\Box' 1 = \Box 1 = 1$。

对于任意 $a, b \in B'$, $\Box' a \wedge \Box' b = \bigvee\{\Box x \leq \Box a$ 和 x, $\Box x \in B'\} \wedge \bigvee\{\Box y \mid \Box y \leq \Box b$ 和 $y, \Box y \in B'\} = \bigvee\{\Box x \wedge \Box y \mid \Box x \leq \Box a, \Box y \leq \Box b$, 其中 $x, y, \Box x, \Box y \in B'\}$（分配律）$= \bigvee\{\Box(x \wedge y) \mid \Box x \leq \Box a$，并且 $\Box y \leq \Box b$，其中 $x, y, \Box x, \Box y \in B'\} = \bigvee\{\Box z \mid \Box z \leq \Box(a \wedge b)$ 和 $z, \Box z \in B'\} = \Box'(a \wedge b)$。

这证明了 $(B', \to', \Box')$ 是一个模态海廷代数。令 $h : (B', \to' \Box') \to (B, \Box)$ 为包含映射， h 显然是一个有界格嵌入，因为 B' 是 B的有界子格。根据定义，对于任意 $a \in B'$， $\Box' a \leq \Box a$，因此 h 是稳定的。

接着，我们检验 h 对 $D^{\rightarrow}$ 和 $D^{\Box}$ 满足 CDC。对于任意 $a \in D^{\Box}$，存在某个 $\Box\psi \in \Theta$ 使得 $a = V_B(\psi)$。并且 $V_B(\Box\psi) = \Box V_B(\psi) = \Box a \in B'$。因此，根据 $\Box'$ 的定义， $\Box' a = \Box a$。对于任意 $(a, b) \in D^{\rightarrow}$，存在某个 $\varphi \to \psi \in \Theta$ 使得 $a = V_B(\varphi)$ 和 $b = V_B(\psi)$。因此 $V_B(\varphi \to \psi) = V_B(\varphi) \to V_B(\psi) = a \to b \in B'$。接着，根据 $\to'$ 的定义，$a \to b' = a \to b$。因此，稳定有界格嵌入 h 对 $D^{\rightarrow}$ 和 $D^{\Box}$ 满足 CDC。

令 V' 为限制在 B' 上的赋值 V_B，然后我们通过对 φ 进行归纳，证明对于任意 $\varphi \in \Theta$, $V'(\varphi) = V_B(\varphi)$。我们只考虑以下两种情况，因为其他情况都是平凡的（B' 是 B 的有界子格）：

如果 $\varphi = \psi \to \chi$，由于 $\psi \to \chi \in \Theta$，我们有 $(V_B(\psi)\ V_B(\chi)) \in D^{\rightarrow}$，并且 $V_B(\psi) \to V_B(\chi) \in B'$。

$$\begin{array}{lcll} V'(\psi \to \chi) & = & V'(\psi) \to' V'(\chi) & \\ & = & V_B(\psi) \to' V_B(\chi) & \text{(IH)} \\ & = & V_B(\psi) \to V_B(\chi) & \text{(By the definition of } \to') \\ & = & V_B(\psi \to \chi). & \end{array}$$

如果 $\varphi = \Box\psi$，如 $\Box\psi \in \Theta$，我们有 $V_B(\Box\psi) \in B'$，且 $V_B(\psi)\ \Box V_B(\psi) \in B'$。

$$\begin{array}{lcll} V'(\Box\psi) & = & \Box' V'(\psi) & \\ & = & \Box' V_B(\psi) & \text{(IH)} \\ & = & \Box V_B(\psi) & \text{(By the definition of } \Box') \\ & = & V_B(\Box\psi). & \end{array}$$

由于 V_B 是一个在 $\mathfrak{B}$上反驳 Γ/Δ 的赋值，根据上述结果， V' 是在$(B', \to', \Box')$上反驳 Γ/Δ 的赋值。因此，$(B', \to', \Box') \not\Vdash \Gamma/\Delta$。对于任意 $\varphi \in \Theta$， $V'(\varphi) = V_B(\varphi)$，我们有 $D^{\Box} = \{V_B(\psi) \mid \Box\psi \in \Theta\} = \{V'(\psi) \mid \Box\psi \in \Theta\}$，且 $D^{\to} = \{(V_B(\varphi)\ V_B(\psi)) \mid \varphi \to \psi \in \Theta\} = \{(V'(\varphi)\ V'(\psi)) \mid \varphi \to\psi \in \Theta\}$。由于 B' 由 $V_B(\Theta)$ 生成，其基数不大于 Θ的基数，故$(B', \to', \Box', D^{\to}, D^{\Box})$必为$(\mathfrak{A}_1, D_1^{\to}, D_1^{\Box})$，……，$(\mathfrak{A}_n, D_n^{\to}, D_n^{\Box})$之一。由于$h$是从 B' 到 B 的稳定有界格嵌入，且满足 $D^{\to}$和 $D^{\Box}$的 CDC 条件，我们便得到了所需结论。

■

在上述证明中，我们所做的本质上是用代数术语表达的一种过滤[14]：对于从左到右方向，我们从假设 $\mathfrak{B} \not\Vdash \Gamma/\Delta$ 出发，然后使用 $\mathfrak{B}$ 构造一个有限模态海廷代数（B'， $\to'$， $\Box'$）——一个过滤代数——它仍然反驳 Γ/Δ。事实证明，过滤代数（B'， $\to'$， $\Box'$）与原代数 $\mathfrak{B}$ （即对某些参数满足 CDC 的稳定有界格嵌入）之间的关系可以用句法方式编码。

定义 3.4. 设 $\mathfrak{A} = (A,\ \Box)$ 是一个有限模态海廷代数， $D^{\to} \subseteq A \times A$且 $D^{\Box} \subseteq A$。对于每个 $a \in A$，我们引入一个新的命题字母 p_a，并基于（$\mathfrak{A}$， $D^{\to}$， $D^{\Box}$）定义稳定典范规则 *stable canonical rule* $\rho(\mathfrak{A},\ D^{\to},\ D^{\Box})$，如下所示：

$$\begin{aligned}\Gamma \quad = \quad & \{p_{a\vee b} \leftrightarrow p_a \vee p_b \mid a, b \in A\} \cup \{p_0 \leftrightarrow \bot, p_1 \leftrightarrow \top\} \\ & \cup \{p_{a\wedge b} \leftrightarrow p_a \wedge p_b \mid a, b \in A\} \cup \{p_{\Box a} \to \Box p_a \mid a \in A\} \\ & \cup \{p_{a\to b} \leftrightarrow (p_a \to p_b) \mid (a, b) \in D^{\to}\} \cup \{\Box p_a \to p_{\Box a} \mid a \in D^{\Box}\}\end{aligned}$$

$$\Delta = \{p_a \leftrightarrow p_b \mid a \neq b \in A\}$$

$\rho(\mathfrak{A}, D^{\to}, D^{\Box}) = \Gamma/\Delta$.

上述定义可视为 [11, 定义 3.1]和 [2,定义 5.2]的结合。很容易看出，下列命题成立：

命题 3.5. 设 $\mathfrak{A} = (A,\ \Box)$ 是一个有限模态海廷代数， $D^{\to} \subseteq A \times A$ 和 $D^{\Box} \subseteq A$，则 $\mathfrak{A} \not\Vdash \rho(\mathfrak{A},\ D^{\to},\ D^{\Box})$。

证明。在 A 上定义一个赋值 V：对任意 $a \in A$，令 $V(p_a) = a$。于是很容易验证， V在 $\mathfrak{A}$ 上反驳 $\rho(\mathfrak{A},\ D^{\to},\ D^{\Box})$。■

下一个结果表明，稳定典范规则确实编码了一个满足 $D^{\to}$ 和 $D^{\Box}$ 的稳定有界格嵌入。

命题 3.6. 设 $\mathfrak{A} = (A, \Box)$ 是一个有限模态海廷代数， $D^{\to} \subseteq A \times A$, $D^{\Box} \subseteq A$, 并且 $\mathfrak{B} = (B, \Box)$ 是一个模态海廷代数。则 $\mathfrak{B} \not\Vdash \rho(\mathfrak{A}, D^{\to}, D^{\Box})$ 当且仅当存在一个稳定有界格嵌入 h：$A \to B$ 对 $D^{\to}$ 和 $D^{\Box}$满足 CDC。

[14]参见 [13]了解更多详情。

证明。对于从右到左方向，假设存在一个稳定有界格嵌入 h: $A \to B$ 对 $D^{\to}$ 和 $D^{\Box}$满足 CDC。通过$V_B(p_a) = h(V(p_a)) = h(a)$ 对任意 $a \in A$ 在 B 上定义 V_B，其中 V 正是命题 3.5 证明中的赋值。由于 h 是有界格嵌入，对任意 $a, b \in A$，可得 $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$，$h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$，$h(0) = 0$ 且 $h(1) = 1$。于是容易验证 $V_B(p_{a \vee b} \leftrightarrow p_a \vee p_b) = 1$，$V_B(p_{a \wedge b} \leftrightarrow p_a \wedge p_b) = 1$，$V_B(p_0) = 0$ 且 $V_B(p_1) = 1$。

由于 h 是稳定的，对于任意 $a \in A$，$h(\Box a) \leq \Box h(a)$。因此，对于任意 $a \in A$，$V_B(p_{\Box a}) = h(\Box a) \leq \Box h(a) = \Box V_B(p_a) = V_B(\Box p_a)$。所以，对于任意 $a \in A$，$V_B(p_{\Box a} \to \Box p_a) = V_B(p_{\Box a}) \to V_B(\Box p_a) = 1$。

由于 h 对 $D^{\to}$ 和 $D^{\Box}$ 满足 CDC，对于任意 $a \in D^{\Box}$，我们有 $h(\Box a) = \Box h(a)$；对于任意 $(a, b) \in D^{\to}$，我们有 $h(a \to b) = h(a) \to h(b)$。因此，$V_B(p_{\Box a}) = h(\Box a) = \Box h(a) = \Box V_B(p_a) = V_B(\Box p_a)$，可得对于任意 $a \in D^{\Box}$，$V_B(\Box p_a \to p_{\Box a}) = 1$。

对于任意 $(a, b) \in D^{\to}$，我们有

$$\begin{aligned} V_B(p_{a \to b} \leftrightarrow p_a \to p_b) &= V_B(p_{a \to b}) \leftrightarrow V_B(p_a \to p_b) \\ &= V_B(p_{a \to b}) \leftrightarrow (V_B(p_a) \to V_B(p_b)) \\ &= h(a \to b) \leftrightarrow (h(a) \to h(b)) \\ &= 1. \end{aligned}$$

由于 h 是一个嵌入，对于任意 $a \neq b \in A$, $h(a) \neq h(b)$。因此 $V_B(p_a) \neq V_B(p_b)$，且 $V_B(p_a \leftrightarrow p_b) \neq 1$。所以，对于任意 $\gamma \in \Gamma$，我们有 $V_B(\gamma) = 1$；而对于任意 $\delta \in \Delta$, $V_B(\delta) \neq 1$。因此，V_B 在 $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \nVdash \rho(\mathfrak{A}, D^{\to}, D^{\Box})$ 上反驳 Γ/Δ。

对于从左到右方向，假设 $\mathfrak{B} \nVdash \rho(\mathfrak{A}, D^{\to}, D^{\Box})$。那么存在一个赋值 V，定义在 B 上，使得对于任意 $\gamma \in \Gamma$，$V(\gamma) = 1$；并且对于任意$\delta \in \Delta$，$V(\delta) \neq 1$。定义 $h: A \to B$，使得对于任意 $a \in A$，$h(a) = V(p_a)$。容易验证，h 是一个有界格同态。由于对于任意 $a \in A$，$V(p_{\Box a} \to \Box p_a) = 1$，$V(p_{\Box a}) \leq \Box V(p_a)$，因此 $h(\Box a) \leq \Box h(a)$。h 是稳定的。

对于任意 $(a, b) \in D^{\to}$，由于 $V(p_{a \to b} \leftrightarrow p_a \to p_b) = 1$，我们有 $V(p_{a \to b}) = V(p_a) \to V(p_b)$，从而 $h(a \to b) = V(p_{a \to b}) = V(p_a) \to V(p_b) = h(a) \to h(b)$。对于任意 $a \in D^{\Box}$，由于 $V(\Box p_a \to p_{\Box a}) = 1$，$V(\Box p_a) \leq V(p_{\Box a})$，$h(\Box a) = V(p_{\Box a}) \geq V(\Box p_a) = \Box V(p_a) = \Box h(a)$。因此，对任意$a \in D^{\Box}$，$h(\Box a) = \Box h(a)$。

对于任意 $a \neq b \in A$，由于 $V(p_a \leftrightarrow p_b) \neq 1$，可得 $V(p_a) \neq V(p_b)$，且 $h(a) = V(p_a) \neq V(p_b) = h(b)$。因此，$h$ 是对 $D^{\to}$ 和 $D^{\Box}$满足 CDC 的稳定有界格嵌入。

■

现在，结合命题 3.3 和命题 3.6，我们立即得到以下结果：

定理 3.7. 对于直觉主义模态多结论规则 Γ/Δ，存在$(\mathfrak{A}_1, D_1^{\to}, D_1^{\Box})$ ...,$(\mathfrak{A}_n, D_n^{\to}, D_n^{\Box})$，使得每个 $\mathfrak{A}_i$都是有限模态海廷代数，$D_i^{\to} \subseteq A_i \times A_i$ 且 $D_i^{\Box} \subseteq A_i$，并且对于每个模态海廷代数$\mathfrak{B} = (B, \Box)$，我们有：

$$\mathfrak{B} \vDash \Gamma/\Delta \text{ } \textit{iff} \text{ } \mathfrak{B} \vDash \rho(\mathfrak{A}_1, D_1^{\to}, D_1^{\Box}), ..., \rho(\mathfrak{A}_n, D_n^{\to}, D_n^{\Box}).$$

作为推论，我们得到本节的主要定理。

定理 3.8. 每一个直觉主义模态多结论后承关系都可由稳定典范规则公理化。

证明。任取 $M \in \mathbf{NExt}(\mathbf{IntK}^R_\Box)$。则 $M = \mathbf{IntK}^R_\Box \oplus \{\Gamma_i/\Delta_i \mid i \in I\}$，其中 Γ_i/Δ_i 是一条直觉主义模态多结论规则。对于任意 $i \in I$，由定理 3.7，存在稳定典范规则 $\rho(\mathfrak{A}_{i1}, D^{\rightarrow}_{i1}, D^{\Box}_{i1})$ ..., $\rho(\mathfrak{A}_{in_i}, D^{\rightarrow}_{in_i}, D^{\Box}_{in_i})$，使得对于任意模态海廷代数 $\mathfrak{B} = (B, \Box)$，我们有 $\mathfrak{B} \vDash \Gamma_i/\Delta_i$ 当且仅当 $\mathfrak{B} \vDash \rho(\mathfrak{A}_{i1}, D^{\rightarrow}_{i1}, D^{\Box}_{i1})$ ..., $\rho(\mathfrak{A}_{in_i}, D^{\rightarrow}_{in_i}, D^{\Box}_{in_i})$。因此，对于任意模态海廷代数 $\mathfrak{B} = (B, \Box)$，我们有 $\mathfrak{B}$ 验证 M 当且仅当 $\mathfrak{B}$ 验证 $\{\rho(\mathfrak{A}_{i1}, D^{\rightarrow}_{i1}, D^{\Box}_{i1})$ ..., $\rho(\mathfrak{A}_{in_i}, D^{\rightarrow}_{in_i}, D^{\Box}_{in_i}) \mid i \in I\}$。由推论 2.35，这意味着 $M = \mathbf{IntK}^R_\Box \oplus \{\rho(\mathfrak{A}_{i1}, D^{\rightarrow}_{i1}, D^{\Box}_{i1})$ ..., $\rho(\mathfrak{A}_{in_i}, D^{\rightarrow}_{in_i}, D^{\Box}_{in_i}) \mid i \in I\}$。因此，$M$ 可由稳定典范规则公理化。这证明每个直觉主义模态多结论后承都可以由稳定典范规则公理化。

■

由于每一个模态多结论后承关系[15] 同时也是一个直觉主义模态多结论后承关系，定理 3.8 是对 [2, 定理 5.6]的推广。在考虑直觉主义模态多结论规则时，上述定理使我们在许多情形下可以假定它们是稳定典范规则。由于稳定典范规则具有某种特定的句法形式，与任意的直觉主义模态多结论规则相比，处理它们更为可控。当我们看到稳定典范规则的对偶描述时，这一点可能会更加明显，该描述为我们提供了关于这些规则如何运作的几何直觉。

现在，我们回顾模态海廷代数范畴与模态 Esakia 空间范畴之间的对偶性，该对偶性在 [32] 中建立，并使我们的对偶描述成为可能。

定义 3.9. 设 $(X, \leq, R)$ 为一个三元组，使得 $(X, \leq)$ 是一个 Esakia 空间且 $R \subseteq X \times X$，则当以下两个条件成立时，$(X, \leq, R)$ 是一个模态 ***Esakia* 空间**[16]：

- 如果 U 是 X的既开又闭的上集，那么 $\Box_R U$ 也是既开又闭的上集，其中 $\Box_R U = \{x \in X \mid R[x] \subseteq U\}$。
- 对于每个 $x \in X$， $R[x]$ 都是闭上集。

模态 Esakia 空间之间的态射定义如下：

定义 3.10. 设 $(X_1, \leq, R_1)$ 和 $(X_2, \leq, R_2)$ 是模态 Esakia 空间。若映射 f：$X_1 \to X_2$ 满足以下条件，则称其为***p*-态射**： 对于任意 $x, y \in X_1$ 和 $z \in X_2$:

1. f 是连续的。
2. 若 $x \leq y$，则 $f(x) \leq f(y)$。

[15] $\Box$是原始算子， $\Diamond$ 由 $\Box$定义。[16]在 [32]中，它也称为 $I_\Box$*-space* 。

3. 若 $f(x) \leq z$，则存在某个 $x' \geq x$，使得 $f(x') = z$。
4. 若 xR_1y，则 $f(x)R_2f(y)$。5. 若 $f(x)R_2z$，则存在某个 $x' \in X_1$，使得 $f(x') \leq z$，且 xR_1x'。

令 **MHA**为模态海廷代数及模态 Heyting 代数同态构成的范畴，**MES** 为模态 Esakia 空间及 p-态射构成的范畴。建立这两者对偶性的函子 $(-)_* : \mathbf{MHA} \to \mathbf{MES}$ 和 $(-)^* : \mathbf{MES} \to \mathbf{MHA}$ 构造如下。对于模态海廷代数$\mathfrak{A} = (A, \Box)$，令 $\mathfrak{A}_* = (A_*, R)$，其中 A_* 是 A 的 Esakia 空间，且 xRy 当且仅当 $\forall \Box a \in A(\Box a \in x \implies a \in y)$。对于模态 Esakia 空间 $\mathcal{X} = (X, \leq, R)$，令 $\mathcal{X}^* = (X^*, \Box_R)$，其中 X^* 是 X 的开闭上集构成的海廷代数，且 $\Box_R U = \{x \in X \mid R[x] \subseteq U\}$。映射的对偶恰与 Esakia 对偶中的相同。我们在下面的定理中详细说明对偶性的若干有用性质。

定理 3.11。 *[32, 定理 6.12]* **MHA** 与 **MES**对偶等价，其见证为 $(-)^*$ 和 $(-)_*$。特别地，对于任意模态海廷代数 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A} \cong (\mathfrak{A}_*)^*$ 由 β 见证，其中 $\beta(a) = \{x \in A_* \mid a \in x\}$；对于任意模态 *Esakia* 空间 $\mathcal{X}$，$\mathcal{X} \cong (\mathcal{X}^*)_*$ 由 ϵ 见证，其中 $\epsilon(x) = \{U \in X^* \mid x \in U\}$。

根据上述对偶性，我们现在可以给出稳定有界格同态的对偶描述。

定义 3.12. 设 $(X, \leq, R)$ 和 $(Y, \leq, R)$ 是模态 Esakia 空间，且 $f{:}X \to Y$ 是 Priestley 态射。若对任意 $x, y \in X$，xRy 蕴含 $f(x)Rf(y)$，则称映射 f 为稳定 的。

命题 3.13. 设 $\mathfrak{A} = (A, \Box)$ 和 $\mathfrak{B} = (B, \Box)$ 是模态海廷代数。设 $(X_A, \leq, R)$ 和 $(X_B, \leq, R)$ 分别是 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 的对偶。对于有界格同态 $h{:}\ A \to B$，h 稳定当且仅当 $h_* : X_B \to X_A$ 稳定。

证明. 根据 Priestley 对偶性，h_* 是 Priestley 态射。因此，只需证明：对于任意 $a \in A$，$h(\Box a) \leq \Box h(a)$ 当且仅当 xRy 蕴含对于任意$x, y \in X_B$，$h_*(x)Rh_*(y)$。

假设对于任意 $a \in A$，$h(\Box a) \leq \Box h(a)$。假设 xRy 且 $\Box a \in h_*(x)$，那么$h(\Box a) \in x$。由于 $h(\Box a) \leq \Box h(a)$，且 x 是一个素滤子，因此 $\Box h(a) \in x$。由于 xRy，可得 $h(a) \in y$ 且 $a \in h_*(y)$。于是 $h_*(x)Rh_*(y)$。

反过来，假设对于任意 $x, y \in X_B$，xRy 蕴含 $h_*(x)Rh_*(y)$。对于任意 $x \in \beta(h(\Box a))$，有 $h(\Box a) \in x$ 且 $\Box a \in h_*(x)$。现在对于任意xRy，根据假设，$h_*(x)Rh_*(y)$。由于 $\Box a \in h_*(x)$，可得 $a \in h_*(y)$ 且 $h(a) \in y$。于是 $R[x] \subseteq \beta(h(a))$，并且 $x \in \Box_R(\beta(h(a))) = \beta(\Box h(a))$。由于$x \in \beta(h(\Box a))$是任意的，这就证明了 $\beta(h(\Box a)) \subseteq \beta(\Box h(a))$。由于 β 是一个同构，$h(\Box a) \leq \Box h(a)$。■

同样，我们可以利用对偶性给出 $D^{\to}$和 $D^{\Box}$的 CDC 对偶描述。

定义 3.14。 设 $(X, \leq, R)$ 和 $(Y, \leq, R)$ 是模态 Esakia 空间， $f{:}X \to Y$ 是 Priestley 态射，且 D 是 Y的开闭子集。我们称 f满足关于 D 的蕴涵闭域条件（$CDC_{\to}$），若以下条件成立:

$$\uparrow f(x) \cap D \neq \emptyset \text{ implies } f[\uparrow x] \cap D \neq \emptyset.$$

此外，设 $\mathcal{D}$ 是 Y的闭开子集集合， f 满足蕴涵闭域条件（$CDC_{\to}$）；对于 $\mathcal{D}$ ，若 f 对每个$D \in \mathcal{D}$都满足（$\mathrm{CDC}_{\to}$），则

于是我们得到如下命题，它类似于 [11, 引理 4.3], ，将 $D^{\to}$ 的代数闭域条件与几何闭域条件$_{\to}$联系起来。

命题 3.15。 [11,引理 4.3]

设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为模态海廷代数， h: $A \to B$ 为有界格同态，并且 a， $b \in A$，则以下两个条件等价:

1. $h(a \to b) = h(a) \to h(b)$.
2. h_* 对 β满足 $\mathrm{CDC}_{\to}$ （a） （b）。

关于 $D^{\Box}$的 CDC 对偶描述，我们有如下结论。

定义 3.16。 设 $(X, \leq, R)$ 和 $(Y, \leq, R)$ 是模态 Esakia 空间， $f{:}X \to Y$ 是 Priestley 态射， D 是 Y 的一个闭开子集。若满足以下条件，我们称 f 对 D 满足模态闭域条件（$CDC_{\Box}$）：

$$f[R[x]] \subseteq D \text{ implies } R[f(x)] \subseteq D.^{17}$$

此外，设 $\mathcal{D}$ 是 Y 的一族闭开子集。若 f 对每个 $D \in \mathcal{D}$ 都满足（$\mathrm{CDC}_{\Box}$），则称 f 对 $\mathcal{D}$ 满足模态闭域条件（$CDC_{\Box}$）。

命题 3.17。 设 $\mathfrak{A} = (A, \Box)$ 和 $\mathfrak{B} = (B, \Box)$ 是模态海廷代数，$h : A \to B$ 是稳定有界格同态，并且 $a \in A$，则以下条件等价:

1. $h(\Box a) = \Box h(a)$.
2. $h_* : X_B \to X_A$ satisfies $\mathrm{CDC}_{\Box}$ for $\beta(a)$.

证明。 由于 h 是稳定的且 β 是同构， $h(\Box a) = \Box h(a)$ 当且仅当 $\Box h(a) \leq h(\Box a)$，当且仅当 $\beta(\Box h(a)) \subseteq \beta(h(\Box a))$，当且仅当 $\Box_R \beta(h(a)) \subseteq \beta(h(\Box a))$。

假设 $h(\Box a) = \Box h(a)$，因此 $\Box_R \beta(h(a)) \subseteq \beta(h(\Box a))$。假设 $h_*[R[x]] \subseteq \beta(a)$，则 $R[x] \subseteq h_*^{-1}(\beta(a))$。对于任意 $y \in R[x]$，我们有 $h_*(y) \in \beta(a)$ 且$a \in h_*(y)$， $h(a) \in y$。因此， $R[x] \subseteq \beta(h(a))$，且 $x \in \Box_R(\beta(h(a))) \subseteq \beta(h(\Box a))$。也就是说， $h(\Box a) \in x$ 且 $\Box a \in h_*(x)$。因此，对于任意 $y \in R[h_*(x)]$, ，我们有$a \in y$。所以， $R[h_*(x)] \subseteq \beta(a)$。这证明 h_* 满足 $\mathrm{CDC}_{\Box}$，其中 $\beta(a)$。

[17]根据逆否命题，这等价于条件: $R[f\ x \qquad f[R[x]] \cap (\ )$ $\bar{D} \neq \emptyset$ $]\cap \bar{D} \neq \emptyset$ 蕴含 。有时使用这个条件可能更方便。

反过来，假设 h_* 满足 CDC$_\Box$，其中 $\beta(a)$。假设 $x \in \Box_R(\beta(h(a)))$，则 $R[x] \subseteq \beta(h(a))$。对于任意 xRy，我们有 $h(a) \in y$，因此 $a \in h_*(y)$。由于 y 是任意的，这意味着 $h_*[R[x]] \subseteq \beta(a)$。由于 h_*满足 CDC$_\Box$，其中 $\beta(a)$，可得 $R[h_*(x)] \subseteq \beta(a)$。接着根据 [32, 推论 5.6]，其指出对于任意 $w \in X_A$，$\Box a \notin w$ 蕴含存在某个wRv使得 $a \notin v$，我们有 $\Box a \in h_*(x)$ 且 $h(\Box a) \in x$，也就是说 $x \in \beta(h(\Box a))$。因此，$\Box_R(\beta(h(a))) \subseteq \beta(h(\Box a))$。这证明 $h(\Box a) = \Box h(a)$。

■

结合上述结果，我们得到关于 $D^{\rightarrow}$ 和 $D^{\Box}$的代数闭域条件的如下对偶描述：

命题 3.18. 设 $\mathfrak{A} = (A, \Box)$ 和 $\mathfrak{B} = (B, \Box)$ 是模态海廷代数，$h : A \to B$ 是稳定有界格同态，$D^{\Box} \subseteq A$ 和 $D^{\rightarrow} \subseteq A \times A$，则以下两者等价：

- h 满足关于 $D^{\Box}$ 和 $D^{\rightarrow}$的 CDC。
- h_* 满足 CDC$_\Box$，对任意满足 $a \in D^{\Box}$ 的 $\beta(a)$ 都成立；并且对任意 $\beta(a) \setminus \beta(b)$（其中 $(a, b) \in D^{\rightarrow}$），均满足 CDC$_\rightarrow$。

根据命题 3.13 和 3.18，我们现在知道稳定典范规则在几何上编码了什么；这是命题 3.6 的一个对偶版本。

命题 3.19. 设 $\mathfrak{A} = (A, \Box)$ 是有限模态海廷代数，$D^{\rightarrow} \subseteq A \times A$, $D^{\Box} \subseteq A$，且设 $\mathfrak{B} = (B, \Box)$ 是模态海廷代数。那么 $\mathfrak{B} \nvDash \rho(\mathfrak{A}, D^{\rightarrow}, D^{\Box})$ 当且仅当存在一个满射稳定 Priestley 态射 f：$X_B \to X_A$，使得对任意满足 $a \in D^{\Box}$ 的 $\beta(a)$，均有 CDC$_\Box$；并且对任意 $\beta(a) \setminus \beta(b)$（其中 $(a, b) \in D^{\rightarrow}$），均有 CDC$_\rightarrow$。

证明。根据命题 3.6，$\mathfrak{B} \nvDash \rho(\mathfrak{A}, D^{\rightarrow}, D^{\Box})$ 当且仅当存在一个稳定有界格嵌入 $h : A \to B$，它满足 CDC，适用于 $D^{\rightarrow}$ 和 $D^{\Box}$。于是，由命题 3.13 和命题 3.18 可立即得出结论。

■

根据上述命题，我们有充分理由将 $\rho(\mathfrak{A}, D^{\rightarrow}, D^{\Box})$ 写作 $\rho(\mathfrak{A}_*, \mathfrak{D}_{\rightarrow}, \mathfrak{D}_M)$，其中 $\mathfrak{D}_{\rightarrow} = \{\beta(a) \setminus \beta(b) \mid (a, b) \in D^{\rightarrow}\}$，$\mathfrak{D}_M = \{\beta(a) \mid a \in D^{\Box}\}$[18]。在下一节中，当我们需要对这些参数进行操作时，这种记法会非常有用。

4 稳定典范规则在直觉主义模态逻辑中的应用

我们已经介绍了直觉主义模态逻辑的稳定典范规则及其对偶刻画。本节将专门讨论稳定典范规则在

[18]“M”表示“模态”。

确立直觉主义模态逻辑的一些内在性质方面的应用。

首先，我们将利用双模态逻辑的稳定典范规则，为直觉主义模态逻辑的 Blok-Esakia 定理给出一个新颖且自成一体的证明。该定理最初由 Wolter 和 Zakharyaschev 于 [3], 证明；我们还将其自然地推广到直觉主义模态多结论后承关系。随后，我们将运用直觉主义模态逻辑的稳定典范规则，在这一框架下证明 Dummett-Lemmon猜想。

4.1 直觉主义模态逻辑的 Blok-Esakia 定理

众所周知，每个超直觉主义逻辑都可以通过 G¨odel 翻译[19]嵌入$\mathbf{S4}$ 的某个扩张中。这种嵌入带来了许多重要成果，其中之一便是 Blok-Esakia 定理。该定理指出，超直觉主义逻辑格与$\mathbf{Grz}$的正规扩张所构成的格同构；实现这一同构的映射将每个超直觉主义逻辑 L 映射为$\mathbf{Grz}$ 的一个正规扩张，该扩张包含其中公式的所有 G¨odel 翻译 L。顾名思义，Blok-Esakia 定理由 Blok 运用代数方法 [33] 独立证明，也由 Esakia 运用对偶理论 [34]独立证明。它使我们能够借助正规模态逻辑的方法和结果来研究超直觉主义逻辑，反之亦然[20]。在 [3] 和 [23], 中，Wolter 和 Zakharyaschev 将 G¨odel 翻译推广到了直觉主义模态逻辑，从而能够将每个直觉主义模态逻辑嵌入双模态逻辑$\mathbf{S4} \otimes \mathbf{K}$的某个扩张中。此外，他们还证明了针对这一翻译的 Blok-Esakia 定理；证明中假设读者熟悉所谓的选择过程 和共尾子约化 ，这两者在 [5] 中提出，且处理起来相当复杂。

本节将使用稳定典范规则，证明直觉主义模态多结论后承关系的 Blok-Esakia 定理。该定理推广了直觉主义模态逻辑中相应的定理。证明策略借鉴了 [16, 17]中的方法：Cleani 使用经典（一元）正规模态逻辑的稳定典范规则，证明了超直觉主义逻辑的 Blok-Esakia 定理。与 [3], 中的证明相比，我们认为，这种替代证明提供了新的视角，而且可以说更为自成一体。

4.1.1 双模态逻辑的稳定典范规则

我们首先介绍双模态逻辑的稳定典范规则。它们是 [2] 中单模态情形（只有一个模态算子）的稳定典范规则向双模态情形的简单而自然的推广。

定义 4.1. 设 $\mathfrak{A} = (A,\ \Box_I,\ \Box_M)$ 和 $\mathfrak{B} = (B,\ \Box_I,\ \Box_M)$ 是双模态代数，且 h : $A \to B$ 是一个布尔同态。若对任意 $a \in A$， h 都满足以下条件，则称其为稳定的：

[19]见下文定义 4.16。[20]更多详情见 [35]。

我们有 $h(\Box_I a) \leq \Box_I h(a)$ 和 $h(\Box_M a) \leq \Box_M h(a)$。

定义 4.2. 设 $\mathfrak{A} = (A, \Box_I, \Box_M)$、$\mathfrak{B} = (B, \Box_I, \Box_M)$ 是双模态代数，$D^I \subseteq A$ 且 $D^M \subseteq A$。称布尔嵌入 $h : A \to B$ 满足

- 关于 D^I 的闭域条件（简称 CDC），若对于任意 $a \in D^I$，都有 $h(\Box_I a) = \Box_I h(a)$。
- 关于 D^M 的闭域条件（简称 CDC），若对于任意 $b \in D^M$，都有 $h(\Box_M b) = \Box_M h(b)$。

我们可以再次将满足 CDC 的稳定布尔嵌入编码为某种特定句法形式，其中某些参数与定义 3.4 类似。以下定义正是如此。

定义 4.3. 设 $\mathfrak{A} = (A, \Box_I, \Box_M)$ 是有限双模态代数，$D^I \subseteq A$和$D^M \subseteq A$。对于每个 $a \in A$，我们引入一个新的命题字母 p_a，并基于 $(\mathfrak{A}, D^I, D^M)$ 定义稳定典范规则 $\mu(\mathfrak{A}, D^I, D^M)$如下:

$$
\begin{aligned}
\Gamma \quad = \quad & \{p_{a\vee b} \leftrightarrow p_a \vee p_b \mid a, b \in A\} \cup \{p_0 \leftrightarrow \bot, p_1 \leftrightarrow \top\} \\
& \cup \{p_{a\wedge b} \leftrightarrow p_a \wedge p_b \mid a, b \in A\} \cup \{p_{\neg a} \leftrightarrow \neg p_a \mid a \in A\} \\
& \cup \{p_{\Box_I a} \to \Box_I p_a, p_{\Box_M a} \to \Box_M p_a \mid a \in A\} \cup \{\Box_I p_a \to p_{\Box_I a} \mid a \in D^I\} \\
& \cup \{\Box_M p_a \to p_{\Box_M a} \mid a \in D^M\}
\end{aligned}
$$

$$\Delta = \{p_a \leftrightarrow p_b \mid a \neq b \in A\}$$

$$\mu(\mathfrak{A},\ D^I,\ D^M) = \Gamma/\Delta.$$

运用与命题 3.6 的证明类似的证明，我们得到以下命题。单模态情形的证明见 [2, 定理 5.4]。

命题 4.4。设 $\mathfrak{A} = (A,\ \Box_I,\ \Box_M)$ 是一个有限双模态代数，$D^I \subseteq A$、$D^M \subseteq A$，且 $\mathfrak{B} = (B,\ \Box_I,\ \Box_M)$ 是一个双模态代数。那么 $\mathfrak{B} \nvdash \mu(\mathfrak{A},\ D^I,\ D^M)$ 当且仅当存在一个稳定布尔嵌入 $h :\ A \to B$，它满足关于 D^I 和 D^M 的 CDC。

以下结果是证明 Blok-Esakia 定理所必需的。为方便起见，令 $\mathbf{Mix}$[21] 表示公式 $\Box_I\Box_M\Box_I p \leftrightarrow \Box_M p$。

命题 4.5。对于任意双模态多结论规则 Γ/Δ，存在若干三元组 $(\mathfrak{A}_1,\ D_1^I,\ D_1^M)$ ..... $(\mathfrak{A}_n,\ D_n^I,\ D_n^M)$，使得每个 $\mathfrak{A}_i$ 都是一个有限 $(S4\otimes K)\oplus Mix$ 代数，$D_i^I \subseteq A_i$ 且 $D_i^M \subseteq A_i$；并且对于每个 $(S4 \otimes K) \oplus Mix$ 代数 $\mathfrak{B} = (B,\ \Box_I,\ \Box_M)$，都有 $\mathfrak{B} \nvdash \Gamma/\Delta$ 当且仅当存在一个稳定嵌入 $h : A_i \to B$，它满足关于 D_i^I 和 D_i^M 的 CDC。

证明。令 Γ/Δ 为任意一个双模态多结论规则。若 $\Gamma/\Delta \in \mathbf{(S4 \otimes K)} \oplus \mathbf{Mix}^R$，则取 $n = 0$。假设 $\Gamma/\Delta \notin \mathbf{(S4 \otimes K)} \oplus \mathbf{Mix}^R$，令 Θ 为

[21]这是 Wolter 和 Zakharyaschev 在 [3] 中引入的。之所以称为“**Mix**”，是因为从语义上看，这个公式表示 $R_I \circ R_M \circ R_I = R_M$，也就是说，$R_M$ 和 R_I 在某种意义上“混合”在一起。考虑模态 Esakia 空间时，这是人们对 R_M 和 R_I 之间的交互所能期待的最小程度。参见下文的 Prop 4.11。

$\Gamma \cup \Delta$ 中各公式的所有子公式构成的集合；显然该集合是有限的，定义 $\Theta' = \Theta \cup \{\Box_I\varphi \mid \Box_M\varphi \in \Theta\}$。显然 Θ'是有限的，且对子公式封闭；对于任意公式 $\Box_M\varphi$，有 $\Box_M\varphi \in \Theta'$蕴含 $\Box_I\varphi \in \Theta'$。假设$|\Theta'| = m$，满足以下两个条件的有序组 $(\mathfrak{A},\ D^I,\ D^M)$ 在同构意义下只有有限多个:

i) $\mathfrak{A} = (A,\ \Box_I,\ \Box_M)$ 是一个有限的 $(S4 \otimes K) \oplus Mix$-代数，其中 A 是一个由 m 生成的布尔代数，且 $\mathfrak{A} \nvdash \Gamma/\Delta$。 ii) $D^I = \{V(\varphi) \mid \Box_I\varphi \in \Theta'\}$ 且 $D^M = \{V(\varphi) \mid \Box_M\varphi \in \Theta'\}$，其中 V 是 $\mathfrak{A}$ 上的一个赋值，可见证 $\mathfrak{A} \nvdash \Gamma/\Delta$。

设 $(\mathfrak{A}_1,\ D_1^I,\ D_1^M)$ ....., $(\mathfrak{A}_n,\ D_n^I,\ D_n^M)$ 是这类有序对的一个枚举。对于任意 $(S4 \otimes K) \oplus Mix$-代数 $\mathfrak{B}$，我们证明 $\mathfrak{B} \nvdash \Gamma/\Delta$ 当且仅当存在一个稳定嵌入 $h : A_i \to B$，它对 D_i^I 和 D_i^M 满足 CDC。

对于从右到左方向，假设存在一个稳定嵌入 h: $A_i \to B$，它对 D_i^I 和 D_i^M 满足 CDC。定义 $\mathfrak{B}$ 上的赋值 V_B 为：对于任意命题字母 p，$V_B(p) = h(V_i(p))$，其中 V_i 是 $\mathfrak{A}_i$ 上的赋值，可见证 $\mathfrak{A}_i \nvdash \Gamma/\Delta$。随后，我们可以按照命题 3.3 的证明中的相同方式，通过归纳证明，对于任意 $\psi \in \Theta'$，$V_B(\psi) = h(V_i(\psi))$。

对于从左到右方向，假设 $\mathfrak{B} \nvdash \Gamma/\Delta$。存在 B 上的一个赋值 V_B，使得对任意 $\gamma \in \Gamma$ 有 $V_B(\gamma) = 1_B$，且对任意 $\delta \in \Delta$有 $V_B(\delta) \neq 1_B$。设 B'为由 $V_B(\Theta')$生成的 B 的布尔子代数。显然 $|V_B(\Theta')| \leq |\Theta'| = m$。设 $D^I = \{V_B(\varphi) \mid \Box_I\varphi \in \Theta'\}$ 且 $D^M = \{V_B(\varphi) \mid \Box_M\varphi \in \Theta'\}$，我们在 B'上如下定义$\Box'_I$和 $\Box'_M$：$\Box'_I a = \bigvee\{\Box_I b \mid \Box_I b \leq \Box_I a$和 b, $\Box_I b \in B'\}$和$\Box'_M a = \bigvee\{\Box_M b \mid b \leq a$以及 b，$\Box_M b$，$\Box_I b \in B'\}$，对任意 $a \in B'$。我们首先证明$(B', \Box'_I, \Box'_M)$是一个$(S4 \otimes K) \oplus Mix$-代数。

由于 $\mathfrak{B}$是一个（$S4 \otimes K$）$\oplus Mix$-代数，且 $\Box'_I$的定义方式与命题 3.3 的证明中 $\Box'$的定义方式相同，因此验证（B'，$\Box'_I$，$\Box'_M$）是一个 $S4 \otimes K$-代数只是例行工作。要证明（B'，$\Box'_I$，$\Box'_M$）是一个（$S4 \otimes K$）$\oplus Mix$-代数，只需证明对任意 $a \in B'$、$\Box'_I\Box'_M a = \Box'_M a$和$\Box'_M\Box'_I a = \Box'_M a$[22]，

对于任意 $a \in B'$，由于 $(B', \Box'_I, \Box'_M)$ 是一个 $S4 \otimes K$-代数，$\Box'_I a \leq a$，因此$\Box'_M\Box'_I a \leq \Box'_M a$。设 $b \leq a$ 使得 $b, \Box_I b, \Box_M b \in B'$，则 $\Box_I b \leq \Box_I a$。因此 $\Box_I b \leq \bigvee\{\Box_I x \mid \Box_I x \leq \Box_I a$，其中 $x, \Box_I x \in B'\} = \Box'_I a$。由于 $\mathfrak{B}$ 是一个 $(S4 \otimes K) \oplus Mix$-代数，$\Box_I b = \Box_I\Box_I b \in B'$ 且 $\Box_M\Box_I b = \Box_M b \in B'$。因此，$\Box_M b \in \{\Box_M x \mid x \leq \Box'_I a$，其中 $x, \Box_I x, \Box_M x \in B'\}$。因此 $\Box_M b \leq \bigvee\{\Box_M x \mid x \leq \Box'_I a$，其中 $x, \Box_I x, \Box_M x \in B'\} = \Box'_M\Box'_I a$。根据$\Box'_M$的定义，我们有 $\Box'_M a \leq \Box'_M\Box'_I a$。因此，$\Box'_M a = \Box'_M\Box'_I a$。对于任意 $a \in B'$，由于 $(B', \Box'_I, \Box'_M)$ 是一个 $S4 \otimes K$-代数，$\Box'_I\Box'_M a \leq \Box'_M a$。设 $b \leq a$ 使得 $b, \Box_I b, \Box_M b \in B'$，则 $\Box_M b \leq \Box'_M a$。由于 $\mathfrak{B}$ 是一个 $(S4 \otimes K) \oplus Mix$-代数，$\Box_I\Box_M b \leq \Box_I\Box'_M a$ 且 $\Box_I\Box_M b = \Box_M b \in B'$。因此 $\Box_M b = \Box_I\Box_M b \leq \bigvee\{\Box_I x \Box_I x \leq \Box_I\Box'_M a$，其中 $x, \Box_I x \in B'\} = \Box'_I\Box'_M a$。根据 $\Box'_M$ 的定义，我们

[22]容易验证，对于任意 $S4 \otimes K$ $\Box_I\Box_M p \leftrightarrow$-代数，$\Box_M p$ $\Box_M\Box_I p \leftrightarrow \Box_M p$ [23]，它验证 **Mix** 当且仅当它验证 和。事实上，在 **Mix** 只是被定义为（ $\Box_I\Box_M p \leftrightarrow$ ）（）。$\Box_M p \wedge \Box_M\Box_I p \leftrightarrow \Box_M p$

有 $\Box'_M a \leq \Box'_I \Box'_M a$，因此 $\Box'_M a = \Box'_I \Box'_M a$。因此，$(B', \Box'_I, \Box'_M)$ 是一个 $(S4 \otimes K) \oplus Mix$-代数。

令 $h\colon (B', \Box'_I, \Box'_M) \to (B, \Box_I, \Box_M)$ 为包含映射，h 显然是一个嵌入，因为 B' 是 B 的布尔子代数。由定义，对任意 $a \in B'$，$\Box'_I a \leq \Box_I a$ 且 $\Box'_M a \leq \Box_M a$，因此 h 是稳定的。接下来检查 h 是否满足 D^I 和 D^M 的 CDC。对任意 $a \in D^I$，存在某个 $\Box_I \varphi \in \Theta'$，使得 $a = V_B(\varphi)$。因此，$V_B(\Box_I \varphi) = \Box_I a \in B'$。根据 $\Box'_I$ 的定义，我们得到 $\Box'_I a = \Box_I a$。对任意 $b \in D^M$，存在某个 $\Box_M \psi \in \Theta'$，使得 $b = V_B(\psi)$。因此 $\Box_I \psi \in \Theta'$，并且 $V_B(\Box_I \psi) = \Box_I V_B(\psi) = \Box_I b \in B'$。由于 $V_B(\Box_M \psi) = \Box_M V_B(\psi) = \Box_M b \in B'$，根据 $\Box'_M$ 的定义，$\Box'_M b = \Box_M b$。这证明了 h 满足 D^I 和 D^M 的 CDC。

令 V' 为赋值 V_B 在 B' 上的限制，接下来我们通过对 φ 归纳，证明对于任意 $\varphi \in \Theta'$，$V'(\varphi) = V_B(\varphi)$。我们只考虑模态情形，因为其他情形都很简单：

若 $\varphi = \Box_I \psi$，由于 $\Box_I \psi \in \Theta'$，我们有 $\psi \in \Theta'$。因此 $V_B(\Box_I \psi) = \Box_I V_B(\psi) \in B'$，且 $V_B(\psi) \in B'$。

$$\begin{array}{lcll} V'(\Box_I \psi) & = & \Box'_I V'(\psi) & \\ & = & \Box'_I V_B(\psi) & \text{(IH)} \\ & = & \Box_I V_B(\psi) & \text{(By the definition of } \Box'_I) \\ & = & V_B(\Box_I \psi). & \end{array}$$

若 $\varphi = \Box_M \psi$，由于 $\Box_M \psi \in \Theta'$，我们有 $\Box_I \psi$，$\psi \in \Theta'$。因此 $V_B(\Box_M \psi) = \Box_M V_B(\psi) \in B'$，$V_B(\Box_I \psi) = \Box_I V_B(\psi) \in B'$，且 $V_B(\psi) \in B'$。

$$\begin{array}{lcll} V'(\Box_M \psi) & = & \Box'_M V'(\psi) & \\ & = & \Box'_M V_B(\psi) & \text{(IH)} \\ & = & \Box_M V_B(\psi) & \text{(By the definition of } \Box'_M) \\ & = & V_B(\Box_M \psi). & \end{array}$$

由于 V_B 是一个在 $\mathfrak{B}$ 上反驳 Γ/Δ 的赋值，V' 是一个定义在 $(B', \Box_I, \Box_M)$ 上、反驳 Γ/Δ 的赋值。对于任意 $\varphi \in \Theta'$，$V'(\varphi) = V_B(\varphi)$，我们有 $D^I = \{V_B(\varphi) \mid \Box_I \varphi \in \Theta'\} = \{V'(\varphi) \mid \Box_I \varphi \in \Theta'\}$，且 $D^M = \{V'(\varphi) \mid \Box_M \varphi \in \Theta'\}$。由于 B' 由 $V_B(\Theta')$ 生成，且其基数不大于 m，所以 $(B', \Box'_I, \Box'_M, D^I, D^M)$ 必为 $(\mathfrak{A}_1, D^I_1, D^M_1)$ ..., $(\mathfrak{A}_n, D^I_n, D^M_n)$ 中的一个。由于 $h\colon (B', \Box'_I, \Box'_M) \to (B, \Box_I, \Box_M)$ 是一个满足 CDC 的稳定嵌入，适用于 D^I 和 D^M，因此我们得到了所需结论。

■

上述命题并非将 [2, Thm. 5.1] 推广到双模态情形的平凡推广，因为我们要求每个 A_i 都验证 **Mix**。这对于下文引理 4.19 的证明至关重要。事实上，上述证明具体展示了当不同算子之间存在相互作用时，如何在多模态情形下进行过滤。一般而言，如何做到这一点远不明了，而对此问题的解答或许能为多模态逻辑有限模型性质的一些开放问题带来启示。

上述两个命题使我们能够得到以下结果，该结果类似于定理 3.7。

命题 4.6。 对于任意双模态多结论规则 Γ/Δ，存在若干三元组 $(\mathfrak{A}_1, D_1^I, D_1^M) \dots, (\mathfrak{A}_n, D_n^I, D_n^M)$，使得每个 $\mathfrak{A}_i$ 都是有限的 $(S4 \otimes K) \oplus Mix$-代数， $D_i^I \subseteq A_i$ 且 $D_i^M \subseteq A_i$；并且对于每个 $(S4 \otimes K) \oplus Mix$-代数 $\mathfrak{B} = (B, \Box_I, \Box_M)$，我们有 $\mathfrak{B} \vDash \Gamma/\Delta$ 当且仅当 $\mathfrak{B} \vDash \mu(\mathfrak{A}_1, D_1^I, D_1^M) \dots, \mu(\mathfrak{A}_n, D_n^I, D_n^M)$。

然后我们引入双模态空间范畴，它与双模态代数范畴对偶等价。与第 3 节类似，这种对偶性使我们能够获得双模态逻辑的稳定典范规则的几何刻画，从而使我们在引理 4.19 的证明中进行的构造成为可能。

定义 4.7。 一个双模态空间 是一个三元组 (X, R_I, R_M)，其中 (X, R_I) 和 (X, R_M) 是模态空间。

设 $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ 为双模态空间，映射 $f\colon X \to Y$ 若满足以下条件，则称其为稳定的：对于 $R \in \{R_I, R_M\}$ 以及任意 $x, y \in X$， xRy 蕴含 $f(x)Rf(y)$。此外，如果 f 稳定，并且对于任意 $x, y \in X$， $f(x)Ry$ 蕴含存在某个 $z \in X$，使得 xRz 且 $f(z) = y$，其中 $R \in \{R_I, R_M\}$，则称 f 为有界态射 。

双模态空间 $\mathfrak{X}$ 上的赋值是一个映射 $V\colon Prop \to Clop(X)$，按通常方式可递归地扩展为一个从 $Form_{bi}$ 到 $Clop(X)$的映射。对于任意双模态逻辑 L，若双模态空间 $\mathfrak{X}$ 验证L，则它是一个 L-模态空间。特别地， $S4 \otimes K$-模态空间 $\mathfrak{X} = (X, R_I, R_M)$是一个双模态空间，其中 (X, R_I)是一个 $S4$-空间，而 (X, R_M)是一个模态空间。

令 BMS 为由连续有界态射构成的双模态空间范畴，令 BMA 为由同态构成的双模态代数范畴。建立对偶性的函子 $(-)_* :$ BMA $\to$ BMS 和 $(-)^* :$ BMS $\to$ BMA 构造如下。对于双模态代数 $\mathfrak{A} = (A, \Box_I, \Box_M)$，令 $\mathfrak{A}_* = (A_*, R_I, R_M)$，其中 A_*是 A的 Stone 空间，且当且仅当 $\forall \Box_I a \in A($ $\Box_I a \in x \Rightarrow a \in y)$时有 xR_Iy； R_M的定义类似。对于双模态空间 $\mathfrak{X} = (X, R_I, R_M)$，令 $\mathfrak{X}^* = (X^*, \Box_{R_I}, \Box_{R_M})$，其中 X^*是 X的闭开集所构成的布尔代数，且 $\Box_{R_I} U = \{x \in X \mid R_I[x] \subseteq U\}$。$\Box_{R_M}$的定义类似。映射的对偶与 Esakia 对偶中的相同（即取逆像）。

定理 4.8。**BMA** 与**BMS**对偶等价，其见证为$(-)^*$和$(-)_*$。特别地，对于任意双模态代数 $\mathfrak{A}$， $\mathfrak{A} \cong (\mathfrak{A}_*)^*$ 由β 见证，其中 $\beta(a) = \{x \in A_* \mid a \in x\}$；对于任意双模态空间 $\mathfrak{X}$， $\mathfrak{X} \cong (\mathfrak{X}^*)_*$由 ϵ 见证，其中 $\epsilon(x) = \{U \in X^* \mid x \in U\}$。

将上述定理限制在验证 $S4 \otimes K$ 的对象上后，便得到具有连续有界态射的 $S4 \otimes K$- 模态空间范畴与具有同态的 $S4 \otimes K$- 代数范畴之间的对偶等价。

利用定理 4.8，我们现在可以轻松运用关于双模态逻辑稳定典范规则的几何直觉。单模态逻辑的相应证明见 [2, Thm. 5.4]。

命题 4.9。 设 $\mathfrak{A} = (A, \Box_I, \Box_M)$ 是一个有限双模态代数， $D^I \subseteq A$且 $D^M \subseteq A$；设 $\mathfrak{B} = (B, \Box_I, \Box_M)$ 是一个双模态代数，则 $\mathfrak{B} \nVdash$

$\mu(\mathfrak{A},\ D^I,\ D^M)$ 当且仅当存在一个连续稳定满射 $f\colon X_B \to X_A$，满足 CDC$_\Box$：对于任意 $\beta(a)$，其中 $a \in D^I$；且对于任意 $\beta(b)$，其中 $b \in D^M$[23]。

根据上述命题，我们可以将 $\mu(\mathfrak{A},\ D^I,\ D^M)$ 写作 $\mu(\mathfrak{A}_*,\ \mathfrak{D}_I,\ \mathfrak{D}_M)$，其中 $\mathfrak{D}_I = \{\beta(a) \mid a \in D^I\}$ 且 $\mathfrak{D}_M = \{\beta(b) \mid b \in D^M\}$。此外，由于 $\mathfrak{A}_*$ 是有限的，$\mathfrak{A}_*$ 的每个子集都是闭开的，因此根据 Stone 对偶，它具有某个 $a \in \mathfrak{A}$ 的形式 $\beta(a)$。因此，我们也可以将 $\mu(\mathfrak{Y},\ \mathfrak{D}_I,\ \mathfrak{D}_M)$ 写作 $\mathfrak{Y}$，其中 $\mathfrak{Y}$ 是一个有限双模态空间，而 $\mathfrak{D}_I$、$\mathfrak{D}_M$ 是 $\mathfrak{Y}$ 的子集族。

4.1.2 直觉主义模态逻辑及相关构造的 G¨odel 翻译

现在我们介绍从模态 Esakia 空间到 $S4 \otimes K$-模态空间以及反向的运算。这些运算本质上是 [23] 中为一般框架定义的运算的拓扑版本，并且与 G¨odel 翻译密切相关。

对于任意 $S4 \otimes K$-模态空间 $\mathfrak{Y} = (Y,\ R_I,\ R_M,\ \mathcal{O})$，我们记 $x \backsim y$ 当且仅当 xR_Iy 且 yR_Iy，并据此定义 $\rho\colon Y \to \mathcal{P}(Y)$，使得 $\rho(x) = \{y \in Y \mid x \backsim y\}$. 为方便起见，我们也可以用 $[x]$ 表示 $\rho(x)$。

定义 4.10。

- 对于任意模态 Esakia 空间 $\mathcal{X} = (X,\ \leq,\ R,\ \mathcal{O})$，其中 $\mathcal{O}$ 是拓扑，我们令 $\sigma(\mathcal{X}) = (X,\ R_I,\ R_M,\ \mathcal{O})$，其中 $R_I = \leq$ 且 $R_M = R$。
- 对于任意 $S4 \otimes K$-模态空间 $\mathfrak{Y} = (Y,\ R_I,\ R_M,\ \mathcal{O})$，我们令 $\rho(\mathfrak{Y}) = (\rho[Y],\ \leq [R_I \circ R_M \circ R_I],\ \rho[\mathcal{O}])$，其中 $\rho(x) \leq \rho(y)$ 当且仅当 xR_Iy，$\rho(x)[R_I \circ R_M \circ R_I]\rho(y)$ 当且仅当 $xR_I \circ R_M \circ R_Iy$[24]，且 $\rho(\mathcal{O})$ 是商拓扑。

首先，模态 Esakia 空间具有以下内在性质：

命题 4.11. 对于任意模态 Esakia 空间 $\mathcal{X} = (X, \leq, R, \mathcal{O})$，$\leq \circ R = R \circ \leq = R$，即 $R = \leq \circ R \circ \leq$。

证明。根据定理 3.11 给出的对偶性，只需证明对于任意模态海廷代数 $\mathfrak{A} = (A, \Box)$，该关系在其对偶空间 $\mathfrak{A}_*$ 上成立。也就是说，我们需要证明 $\subseteq \circ R \circ \subseteq = R$。设 x，$y \in A_*$，其中 $x \subseteq \circ R \circ \subseteq y$，则存在 $z, z' \in A_*$，使得 $x \subseteq z$、zRz' 且 $z' \subseteq y$。对于任意 $\Box a \in A$，若$\Box a \in x$，则 $\Box a \in z$。由于 zRz'，可知 $a \in z'$，从而 $a \in y$。因此，xRy。于是得到 $\subseteq \circ R \circ \subseteq = R$（反向显然）。■

令 $\mathfrak{Y} = (Y,\ R_I,\ R_M,\ \mathcal{O})$ 为一个 $S4 \otimes K$-模态空间，若 $U \subseteq Y$ 是关于准序 R_I 的上集，即 $U = \{y \in Y \mid xR_Iy$ 对某个 $x \in U\}$ 成立，则称 $U \subseteq Y$ 为上集。现在可以验证，定义 4.10 中的运算可以将模态 Esakia 空间变为双模态空间，反之亦然。

[23] CDC$_\Box$ 在定义 3.16 中给出。当不存在歧义时（尤其是对于双模态逻辑），我们可以直接写 CDC，而不是 CDC$_\Box$。[24] 很容易验证它们是定义良好的。

命题 4.12。以下结论成立：

1) 对于任意模态 Esakia 空间 $\mathcal{X}$， $\sigma(\mathcal{X})$ 是一个 $S4 \otimes K$-模态空间。2) 对于任意 $S4 \otimes K$-模态空间 $\mathfrak{Y}$， $\rho(\mathfrak{Y})$ 是一个模态 Esakia 空间。

证明。对于 1)，由于 $\mathcal{X} = (X, \leq, R, \mathcal{O})$ 是一个模态 Esakia 空间，$(X, \leq, \mathcal{O})$ 是一个 Esakia 空间。若省略 R，则 $\sigma(\mathcal{X})$ 的定义与 [16, 定义 2.43], 中的定义完全相同；众所周知，它是一个 S4-模态空间。因此，我们只需验证 $(X, R_M, \mathcal{O})$ 是一个模态空间。为此，只需证明若 $U \subseteq X$ 是闭开的，则 $\Box_{R_M} U = \Box_R U$ 也是闭开的。设 U 是 X 的任意开闭子集。由于 $(X, \leq, \mathcal{O})$ 是一个 Esakia 空间， $U = \bigcup_{1 \leq i \leq n}(U_i \setminus V_i)$，其中 U_i, V_i 都是¯ ¯开闭上集。 $\Box_R U = \Box_R(\bigcup_{1 \leq i \leq n}(U_i \setminus V_i)) = \Box_R((U_1 \cap V_1) \cup ... \cup (U_n \cap V_n))$。¯根据分配律，存在某个 k，使得 $\Box_R U = \Box_R \bigcap_{1 \leq i \leq k}(U_i' \cup V_i')$，其中 U_i', V_i' 都是¯开闭上集。于是 $\Box_R U = \bigcap_{1 \leq i \leq k} \Box_R(U_i' \cup V_i')$。现在，对任意 $1 \leq i \leq k$, ¯ ¯，由于 $V_i' \to U_i' \subseteq U_i' \cup V_i'$，有 $\Box_R(V_i' \to U_i') \subseteq \Box_R(U_i' \cup V_i')$。假设 _ _$x \in \Box_R(U_i' \cup V_i')$，则 $R[x] \subseteq U_i' \cup V_i'$。对于任意 xRy 和 $y \leq z$，由于根据 ¯命题 4.11 有 $R \circ \leq = R$， xRz，因此 $z \in U_i' \cup V_i'$。所以，$y \in V_i' \to U_i'$，从而 _$R[x] \subseteq V_i' \to U_i'$，即 $x \in \Box_R(V_i' \to U_i')$。由于 $x \in \Box_R(U_i' \cup V_i')$ 是任意的，我们¯ ¯有 $\Box_R(U_i' \cup V_i') \subseteq \Box_R(V_i' \to U_i')$，因此 $\Box_R(U_i' \cup V_i') = \Box_R(V_i' \to U_i')$。由于 V_i' 和 U_i' 是开闭上集，且 $(X, \leq, \mathcal{O})$ 是一个 Esakia 空间，$V_i' \to U_i'$ 是一个开闭上集。由于 $\mathcal{X}$ 是一个模态 Esakia 空间，根据定义 3.9 中的第 1 项， _ _$\Box_R(U_i' \cup V_i') = \Box_R(V_i' \to U_i')$ 是闭开的。$\Box_R U = \bigcap_{1 \leq i \leq k} \Box_R(U_i' \cup V_i')$ 也是闭开的。

对于 2），设 $\mathfrak{Y} = (Y, R_I, R_M, \mathcal{O})$ 是一个 $S4 \otimes K$-模态空间。若省略 R_M，则 $\rho(\mathfrak{Y})$ 的定义与 [16, Def. 2.43], 中的完全相同，众所周知它是一个 Esakia 空间。因此，只需验证：对于 $\rho(\mathfrak{Y})$ 的任意闭开上集 U， $\Box_{[R_I \circ R_M \circ R_I]} U$ 是一个闭开上集；并且对于任意 $x \in Y$， $[R_I \circ R_M \circ R_I][\rho(x)]$ 是一个闭上集。

设 U 是 $\rho(\mathfrak{Y})$ 的任意一个闭开上集。由于 $\rho(\mathcal{O})$ 是商拓扑，$\rho^{-1}(U)$ 是闭开的。根据 $\leq$ 的定义，$\rho^{-1}(U)$ 是一个上集，因为 U 是一个上集。显然， $\rho^{-1}(\Box_{[R_I \circ R_M \circ R_I]} U) = \Box_{R_I} \Box_{R_M} \Box_{R_I} \rho^{-1}(U)$。由于 $\rho^{-1}(U)$ 是一个闭开上集，且 $\mathfrak{Y}$ 是一个 $S4 \oplus K$-模态空间，因此 $\rho^{-1}(\Box_{[R_I \circ R_M \circ R_I]} U) = \Box_{R_I} \Box_{R_M} \Box_{R_I} \rho^{-1}(U)$ 是闭开的。由于 R_I 是传递的，显然 $\Box_{R_I} \Box_{R_M} \Box_{R_I} \rho^{-1}(U)$ 是一个上集。因此， $\rho^{-1}(\Box_{[R_I \circ R_M \circ R_I]} U)$ 是一个闭开上集， $\Box_{[R_I \circ R_M \circ R_I]} U$ 也如此。

令 $x \in Y$ 为任意元素，显然， $[R_I \circ R_M \circ R_I][\rho[x]]$ 是一个上集。根据 $\leq$ 的定义，$\bigcup [R_I \circ R_M \circ R_I][\rho[x]] = (R_I \circ R_M \circ R_I)[x] = R_I[R_M[R_I[x]]]$。根据模态空间的定义， $R_I[x]$ 是闭集。由于 $\mathfrak{Y}$ 是一个 $S4 \otimes K$-模态空间，$R_M[R_I[x]]$ 也是闭集[25]., $R_I[R_M[R_I[x]]]$ 也如此。因此，$[R_I \circ R_M \circ R_I][\rho(x)]$

[25]已知，对于任意模态空间 $\mathfrak{X}$，若 U是闭集，则 $R[U]$也是闭集：设 $x \notin R[U]$，则 $\Diamond_R\{x\} \cap U = \emptyset$。 $\Diamond_R\{x\} = \Diamond_R \bigcap \{Y \mid x \in Y \in Clop(\mathfrak{X})\}$。根据 Esakia引理， $\Diamond_R \bigcap \{Y \mid x \in Y \in Clop\ \mathfrak{X}\} = \bigcap \{\Diamond_R Y \mid x \in Y \in Clop\ \mathfrak{X}\}$ $\bigcap \{\Diamond_R Y \mid x \in Y \in (\ )\ (\ )$。因此 ( )。 $Clop\ \mathfrak{X}\} \cap U = \emptyset$ $U \cap \Diamond_R Y_1 \cap ... \cap \Diamond_R Y_n = \emptyset$ $x \in Y_1$ ... $Y_n \in$ 根据紧致性，存在某个,$Clop\ \mathfrak{X}$ $\Diamond_R Y_1 \cap ... \cap Y_n \subseteq \Diamond_R Y_1 \cap ... \cap \Diamond_R Y_n$ $U \cap \Diamond_R Y_1 \cap ... \cap Y_n = \emptyset$ $x \in Y_1 \cap ... \cap Y_n$ ( )。由于 ( )， ( )。由于 是闭开集且 $Y_1 \cap ... \cap Y_n \cap R[U] = \emptyset$, $R[U]$ 是闭集。

是一个闭上集。

■

现在，根据对偶性，我们也可以给出 σ 和 ρ 的对偶如下。令 $\mathfrak{A}$ 为任意模态海廷代数，根据定理 3.11 给出的对偶性，$\mathfrak{A}_*$ 是一个模态 Esakia 空间。根据命题 4.12，$\sigma(\mathfrak{A}_*)$ 是一个 $S4 \otimes K$-模态空间。根据定理 4.8，$\sigma(\mathfrak{A}_*)^*$ 是一个 $S4 \otimes K$-代数。对于任意模态海廷代数 $\mathfrak{A}$，我们定义 $\sigma(\mathfrak{A}) = \sigma(\mathfrak{A}_*)^*$。于是，$\sigma$ 是从模态海廷代数类到 $S4 \otimes K$-代数类的映射。类似地，对于任意 $S4 \otimes K$-代数，我们定义 $\rho(\mathfrak{B}) = \rho(\mathfrak{B}_*)^*$。于是，$\rho$ 是从 $S4 \otimes K$-模态代数类到模态海廷代数类的映射。

那么我们可以得到下面这个命题，它表明代数的 σ, ρ和几何的 σ, ρ 分别互为对偶。

命题 4.13。以下结论成立：

1) 对任意模态海廷代数 $\mathfrak{A}$，$(\sigma(\mathfrak{A}))_* \cong \sigma(\mathfrak{A}_*)$。因此，对于任意模态 Esakia 空间 $\mathcal{X}$，$\sigma((\mathcal{X})^*) \cong(\sigma(\mathcal{X}))^*$。2) 对任意 $S4 \otimes K$-代数 $\mathfrak{B}$，$(\rho(\mathfrak{B}))_* \cong \rho(\mathfrak{B}_*)$。因此，对于任意 $S4 \otimes K$-模态空间 $\mathfrak{X}$，$(\rho(\mathfrak{X}))^* \cong\rho(\mathfrak{X}^*)$。

证明。直接由 σ 和 ρ的定义以及对偶性即可得出。

■

此外，由于对于任意模态 Esakia 空间 $\mathcal{X} = ,\ R =\leq \circ R\circ \leq (X, \leq, R, \mathcal{O})$，下面这个命题显然成立。

命题 4.14. 对任意模态 Esakia 空间 $\mathcal{X} = (X, \leq, R, \mathcal{O})$，$\rho(\sigma(\mathcal{X})) \cong\mathcal{X}$。因此，对任意模态海廷代数 $\mathfrak{A}$，$\rho(\sigma(\mathfrak{A})) \cong \mathfrak{A}$。

上述命题对应于 $[16,$ Prop. 2.45$]$ 的前半部分。对于 $[16,$ Prop. 2.45$],$ 的后半部分，该对应关系对一般的 $S4 \otimes K$-代数并不成立。我们需要一个额外假设。

命题 4.15. 若 $\mathfrak{B} = (B, \Box_I, \Box_M)$ 是一个 $(S4 \otimes K) \oplus Mix$-代数，则存在 $\sigma(\rho(\mathfrak{B}))$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态嵌入（通常记为 $\sigma(\rho(\mathfrak{B})) \rightarrowtail \mathfrak{B}$ ）。

证明。设 $\mathfrak{B}$ 是一个使 $\Box_I\Box_M\Box_I p \leftrightarrow \Box_M p$ 有效的 $S4\otimes K$-代数。根据定理 4.8 所给出的对偶，$\mathfrak{B}_*$ 是一个 $S4\otimes K$-模态空间，其上 $R_I\circ R_M\circ R_I = R_M$，并且只需证明存在从 $\mathfrak{B}_*$ 到 $(\sigma(\rho(\mathfrak{B})))_*$ 的满连续有界态射。根据命题 4.14，$(\sigma(\rho(\mathfrak{B})))_* \cong \sigma(\rho(\mathfrak{B}_*))$。我们验证，$x \mapsto [x]$ 是从 $\mathfrak{X} = (X, R_I, R_M, \mathcal{O})$ 到 $\sigma(\rho(\mathfrak{X}))$ 的满连续有界态射，这对任意 $S4 \otimes K$-模态空间 $\mathfrak{X}$（其上 $R_I \circ R_M \circ R_I = R_M$）成立。

显然，该映射是满射且连续的（其拓扑为商拓扑）。如果 xR_Iy，那么根据定义有 $[x] \leq [y]$；如果 $[x] \leq [y]$，那么根据定义有 xR_Iy。假设 xR_My，由于 R_I是自反的，$xR_I \circ R_M \circ R_Iy$，因此 $[x][R_I\circ$

$R_M \circ R_I][y]$。假设 $[x][R_I \circ R_M \circ R_I][y]$，那么根据定义， $xR_I \circ R_M \circ R_I y$。由于 $R_I \circ R_M \circ R_I = R_M$， $xR_M y$。这证明了该映射是有界态射。

■

现在，我们介绍直觉主义模态逻辑的 *G¨odel* 翻译，其定义见 [23]。

定义 4.16。 直觉主义模态逻辑的 *G¨odel* 翻译 t： $Form_{i\Box} \to Form_{bi}$ 递归定义如下:

- $t(p) = \Box_I p$ 其中 p 是一个命题变元
- $t(\bot) = \Box_I \bot$
- $t(\top) = \Box_I \top$
- $t(\varphi \to \psi) = \Box_I (t(\varphi) \to t(\psi))$
- $t(\varphi \wedge \psi) = \Box_I (t(\varphi) \wedge t(\psi))$
- $t(\varphi \vee \psi) = \Box_I (t(\varphi) \vee t(\psi))$
- $t(\Box\varphi) = \Box_I \Box_M t(\varphi)$

事实证明，要使以下结果成立，将定义改为 $t(\varphi \wedge \psi) = t(\varphi) \wedge t(\psi)$ 和 $t(\varphi \vee \psi) = t(\varphi) \vee t(\psi)$ 也没有区别。在限定于直觉主义命题公式集合时， t 就是众所周知的 G¨odel 翻译。对于任意直觉主义模态多结论规则 Γ/Δ，我们将$t(\Gamma/\Delta)$ 记作 $\{t(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}/\{t(\delta) \mid \delta \in \Delta\}$。

以下命题是 [7, Lem. 3.13] 的对应项。

命题 4.17。 如果 $\mathfrak{A}$ 是一个 $S4 \otimes K$-代数，那么 $\mathfrak{A} \vDash t(\Gamma/\Delta)$ 当且仅当 $\rho(\mathfrak{A}) \vDash \Gamma/\Delta$。

证明。 根据定理 4.8， $\mathfrak{A} \vDash \Gamma/\Delta$ 当且仅当 $\mathfrak{A}_* \vDash \Gamma/\Delta$ 且 $\rho(\mathfrak{A}) \vDash \Gamma/\Delta$ 当且仅当 $\rho(\mathfrak{A}_*) = \rho(\mathfrak{A})_* \vDash \Gamma/\Delta$。因此，只需证明对于任意 $S4 \otimes K$-模态空间$\mathfrak{X} = (X, R_I, R_M, \mathcal{O})$，$(X, R_I, R_M, \mathcal{O}) \vDash t(\Gamma/\Delta)$ 当且仅当 $\rho(X, R_I, R_M, \mathcal{O}) \vDash \Gamma/\Delta$。

对于从左到右方向，假设 $\rho(X, R_I, R_M, \mathcal{O}) \nvDash \Gamma/\Delta$，则存在一个在 $\rho(X, R_I, R_M, \mathcal{O})$ 上的赋值 V，使得对于任意 $\varphi \in \Gamma$， $V(\varphi) = \rho[X]$，并且对于任意 $\psi \in \Delta$，$V(\psi) \neq \rho[X]$。由于对于任意命题变元 p， $V(p)$ 是 $\rho(X, R_I, R_M, \mathcal{O})$ 中的一个既开又闭的上集，所以 $\rho^{-1}(V(p))$ 是 $(X, R_I, R_M, \mathcal{O})$ 中的一个既开又闭的上集。我们通过令 $V'(p) = \rho^{-1}(V(p))$，在 $(X, R_I, R_M, \mathcal{O})$ 上定义一个赋值 V'。然后我们通过归纳证明，对于任意公式 φ， $V'(t(\varphi)) = \rho^{-1}(V(\varphi))$（注意，对于任意公式 φ，$V(\varphi)$ 是一个既开又闭的上集）：

若 $\varphi = p$ 对某个命题变元 p，则 $V'(t(p)) = V'(\Box_I p) = \Box_I V'(p) = \Box_I \rho^{-1}(V(p))$。由于 $\rho^{-1}(V(p))$ 是一个上集，且 R_I是自反的，因此 $\Box_I \rho^{-1}(V(p)) = \rho^{-1}(V(p))$。由此 $V'(t(p)) = \rho^{-1}(V(p))$。

若 $\varphi = \bot$，则 $V'(t(\bot)) = V'(\Box_I \bot) = \Box_I V'(\bot) = \emptyset = \rho^{-1}(V(\bot))$；若 $\varphi = \top$，则 $V'(t(\top)) = V'(\Box_I \top) = \Box_I V'(\top) = X = \rho^{-1}(\rho[X]) = \rho^{-1}(V(\top))$。

若 $\varphi = \psi \wedge \theta$,

$$
\begin{aligned}
V'(t(\psi \wedge \theta)) &= V'(\Box_I(t(\psi) \wedge t(\theta))) \\
&= \Box_I V'(t(\psi) \wedge t(\theta)) \\
&= \Box_I(V'(t(\psi)) \cap V'(t(\theta))) \\
&= \Box_I(\rho^{-1}(V(\psi)) \cap \rho^{-1}(V(\theta))) \quad \text{(IH)} \\
&= \Box_I \rho^{-1}(V(\psi) \cap V(\theta)) \\
&= \Box_I \rho^{-1}(V(\psi \wedge \theta)) \\
&= \rho^{-1}(V(\psi \wedge \theta)).
\end{aligned}
$$

注意，最后一个等式成立是因为 $\rho^{-}(V(\psi \wedge \theta))$ 是一个上集，且 R_I 是自反的。

$\varphi = \psi \vee \theta$ 的情形类似。

若 $\varphi = \psi \to \theta$，则 $V'(t(\psi \to \theta)) = V'(\Box_I(t(\psi) \to t(\theta))) = \Box_I(V'(t(\psi)) \to V'(t(\theta)))$ $= \Box_I(X \setminus V'(t(\psi)) \cup V'(t(\theta)))$。由归纳假设，$V'(t(\psi)) = \rho^{-1}(V(\psi))$ 且 $V'(t(\theta)) = \rho^{-1}(V(\theta))$。因此 $V'(t(\psi \to \theta)) = \Box_I(X \setminus \rho^{-1}(V(\psi)) \cup \rho^{-1}(V(\theta))) = \Box_I(\rho^{-1}(\rho[X] \setminus V(\psi) \cup V(\theta)))$（注意 $V(\psi)$ 与 $V(\theta)$ 均为上集）。

设 $x \in \rho^{-1}(\rho[X] \setminus \downarrow(V(\psi) \setminus V(\theta)))$，则 $\rho(x) \in \rho[X] \setminus \downarrow(V(\psi) \setminus V(\theta))$。对任意 xR_Iy，由定义有 $\rho(x) \leq \rho(y)$，从而 $\rho(y) \notin V(\psi) \setminus V(\theta)$。由于 xR_Iy 是任意的，我们有 $x \in \Box_I(\rho^{-1}(\rho[X] \setminus V(\psi) \cup V(\theta)))$，从而 $\rho^{-1}(\rho[X] \setminus \downarrow(V(\psi) \setminus V(\theta))) \subseteq \Box_I(\rho^{-1}(\rho[X] \setminus V(\psi) \cup V(\theta)))$。设 $x \in \Box_I(\rho^{-1}(\rho[X] \setminus V(\psi) \cup V(\theta)))$，同时 $x \notin \rho^{-1}(\rho[X] \setminus \downarrow(V(\psi) \setminus V(\theta)))$。则 $\rho(x) \notin \rho[X] \setminus \downarrow(V(\psi) \setminus V(\theta)))$，存在 $\rho(x) \leq \rho(y)$ 使得 $\rho(y) \in V(\psi) \setminus V(\theta)$。因此 $y \notin \rho^{-1}(\rho[X] \setminus V(\psi) \cup V(\theta))$，且由定义 xR_Iy。这与假设 $x \in \Box_I(\rho^{-1}(\rho[X] \setminus V(\psi) \cup V(\theta)))$ 矛盾。因此，若 $x \in \Box_I(\rho^{-1}(\rho[X] \setminus V(\psi) \cup V(\theta)))$，则 $x \in \rho^{-1}(\rho[X] \setminus \downarrow(V(\psi) \setminus V(\theta)))$。从而 $\Box_I(\rho^{-1}(\rho[X] \setminus V(\psi) \cup V(\theta))) \subseteq \rho^{-1}(\rho[X] \setminus \downarrow(V(\psi) \setminus V(\theta)))$，且 $\Box_I(\rho^{-1}(\rho[X] \setminus V(\psi) \cup V(\theta))) = \rho^{-1}(\rho[X] \setminus \downarrow(V(\psi) \setminus V(\theta)))$。由于 $\rho^{-1}(\rho[X] \setminus \downarrow(V(\psi) \setminus V(\theta))) = \rho^{-1}(V(\psi \to \theta))$，这证明了 $V'(t(\psi \to \theta)) = \rho^{-1}(V(\psi \to \theta))$。

若 $\varphi = \Box\psi$, $V'(t(\Box\psi)) = V'(\Box_I\Box_M t(\psi)) = \Box_I\Box_M V'(t(\psi)) =$(根据归纳假设) $\Box_I\Box_M\rho^{-1}(V(\psi))$。并且 $\rho^{-1}(V(\Box\psi)) = \rho^{-1}(\Box_{[R_I \circ R_M \circ R_I]}V(\psi)) = \Box_I \circ \Box_M \circ \Box_I\rho^{-1}(V(\psi))$。由于 $V(\psi)$ 是一个上集，$\rho^{-1}(V(\psi))$ 也是如此。又因为 R_I是自反的，$\Box_I\rho^{-1}(V(\psi)) = \rho^{-1}(V(\psi))$，因此 $\Box_I \circ \Box_M \circ \Box_I\rho^{-1}(V(\psi)) = \Box_I \circ \Box_M\rho^{-1}(V(\psi))$。我们有 $V'(t(\Box\psi)) = \rho^{-1}(V(\Box\psi))$。至此，归纳证明完成。

由于 $V'(t(\varphi)) = \rho^{-1}(V(\varphi))$，对于任意 $\varphi \in \Gamma$，$V'(t(\varphi)) = X$，其中 $V(\varphi) = \rho[X]$；对于任意 $\psi \in \Delta$，$V'(t(\psi)) \neq X$，其中 $V(\psi) \neq \rho[X]$。因此，V' 是 $(X, R_I, R_M, \mathcal{O})$ 上的一个赋值，它反驳 $t(\Gamma/\Delta)$；$(X, R_I, R_M, \mathcal{O}) \nVdash t(\Gamma/\Delta)$。

对于从右到左方向，设 $(X, R_I, R_M, \mathcal{O}) \nVdash t(\Gamma/\Delta)$，则存在一个赋值 V，定义在 $(X, R_I, R_M, \mathcal{O})$ 上，使得对于任意 $\varphi \in \Gamma$，$V(t(\varphi)) = X$，并且对于任意 $\psi \in \Delta$，$V(t(\psi)) \neq X$。对任意命题变元 p，定义 $V'(p) = \rho[V(\Box_I p)] = \rho[\Box_I V(p)]$。由于 $\Box_I V(p)$ 是 $(X, R_I, R_M, \mathcal{O})$ 中的既开又闭的上集，因此 $\rho[\Box_I V(p)]$ 是 $\rho(X, R_I, R_M, \mathcal{O})$ 中的既开又闭的上集。因此，V'确实是定义在 $\rho(X, R_I, R_M, \mathcal{O})$ 上的一个赋值。我们通过归纳证明，对于任意公式 φ，$V'(\varphi) = \rho[V(t(\varphi))]$。

当 φ 是命题字母，$\bot$ 或 $\top$ 时，情况很简单。

若 $\varphi = \psi \vee \theta$, $V'(\psi \vee \theta) = V'(\psi) \cup V'(\theta) =$（根据归纳假设）$\rho[V(t(\psi))] \cup \rho[V(t(\theta))] = \rho[V(t(\psi)) \cup V(t(\theta))] = \rho[V(t(\psi) \vee t(\theta))]$。由于对于任意公式$\varphi$，$V(t(\varphi))$都是一个上集，因此 $V(t(\psi) \vee t(\theta)) = V(t(\psi)) \cup V(t(\theta))$ 也是一个上集。因此 $\rho[V(t(\psi) \vee t(\theta))] = \rho[\Box_I V(t(\psi) \vee t(\theta))] = \rho[V(\Box_I(t(\psi) \vee t(\theta)))] = \rho[V(t(\psi \vee \theta))]$。当$\varphi = \psi \wedge \theta$ 时的情形类似。

若 $\varphi = \psi \to \theta$, $V'(\psi \to \theta) = \rho[X] \setminus \downarrow(V'(\psi) \setminus V'(\theta))$ = （根据归纳假设） $\rho[X] \setminus \downarrow(\rho[V(t(\psi))] \setminus \rho[V(t(\theta))])$。并且 $\rho(V(t(\psi \to \theta))) = \rho(V(\Box_I(t(\psi) \to t(\theta))))$ $=\rho[\Box_I(X \setminus V(t(\psi)) \cup V(t(\theta)))]$。现在假设 $\rho(x) \in \rho[X] \setminus \downarrow(\rho[V(t(\psi))] \setminus \rho[V(t(\theta))])$，即 $\rho(x) \notin \downarrow(\rho[V(t(\psi))] \setminus \rho[V(t(\theta))])$。由于 $V(t(\psi))$ 和 $V(t(\theta))$ 都是上集，$\rho[V(t(\psi))] \setminus \rho[V(t(\theta))] = \rho[V(t(\psi)) \setminus V(t(\theta))]$[26]。因此，对于任意 xR_Iy，根据定义$\rho(x) \leq \rho(y)$，从而 $\rho(y) \notin \rho[V(t(\psi)) \setminus V(t(\theta))],$，且 $y \notin V(t(\psi)) \setminus V(t(\theta))$。因此，$x \in \Box_I(X \setminus V(t(\psi)) \cup V(t(\theta)))$，并且 $\rho(x) \in \rho[\Box_I(X \setminus V(t(\psi)) \cup V(t(\theta)))]$。这证明了 $\rho[X] \setminus \downarrow(\rho[V(t(\psi))] \setminus \rho[V(t(\theta))]) \subseteq \rho[\Box_I(X \setminus V(t(\psi)) \cup V(t(\theta)))]$。

对于另一个包含关系，假设 $\rho(x) \in \rho[\Box_I(X \setminus V(t(\psi)) \cup V(t(\theta)))]$ 而$\rho(x) \in \downarrow(\rho[V(t(\psi))] \setminus \rho[V(t(\theta))])$。于是 $x \backsim y$ 对某个 $y \in \Box_I(X \setminus V(t(\psi)) \cup V(t(\theta)))$，从而 $x \in \Box_I(X \setminus V(t(\psi)) \cup V(t(\theta)))$。由于 $\rho(x) \in \downarrow(\rho[V(t(\psi))] \setminus \rho[V(t(\theta))])$，存在 $\rho(x) \leq \rho(z)$ 使得 $\rho(z) \in \rho[V(t(\psi))] \setminus \rho[V(t(\theta))]$。存在 $z' \in V(t(\psi)) \setminus V(t(\theta))$ 使得 $\rho(z) = \rho(z')$。由于 $\rho(x) \leq \rho(z')$，xR_Iz'，这与 $x \in \Box_I(X \setminus V(t(\psi)) \cup V(t(\theta)))$ 这一事实相矛盾。因此，若 $\rho(x) \in \rho[\Box_I(X \setminus V(t(\psi)) \cup V(t(\theta)))],$则 $\rho(x) \notin \downarrow(\rho[V(t(\psi))] \setminus \rho[V(t(\theta))])$，即 $\rho[\Box_I(X \setminus V(t(\psi)) \cup V(t(\theta)))] \subseteq \rho[X] \setminus \downarrow(\rho[V(t(\psi))] \setminus \rho[V(t(\theta))])$。于是我们有 $\rho[\Box_I(X \setminus V(t(\psi)) \cup V(t(\theta)))] = \rho[X] \setminus \downarrow(\rho[V(t(\psi))] \setminus \rho[V(t(\theta))])$。这就证明了 $V'(\psi \to \theta) = \rho(V(t(\psi \to \theta))$。

若 $\varphi = \Box\psi$, $V'(\Box\psi) = \Box_{[R_I \circ R_M \circ R_I]}V'(\psi)$ =(归纳假设)$\Box_{[R_I \circ R_M \circ R_I]}\rho[V(t(\psi))]$。并且$\rho[V(t(\Box\psi))] = \rho[V(\Box_I\Box_M t(\psi))] = \rho[\Box_I\Box_M V(t(\psi))]$。假设 $a \in \rho[\Box_I\Box_M V(t(\psi))],$，那么对于某个 $x \in \Box_I\Box_M V(t(\psi))$，有 $a = \rho(x)$。由于 $V(t(\psi))$ 是一个上集，因此 $x \in \Box_I\Box_M V(t(\psi)) = \Box_I\Box_M\Box_I V(t(\psi))$。于是 $a = \rho(x) \in \Box_{[R_I \circ R_M \circ R_I]}\rho[V(t(\psi))]$。由于 $a \in \rho[\Box_I\Box_M V(t(\psi))]$ 是任意的，我们得到 $\rho[\Box_I\Box_M V(t(\psi))] \subseteq \Box_{[R_I \circ R_M \circ R_I]}\rho[V(t(\psi))]$。

对于另一个包含关系，假设 $\rho(x) \in \Box_{[R_I \circ R_M \circ R_I]}\rho[V(t(\psi))]$，而 $x \notin \Box_I\Box_M\Box_I V(t(\psi)) = \Box_I\Box_M V(t(\psi))$，那么存在 xR_Ix_1、$x_1R_Mx_2$ 和 x_2R_Iy，使得 $y \notin V(t(\psi))$。因此，根据定义，$\rho(x)[R_I \circ R_M \circ R_I]\rho(y)$。由于 $V(t(\psi))$ 是一个上集，故 $\rho(y) \notin \rho[V(t(\psi))]$，这与假设 $\rho(x) \in \Box_{[R_I \circ R_M \circ R_I]}\rho[V(t(\psi))]$ 矛盾。因此，若 $\rho(x) \in \Box_{[R_I \circ R_M \circ R_I]}\rho[V(t(\psi))],$，则 $\rho(x) \in \rho[\Box_I\Box_M V(t(\psi))]$。所以，$\Box_{[R_I \circ R_M \circ R_I]}\rho[V(t(\psi))] \subseteq \rho[\Box_I\Box_M V(t(\psi))],$，进而 $\Box_{[R_I \circ R_M \circ R_I]}\rho[V(t(\psi))] = \rho[\Box_I\Box_M V(t(\psi))]$。这证明了 $V'(\Box\psi) = \rho[V(t(\Box\psi))]$，并完成了归纳。

现在，$V(t(\varphi)) = X$ 对任意 $\varphi \in \Gamma$, $V'(\varphi) = \rho[V(t(\varphi))] = \rho[X]$ 对任意$\varphi \in \Gamma$。由于 $V(t(\psi)) \neq X$ 对任意 $\psi \in \Delta$，且 $V(t(\psi))$ 是一个上集，$V'(\psi) = \rho[V(t(\psi))] \neq \rho[X]$ 对任意 $\psi \in \Delta$。因此，V'是 $\rho(X, R_I, R_M, \mathcal{O})$ 上的一个赋值，它反驳了 Γ/Δ。因此，$\rho(X, R_I, R_M, \mathcal{O}) \nVdash \Gamma/\Delta$。

■

当限定于公式时，上述命题恰好就是 [23, 引理 5]或 [3, 引理 19] 的代数术语表述。因此，它将该结果从公式推广到了多结论规则。现在我们为直觉主义模态逻辑定义模态伴侣这一概念。通过 G¨odel 翻译，这一概念将直觉主义模态逻辑与双模态逻辑联系起来。

[26] $\rho[X \setminus Y] = \rho[X] \setminus \rho[Y]$ 对于任意上集 X、Y: 显然，$\rho[X] \setminus \rho[Y] \subseteq \rho[X \setminus Y]$。假设 $a \in \rho[X \setminus Y]$, 则存在 $x \in X \setminus Y$使得 $a = \rho(x)$。由于 X，Y是上集，对于任意 $x \backsim x', x' \notin Y$。因此，$\rho(x) \notin \rho[Y]$, $a = \rho(x) \in \rho[X] \setminus \rho[Y]$。因此，$\rho[X \setminus Y] \subseteq \rho[X] \setminus \rho[Y]$, $\rho[X \setminus Y] = \rho[X] \setminus \rho[Y]$。

定义 4.18. 设 $L \in \mathbf{NExt(IntK}^R_\Box\mathbf{)}$ 且 $M \in \mathbf{NExt(S4} \otimes \mathbf{K}^R\mathbf{)}$。那么$M$ 是 L 的模态伴随，当且仅当 $\Gamma/\Delta \in L \iff t(\Gamma/\Delta) \in M$。此外，设$L \in \mathbf{NExt(IntK}_\Box\mathbf{)}$ 且 $M \in \mathbf{NExt(S4} \otimes \mathbf{K)}$，那么 M是L 的模态伴随，当且仅当 $\varphi \in L \iff t(\varphi) \in M$。

接下来，我们定义格 $\mathbf{NExt(IntK}^R_\Box\mathbf{)}$ 与$\mathbf{NExt(S4} \otimes \mathbf{K}^R\mathbf{)}$ 之间的以下映射。对于**S4** 上的超直觉主义逻辑格和经典模态逻辑格，这些映射的类似形式早已广为人知，在许多模态逻辑教科书中都能找到。更多详情请参见 [14] 。

$$\tau : \mathbf{NExt}(\mathbf{IntK}^R_\Box) \to \mathbf{NExt}((\mathbf{S4} \otimes \mathbf{K}) \oplus \mathbf{Mix}^R)$$
$$\tau(L) = (\mathbf{S4} \otimes \mathbf{K}) \oplus \mathbf{Mix}^R \oplus \{t(\Gamma/\Delta) \mid \Gamma/\Delta \in L\}$$

$$\sigma : \mathbf{NExt}(\mathbf{IntK}^R_\Box) \to \mathbf{NExt}((\mathbf{Grz} \otimes \mathbf{K}) \oplus \mathbf{Mix}^R)$$
$$\sigma(L) = (\mathbf{Grz} \otimes \mathbf{K}) \oplus \mathbf{Mix}^R \oplus \{t(\Gamma/\Delta) \mid \Gamma/\Delta \in L\}$$

$$\rho : \mathbf{NExt}(\mathbf{S4} \otimes \mathbf{K}^R) \to \mathbf{NExt}(\mathbf{IntK}^R_\Box)$$
$$\rho(M) = \{\Gamma/\Delta \mid t(\Gamma/\Delta) \in M\}^{27}$$

类似地，这些映射也可以针对逻辑定义：

$$\tau : \mathbf{NExt}(\mathbf{IntK}_\Box) \to \mathbf{NExt}((\mathbf{S4} \otimes \mathbf{K}) \oplus \mathbf{Mix})$$
$$\tau(L) = (\mathbf{S4} \otimes \mathbf{K}) \oplus \mathbf{Mix} \oplus \{t(\varphi) \mid \varphi \in L\}$$

$$\sigma : \mathbf{NExt}(\mathbf{IntK}_\Box) \to \mathbf{NExt}((\mathbf{Grz} \otimes \mathbf{K}) \oplus \mathbf{Mix})$$
$$\sigma(L) = (\mathbf{Grz} \otimes \mathbf{K}) \oplus \mathbf{Mix} \oplus \{t(\varphi) \mid \varphi \in L\}$$

$$\rho : \mathbf{NExt}(\mathbf{S4} \otimes \mathbf{K}) \to \mathbf{NExt}(\mathbf{IntK}_\Box)$$
$$\rho(M) = \{\varphi \mid t(\varphi) \in M\}$$

从语义上，我们可以将代数映射 σ 和 ρ （见命题 4.12 下方）扩展到全称类：

$$\sigma : \mathbf{Uni}(\mathbf{MHA}) \to \mathbf{Uni}(\mathbf{S4} \otimes \mathbf{K})$$
$$\sigma(\mathcal{A}) = Uni(\{\sigma(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in \mathcal{A}\})$$

$$\rho : \mathbf{Uni}(\mathbf{S4} \otimes \mathbf{K}) \to \mathbf{Uni}(\mathbf{MHA})$$

[27]要看出为何 $\rho(M) \in \mathbf{NExt(IntK}^R_\Box\mathbf{)}$，注意到 $t(\Gamma/\Delta) \in M$ 当且仅当（根据定理 2.27）
$Alg\ M \vDash t\ \Gamma/\Delta$ 4 17 $\{\rho\ \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \in Alg\ M\} \vDash \Gamma/\Delta$ $Uni\ \{\rho\ \mathfrak{A} \mid$ ( ) ( ) 当且仅当（根据命题 . ）( ) ( ) 当且仅当 (( ) ( )) 当且仅当（根据定理 . ）((( ) ( )))。因此，$\rho(M) = Ru(Uni(\{\rho(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in Alg(M)\})) \in \mathbf{NExt(IntK}^R_\Box\mathbf{)}$。类似地，我们可以证明 $\rho(M) \in \mathbf{NExt(IntK}_\Box\mathbf{)}$，其中 $M \in \mathbf{NExt(S4} \otimes \mathbf{K)}$。

$$\rho(\mathcal{W}) = \{\rho(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in \mathcal{W}\}$$

我们也可以如下定义 τ 的语义类比:

$$\tau : \mathbf{Uni}(\mathbf{MHA}) \to \mathbf{Uni}((\mathbf{S4} \otimes \mathbf{K}) \oplus \mathbf{Mix})$$

$$\tau(\mathcal{A}) = \{\mathfrak{A} \text{ is a } (S4 \otimes K) \oplus Mix\text{-algebra} \mid \rho(\mathfrak{A}) \in \mathcal{A}\}^{28}.$$

4.1.3 Blok-Esakia 定理的证明

现在，我们先介绍以下引理，它是 [16,Lem. 2.50] 的对应项，并且在 Blok-Esakia 定理的证明中起着关键作用。

引理 4.19。设 $\mathfrak{A}$ 是一个 $(Grz \otimes K) \oplus Mix$-代数，则对于任意双模态多结论规则 Γ/Δ，有

$$\mathfrak{A} \vDash \Gamma/\Delta \text{ } \textit{iff} \text{ } \sigma(\rho(\mathfrak{A})) \vDash \Gamma/\Delta.$$

证明。对于从左到右方向，由命题 4.15， $\sigma(\rho(\mathfrak{A})) \rightarrowtail \mathfrak{A}$。因此结论立即成立。

对于从右到左方向，我们证明：若 $\mathfrak{A}_* \nvDash \Gamma/\Delta$，则 $\sigma(\rho(\mathfrak{A}))_* \nvDash \Gamma/\Delta$。由命题 4.13， $\sigma(\rho(\mathfrak{A}))_* = \sigma(\rho(\mathfrak{A})_*) = \sigma(\rho(\mathfrak{A}_*))$。再由命题 4.6，可假设 $\Gamma/\Delta = \mu(\mathfrak{B}, D^I, D^M)$，其中 $\mathfrak{B}$ 是一个满足 Mix 和 $D^I, D^M \subseteq B$ 的有限 $S4 \otimes K$-代数。设 $\mathfrak{A}_* \nvDash \mu(\mathfrak{B}, D^I, D^M)$，其中 $R_I \circ R_M \circ R_I = R_M$ 在 $\mathfrak{A}_*$ 上满足 Mix，则由命题 4.9，存在一个连续稳定满射 $f : \mathfrak{A}_* \to \mathfrak{B}_*$，它满足 CDC，且对于 $\{\beta(a) \mid a \in D^I\}$ 和 $\{\beta(b) \mid b \in D^M\}$ 成立。我们构造一个连续稳定满射 $g : \sigma(\rho(\mathfrak{A}_*)) \to \mathfrak{B}_*$，使其满足 CDC，且对于 $\{\beta(a) \mid a \in D^I\}$ 和$\{\beta(b) \mid b \in D^M\}$ 成立。由此，根据命题 4.9，得到 $\sigma(\rho(\mathfrak{A}_*)) \nvDash \mu(\mathfrak{B}, D^I, D^M)$，从而完成证明。

我们使用引理 [16, Lem. 2.50] 证明中的构造。令 $C \subseteq \mathfrak{B}_*$ 为一个 R_I-簇，考虑 $Z_C = f^{-1}(C)$。由于 f 连续， Z_C 在 $\mathfrak{A}_*$ 中是闭开的。由于 f 稳定， Z_C 不会切任何 R_I-簇。由于 $\sigma(\rho(\mathfrak{A}_*))$ 具有商拓扑， $\rho[Z_C]$ 是闭开的。假设 $C = \{x_1, ...x_n\}$（注意 $\mathfrak{B}_*$ 是有限的）， $f^{-1}(x_i) \subseteq Z_C$ 是闭开的。由于 $\mathfrak{A}_*$ 是一个 $Grz \otimes K$-空间，根据命题 2.47，我们有 $M_i = max_{R_I}(f^{-1}(x_i))$ 是闭的，且 M_i 不会切任何R_I-簇。由于 $\sigma(\rho(\mathfrak{A}_*))$ 具有商拓扑， $\rho[M_i]$ 是闭的。并且对于$i \neq j$， $\rho[M_i] \cap \rho[M_j] = \emptyset$。

接着，我们找到互不相交的闭开集 U_1、.....、U_n，它们属于 $\sigma(\rho(\mathfrak{A}_*))$，且满足 $\rho[M_i] \subseteq U_i$和$\bigcup_i U_i = \rho[Z_C]$。令 $k \leq n$，并假设对于所有 $i < k$， U_i 均已定义。若$k = n$，令 $U_n = \rho[Z_C] \setminus (\bigcup_{i<k} U_i)$。否则，令 $V_k = \rho[Z_C] \setminus (\bigcup_{i<k} U_i)$，并注意到对于 $k \leq i \leq n$， V_k 包含 $\rho[M_i]$。由于 $\sigma(\rho(\mathfrak{A}_*))$ 是 Stone 空间，根据其

[28]根据命题 4.17，容易验证 $\rho(\mathcal{W})$ 始终是一类全称类。要证明 $\tau(\mathcal{A})$ 是一类全称类，注意到 $\mathfrak{A} \in Alg(\tau(Ru(\mathcal{A})))$（如你所见，此处的 τ 是句法的）当且仅当 $\mathfrak{A}$ 是一个 $(S4 \otimes K) \oplus Mix$-代数，并且对于任意 $\Gamma/\Delta \in Ru(\mathcal{A})$ 都有 $\mathfrak{A} \vDash t(\Gamma/\Delta)$；当且仅当（根据命题 4.17） $\mathfrak{A}$ 是一个 $(S4 \otimes K) \oplus Mix$-代数，并且对于任意 $\Gamma/\Delta \in Ru(\mathcal{A})$ 都有 $\rho(\mathfrak{A}) \vDash \Gamma/\Delta$；当且仅当（根据定理 2.34） $\mathfrak{A}$ 是一个 $(S4 \otimes K) \oplus Mix$-代数，并且 $\rho(\mathfrak{A}) \in \mathcal{A}$ 当且仅当 $\mathfrak{A} \in \tau(\mathcal{A})$。因此，$\tau(\mathcal{A}) = Alg(\tau(Ru(\mathcal{A})))$ 是一类全称类。

分离性质，对于每个 $k < i \leq n$，都存在一个属于 $\sigma(\rho(\mathfrak{A}_*))$ 的闭开集 U_{k_i}，使得 $\rho[M_k] \subseteq U_{k_i}$ 和 $\rho[M_i] \cap U_{k_i} = \emptyset$。然后令 $U_k = \bigcap_{k<i\leq n} U_{k_i} \cap V_k$。现在定义 g_C：$\rho[Z_C] \to C$ 如下：$g_C(z) = x_i$ 当且仅当 $z \in U_i$。最后，定义$g : \sigma(\rho(\mathfrak{A}_*)) \to \mathfrak{B}_*$ 如下：

$$g(\rho(z)) = \begin{cases} f(z) \text{ 当且仅当 } f(z) \text{ 不属于任何真 } R_I\text{-簇 } g_C(\rho(z)), \text{ 其中 } C\text{是包含 } f(z) \\ \text{的真 } R_I\text{-簇} \end{cases}$$

如引理 [16, 2.50]的证明所示，g 是满射、连续的，并且相对于 R_I保持关系，且对 $\{\beta(a) \mid a \in D^I\}$满足 CDC。我们只需检查 g 相对于 R_M 保持关系，并且对 $\{\beta(b) \mid b \in D^M\}$满足 CDC。

由于 $\mathfrak{B}$ 验证了 $\mathfrak{B}_*$上的 Mix，$R_I \circ R_M \circ R_I = R_M$。现在假设 $\rho(a) R_M \rho(b)$；由于 f是稳定的，$f(a) R_M f(b)$。因为对于任意 z，$f(z)$ 和 $g(\rho(z))$ 都映射到同一个 R_I-簇，所以无论如何，$g(\rho(a)) R_I f(a)$ 且 $f(b) R_I g(\rho(b))$。由于 $R_I \circ R_M \circ \mathfrak{B}_*$上的 $R_I = R_M$，$g(\rho(a)) R_M g(\rho(b))$。因此，$g$相对于 R_M保持关系。

假设 $g(\rho(x)) R_M y$，其中 $y \in \delta$ 对某个 $\delta \in \{\delta_b \mid b \in D^M\}$[29] 成立。由于 $g(\rho(x))$ 和 $f(x)$ 属于同一个 R_I-簇，并且 $R_I \circ R_M \circ R_I = R_M$ 在 $\mathfrak{B}_*$ 上，因此可得 $f(x) R_M y$。由于 f 满足关于 $\{\beta(b) \mid b \in D^M\}$ 的 CDC，存在 $z \in \mathfrak{A}_*$，使得 $x R_M z$ 且 $f(z) \in \delta$。由于 $f^{-1}(f(z))$ 在 $\mathfrak{A}_*$ 中是闭开的，存在 $z' \in max_{R_I} f^{-1}(f(z))$，使得 $z R_I z'$。由于 $R_I \circ R_M \circ R_I = R_M$ 在 $\mathfrak{A}_*$ 上，我们有 $x R_M z'$ 且 $f(z') \in \delta$。并且由 $z' \in max_{R_I} f^{-1}(f(z))$，根据构造可得 $f(z') = g(\rho(z'))$，因而 $g(\rho(z')) \in \delta$。由于 $x R_M z'$，$\rho(x)[R_I \circ R_M \circ R_I]\rho(z')$，因此 g 满足关于 $\{\beta(b) \mid b \in D^M\}$ 的 CDC。

■

与上述证明中 [16, 引理 2.50], 的情形相比，我们必须大量利用 $\mathfrak{B}$ 验证 **Mix** 这一假设，而该假设仅由命题 4.6 给出。

定理 4.20。对于每一个 $\mathcal{A} \in \boldsymbol{Uni}((\mathbf{Grz} \otimes \mathbf{K}) \oplus \boldsymbol{Mix})$，$\sigma(\rho(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$。

证明。根据命题 4.15，对于每一个 $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}$，$\sigma(\rho(\mathfrak{A})) \rightarrowtail \mathfrak{A}$。因此 $\sigma(\rho(\mathcal{A})) \subseteq \mathcal{A}$。现在，假设 $\mathcal{A} \nvdash \Gamma/\Delta$，存在 $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}$ 使得 $\mathfrak{A} \nvdash \Gamma/\Delta$。由于 $\mathfrak{A}$ 验证Mix，根据引理 4.19，我们有 $\sigma(\rho(\mathfrak{A})) \nvdash \Gamma/\Delta$。因此 $Ru(\sigma(\rho(\mathcal{A}))) \subseteq Ru(\mathcal{A})$，根据定理 2.27，$\mathcal{A} \subseteq \sigma(\rho(\mathcal{A}))$。因此 $\sigma(\rho(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$。

■

上述定理是 [36, 引理 4.4]，的对应项；该引理后来也通过稳定典范规则的方法在 [16, 定理 2.51] 中得到了证明。得出这一结果后，便可通过一些众所周知的常规论证得到以下结果，例如 [16, 17] 和 [7] 中所示的论证。

引理 4.21. 对于每个 $L \in \mathbf{NExt}(\boldsymbol{IntK}^R_\Box)$ 和 $M \in \mathbf{NExt}(\boldsymbol{S4} \otimes \boldsymbol{K}^R)$，以下结论成立：

- $Alg(\tau(L)) = \tau(Alg(L))$

[29]请回想，δ_b 正是 $\beta(b)$ 的（集合论）补集，定义见脚注 11。

- $Alg(\sigma(L)) = \sigma(Alg(L))$
- $Alg(\rho(M)) = \rho(Alg(M))$

证明。 对于任意的 $(S4 \otimes K) \oplus Mix$-代数 $\mathfrak{A}$， $\mathfrak{A} \in Alg(\tau(L))$ 当且仅当 $\mathfrak{A} \vDash t(\Gamma/\Delta)$ 对任意 $\Gamma/\Delta \in L$成立，当且仅当（根据命题 4.17）$\rho(\mathfrak{A}) \vDash \Gamma/\Delta$ 对任意 $\Gamma/\Delta \in L$ 成立，当且仅当 $\rho(\mathfrak{A}) \in Alg(L)$，当且仅当 $\mathfrak{A} \in \tau(Alg(L))$。因此， $Alg(\tau(L)) = \tau(Alg(L))$.

对于第二个结论，任意模态海廷代数 $\mathfrak{A}$， $\mathfrak{A}_*$ 都是模态 Esakia 空间。根据命题 4.11，我们知道 $\sigma(\mathfrak{A}_*)$ 满足 Mix。对于任意模态 Esakia 空间 $\mathcal{X} = (X, \leq, R, \mathcal{O})$，根据定义，$(X, \leq, R)$ 就是一个 Esakia 空间。若不考虑 R，那么 σ 在 $(X, \leq, R)$ 上的作用与 [16, 定义 3.32], 中的作用完全相同，已知这会给出一个 Grz-空间。因此， $\sigma(\mathfrak{A}_*)$ 是一个 $(Grz \otimes K) \oplus Mix$-模态空间。根据命题 4.13， $(\sigma(\mathfrak{A}))_* \cong \sigma(\mathfrak{A}_*)$，因此 $\sigma(\mathfrak{A})$ 是一个 $(Grz \otimes K) \oplus Mix$-代数。因此，根据定理 4.20，只需证明：对于任意的 $\mathfrak{A} = \sigma(\rho(\mathfrak{A}))$，若它是一个 $(Grz \otimes K) \oplus Mix$-代数，则 $\mathfrak{A} \in Alg(\sigma(L))$ 当且仅当 $\mathfrak{A} \in \sigma(Alg(L))$。

假设 $\mathfrak{A} = \sigma(\rho(\mathfrak{A})) \in \sigma(Alg(L))$，其中 $\mathfrak{A}$ 是一个 $(Grz \otimes K) \oplus Mix$-代数。对于任意 $\mathfrak{B} \in Alg(L)$，我们有，对于任意 $\Gamma/\Delta \in L$， $\mathfrak{B} \vDash \Gamma/\Delta$ 。由命题 4.14， $\rho(\sigma(\mathfrak{B})) \vDash \Gamma/\Delta$。接着由命题 4.17，对于任意 $\mathfrak{B} \in Alg(L)$ 和 $\Gamma/\Delta \in L$，有 $\sigma(\mathfrak{B}) \vDash t(\Gamma/\Delta)$。由于 $\sigma(Alg(L))$ 由 $\{\sigma(\mathfrak{B}) \mid \mathfrak{B} \in Alg(L)\}$ 生成，因此对于任意 $\Gamma/\Delta \in L$，有 $\sigma(Alg(L)) \vDash t(\Gamma/\Delta)$。于是，对于任意 $\Gamma/\Delta \in L$，有 $\mathfrak{A} \vDash t(\Gamma/\Delta)$，也就是说 $\mathfrak{A} \in Alg(\sigma(L))$。反过来，假设对于任意 $\Gamma/\Delta \in L$， $\mathfrak{A} \in Alg(\sigma(L))$， $\mathfrak{A} \vDash t(\Gamma/\Delta)$。由命题 4.17，对于任意 $\Gamma/\Delta \in L$，有 $\rho(\mathfrak{A}) \vDash \Gamma/\Delta$ 。因此 $\rho(\mathfrak{A}) \in Alg(L)$， $\mathfrak{A} = \sigma(\rho(\mathfrak{A})) \in \sigma(Alg(L))$。

对于第三种情况，设 $\mathfrak{A}$ 是一个模态海廷代数，若 $\mathfrak{A} \in \rho(Alg(M))$，则存在某个 $\mathfrak{B} \in Alg(M)$，使得 $\mathfrak{A} = \rho(\mathfrak{B})$。对于任意 $t(\Gamma/\Delta) \in M$，我们有 $\mathfrak{B} \vDash t(\Gamma/\Delta)$。根据命题 4.17，对于任意 $t(\Gamma/\Delta) \in M$， $\mathfrak{A} = \rho(\mathfrak{B}) \vDash \Gamma/\Delta$ 。因此 $\mathfrak{A} \in Alg(\rho(M))$。这证明了 $\rho(Alg(M)) \subseteq Alg(\rho(M))$。反过来，若 $\rho(Alg(M)) \vDash \Gamma/\Delta$，则根据命题 4.17，$Alg(M) \vDash t(\Gamma/\Delta)$。因此 $t(\Gamma/\Delta) \in M$，且 $\Gamma/\Delta \in \rho(M)$。我们有 $Ru(\rho(Alg(M))) \subseteq \rho(M)$，因此根据定理 2.34， $Alg(\rho(M)) \subseteq \rho(Alg(M))$。所以， $Alg(\rho(M)) = \rho(Alg(M))$

■

上述引理是 [7, 定理 5.9], 的对应结果；正如我们所见，其证明严重依赖于命题 4.17。随后，我们可以像 [16, 引理 2.53]中那样，给出直觉主义模态逻辑的模态伴侣的刻画。

命题 4.22. 对于任意 $L \in \mathbf{NExt(IntK}^R_\Box)$，我们有 $M \in \mathbf{NExt(S4} \otimes \mathbf{K}^R)$ 是 L 的模态伴侣，当且仅当 $Alg(L) = \rho(Alg(M))$

证明。对于从左到右方向，若 M 是 L 的模态伴随，则 $L = \rho(M)$。因此，根据上述引理，$Alg(L) = Alg(\rho(M)) = \rho(Alg(M))$。对于另一方向，假设 $Alg(L) = \rho(Alg(M))$，则 $\Gamma/\Delta \in L$ 当且仅当 $Alg(L) \vDash \Gamma/\Delta$当且仅当 $\rho(Alg(M)) \vDash \Gamma/\Delta$当且仅当（根据命题 4.17）$Alg(M) \vDash t(\Gamma/\Delta)$ 当且仅当（根据定理 2.27） $t(\Gamma/\Delta) \in M$。因此， M 是 L 的模态伴随。

■

以下命题是将 [3, 定理 27] 从逻辑推广到多结论后承关系的推广。

命题 4.23。 对于每个 $L \in \mathbf{NExt(IntK}^R_\Box)$，包含 Mix 的 L的模态伴侣构成一个区间 $\{M \in \mathbf{NExt((S4} \otimes \mathbf{K)} \oplus \mathbf{Mix}^R) \mid \tau(L) \subseteq M \subseteq \sigma(L)\}$。

证明。 根据引理 4.21，只需证明：对于任意 $M \in \mathbf{NExt((S4} \otimes \mathbf{K)} \oplus \mathbf{Mix}^R)$，$M$是 L的模态伴侣，当且仅当 $\sigma(Alg(L)) \subseteq Alg(M) \subseteq \tau(Alg(L))$。

对于从左到右方向，假设 M 是包含 Mix 的 L 的模态伴侣。根据命题 4.22，$Alg(L) = \rho(Alg(M))$。对于任意 $\mathfrak{A} \in Alg(M)$，有 $\rho(\mathfrak{A}) \in \rho(Alg(M))$。因此，$\rho(\mathfrak{A}) \in Alg(L)$，且 $\mathfrak{A} \in \tau(Alg(L))$。所以，$Alg(M) \subseteq \tau(Alg(L))$。为证明 $\sigma(Alg(L)) \subseteq Alg(M)$，由于 $\sigma(A)$ 是一个 $(Grz \otimes K) \oplus Mix$-代数（已在引理 4.21 的证明中证明），根据定理 4.20，只需证明：对于任意 $\mathfrak{A} = \sigma(\rho(\mathfrak{A})) \in \sigma(Alg(L))$，有 $\mathfrak{A} \in Alg(M)$。设 $\mathfrak{A} \cong \sigma(\rho(\mathfrak{A})) \in \sigma(Alg(L))$，根据引理 4.21，$\mathfrak{A} \in Alg(\sigma(L))$。因此，对于任意 $\Gamma/\Delta \in L$，有 $\mathfrak{A} \vDash t(\Gamma/\Delta)$。根据命题 4.17，对于任意 $\Gamma/\Delta \in L$，$\rho(\mathfrak{A}) \vDash \Gamma/\Delta$。所以 $\rho(\mathfrak{A}) \in Alg(L) = \rho(Alg(M))$，即对于某个 $\mathfrak{B} \in Alg(M)$，$\rho(\mathfrak{A}) \cong \rho(\mathfrak{B})$。$\mathfrak{A} = \sigma(\rho(\mathfrak{A})) \cong \sigma(\rho(\mathfrak{B})) \rightarrowtail \mathfrak{B} \in Alg(M)$。由于 $Alg(M)$ 是一个对子代数封闭的一类全称类，$\mathfrak{A} \in M$。因此，$\sigma(Alg(L)) \subseteq Alg(M)$。

对于另一个方向，假设 $\sigma(Alg(L)) \subseteq Alg(M) \subseteq \tau(Alg(L))$。根据命题 4.14，$\rho(\sigma(Alg(L))) = Alg(L)$。由于 $\sigma(Alg(L)) \subseteq Alg(M)$，我们有 $Alg(L) \subseteq \rho(Alg(M))$。由于 $Alg(M) \subseteq \tau(Alg(L))$，可得$\rho(Alg(M)) \subseteq \rho(\tau(Alg(L)))$。假设 $\mathfrak{A} \in \tau(Alg(L))$，则 $\rho(\mathfrak{A}) \in Alg(L)$，且 $\sigma(\rho(\mathfrak{A})) \in \sigma(Alg(L)) \subseteq Alg(M)$。因此 $\rho(\sigma(\rho(\mathfrak{A}))) \in \rho(Alg(M))$。根据命题 4.14，$\rho(\mathfrak{A}) \in \rho(Alg(M))$。因此，$\rho(\tau(Alg(L))) \subseteq \rho(Alg(M))$，且 $\rho(\tau(Alg(L))) = \rho(Alg(M))$。根据定义，$\rho(\tau(Alg(L))) \subseteq Alg(L)$，因此 $\rho(Alg(M)) \subseteq Alg(L)$。因此，$\rho(Alg(M)) = Alg(L)$。根据命题 4.22，$M$ 是 L 的模态伴随。

■

现在，我们得到了直觉主义模态逻辑的 Blok-Esakia 定理：

定理 4.24。

1. 映射 $\sigma : NExt(IntK^R_\Box) \to NExt((Grz \otimes K) \oplus Mix^R)$ 和$\rho : NExt((Grz \otimes K) \oplus Mix^R) \to NExt(IntK^R_\Box)$ 是格同构，且互为逆映射。*2.* 映射 $\sigma : NExt(IntK_\Box) \to NExt((Grz \otimes K) \oplus Mix)$ 和 $\rho : NExt((Grz \otimes K) \oplus Mix) \to NExt(IntK_\Box)$ 是格同构，且互为逆映射。

证明。 对于第 1 项，根据引理 4.21，只需证明 $\sigma : \mathbf{Uni(MHA)} \to \mathbf{Uni((Grz} \otimes \mathbf{K)} \oplus \mathbf{Mix)}$ 和 $\rho : \mathbf{Uni((Grz} \otimes \mathbf{K)} \oplus \mathbf{Mix)} \to \mathbf{Uni(MHA)}$ 是格同构，且互为逆映射。

我们先证明 σ 和 ρ 互为逆映射，因而是双射。对于任意 $\mathcal{A} \in$ Uni((Grz $\otimes$ K) $\oplus$ Mix)，根据定理 4.20，$\sigma(\rho(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$。令$\mathcal{A} \in$ Uni(MHA) 任意，根据命题 4.14，显然 $\mathcal{A} \subseteq \rho(\sigma(\mathcal{A}))$。假设 $\mathcal{A} \vDash \Gamma/\Delta$，即对于任意 $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}$，都有 $\mathfrak{A} \vDash \Gamma/\Delta$。根据命题 4.14，$\rho(\sigma(\mathfrak{A})) \vDash \Gamma/\Delta$，对于任意 $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}$。根据命题 4.17，对于任意 $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}$，$\sigma(\mathfrak{A}) \vDash t(\Gamma/\Delta)$。因此 $\sigma(\mathcal{A}) \vDash t(\Gamma/\Delta)$。根据命题 4.17，$\rho(\sigma(\mathcal{A})) \vDash \Gamma/\Delta$。因此 $Ru(\mathcal{A}) \subseteq Ru(\rho(\sigma(\mathcal{A})))$；根据定理 2.27 $\rho(\sigma(\mathcal{A})) \subseteq \mathcal{A}$。因此，$\rho(\sigma(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$。

接下来我们证明 σ 和 ρ 保持并与交，因而是格态射。显然，对于任意 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in$ Uni((Grz $\otimes$ K) $\oplus$ Mix)，都有 $\rho(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \subseteq \rho(\mathcal{A}) \cap \rho(\mathcal{B})$。假设 $\mathfrak{C} \in \rho(\mathcal{A}) \cap \rho(\mathcal{B})$，则存在 $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}$ 和 $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}$ 使得 $\mathfrak{C} = \rho(\mathfrak{A}) = \rho(\mathfrak{B})$，且 $\sigma(\rho(\mathfrak{A})) = \sigma(\rho(\mathfrak{B})) \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$。因此 $\rho(\sigma(\rho(\mathfrak{A}))) \in \rho(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$。由命题 4.14，$\mathfrak{C} = \rho(\mathfrak{A}) \in \rho(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$。于是 $\rho(\mathcal{A}) \cap \rho(\mathcal{B}) \subseteq \rho(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$，且 $\rho(\mathcal{A}) \cap \rho(\mathcal{B}) = \rho(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$。显然，对于任意 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in$Uni((Grz $\otimes$ K) $\oplus$ Mix)，都有 $\rho(\mathcal{A}) \vee \rho(\mathcal{B}) \subseteq \rho(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$。设 $\rho(\mathcal{A}) \vee \rho(\mathcal{B}) \vDash \Gamma/\Delta$，则 $\rho(\mathcal{A}) \vDash \Gamma/\Delta$，且 $\rho(\mathcal{B}) \vDash \Gamma/\Delta$。由命题 4.17，$\mathcal{A} \vDash t(\Gamma/\Delta)$ 且 $\mathcal{B} \vDash t(\Gamma/\Delta)$。因此 $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \vDash t(\Gamma/\Delta)$。由命题 4.17，$\rho(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vDash \Gamma/\Delta$。于是 $Ru(\rho(\mathcal{A}) \vee \rho(\mathcal{B})) \subseteq Ru(\rho(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}))$，并且由定理 2.34，$\rho(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \subseteq \rho(\mathcal{A}) \vee \rho(\mathcal{B})$。因此，$\rho(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = \rho(\mathcal{A}) \vee \rho(\mathcal{B})$，$\rho$ 保持并与交。对于任意 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in$ Uni(MHA)，根据我们上面已经证明的结果，$\sigma(\mathcal{A}) \vee \sigma(\mathcal{B}) = \sigma(\rho(\sigma(\mathcal{A}) \vee \sigma(\mathcal{B}))) = \sigma(\rho(\sigma(\mathcal{A})) \vee \rho(\sigma(\mathcal{B}))) = \sigma(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$。显然，$\sigma(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \subseteq \sigma(\mathcal{A}) \cap \sigma(\mathcal{B})$。假设 $\sigma(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \vDash \Gamma/\Delta$，而 $\sigma(\mathcal{A}) \cap \sigma(\mathcal{B}) \nvDash \Gamma/\Delta$，则存在 $\mathfrak{A} \in \sigma(\mathcal{A}) \cap \sigma(\mathcal{B})$ 使得 $\mathfrak{A} \nvDash \Gamma/\Delta$。由命题 4.14，$\rho(\mathfrak{A}) \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$。于是 $\sigma(\rho(\mathfrak{A})) \in \sigma(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$，从而 $\sigma(\rho(\mathfrak{A})) \vDash \Gamma/\Delta$，这与引理 4.19 矛盾。因此，$Ru(\sigma(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})) \subseteq Ru(\sigma(\mathcal{A}) \cap \sigma(\mathcal{B}))$，并且由定理 2.27，$\sigma(\mathcal{A}) \cap \sigma(\mathcal{B}) \subseteq \sigma(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$。因此，$\sigma(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{A}) \cap \sigma(\mathcal{B})$，$\sigma$ 保持并与交。证明完毕。

第2项直接由第1项以及命题 2.24 和 2.31 得出。

■

变换 σ 和 ρ 很有用，因为它们可能使我们能够将关于直觉主义模态逻辑的问题转移到双模态逻辑，反之亦然。特别地，在这一阶段可以容易地证明 ρ 保持可判定性、Kripke 完备性、有限模型性质和表格性，如 [23, 定理11]所示。

上述定理的第二项是 [3], 中证明的直觉主义模态逻辑的 Blok-Esakia 定理，因此我们在这里得到的是将其从逻辑推广到多结论后承关系。不过，值得注意的是，[3, Cor. 28] 比上述定理的第二项略强；上述第二项指出，Blok-Esakia 定理不仅适用于正规扩张，也适用于较弱扩张（映射 σ 和 ρ 两侧的 $\mathbf{K}$ 均可替换为 $\mathbf{C}$ ）[30] 。迄今为止我们无法证明非正规模态逻辑的相应结果，原因在于我们没有这类弱逻辑的代数语义的良好对偶描述

[30] $\mathbf{C}$ 表示“同余的”。它是具有代数语义的最小模态逻辑。详见 [3] 。

[31]。因此，我们无法利用几何直觉，而这些直觉对引理 4.19 至关重要。

话虽如此，与 [3], 中的证明相比，我们的证明可以说更加自足。由于引理 4.19 的证明中所用的构造与 [16,引理 2.50], 中的相同，这也表明了该构造的稳健性。

4.2 Dummett-Lemmon猜想

超直觉主义逻辑的 Dummett-Lemmon猜想指出，一个超直觉主义逻辑是 Kripke 完备的，当且仅当其最小模态伴侣是 Kripke 完备的。Zakharyaschev 在 [8], 证明了这一猜想，这也是其典范公式的一项重要应用。Cleani [16, 定理 2.70] 利用稳定典范规则证明，Dummett-Lemmon猜想对超直觉主义规则系统同样成立。然而，正如引言中所述，该处的证明存在一个可以修正的漏洞。具体而言，Cleani 的学位论文 [16, 引理 2.62] 中的“规则坍缩引理”存在问题，因为超直觉主义逻辑的坍缩后稳定典范规则并非所需的形式。修正这一问题的一种方法是引入所谓的“模态化稳定典范规则”，并证明在某种意义上，每条稳定典范规则都可以看作有限多个模态化稳定典范规则的合取 [17, 第 5]节。

在本节中，我们采用某种类似的策略，证明关于直觉主义模态多结论后承关系的 Dummett-Lemmon 猜想：对任意 $L \in \mathbf{NExt(IntK}^R_\Box\mathbf{)}$， L 是 Kripke 完备的，当且仅当 $\tau(L)$（即包含 Mix 的最小模态伴侣）是 Kripke 完备的。与 [17], 中引入类似模态化稳定典范规则的做法不同，该证明仅使用直觉主义模态逻辑的稳定典范规则（也包括双模态逻辑的稳定典范规则）以及上一节所证明的 Blok-Esakia 定理，因而可视为我们迄今工作的顶点。

我们首先给出直觉主义模态逻辑设定下 Kripke 框架的定义。

定义 4.25. 一个直觉主义模态克里普克框架 是三元组 $(X, \leq, R)$，其中 X 是非空集合， $\leq$ 是 X 上的偏序，且 $R \subseteq X \times X$ 满足 $\leq \circ R = R \circ \leq = R$。

容易验证，对于任意直觉主义模态克里普克框架 $(X, \leq, R)$， X 的所有上集构成的集合在 $\Box_R$下封闭。在直觉主义模态克里普克框架 $(X, \leq, R)$上的赋值 是一个映射 $V\colon Prop \to Up(X)$，它可以按照标准方式递归扩展到所有直觉主义模态公式。此外，对于任意直觉主义模态克里普克框架 $\mathfrak{X} = (X, \leq, R)$，我们用 $\mathfrak{X}^*$ 表示 $\mathfrak{X}$ 的上集构成的直觉主义模态代数，其中 $\Box_R$ 的定义方式与定理 3.11 中相同。

对于任意 $S4 \otimes K$克里普克框架 $\mathfrak{F} = (X, R_I, R_M)$，显然 $\rho(\mathfrak{F}) = (\rho[X], \leq, [R_I \circ R_M \circ R_I])$ 是一个直觉主义模态克里普克框架，其中 ρ 与定义 4.10 中的完全相同（不含拓扑）。

[31]这也解释了为何与 Kripke 框架不同，Wolter 和 Zakharyaschev 所称的“框架”具有浓厚的代数性质。

以下命题可以用与命题 4.17 相同的方法证明。

命题 4.26。对于任意 $S4 \otimes K$ 克里普克框架 (X, R_I, R_M) 以及任意直觉主义模态多结论规则 Γ/Δ，$(X, R_I, R_M) \vDash t(\Gamma/\Delta)$ 当且仅当 $(\rho[X], \leq [R_I \circ R_M \circ R_I]) \vDash \Gamma/\Delta$。

我们首先如下得到 Dummett-Lemmon猜想的简单方向：

命题 4.27。对于任意 $L \in \mathbf{NExt(IntK}^{\underline{n}}_{\Box})$，如果 $\tau(L)$ 是 Kripke 完备的，那么 L 也是 Kripke 完备的。

证明。假设 $\tau(L)$ 是 Kripke 完备的。对于任意直觉主义模态多结论规则 Γ/Δ，假设 $\Gamma/\Delta \notin L$，则存在一个模态 Heyting 代数 $\mathfrak{A}$，使得 $\mathfrak{A} \vDash L$，而 $\mathfrak{A} \nvDash \Gamma/\Delta$。如果 $\sigma(\mathfrak{A}) \vDash t(\Gamma/\Delta)$，那么根据命题 4.17 $\rho(\sigma(\mathfrak{A})) \vDash \Gamma/\Delta$。由于根据命题 4.14，$\rho(\sigma(\mathfrak{A})) \cong \mathfrak{A}$，$\mathfrak{A} \vDash \Gamma/\Delta$，我们得到矛盾。因此 $\sigma(\mathfrak{A}) \nvDash t(\Gamma/\Delta)$。由于 $\rho(\sigma(\mathfrak{A})) \cong \mathfrak{A} \vDash L$，根据命题 4.17，$\sigma(\mathfrak{A}) \vDash \tau(L)$。因此 $t(\Gamma/\Delta) \notin \tau(L)$。由于 $\tau(L)$ 是 Kripke 完备的，存在一个 $(S4 \otimes K) \oplus Mix$ 克里普克框架 (X, R_I, R_M)，使得 $(X, R_I, R_M) \vDash \tau(L)$，而 $(X, R_I, R_M) \nvDash t(\Gamma/\Delta)$。现在，根据命题 4.26，$(\rho[X], \leq, [R_I \circ R_M \circ R_I]) \vDash L$，而 $(\rho[X], \leq, [R_I \circ R_M \circ R_I]) \nvDash \Gamma/\Delta$。由于 $(\rho[X], \leq, [R_I \circ R_M \circ R_I])$ 是一个直觉主义模态克里普克框架，这证明 L 是 Kripke 完备的。

■

接下来我们证明所谓的规则坍缩引理[32]。通俗地说，它描述了在双模态逻辑的稳定典范规则中，将 R_I-簇坍缩时会发生什么。

引理 *4.28*（规则坍缩引理）。对于任意 $S4 \otimes K$-模态空间 $\mathfrak{X}$，以及任意 $(S4 \otimes K) \oplus Mix$-模态空间 $\mathfrak{A}_*$，令 $\mathfrak{D}_I, \mathfrak{D}_M \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{A}_*)$，若 $\mathfrak{X} \nvDash \mu(\mathfrak{A}_*, \mathfrak{D}_I, \mathfrak{D}_M)$，则 $\sigma(\rho(\mathfrak{X})) \nvDash \mu(\sigma(\rho(\mathfrak{A}_*)), \rho\mathfrak{D}_I, \rho\mathfrak{D}_M)$，其中 $\mathfrak{D}_I = \{\delta \mid \delta \in \mathfrak{D}_I\}$，$\mathfrak{D}_M = \{\delta \mid \delta \in \mathfrak{D}_M\}$，$\rho\mathfrak{D}_I = \{\rho[\delta] \mid \delta \in \mathfrak{D}_I\}$ 且 $\rho\mathfrak{D}_M = \{\rho[\delta] \mid \delta \in \mathfrak{D}_M\}$[33]。

证明。设 $\mathfrak{X} \nvDash \mu(\mathfrak{A}_*, \mathfrak{D}_I, \mathfrak{D}_M)$。由命题 4.9，存在 $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{A}_*$，使得 f 是满射、连续且稳定，并且对 $\mathfrak{D}_I$ 和 $\mathfrak{D}_M$ 满足 CDC。定义 $g\colon \sigma(\rho(\mathfrak{X})) \to \sigma(\rho(\mathfrak{A}_*))$ 如下：$g(\rho(x)) = \rho(f(x))$。设 $\rho(x) = \rho(y)$，则 xR_Iy 且 yR_Ix。由于 f 稳定，可知 $f(x) R_I f(y)$ 且 $f(y) R_I f(x)$，因此 $f(x) \backsim f(y)$。所以，g 定义良好。由于 f 是满射，g 也是满射。接着验证 g 稳定、连续，并对 $\rho\mathfrak{D}_I, \rho\mathfrak{D}_M$ 满足 CDC。

假设 $\rho(x) R_I \rho(y)$，则 $\rho(x) \leq \rho(y)$ 属于 $\rho(\mathfrak{X})$，且 xR_Iy 属于 $\mathfrak{X}$。由于 f 是稳定的，$f(x) R_I f(y)$。因此，$\rho(f(x)) \leq \rho(f(y))$ 属于 $\rho(\mathfrak{A}_*)$，并且根据定义，$\rho(f(x)) R_I \rho(f(y))$ 属于 $\sigma(\rho(\mathfrak{A}_*))$，也就是说，$g(\rho(x)) R_I g(\rho(y))$。假设 $\rho(x) R_M \rho(y)$，则 $\rho(x) [R_I \circ R_M \circ R_I] \rho(y)$ 属于 $\rho(\mathfrak{X})$。因此，根据定义，$xR_I \circ R_M \circ R_I y$ 属于 $\mathfrak{X}$。存在 x_1、x_2 使得 $xR_Ix_1R_Mx_2R_Iy$。由于 f 是稳定的，$f(x) R_I f(x_1) R_M f(x_2) R_I f(y)$.

[32]这里，我们实际上证明的是比 [16, 引理 2.62] 更弱的结果，而正如上文所述，这是有问题的。
[33]回想一下，我们用“$^-$”表示集合论补集。

因此， $f(x)R_I \circ R_M \circ R_I f(y)$；根据定义， $\rho(f(x))[R_I \circ R_M \circ R_M]\rho(f(y))$，也就是说，$\rho(f(x))R_M\rho(f(y))$ 属于 $\sigma(\rho(\mathfrak{A}_*))$。因此， $g(\rho(x))R_M g(\rho(y))$。这证明了 g是稳定的。

对于任意满足 $F \subseteq \mathfrak{A}_*$ 的 $\rho[F] \subseteq \rho(\mathfrak{A}_*)$，我们有 $x \in \rho^{-1}(g^{-1}(\rho[F]))$ 当且仅当 $\rho(x) \in g^{-1}(\rho[F])$ 当且仅当 $g(\rho(x)) \in \rho[F]$ 当且仅当 $\rho(f(x)) \in \rho[F]$ 当且仅当 $f(x) \in \rho^{-1}(\rho[F])$ 当且仅当 $x \in f^{-1}(\rho^{-1}(\rho[F]))$。由于 f连续，我们知道 $\rho^{-1}(g^{-1}(\rho[F])) = f^{-1}(\rho^{-1}(\rho[F]))$ 在 $\mathfrak{X}$ 中是闭开的。显然， $\rho^{-1}(g^{-1}(\rho[F]))$ 不会切分 $\mathfrak{X}$ 中的任何 R_I-簇。由于 $\sigma(\rho(\mathfrak{X}))$ 具有商拓扑， $g^{-1}(\rho[F]) = \rho[\rho^{-1}(g^{-1}(\rho[F]))]$ $= \rho[f^{-1}(\rho^{-1}(\rho[F]))]$ 在 $\sigma(\rho(\mathfrak{X}))$ 中是闭开的。因此， g是连续的。

假设 $R_M[g(\rho(x))] \cap \rho[\delta] \neq \emptyset$，其中 $\delta \in \mathfrak{D}_M$，那么存在 $a \in \delta$，使得 $g(\rho(x))R_M\rho(a)$。因此， $\rho(f(x))R_M\rho(a)$ 属于 $\sigma(\rho(\mathfrak{A}_*))$，且 $\rho(f(x))[R_I \circ R_M \circ R_I]\rho(a)$。根据定义， $f(x)R_I \circ R_M \circ R_I a$属于 $\mathfrak{A}_*$。由于 $\mathfrak{A}_*$ 满足 Mix，$R_I \circ R_M \circ R_I = R_M$。因此 $f(x)R_M a$。由于 f 对 $\mathfrak{D}_M$ 满足 CDC，存在y，使得 $xR_M y$且 $f(y) \in \delta$。由于 R_I是自反的， $xR_I \circ R_M \circ R_I y$，并且根据定义， $\rho(x)[R_I \circ R_M \circ R_I]\rho(y)$ 属于 $\rho(\mathfrak{A}_*)$。也就是说，根据 σ 的定义， $\rho(x)R_M\rho(y)$ 属于 $\sigma(\rho(\mathfrak{A}_*))$，且 $g(\rho(y)) = \rho(f(y)) \in \rho[\delta]$。因此 $g[R_M[\rho(x)]] \cap \rho[\delta] \neq \emptyset$。这证明了 g 对 $\overline{\rho\mathfrak{D}_M}$满足 CDC。

假设 $R_I[g(\rho(x))] \cap \rho[\delta] \neq \emptyset$，其中 $\delta \in \mathfrak{D}_I$，那么存在 $a \in \delta$，使得 $g(\rho(x))R_I\rho(a)$。因此， $\rho(f(x)) = g(\rho(x) \leq \rho(a)$，且属于 $\rho(\mathfrak{A}_*)$。根据定义，$f(x)R_I a$。由于 f满足 CDC 或 $\mathfrak{D}_I$，存在 y，使得 $xR_I y$且 $f(y) \in \delta$。于是 $\rho(x) \leq \overline{\rho(y)}$，且属于 $\rho(\mathfrak{X})$；根据 σ的定义，我们有 $\rho(x)R_I\rho(y)$ 属于$\sigma(\rho(\mathfrak{X}))$，并且 $g(\rho(y)) = \rho(f(y)) \in \rho[\delta]$。这证明了 g满足关于 $\rho\mathfrak{D}_I$的 CDC。

因此， $\sigma(\rho(\mathfrak{X})) \nVdash \mu(\sigma(\rho(\mathfrak{A}_*))\, \rho\mathfrak{D}_I, \overline{\rho\mathfrak{D}}\, \overline{\rho\mathfrak{D}_M})$。

■

除了规则坍缩引理之外，我们还需要证明，命题 3.19 中陈述的反驳条件，对于直觉主义模态克里普克框架，本质上同样适用。

定理 4.29。对于任意直觉主义模态克里普克框架$(X, \leq, R)$，有$(X, \leq, R) \nVdash \rho(\mathfrak{A}, D^{\to}, D^{\Box})$ 当且仅当存在一个满射稳定保序映射 $f : X \to X_A$，它满足 ***CDC***$_\Box$，对于任意 $\beta(a)$，其中 $a \in D^{\Box}$，并且满足 ***CDC***$_\to$，对于任意 $\beta(a) \setminus \beta(b)$，其中$(a, b) \in D^{\to}$。

证明。见 A.1。

■

同理（事实上更容易），我们可以得到以下适用于双模态 Kripke 框架的反驳条件。

定理 4.30。对于任意双模态 ***Kripke*** 框架(X, R_I, R_M)，$(X, R_I, R_M) \nVdash \mu(\mathfrak{A}, D^I, D^M)$ 当且仅当存在一个满射保持关系（或稳定）映射 $f{:}X \to X_A$，它满足 ***CDC***$_\Box$，对于任意 $\beta(a)$ 和 $\beta(b)$，其中 $a \in D^I$ 且 $b \in D^M$。

接着，我们证明规则翻译引理，它对应于 [16,Lem. 2.56]，并表明 G¨odel 翻译将直觉主义模态逻辑的稳定典范规则与双模态逻辑的稳定典范规则联系起来。

引理 *4.31*（规则翻译引理）。对于每个稳定典范规则 $\rho(\mathfrak{B}, D^{\to}, D^{\Box})$ 以及每个 $(S4 \otimes K) \oplus Mix$-模态空间 $\mathfrak{X}$，我们有 $\mathfrak{X} \vDash t(\rho(\mathfrak{B}_*, \mathfrak{D}_{\to}, \mathfrak{D}_M))$ 当且仅当 $\mathfrak{X} \vDash \mu(\sigma(\mathfrak{B}_*)\ \mathfrak{D}_I, \mathfrak{D}_M)$，其中 $\mathfrak{D}_{\to} = \{\beta(a) \setminus \beta(b) \mid (a,b) \in D^{\to}\}$，$\mathfrak{D}_M = \{\beta(a) \mid a \in D^{\Box}\}$，且 $\mathfrak{D}_I = \{\beta(a) \cup \beta(b) \mid (a,b) \in D^{\to}\}$。

证明。根据命题 4.13 和 4.17，只需证明 $\rho(\mathfrak{X}) \vDash \rho(\mathfrak{B}_*, \mathfrak{D}_{\to}, \mathfrak{D}_M)$ 当且仅当 $\mathfrak{X} \vDash \mu(\sigma(\mathfrak{B}_*)\ \mathfrak{D}_I, \mathfrak{D}_M)$。

假设 $\mathfrak{X} \nvDash \mu(\sigma(\mathfrak{B}_*)\ \mathfrak{D}_I, \mathfrak{D}_M)$，则存在连续稳定满射$f: \mathfrak{X} \to \sigma(\mathfrak{B}_*)$，满足 CDC$_{\Box}$ 对任意 $\beta(a) \in \mathfrak{D}_M$ 以及任意 $\beta(b) \in \mathfrak{D}_I$均成立。定义 $g: \rho(\mathfrak{X}) \to \mathfrak{B}_*$为 $g(\rho(x)) = f(x)$。假设 $x \backsim y$属于 $\mathfrak{X}$，则 xR_Iy且yR_Ix。由于 f稳定，$f(x)R_If(y)$ 和 $f(y)R_If(x)$ 属于 $\sigma(\mathfrak{B}_*)$，也就是说，$f(x) \subseteq f(y)$ 和 $f(y) \subseteq f(x)$ 属于 $\mathfrak{B}_*$。因此 $f(x) = f(y)$，g定义良好。

由于 f 是满射，故 g也是满射。设 $\rho(x) \leq \rho(y)$在 $\rho(\mathfrak{X})$中，则 xR_Iy 在 $\mathfrak{X}$中；由于f是稳定的，$f(x)R_If(y)$在 $\sigma(\mathfrak{B}_*)$中，即 $f(x) \subseteq f(y)$在 $\mathfrak{B}_*$中。因此 $g(\rho(x)) \subseteq g(\rho(y))$，$g$是保序的。设 $\rho(x)[R_I \circ R_M \circ R_I]\rho(y)$，则存在$x_1$、$x_2$，使得 $xR_Ix_1R_Mx_2R_Iy$在 $\mathfrak{X}$中。由于 f是稳定的，$f(x)R_If(x_1)R_Mf(x_2)R_If(y)$在 $\sigma(\mathfrak{B}_*)$中，即 $f(x) \subseteq f(x_1)Rf(x_2) \subseteq f(y)$在 $\mathfrak{B}_*$中。由于 $\mathfrak{B}_*$是模态 Esakia 空间，由命题 4.11，$\subseteq \circ R \circ \subseteq = R$。因此 $f(x)Rf(y)$在 $\mathfrak{B}_*$中，即$g(\rho(x))Rg(\rho(y))$。这就证明了 g 是稳定的。

对于任意 $p \in \mathfrak{B}_*$，我们有 $x \in \rho^{-1}(g^{-1}(p))$ 当且仅当 $g(\rho(x)) = p$ 当且仅当 $f(x) = p$ 当且仅当$x \in f^{-1}(p)$。由于 f连续，$\rho^{-1}(g^{-1}(p)) = f^{-1}(p)$ 在 $\mathfrak{X}$ 中是闭开的。显然，$\rho^{-1}(g^{-1}(p))$ 不会切割任何 R_I-簇，因此，由于该拓扑是商拓扑，$g^{-1}(p)$ 在 $\rho(\mathfrak{X})$ 中是闭开的。因此，g 连续。

假设 $\uparrow g(\rho(x)) \cap \beta(a) \setminus \beta(b) \neq \emptyset$ 其中 $(a,b) \in D^{\to}$，则 $\uparrow f(x) \cap \beta(a) \setminus \beta(b) \neq \emptyset$。因此 $R_I[f(x)] \not\subseteq \beta(a) \cup \beta(b)$。由于 f 对 $\beta(a) \cup \beta(b)$ 满足 CDC$_{\Box}$，我们有 $f[R_I[x]] \not\subseteq \beta(a) \cup \beta(b)$。存在 xR_Iy，使得 $f(y) \in \beta(a)$，而 $f(y) \notin \beta(b)$。于是，$\rho(x) \leq \rho(y)$ 在 $\rho(\mathfrak{X})$ 中，$g(\rho(y)) = f(y) \in \beta(a) \setminus \beta(b)$，因此 $g[\uparrow \rho(x)] \cap \beta(a) \setminus \beta(b) \neq \emptyset$。所以，$g$ 对任意满足 $(a,b) \in D^{\to}$ 的 $\beta(a) \setminus \beta(b)$ 都满足 CDC$_{\to}$。

假设 $g[[R_I \circ R_M \circ R_I][\rho(x)]] \subseteq \beta(a)$，其中 $a \in D^{\Box}$，则对于任意 $xR_My \in \mathfrak{X}$，由于 R_I 是自反的，$xR_I \circ R_M \circ R_Iy$。根据定义，$\rho(x)[R_I \circ R_M \circ R_I]\rho(y)$ 属于 $\rho(\mathfrak{X})$。由于 $g[[R_I \circ R_M \circ R_I][\rho(x)]] \subseteq \beta(a)$，可得 $g(\rho(y)) = f(y) \in \beta(a)$。因此 $f[R_M[x]] \subseteq \beta(a)$，又由于 f满足 CDC$_{\Box}$，适用于 $\beta(a)$，我们有$R_M[f(x)] \subseteq \beta(a)$，即 $R[g(\rho(x))] \subseteq \beta(a)$ 属于 $\mathfrak{B}_*$。因此，对于任意满足 $a \in D^{\Box}$ 的 $\beta(a)$，g 都满足 CDC$_{\Box}$。根据命题 3.19，$\rho(\mathfrak{X}) \nvDash \rho(\mathfrak{B}_*, \mathfrak{D}_{\to}, \mathfrak{D}_M)$。

对于另一方向，假设 $\rho(\mathfrak{X}) \nvDash \rho(\mathfrak{B}_*, \mathfrak{D}_{\to}, \mathfrak{D}_M)$，由命题 3.19，存在一个满射稳定普里斯特利态射 $f: \rho(\mathfrak{X}) \to \mathfrak{B}_*$，它对任意满足 $(a,b) \in D^{\to}$ 的 $\beta(a) \setminus \beta(b)$ 满足 CDC$_{\to}$，并且对任意满足$a \in D^{\Box}$的 $\beta(a)$ 满足 CDC$_{\Box}$。定义 $g: \mathfrak{X} \to \sigma(\mathfrak{B}_*)$ 如下：$g(x) = f(\rho(x))$.

由于 f 是满射，故 g也是满射。设 xR_Iy 属于 $\mathfrak{X}$，则 $\rho(x) \leq \rho(y)$ 属于 $\rho(\mathfrak{X})$。由于f是保序的，$f(\rho(x)) \subseteq f(\rho(y))$，即 $f(\rho(x))R_If(\rho(y))$ 属于 $\sigma(\mathfrak{B}_*)$，并且 $g(x)R_Ig(y)$。因此 g关于 R_I是保持关系的。设 xR_My属于 $\mathfrak{X}$，由于 R_I 是自反的，$xR_I \circ R_M \circ R_Iy$。由定义，$\rho(x)[R_I \circ R_M \circ R_I]\rho(y)$ 属于$\rho(\mathfrak{X})$。由于 f是稳定的，$f(\rho(x))Rf(\rho(y))$ 属于 $\mathfrak{B}_*$，即 $g(x)R_Mg(y)$ 属于 $\sigma(\mathfrak{B}_*)$。因此 g关于 R_M是保持关系的。

对于任意的 $p \in \sigma(\mathfrak{B}_*)$，$g^{-1}(p) = \rho^{-1}(f^{-1}(p))$。由于 f连续，$f^{-1}(p)$ 是

$\rho(\mathfrak{X})$ 中的闭开集。由于 $\rho(\mathfrak{X})$ 具有商拓扑，$\rho^{-1}(f^{-1}(p))$ 是 $\mathfrak{X}$ 中的闭开集。因此 g 连续。

假设 $g[R_I[x]] \subseteq \beta(a) \cup \overline{\beta(b)}$，其中 $(a,b) \in D^{\rightarrow}$。对于 $\rho(\mathfrak{X})$ 中任意的 $\rho(x) \leq \rho(y)$，xR_Iy属于 $\mathfrak{X}$，且 $f(\rho(y)) = g(y) \in \beta(a) \cup \overline{\beta(b)}$。因此 $f[\uparrow\rho(x)] \cap \beta(a) \setminus \beta(b) = \emptyset$。由于 f满足 CDC$_{\rightarrow}$对 $\beta(a) \setminus \beta(b)$ 成立，我们有 $\uparrow f(\rho(x)) \cap \beta(a) \setminus \beta(b) = \emptyset$。因此 $R_I[g(x)] \cap \beta(a) \setminus \beta(b) = \emptyset$，即 $R_I[g(x)]] \subseteq \beta(a) \cup \beta(b)$。这证明 g 对 $\mathfrak{D}_I$ 中任意元素都满足 CDC$_{\Box}$。

假设 $g[R_M[x]] \subseteq \beta(a)$，其中 $a \in D^{\Box}$。对于 $\rho(\mathfrak{X})$ 中任意的 $\rho(x)$ $[R_I \circ R_M \circ R_I]\rho(y)$，根据定义，$xR_I \circ R_M \circ R_I y$属于 $\mathfrak{X}$。由于 $\mathfrak{X}$验证 Mix，$R_I \circ R_M \circ R_I = R_M$，因此 xR_My。由于 $g[R_M[x]] \subseteq \beta(a)$，可得 $f(\rho(y)) = g(y) \in \beta(a)$。因此 $f[[R_I \circ R_M \circ R_I][\rho(x)]] \subseteq \beta(a)$。由于 f满足 CDC$_{\Box}$对 $\beta(a)$ 成立，我们有 $R[f(\rho(x))] \subseteq \beta(a)$。因此 $R_M[g(x)] = R[f(\rho(x))] \subseteq \beta(a)$。这证明$g$对任意满足 $a \in D^{\Box}$ 的 $\beta(a)$ 都满足 CDC$_{\Box}$。因此，根据命题 4.9，$\mathfrak{X} \nvDash \mu(\sigma(\mathfrak{B}_*)\ \mathfrak{D}_I, \mathfrak{D}_M)$。

■

我们也可以像 [16, Lem. 2.56] 那样用代数术语表述上述引理：对于每个稳定典范规则 $\rho(\mathfrak{B}, D^{\rightarrow}, D^{\Box})$ 以及每个 $(S4 \otimes K) \oplus Mix$-代数 $\mathfrak{A}$，都有 $\mathfrak{A} \vDash t(\rho(\mathfrak{B}, D^{\rightarrow}, D^{\Box}))$ 当且仅当 $\mathfrak{A} \vDash \mu(\sigma(\mathfrak{B})\ D^I, D^M)$，其中$D^I = \{\neg a \vee b \mid (a,b) \in D^{\rightarrow}\}$ 且 $D^M = D^{\Box}$。

现在，我们可以完成 Dummett-Lemmon猜想的证明，这也是本节的主要结果。

定理 4.32. 对于任意 $L \in \mathbf{NExt}(\boldsymbol{IntK}^R_{\Box})$，$L$ 是 *Kripke* 完备的，当且仅当 $\tau(L)$ 是 *Kripke* 完备的。

证明。从右到左方向由命题 4.27 给出。对于另一方向，任取 $L \in$ NExt(IntK$^R_{\Box}$)，假设 L 是 Kripke 完备的，并且$\Gamma/\Delta \notin \tau(L)$，其中 Γ/Δ 是一个双模态多结论规则。根据命题 4.6，我们可以假设 $\Gamma/\Delta = \mu(\mathfrak{A}_*, \mathfrak{D}_I, \mathfrak{D}_M)$，其中 $\mathfrak{A}$ 是一个有限的 $(S4 \otimes K) \oplus Mix$-代数，且 $\mathfrak{D}_I, \mathfrak{D}_M \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{A}_*)$。根据推论 2.28 和定理 4.8，存在一个 $(S4 \otimes K) \oplus Mix$-模态空间 $\mathfrak{X}$，使得 $\mathfrak{X} \vDash \tau(L)$ 且 $\mathfrak{X} \nvDash \mu(\mathfrak{A}_*, \mathfrak{D}_I, \mathfrak{D}_M)$。根据引理 4.28，$\sigma(\rho(\mathfrak{X})) \nvDash \mu(\sigma(\rho(\mathfrak{A}_*))\ \rho\mathfrak{D}_I, \rho\mathfrak{D}_M)$，其中 $\rho\mathfrak{D}_I = \{\rho[\delta] \mid \delta \in \mathfrak{D}_I\}$ 且 $\rho\mathfrak{D}_M = \{\rho[\delta] \mid \delta \in \mathfrak{D}_M\}$。注意，$\sigma(\rho(\mathfrak{X}))$ 是一个 $(Grz \otimes K) \oplus Mix$-模态空间。

现在由定理 4.24，存在一个 $L' \in$ NExt(IntK$^R_{\Box}$)，使得 $\sigma(L') =$(Grz $\otimes$K) $\oplus$Mix$^R \oplus \mu(\sigma(\rho(\mathfrak{A}_*))\ \rho\mathfrak{D}_I, \rho\mathfrak{D}_M)$，即 (Grz $\otimes$K) $\oplus$ Mix$^R \oplus$ $t(\Gamma/\Delta) \mid \Gamma/\Delta \in L'\}$。因此，$\sigma(\rho(\mathfrak{X})) \nvDash t(\Gamma/\Delta)$，其中某个 $\Gamma/\Delta \in L'$。由定理 3.8，我们可以假设 Γ/Δ 是形式为 $\rho(\mathfrak{B}, D^{\rightarrow}, D^{\Box})$ 的稳定典范规则。因此 $\sigma(\rho(\mathfrak{X})) \nvDash t(\rho(\mathfrak{B}, D^{\rightarrow}, D^{\Box}))$。由命题 4.17 和命题 4.14，$\rho(\mathfrak{X}) \nvDash \rho(\mathfrak{B}, D^{\rightarrow}, D^{\Box})$。由于 $\mathfrak{X} \vDash \tau(L)$，由命题 4.17，$\rho(\mathfrak{X}) \vDash L$。因此，$\rho(\mathfrak{B}, D^{\rightarrow}, D^{\Box}) \notin L$。由于 L 是 Kripke 完备的，存在一个直觉主义模态克里普克框架 $\mathfrak{F} = (X, \leq, R)$，使得 $\mathfrak{F} \vDash L$，而 $\mathfrak{F} \nvDash \rho(\mathfrak{B}, D^{\rightarrow}, D^{\Box})$。将$\mathfrak{F}$视为一个 $(S4 \otimes K) \oplus Mix$-双模态克里普克框架，由于 $\rho(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F} \vDash L$，根据命题 4.26，$\mathfrak{F} \nvDash t(\rho(\mathfrak{B}, D^{\rightarrow}, D^{\Box}))$ 且 $\mathfrak{F} \vDash \tau(L)$。

接下来我们证明 (S4 ⊗ K) ⊕Mix^R ⊕ {t(Γ/Δ) | Γ/Δ ∈ L'} ⊆ (S4 ⊗K) ⊕ Mix^R ⊕ μ(σ(ρ($\mathfrak{A}_*$)) $\rho\mathfrak{D}_I, \rho\mathfrak{D}_M$)：设 $\mathfrak{X}$ 是任意一个 $(S4 \otimes K) \oplus Mix$-模态空间，并假设对于某个 Γ/Δ ∈ L'，有 $\mathfrak{X} \nVdash t$(Γ/Δ)。由定理 3.8，我们可以假设 Γ/Δ 是形式为 $\rho(\mathfrak{C}_*, \mathfrak{D}'_{\rightarrow}, \mathfrak{D}'_M)$ 的稳定典范规则。由于 $\mathfrak{X} \nVdash t(\rho(\mathfrak{C}_*, \mathfrak{D}'_{\rightarrow}, \mathfrak{D}'_M))$，由引理 4.31，$\mathfrak{X} \nVdash \mu(\sigma(\mathfrak{C}_*)\ \mathfrak{D}'_I, \mathfrak{D}'_M)$。由引理 4.28 以及 $\sigma(\rho(\sigma(\mathfrak{C}_*))) = \sigma(\mathfrak{C}_*)$ 这一事实可知，$\sigma(\rho(\mathfrak{X})) \nVdash \mu(\sigma(\mathfrak{C}_*)\ \mathfrak{D}'_I, \mathfrak{D}'_M)$。由引理 4.31，$\sigma(\rho(\mathfrak{X})) \nVdash t(\rho(\mathfrak{C}_*, \mathfrak{D}'_{\rightarrow}, \mathfrak{D}'_M))$。由于 σ(ρ($\mathfrak{X}$)) 是一个 $(Grz \otimes K) \oplus Mix$-模态空间，且 (Grz ⊗K) ⊕Mix^R ⊕ μ(σ(ρ($\mathfrak{A}_*$)) $\rho\mathfrak{D}_I$, $\rho\mathfrak{D}_M$) =(Grz ⊗K) ⊕Mix^R ⊕ {t(Γ/Δ) | Γ/Δ ∈ L'}，我们得到 $\sigma(\rho(\mathfrak{X})) \nVdash \mu(\sigma(\rho($$\mathfrak{A}_*$)) $\rho\mathfrak{D}_I, \rho\mathfrak{D}_M$)。由命题 4.15 和对偶性，$\mathfrak{X} \nVdash \mu(\sigma(\rho(\mathfrak{A}_*))\ \rho\mathfrak{D}_I, \rho\mathfrak{D}_M)$。这就证明了：对于任意 $(S4 \otimes K) \oplus Mix$-模态空间，若 $\mathfrak{X} \nVdash$(S4 ⊗K) ⊕Mix^R ⊕ {t(Γ/Δ) | Γ/Δ ∈ L'}，则 $\mathfrak{X} \nVdash \mu(\sigma(\rho(\mathfrak{A}_*))\ \rho\mathfrak{D}_I, \rho\mathfrak{D}_M)$。由定理 2.27 和 4.8，(S4 ⊗K) ⊕Mix^R ⊕ {t(Γ/Δ) | Γ/Δ ∈ L'} ⊆ (S4 ⊗K) ⊕ Mix^R ⊕ μ(σ(ρ($\mathfrak{A}_*$)) $\rho\mathfrak{D}_I, \rho\mathfrak{D}_M$)。

现在，由于 $\mathfrak{F} \nVdash t(\rho(\mathfrak{B}, D^{\rightarrow}, D^{\Box}))$，其中 $\rho(\mathfrak{B}, D^{\rightarrow}, D^{\Box}) \in L'$，我们有$\mathfrak{F} \nVdash \mu(\sigma$($\rho$($\mathfrak{A}_*$)) $\rho\mathfrak{D}_I, \rho\mathfrak{D}_M$)。因此，根据定理 4.30，存在一个满射稳定映射 $f: X \to \sigma$(ρ($\mathfrak{A}_*$))，它对 $\rho\mathfrak{D}_I$ 和$\rho\mathfrak{D}_M$中的任意元素都满足 CDC。我们构造一个新的双模态 Kripke 框架 $\mathfrak{F}' = (X', R_I, R_M)$，如下所示：对于任意 $x \in X$，设 $f(x) = \{a_1, ..., a_n\}$where $a_1, ..., a_n \in \mathfrak{A}_*$（一个 R_I-簇），用它的 n 个副本替换 x，记作 $x_1, ..., x_n$，然后令 X'为所有此类元素构成的集合。对于任意 $x_i, y_j \in X'$（x_i 是 x 的一个副本，而 y_j 是 y的一个副本），定义$x_i R_I y_j$当且仅当 $x \leq y$（在 $\mathfrak{F}$中），并定义 $x_i R_M y_j$当且仅当 $x R_M y$。容易验证，$\mathfrak{F}'$是一个（$S4 \otimes K$）$\oplus Mix$-克里普克框架。由于 $\rho(\mathfrak{F}') = \mathfrak{F} = \rho(\mathfrak{F}) \vDash L$，根据命题 4.26，$\mathfrak{F}' \vDash \tau(L)$。

于是我们定义 $g: \mathfrak{F}' \to \mathfrak{A}_*$ 如下：$g(x_i) = a_i$，其中 x_i 是 x的副本，且 $f(x) = \{a_1, ..., a_n\}$。由于 f是满射，根据 X'的构造，g是满射。对于任意 x_i，$y_j \in X'$（例如 $g(x_i) = a_i$，$g(y_j) = b_j$），假设 $x_i R_I y_j$属于 $\mathfrak{F}'$，那么 $x \leq y$ 属于 $\mathfrak{F}$（或者在将 $\mathfrak{F}$ 视为双模态 Kripke 框架时，$x R_I y$ 属于 $\mathfrak{F}$）。由于f是稳定的，$f(x) R_I f(y)$ 属于 σ(ρ($\mathfrak{A}_*$))，即 $f(x) \leq f(y)$ 属于 $\rho(\mathfrak{A}_*)$。根据构造，a_i是 $f(x)$的一个元素，且 b_j是 $f(y)$的一个元素，因此 $a_i R_I b_j$属于$\mathfrak{A}_*$，即 $g(x_i) R_I g(y_j)$。假设 $x_i R_M y_j$，则 $x R_M y$属于 $\mathfrak{F}$。由于 f是稳定的，$f(x)[R_I \circ R_M \circ R_M] f(y)$。由于 $\mathfrak{A}_*$验证了 Mix，$R_I \circ R_M \circ R_I = R_M$，因此$f(x)[R_M] f(y)$。我们有 $a_i R_M b_j$，即 $g(x_i) R_M g(b_j)$。因此，g是稳定的。

假设 $R_M[g(x_i)] \cap \delta \neq \emptyset$其中 $\delta \in \mathfrak{D}_M$，存在 $p \in \delta$使得$g(x_i) R_M p$。因此 $\rho(p) \in \rho[\delta]$，且 $f(x) = \rho(g(x_i))[R_M]\rho(p)$。由于 f对 $\rho[\delta]$ 满足CDC，存在 $z \in \mathfrak{F}$使得 $x R_M z$ 且 $f(z) \in \rho[\delta]$。根据构造，存在 z_j 使得 $g(z_j) \in \delta$。于是，由于 $x_i R_M z_j$，$g[R_M[x_i]] \cap \delta \neq \emptyset$。因此，$g$ 对 $\mathfrak{D}_M$中的任意元素都满足 CDC。同理，我们可以证明 g 对 $\mathfrak{D}_I$中的任意元素都满足 CDC。因此，根据定理 4.30，$\mathfrak{F}' \nVdash \mu(\mathfrak{A}_*, \mathfrak{D}_I, \mathfrak{D}_M)$。由于 $\mathfrak{F}' \vDash \tau(L)$，这证明了 $\tau(L)$ 是 Kripke 完备的。

■

上述定理不仅本身很有趣，也加强了直觉模态逻辑格与双模态逻辑（

tice of normal extensions of the bimodal logic $(\mathbf{S4} \otimes \mathbf{K}) \oplus \mathbf{Mix}$ 的正规扩张格之间的联系。它丰富了我们的工具，使我们能够借助哥德尔翻译研究直觉主义模态逻辑或双模态逻辑。具体而言，它使我们能够将直觉主义模态多结论后承关系的 Kripke 完备性问题化归为双模态多结论后承关系的同一问题，反之亦然。

5 结论

本文提出了适用于直觉主义模态逻辑的稳定典范公式与规则方法。我们证明，每个直觉主义模态多结论后承关系都可以通过稳定典范规则公理化。此外，我们的规则也证明了很有用。特别是，结合对 [37]和 [16, 17], 中已知技术的一些调整，我们给出了 Blok-Esakia 定理的另一种证明，并证明了直觉主义模态逻辑中 Dummett-Lemmon 猜想的一个类似命题。因此，我们希望本研究能够推动稳定典范规则理论的发展，并为研究直觉主义模态逻辑提供一种统一的方法。

由于篇幅所限，本文未纳入同时具有 $\Box$和 $\Diamond$ 的直觉主义模态逻辑的稳定典范规则。通过对第 3 节中的技术作一些调整，可以为$\mathbf{IntK}_{\Box,\Diamond}$（即以满足 $\Diamond\bot = \bot$ 和 $\Diamond(p \vee q) = \Diamond p \vee \Diamond q$的 $\Diamond$ 扩展$\mathbf{IntK}_{\Box}$）构造这类规则。特别是，我们可以轻松证明相应的完备性定理，并利用 [32]中的对偶性给出这些规则的对偶描述。然而，一旦要求 $\Box$与 $\Diamond$之间存在某些交互，如何在命题 3.3 的对应项中进行过滤就不明确了。关于同时具有 $\Box$ 和 $\Diamond$ 的某些直觉主义模态逻辑的有限模型性质的一些开放问题若能得到解决，或许有助于回答这类问题。

此外，采用类似的方法，也可以为 Heyting-Lewis逻辑发展稳定典范规则。Litak 和 Visser 在 [38]中将这类逻辑引入为带有严格蕴涵的超直觉主义逻辑。这或许并不令人惊讶，因为蕴涵常常可以视为隐式模态算子。事实上，我们证明直觉主义模态逻辑的 Blok-Esakia 定理时所采用的策略，也让我们发现了 [39][34]中给出的 Heyting-Lewis逻辑 Blok-Esakia 定理证明中的一个漏洞。据我们所知，迄今 Heyting-Lewis逻辑是否满足 Blok-Esakia 定理仍是一个开放问题。

最后，本文对稳定典范规则的应用远未穷尽。我们很可能可以将稳定典范规则应用于直觉主义模态逻辑中的其他一些主题。 [41]给出了这样一个例子：其中使用超直觉主义逻辑和传递模态逻辑的稳定典范规则，对这些逻辑的可容许性的可判定性给出了另一种证明。由于对于大多数直觉主义模态逻辑而言，是否存在一种算法来判定某条规则的可容许性，

[34]在 [39, 引理 4.18], 中，对形如 $\Box_M\psi$ 的公式进行归纳时，归纳步骤行不通。这个引理对应于 Heyting-Lewis逻辑中引理 4.19 的一个版本，而该版本等价于 Blok-Esakia 定理。更多详情请参见 [40, 第 5] 章。

仍是一个开放问题，我们希望并相信，我们为直觉主义模态逻辑提出的稳定典范规则也能帮助我们解决这些问题。

致谢

作者感谢审稿人提出的许多宝贵建议，这些建议使本文得以完善。作者非常感谢硕士导师 Nick Bezhan- ishvili 的指导，正是这份指导促成了本文的初稿。作者也感谢 Rodrigo Almeida 和 Antonio Maria Cleani 提供的有益评论及精彩讨论。

A 稳定典范规则在直觉主义模态逻辑中的应用

A.1 定理 4.29 的证明

对于任意直觉主义模态克里普克框架 $\mathcal{X} = (X, \leq, R)$，$\mathcal{X} \vDash \rho(\mathfrak{A}, D^{\rightarrow}, D^{\Box})$ 当且仅当 $\mathcal{X}^* \vDash \rho(\mathfrak{A}, D^{\rightarrow}, D^{\Box})$，当且仅当 $(\mathcal{X}^*)_* \vDash \rho(\mathfrak{A}, D^{\rightarrow}, D^{\Box})$。

设 $\mathcal{X} = (X, \leq, R) \nVdash \rho(\mathfrak{A}, D^{\rightarrow}, D^{\Box})$，则 $(\mathcal{X}^*)_* \nVdash \rho(\mathfrak{A}, D^{\rightarrow}, D^{\Box})$。由命题 3.19，存在一个满射稳定普里斯特利态射 $g : (\mathcal{X}^*)_* \to X_A$，它满足 $\mathsf{CDC}_{\Box}$，对于任意 $\beta(a)$，其中 $a \in D^{\Box}$，并且满足 $\mathsf{CDC}_{\rightarrow}$，对于任意 $\beta(a) \setminus \beta(b)$，其中 $(a, b) \in D^{\rightarrow}$。定义 $\epsilon : \mathcal{X} \to (\mathcal{X}^*)_*$ 如下：$\epsilon(x) = \{\uparrow x \subseteq U \mid U \text{ 是 } X\}$ 的一个上集（容易看出，$\epsilon(x)$ 是 X 的上集构成的集合中的一个素滤子）。接着验证 $g \circ \epsilon$ 满足所有预期条件。

对于任意 $x \leq y \in \mathcal{X}$，$\uparrow y \subseteq \uparrow x$，因此 $\epsilon(x) \subseteq \epsilon(y)$，$g \circ \epsilon(x) \leq g \circ \epsilon(y)$。$g \circ \epsilon$ 是保序的。假设 $xRy \in \mathcal{X}$，那么对于任意 $\Box_R U \in \epsilon(x)$，其中U是上集，根据定义，$\uparrow x \subseteq \Box_R U$，因此 $x \in \Box_R U$，即 $R[x] \subseteq U$。所以，$y \in U$。由于 U是上集，$\uparrow y \subseteq U$，且 $U \in \epsilon(y)$。这意味着，在 $(\mathcal{X}^*)_*$ 中，$\epsilon(x) R^* \epsilon(y)$。由于 g 是稳定的，$g(\epsilon(x)) R_A g(\epsilon(y)) \in \mathfrak{A}_*$，因此 $g \circ \epsilon$ 是稳定的。

对于任意 $p \in X_A$，由于 g 是连续的，我们知道 $g^{-1}(p)$ 是 $(\mathcal{X}^*)_*$ 的一个闭开集。若忽略 R^*，则 $(\mathcal{X}^*)_*$ 是一个 Esakia 空间；根据注记2.40，我们有 $g^{-1}(p) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} (\beta(U_i) \setminus \beta(V_i))$，其中 $U_i's$、$V_i's$ 是 X 的上集。由于 g 是满射，$g^{-1}(p)$ 非空，存在 $1 \leq i \leq n$ 使得$\beta(U_i) \setminus \beta(V_i) \neq \emptyset$。因此 $U_i \setminus V_i \neq \emptyset$，存在 $x \in U_i \setminus V_i$。于是 $\uparrow x \subseteq U_i$，而 $\uparrow x \not\subseteq V_i$。因此 $\epsilon(x) \in \beta(U_i)$，而 $\epsilon(x) \notin \beta(V_i)$。所以，$\epsilon(x) \in g^{-1}(p)$，且 $g(\epsilon(x)) = p$。由于 $p \in X_A$ 是任意的，这证明了 $g \circ \epsilon$ 是满射。

任取 $x \in X$，假设 $R_A[g(\epsilon(x))] \not\subseteq \beta(a)$，而 $(g \circ \epsilon)[R[x]] \subseteq \beta(a)$，其中 $a \in D^{\Box}$。由于 g 满足 $\mathsf{CDC}_{\Box}$，对 $\beta(a)$，我们有 $g[R^*[\epsilon(x)]] \not\subseteq \beta(a)$；存在 $\epsilon(x) R^* \mathfrak{q}$，使得 $g(\mathfrak{q}) \notin \beta(a)$，即 $a \notin g(\mathfrak{q})$。由于 $(\mathcal{X}^*)_* \nVdash \rho(\mathfrak{A}, D^{\rightarrow}, D^{\Box})$，我们知道 $\mathcal{X}^* \nVdash \rho(\mathfrak{A}, D^{\rightarrow}, D^{\Box})$。由命题 3.6，存在稳定有界格嵌入 $h : A \to Up(X)$，它对 $D^{\rightarrow}$ 和 $D^{\Box}$ 满足 CDC。由对偶性，我们可以假设 $g = h^{-1}$，因此存在一个

X 的上集 U（事实上就是 $h(a)$），使得对于 X 的上集的任意素滤子 $\mathfrak{p}$（即 $(\mathcal{X}^*)_*$ 的任意元素），$a \in g(\mathfrak{p})$ 当且仅当 $U \in \mathfrak{p}$。由于 $(g \circ \epsilon)[R[x]] \subseteq \beta(a)$，对于 X 中任意 xRy，我们有 $g(\epsilon(y)) \in \beta(a)$，即 $a \in g(\epsilon(y))$。因此 $U \in \epsilon(y)$，且 $y \in \uparrow y \subseteq U$。所以，$R[x] \subseteq U$。由于 $\epsilon(x) R^* \mathfrak{q}$，对于任意 $\Box_R V \in \epsilon(x)$，可得 $V \in \mathfrak{q}$，其中 V 是 X 的一个上集。对于 X 中任意 $x \leq z$，我们有 $R[z] \subseteq R[x] \subseteq U$，因为 $\leq \circ R = R$ 属于 $\mathcal{X}$。因此 $\uparrow x \subseteq \Box_R U$，并且根据定义$\Box_R U \in \epsilon(x)$。于是 $U \in \mathfrak{q}$且 $a \in g(\mathfrak{q})$，这与假设$a \notin g(\mathfrak{q})$矛盾。因此，对于任意 $x \in X$，$(g \circ \epsilon)[R[x]] \subseteq \beta(a)$ 蕴含 $R_A[g(\epsilon(x))] \subseteq \beta(a)$，其中 $a \in D^{\Box}$。这证明了，对于任意 $\beta(a)$（其中 $a \in D^{\Box}$），$g \circ \epsilon$ 满足 $\mathsf{CDC}_{\Box}$。

令 $x \in X$ 为任意对象，假设 $\uparrow g(\epsilon(x)) \cap \beta(a) \setminus \beta(b) \neq \emptyset$，其中 $(a, b) \in D^{\rightarrow}$。由于 g 满足 $\mathsf{CDC}_{\rightarrow}$，对于 $\beta(a) \setminus \beta(b)$，我们有 $g[\uparrow \epsilon(x)] \cap \beta(a) \setminus \beta(b) \neq \emptyset$。因此，存在一个 X 的上集的素滤子 $\mathfrak{p}$，使得 $\epsilon(x) \subseteq \mathfrak{p}$ 且 $g(\mathfrak{p}) \in \beta(a) \setminus \beta(b)$，即 $a \in g(\mathfrak{p})$ 且 $b \notin g(\mathfrak{p})$。如上所证，存在 X 的上集 U_a, U_b，使得对于 X 的任意上集素滤子 $\mathfrak{q}$（即 $(\mathcal{X}^*)_*$ 的任意元素），$a \in g(\mathfrak{q})$ 当且仅当 $U_a \in \mathfrak{q}$，且 $b \in g(\mathfrak{q})$ 当且仅当 $U_b \in \mathfrak{q}$。因此，$U_a \in \mathfrak{p}$ 且 $U_b \notin \mathfrak{p}$。假设 $(g \circ \epsilon)[\uparrow x] \cap \beta(a) \setminus \beta(b) = \emptyset$，那么对于任意 $x \leq y$，我们有 $U_a \in \epsilon(y)$ 蕴含 $U_b \in \epsilon(y)$，也就是说，$y \in U_a$ 蕴含 $y \in U_b$。因此$\uparrow x \subseteq U_a \rightarrow U_b$。由于 $\epsilon(x) \subseteq \mathfrak{p}$，可得 $U_a \rightarrow U_b \in \mathfrak{p}$，这与 $U_a \in \mathfrak{p}$ 和 $U_b \notin \mathfrak{p}$ 矛盾。因此，$(g \circ \epsilon)[\uparrow x] \cap \beta(a) \setminus \beta(b) \neq \emptyset$。这证明了，对于 $\beta(a) \setminus \beta(b)$（其中 $(a, b) \in D^{\rightarrow}$），$g \circ \epsilon$ 满足 $\mathsf{CDC}_{\rightarrow}$。因此，$g \circ \epsilon \colon X \rightarrow X_A$ 是一个满射稳定保序映射，对于任意 $\beta(a)$，它满足 $\mathsf{CDC}_{\Box}$，其中 $a \in D^{\Box}$；对于任意 $\beta(a) \setminus \beta(b)$，它也满足 $\mathsf{CDC}_{\rightarrow}$，其中 $(a, b) \in D^{\rightarrow}$。

反过来，假设存在一个满射稳定保序映射 $f : X \rightarrow X_A$，满足：对于任意 $\beta(a)$，$a \in D^{\Box}$ 都满足 $\mathsf{CDC}_{\Box}$；并且对于任意 $\beta(a) \setminus \beta(b)$，其中 $(a, b) \in D^{\rightarrow}$，都满足 $\mathsf{CDC}_{\rightarrow}$。

由于 $\mathfrak{A}$ 是有限的，$\mathfrak{A}$ 的每个素滤子（即 X_A 的元素）都是主滤子，且由一个并不可约元给出。对于 $\mathfrak{A}$ 的 a 中每个并不可约元，我们用 P_a 表示与之对应的素滤子。定义 $g : (\mathcal{X}^*)_* \rightarrow X_A$ 如下：若存在某个并不可约元 $a_i \leq a\}$，则 $g(\mathfrak{p}) = \{a \in A \mid \uparrow f^{-1}(P_{a_i}) \in \mathfrak{p}$。显然，$0 \notin g(\mathfrak{p}) \neq \emptyset$，且 $g(\mathfrak{p})$ 是向上封闭的。假设 $a, b \in g(\mathfrak{p})$，那么存在并不可约元 a_i，$b_j \in A$，使得 $a_i \leq a$, $b_j \leq b$,
$\uparrow f^{-1}\ P_{a_i}\ \in \mathfrak{p}$ $\uparrow f^{-1}\ P_{b_j}\ \in \mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}$ $\uparrow f^{-1}\ P_{a_i}\ \cap \uparrow f^{-1}\ P_{b_j}\ \neq ( )$ 和 $( )$。由 $\emptyset$ $x \in \uparrow f^{-1}\ P_{a_i}\ \cap \uparrow f^{-1}\ P_{b_j}$ $y \leq x$ $z \leq x$ X f y $=$
于 是素滤子，$( ) ( )$，即 $( ) ( )$。存在 中的 ,, 使得 $( )\ P_{a_i}$ 且 $f(z) = P_{b_j}$。由于 f 是保序的，我们有 $P_{a_i}, P_{b_j} \subseteq f(x)$，因此 $a_i, b_j \in f(x)$。由于 $f(x)$ 是 $\mathfrak{A}$ 的素滤子，可知 $a_i \wedge b_j \neq 0$。令 $c_1, ..., c_n$ 枚举所有小于或等于$a_i \wedge b_j$的 $\mathfrak{A}$ 中的并不可约元（注意 $1 \leq n$，因为 $a_i \wedge b_j \neq 0$）。对于任意 $x' \in \uparrow f^{-1}(P_{a_i}) \cap \uparrow f^{-1}(P_{b_j})$，如我们所示，$P_{a_i} \subseteq f(x')$ 且 $P_{b_j} \subseteq f(x')$。因此，对于某个 $1 \leq k \leq n$，有 $f(x') = P_{c_k}$。由于 $x' \leq x'$, $x' \in \uparrow f^{-1}(P_{c_1}) \cup ... \cup \uparrow f^{-1}(P_{c_n})$。由于 x' 是任意的，这证明了 $\uparrow f^{-1}(P_{a_i}) \cap \uparrow f^{-1}(P_{b_j}) \subseteq \uparrow f^{-1}(P_{c_1}) \cup ... \cup \uparrow f^{-1}(P_{c_n})$。由于 $\uparrow f^{-1}($ $P_{a_i}) \in \mathfrak{p}$, $\uparrow f^{-1}\ P_{b_j}\ \in \mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}$ $\uparrow f^{-1}\ P_{c_m}\ \in \mathfrak{p}$ $1 \leq m \leq n$ $( )$ 且 是素滤子，因此 $( )$ 对某个 成立。由于$c_m \leq a_i \wedge b_j \leq a \wedge b$ 是并不可约的，$a \wedge b \in g(\mathfrak{p})$。这证明了 $g(\mathfrak{p})$ 是一个真滤子。根据并不可约性的定义，很容易看出 $g(\mathfrak{p})$ 也是素滤子。因此，g 定义良好。

显然，若 $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$，则 $g(\mathfrak{p}) \subseteq g(\mathfrak{q})$，因此 g 是保序的。设

$f(x) = P_a$，其中 $x \in X$ 且 $a \in \mathfrak{A}$ 是并不可约的。由定义，$\uparrow f^{-1}(P_a) \in \epsilon(x)$，因此 $P_a \subseteq g(\epsilon(x))$。现在设 $\uparrow f^{-1}(P_b) \in \epsilon(x)$，其中 b是并不可约的，则 $\uparrow x \subseteq \uparrow f^{-1}(P_b)$，存在 $y \leq x$使得 $f(y) = P_b$。由于 f 是保序的，$f(y) = P_b \subseteq f(x) = P_a$。因此 $g(\epsilon(x)) \subseteq P_a$，且 $g(\epsilon(x)) = f(x)$。由于 f 是满射，g也是满射。对于任意 $P_a \in X_A$，令 $\Gamma = \{b \in A \mid b$ 是并不可约的且 $a \not\leq b\}$（注意，由于 $\mathfrak{A}$ 是有限的，Γ 也是有限的），则由定义，$g^{-1}(P_a) = \beta(\uparrow f^{-1}(P_a)) \setminus \bigcup_{b\in\Gamma} \beta(\uparrow f^{-1}(P_b))$，它在 $(\mathcal{X}^*)_*$ 中是闭开的。因此 g 是连续的。由此，g 是一个满射 Priestley 态射。

假设 $\mathfrak{p}R^*\mathfrak{q}$ 属于 $(\mathcal{X}^*)_*$，那么对于任意 $\Box a \in g(\mathfrak{p})$，存在一个并不可约元 $a_i \leq \Box a$，使得 $\uparrow f^{-1}(P_{a_i}) \in \mathfrak{p}$。对于任意 $x \in \uparrow f^{-1}(P_{a_i})$，存在$y \leq x$，使得 $f(y) = P_{a_i}$。由于 f 是保序的，$f(y) \subseteq f(x)$，$a_i \in f(x)$，因此 $\Box a \in f(x)$。对于任意 xRz属于 $\mathcal{X}$，由于 f是稳定的，$f(x)R_Af(z)$。因此 $a \in f(z)$，并且对于某个并不可约元 $b_i \leq a$，有 $f(z) = P_{b_i}$。由于 $x \in \uparrow f^{-1}(P_{a_i})$ 是任意的，这证明了 $\uparrow f^{-1}(P_{a_i}) \subseteq \Box_R(\uparrow f^{-1}(P_{b_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{b_n}))$，其中$b_1$、...、$b_n$ 枚举了所有小于或等于 a 的并不可约元。由于$\uparrow f^{-1}(P_{a_i}) \in \mathfrak{p}$，可得 $\Box_R(\uparrow f^{-1}(P_{b_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{b_n})) \in \mathfrak{p}$。由于 $\mathfrak{p}R^*\mathfrak{q}$，我们知道 $\uparrow f^{-1}(P_{b_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{b_n}) \in \mathfrak{q}$，并且对于某个 $1 \leq i \leq n$，有 $\uparrow f^{-1}(P_{b_i}) \in \mathfrak{q}$。因此 $a \in g(\mathfrak{q})$。由于 $\Box a \in g(\mathfrak{p})$ 是任意的，这证明了 $g(\mathfrak{p})R_Ag(\mathfrak{q})$ 在 X_A 中，g 因而是稳定的。

假设 $g[R^*[\mathfrak{p}]] \subseteq \beta(a)$，其中 $a \in D^{\Box}$，那么对于任意 $\mathfrak{p}R^*\mathfrak{q}$，有$g(\mathfrak{q}) \in \beta(a)$，即 $a \in g(\mathfrak{q})$。根据定义，存在一个并不可约元 $a_i \leq a$，使得 $\uparrow f^{-1}(P_{a_i}) \in \mathfrak{q}$。由于 $\mathfrak{q}$ 是X的上集所构成的素滤子，我们还可得 $\uparrow f^{-1}(P_{a_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{a_n}) \in \mathfrak{q}$，其中 a_1、...、a_n枚举了所有小于或等于 a的并不可约元。由于 $\mathfrak{q}$ 是任意的，$\Box_R(\uparrow f^{-1}(P_{a_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{a_n})) \in \mathfrak{p}$（注意，$\Box_R(\uparrow f^{-1}(P_{a_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{a_n}))$ 非空，因为 $\mathfrak{p}$是素滤子）。对于任意 $x \in \Box_R(\uparrow f^{-1}(P_{a_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{a_n}))$，根据定义，$R[x] \subseteq \uparrow f^{-1}(P_{a_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{a_n})$，因而 $f[R[x]] \subseteq \beta(a)$。由于$f$对 $\beta(a)$ 满足 $\mathsf{CDC}_\Box$，我们有 $R_A[f[x]] \subseteq \beta(a)$，即 $\Box a \in f(x)$，因而对于某个并不可约元 $b_i \leq \Box a$，有 $f(x) = P_{b_i}$。由于 $x \leq x$，$x \in \uparrow f^{-1}(P_{b_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{b_m})$，其中 b_1、...、b_m枚举了所有小于或等于 $\Box a$的并不可约元。由于 $x \in \Box_R(\uparrow f^{-1}(P_{a_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{a_n}))$ 是任意的，这就证明了 $\Box_R(\uparrow f^{-1}(P_{a_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{a_n})) \subseteq \uparrow f^{-1}(P_{b_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{b_m})$。由于 $\Box_R(\uparrow f^{-1}(P_{a_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{a_n})) \in \mathfrak{p}$且 $\mathfrak{p}$是素滤子，$\uparrow f^{-1}(P_{b_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{b_m}) \in \mathfrak{p}$，因而对于某个 $1 \leq j \leq m$，有 $\uparrow f^{-1}(P_{b_j}) \in \mathfrak{p}$。因此，$\Box a \in g(\mathfrak{p})$，因而 $R_A[g(\mathfrak{p})] \subseteq \beta(a)$。这证明了 g 对 $\beta(a)$ 满足 $\mathsf{CDC}_\Box$，其中 $a \in D^{\Box}$。

设 $g(\uparrow\mathfrak{p}) \cap \beta(a) \setminus \beta(b) = \emptyset$，其中 $(a, b) \in D^{\rightarrow}$。对于 $(\mathcal{X}^*)_*$ 中任意的 $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$，我们有 $g(\mathfrak{q}) \not\in \beta(a) \setminus \beta(b)$。也就是说，如果 $a \in g(\mathfrak{q})$，那么 $b \in g(\mathfrak{q})$。因此，$\uparrow f^{-1}(P_{a_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{a_n}) \in \mathfrak{q}$ 意味着 $\uparrow f^{-1}(P_{b_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{b_m}) \in \mathfrak{q}$，其中 a_1、.....、a_n 枚举了所有小于或等于 a 的并不可约元，而 b_1、.....、b_m 枚举了所有小于或等于 b 的并不可约元。由于 $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ 是任意的，这意味着 $(\uparrow f^{-1}(P_{a_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{a_n})) \rightarrow (\uparrow f^{-1}(P_{b_1}) \cup .. \cup \uparrow f^{-1}(P_{b_m})) \in \mathfrak{p}$（注意，$(\uparrow f^{-1}(P_{a_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{a_n})) \rightarrow (\uparrow f^{-1}(P_{b_1}) \cup .. \cup \uparrow f^{-1}(P_{b_m}))$ 非空）。设 $x \in (\uparrow f^{-1}(P_{a_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{a_n})) \rightarrow (\uparrow f^{-1}(P_{b_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{b_m}))$，对于任意 $x \leq y$，如果 $y \in \uparrow f^{-1}(P_{a_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{a_n})$，那么 $y \in \uparrow f^{-1}(P_{b_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{b_m})$。因此 $f[\uparrow x] \cap \beta(a) \setminus \beta(b) = \emptyset$。由于 f

满足 CDC$_{\rightarrow}$ 对于 $\beta(a) \setminus \beta(b)$，我们有 $\uparrow f(x) \cap \beta(a) \setminus \beta(b) = \emptyset$。因此 $a \rightarrow b \in f\ x$ $f\ x = P_{c_j}$ $c_j \leq a \rightarrow b$，并且对于某个并不可约元，$x \leq x$ $x \in \uparrow f^{-1}\ P_{c_j} \subseteq \uparrow f^{-1}\ P_{c_1} \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}\ P_{c_k}$ $c_1 \ldots c_k$ 的并不可约元。由于 $x \in (\uparrow f^{-1}(P_{a_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{a_n})) \rightarrow (\uparrow f^{-1}(P_{b_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{b_m}))$ 是任意的，这证明了 $(\uparrow f^{-1}(P_{a_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{a_n})) \rightarrow (\uparrow f^{-1}(P_{b_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{b_m})) \subseteq \uparrow f^{-1}(P_{c_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{c_k})$。于是 $\uparrow f^{-1}(P_{c_1}) \cup \ldots \cup \uparrow f^{-1}(P_{c_k}) \in \mathfrak{p}$，从而 $a \rightarrow b \in g(\mathfrak{p})$。因此，$\uparrow g(\mathfrak{p}) \cap \beta(a) \setminus \beta(b) = \emptyset$。于是，如果 $\uparrow g(\mathfrak{p}) \cap \beta(a) \setminus \beta(b) \neq \emptyset$，那么 $g[\uparrow \mathfrak{p}] \cap \beta(a) \setminus \beta(b) \neq \emptyset$，其中 $(a, b) \in D^{\rightarrow}$。这证明了 g 对于 $\beta(a) \setminus \beta(b)$ 满足 CDC$_{\rightarrow}$，其中 $(a, b) \in D^{\rightarrow}$。

因此，g 是一个满足 CDC$_{\Box}$ 的满射稳定普里斯特利态射，适用于任意 $\beta(a)$，其中 $a \in D^{\Box}$，并且满足 CDC$_{\rightarrow}$，适用于任意 $\beta(a) \setminus \beta(b)$，其中 $(a, b) \in D^{\rightarrow}$。根据命题 3.19，$(\mathcal{X}^*)_* \nVdash \rho(\mathfrak{A}, D^{\rightarrow}, D^{\Box})$，因此 $\mathcal{X} = (X, \leq, R) \nVdash \rho(\mathfrak{A}, D^{\rightarrow}, D^{\Box})$。

参考文献

[1] G. Bezhanishvili, N. Bezhanishvili, J. Ilin, 《余终稳定逻辑》，《逻辑学研究》104（2016）1287–1317。[2] G. Bezhanishvili, N. Bezhanishvili, R. Iemhoff, 《稳定典范规则》，The Journal of Symbolic Logic 81（2016）284–315。[3] F. Wolter, M. Zakharyaschev, 《直觉主义模态逻辑与经典模态逻辑之间的关系》，Algebra and Logic 36（1997）121–155。[4]M. Zakharyaschev, 《中间逻辑与模态逻辑的句法与语义》，博士论文，Keldysh Institute of Applied Mathematics，苏联科学院，莫斯科（1984）。[5] M. Zakharyaschev, 《K4 的典范公式：基本结果》，The Journal of Symbolic Logic 57（1992）1377–1402。[6] M. Zakharyaschev, 《K4 的典范公式：第二部分：余终子框架逻辑》，The Journal of Symbolic Logic 61（1996）421–449。[7] E. Je˘r´abek, 《典范规则》，The Journal of Symbolic Logic 74(4)（2009）1171–1205。[8] M. Zakharyaschev, 《超直觉主义逻辑的句法与语义》，Algebra and Logic 28（1989）262–282。[9] G. Bezhanishvili, N. Bezhanishvili, 《典范公式的代数方法：直觉主义情形》，The Review of Symbolic Logic 2（2009）517–549。[10] G. Bezhanishvili, N. Bezhanishvili, 《典范公式的代数方法：模态情形》，《逻辑学研究》99（2011）93–125。

[11] G. Bezhanishvili, N. Bezhanishvili, 《海廷代数的局部有限约化与典范公式》, Notre Dame J. Formal Logic 58（2017）21–45。[12] G. Bezhanishvili, N. Bezhanishvili, 《扬科夫公式与中间逻辑的公理化技术》, 载于《V.A. Yankov 论非经典逻辑》, 《数学史与数学哲学》, 2022 年, 第 71–124 页。[13] J. Ilin, 《重新考察过滤：稳定非经典逻辑的格》, 博士论文, 阿姆斯特丹大学（2018）。[14] A. Chagrov, M. Zakharyaschev, 《模态逻辑》, 牛津逻辑指南丛书第 35 卷, 牛津大学出版社, 1997。[15] S. Melzer, 《宽松逻辑的典范公式》, 硕士论文, 阿姆斯特丹大学（2020）。[16] A. Cleani, 《通过稳定典范规则实现平移嵌入》, 硕士论文, 阿姆斯特丹大学（2021）。[17]N. Bezhanishvili, A. Cleani, 《通过稳定典范规则得到的布洛克-埃萨基亚定理》, The Journal of Symbolic Logic（2025）1–37。[18] G. F. Servi, 《关于以直觉主义逻辑为基底的模态逻辑》, 《逻辑学研究》36（1977）141–149。[19] R. Davies, F. Pfenning, 《分阶段计算的模态分析》, 载于《第 23 届 ACM SIGPLAN-SIGACT 编程语言原理研讨会论文集》, 1996 年, 第 258–270 页。[20] S. Artemov, T. Protopopescu, 《直觉主义认知逻辑》, The Review of Symbolic Logic 9(2)（2016）266–298。[21] A. Simpson, 《直觉主义模态逻辑的证明论与语义》, 博士论文, 爱丁堡大学（1994）。[22] D. Fern´andez-Duque, B. McLean, L. Zenger, 《一族可判定的双直觉主义模态逻辑》, 载于《第 20 届知识表示与推理国际会议论文集》, 2023 年, 第 262–271 页。[23] F. Wolter, M. Zakharyaschev, 《作为经典双模态逻辑片段的直觉主义模态逻辑》, 载于《逻辑在工作中：献给 Helena Rasiowa 的论文集》, 1998 年, 第 168–186 页。[24] S. Burris, H. Sankappanavar, 《普适代数教程》, 施普林格, 1981。[25] H. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas, 《数理逻辑》, 施普林格科学与商业媒体, 1994。

[26] R. Iemhoff，《后承关系与可容许规则》，《哲学逻辑杂志》45（2016）327–348。[27] M. Kracht，《模态逻辑中的工具与技术》，逻辑研究第 142 卷，爱思唯尔，1999。[28] N. Bezhanishvili、S. Ghilardi，多结论规则、超序列句法与步框架，载于：《模态逻辑进展》，2014，第 54–73 页。[29] H. Priestley，有序拓扑空间与分配格的表示，《伦敦数学会会刊》24（1972）507–530。[30] L. Esakia，拓扑克里普克模型，《苏联数学文摘》15（1974）147–151。[31] L. Esakia，《海廷代数：对偶理论》，逻辑趋势第 5 卷，施普林格，2019。[32] A. Palmigiano，直觉主义模态逻辑的对偶，载于：《献给 Dick de Jongh 的友人纪念文集》，2004，第 151–167 页。[33] W. Blok，《内代数簇》，博士论文，阿姆斯特丹大学（1976）。[34] L. Esakia，关于超直觉主义逻辑的模态伴随，载于：第七届苏联逻辑研讨会（基辅，1976），1976，第 135–136 页。[35] A. Chagrov、M. Zakharyaschev，中间命题逻辑的模态伴侣，《逻辑学研究》51（1992）49–82。[36] M. Stronkowski，关于全称类的 Blok-Esakia 定理，arXiv：逻辑，2018。[37] M. Zakharyaschev，超直觉主义逻辑的模态伴随：句法、语义与保真定理，《苏联数学汇编》68(1)（1991）。[38] T. Litak、A. Visser，Lewis 遇见 Brouwer：构造性严格蕴涵，载于：《数学探究》29(1)，2018，第 36–90 页。[39] J. de Groot、T. Litak、D. Pattinson，Heyting-Lewis 蕴涵的 G¨odel-McKinsey-Tarski 与 Blok-Esakia 定理，第 36 届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年会（ LICS ），2021。[40] C. Liao，直觉主义模态逻辑的稳定典范规则，硕士论文，阿姆斯特丹大学（2023）。[41] N. Bezhanishvili、D. Gabelaia、S. Ghilardi、M. Jibladze，基于稳定典范规则的可容许基，《逻辑学研究》104（2016）317–341。