arXiv:2602.09371v1 [math.RA] 10 Feb 2026

Ding-Chen 环上 FP-内射模的无环复形

JAMES GILLESPIE

Abstract. 我们提出一种结合两个余挠对以得到阿贝尔模型结构的新方法，并将其用于构造和研究左凝聚环 R 上左 R-模的一种新模型结构。其纤维对象类由弱 Ding-内射 R-模生成；Iacob 最近研究了这类模。我们给出纤维模的若干种刻画，其中一种是：它们是某些由 FP-内射（即绝对纯） R-模构成的无环复形的圈模。当 R 是 Ding-Chen 环时，我们证明它们恰好是作为 FP-内射模无环复形之圈出现的模。这为 Ding-Chen 环 R 的稳定模范畴 Stmod(R) 提供了一种新的描述，所用的是我们称为 Gorenstein FP-pro-内射的模。这些模是全无挠复形的圈模，而该复形由 FP-投射-内射模构成。作为这一新模型范畴方法的一项完全独立的应用，我们证明，所有完备余挠对（包括非遗传的余挠对）都能提升为环的导出范畴的阿贝尔模型。

1. Introduction

设 R 是一个（双边）相干环。若一个（例如左） R-模 A 满足对所有有限表示模 M都有 $\mathrm{Ext}^1_R(M,A)=0$，则称其为 ***FP*-内射模**。模 A 满足这一条件，当且仅当任何以 A 为首项的短正合列都是纯正合列。因此，FP-内射模也称为绝对纯模，通常被视为平坦模的对偶概念。事实上，一个 R-模 F 是平坦模，当且仅当任何以 F 为末项的短正合列都是纯正合列。环 R 的相干性确保 FP-内射模还满足平坦模若干有用性质的其他对偶性质。此外，函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 在 FP-内射左（分别为右） R-模与平坦右（分别为左） R-模之间给出完美对偶。

在相对同调代数中，左 R-模 M 称为***Ding* 投射**，如果它等于某个正合（即无圈）链复形 X的零循环 $M=Z_0X$；该链复形由投射模组成，并且对于任意平坦模 F，$\mathrm{Hom}_R(X,\ F)$ 也是正合的。等价地，对于任意内射模，甚至只需对于任意 FP-内射右 R-模 A，$A\otimes X$ 都是正合的。这意味着 Ding 投射模与投射余解的 ***Gorenstein* 平坦模**（即***PGF* 模**）相同，后者见于 [SS20]。此外，还有 Ding 内射模这一对偶概念：若 $M=Z_0X$ 对于某个由内射模组成的正合链复形 X 成立，且对于任意 FP-内射模 A，$\mathrm{Hom}_R(A,\ X)$ 正合，则称 M 为***Ding*-内射模**。

Date: 2026年2月11日。*Key words and phrases.* Ding-Chen 环；FP-内射；FP-投射；FP-pro-内射，Ding-内射模；Gorenstein 平坦；Gorenstein FP-pro-内射，稳定模范畴。2020年数学学科分类：16E05、16E65、18G25、18G35、18G65、18G80、18N40。

Ding 投射模类和 Ding 内射模类分别是 R-Mod 上两种不同阿贝尔模型结构的余纤维对象和纤维对象；这里 R-Mod 是（左） R-模的范畴。我们回顾 [Hov02、Gil24] 的结果： R-Mod 上的阿贝尔模型结构 $\mathfrak{M}$ 等价于一个厚类 $\mathcal{W}$，它由 “ 平凡 ” 模组成，并将两个完备余挠对 $(\mathcal{Q},\ \mathcal{W}\cap\mathcal{R})$ 和 $(\mathcal{Q}\cap\mathcal{W},\ \mathcal{R})$ 联系起来。我们用三元组 $\mathfrak{M}=(\mathcal{Q},\ \mathcal{W},\ \mathcal{R})$ 表示这些信息，并称 $\mathcal{Q}$ （分别称 $\mathcal{R}$）为余纤维对象（分别为纤维对象）类。

令 $\mathcal{DP}$ 表示所有 Ding 投射 R-模构成的类，则在 R-Mod 上存在一个阿贝尔模型结构，由三元组表示

$$\mathfrak{M}_{proj}=(\mathcal{DP},\mathcal{V},All).$$

在此模型结构中，每个模都是纤维的，且平凡模类为 $\mathcal{V}:=\mathcal{DP}^{\perp}$，其中这表示相对于 $\mathrm{Ext}^1_R(-,\ -)$ 而言 $\mathcal{DP}$ 的右正交类。对偶结论也成立：令 $\mathcal{DI}$ 表示所有 Ding-内射模R-模构成的类，则存在一个阿贝尔模型结构

$$\mathfrak{M}_{inj}=(All,\mathcal{W},\mathcal{DI}),$$

w这里 $\mathcal{W}:={}^{\perp}\mathcal{DI}$ 是 的左 Ext-正交类 f $\mathcal{DI}$。

现在令 $\mathcal{GF}$ 表示所有 Gorenstein 平坦模构成的类。此类模 M等于某个由平坦模组成的 F-完全无挠复形的 0-循环模 $M=Z_0X$，也就是说，对于任意内射右 R-模 I， $I\otimes X$ 都是正合的。于是，在 R-Mod 上还存在另一个阿贝尔模型结构，由三元组表示

$$\mathfrak{M}_{flat}=(\mathcal{GF},\mathcal{V},\mathcal{C}).$$

特别要注意，其平凡对象类 $\mathcal{V}$ 与 $\mathfrak{M}_{proj}$中的平凡对象类相同。但现在，纤维对象类是 $\mathcal{C}$ ，即所有余挠模的类；也就是说，它由所有满足以下性质的模 C 组成：对于所有平坦模 F， $\mathrm{Ext}^1_R(F,C)=0$ 。

$\mathfrak{M}_{proj}$ 和 $\mathfrak{M}_{inj}$ 互为对偶，我们将在定理 7.1 中证明， $\mathfrak{M}_{flat}$也有一个对偶。为描述这一对偶，令 $\mathcal{FI}$ 表示所有 FP-内射模组成的类。我们有一个完备余挠对 $(\mathcal{FP},\mathcal{FI})$，其中 $\mathcal{FP}:={}^{\perp}\mathcal{FP}$ 中的模称为*FP*-投射。请注意，所有 FP-投射模组成的类 $\mathcal{FP}$ 的定义，与所有余挠模组成的类 $\mathcal{C}$ 的定义互为对偶。现在，定理 7.1 断言，在 R-模上存在一个阿贝尔模型结构，由三元组表示

$$\mathfrak{M}_{fp}=(\mathcal{FP},\mathcal{W},({}^{\perp}\mathrm{w}\mathcal{DI})^{\perp}).$$

特别是，它与 $\mathfrak{M}_{inj}$中的平凡对象类相同，即 $\mathcal{W}:={}^{\perp}\mathcal{DI}$。纤维模类由类 w$\mathcal{DI}$生成，该类由弱 *Ding*-内射模组成；这个模类可追溯至 [ZC11] ，并在 Iacob 最近的研究 [Iac23、Iac25、Iac26]中得到广泛研究。我们不打算为类 $({}^{\perp}\mathrm{w}\mathcal{DI})^{\perp}$指定一个特定记号，也不打算为这些模选定一个名称。不过，我们很想将它们称为*Ding FP*-内射模，因为它们具有许多与 Gorenstein 平坦模互为对偶的性质；并且我们注意到，Gorenstein 平坦模与*Ding* 平坦模是同一概念。也就是说，在上述 F-完全无挠的概念中，令模 I 遍历所有 FP-内射模（而不仅仅是所有内射模），与原定义等价。这对任意环都成立，而不仅限于相干环；参见 [Gil17，命题 7.2]。

定理 7.1 的模型结构 $\mathfrak{M}_{fp}$ 最有趣的情形是当R 取为 Ding-Chen 环时（按 [DC93]与 [Gil10]的意义）。在这种情况下，

这两类平凡对象重合，

$$\mathcal{W} = {}^{\perp}\mathcal{DI} = \mathcal{DP}^{\perp} = \mathcal{V},$$

并且它们与所有有限平坦维数模的类相同，或者等价地，与有限 FP-内射维数模的类相同。现在，我们用以下记号和术语概述本文关于 Ding-Chen 环 R 的结果：同样，$(\mathcal{FP}, \mathcal{FI})$ 表示完备余挠对，其中 $\mathcal{FI}$ 是所有 FP-内射模构成的类，而 $\mathcal{FP}$ 是所有 FP- 投射模构成的类。我们称余挠对核中的模 M，即 $M \in \mathcal{FP} \cap \mathcal{FI}$，为 *FP*-拟内射模。于是，所谓 *FP*-拟内射模的全无挠复形，是指一个正合复形 X，其中每个 X_n 都是 FP-拟内射的，并且只要 M 是 FP-拟内射模，$\mathrm{Hom}_R(M, X)$ 和 $\mathrm{Hom}_R(X, M)$ 也都是正合复形。最后，我们称一个等于某个 FP-拟内射模全无挠复形的 0-循环模的模为 *Gorenstein FP*-拟内射模。

定理 1.1。设 R 是一个 *Ding-Chen* 环。则以下各项均成立。

- （命题 *8.1*。）$({}^{\perp}\mathrm{w}\mathcal{DI})^{\perp} = \mathcal{Z}$，其中 $\mathcal{Z}$ 表示所有由 *FP*-内射模构成的正合复形的循环模所组成的类。此外，任意由 *FP*-内射对象构成的正合链复形 X 都自动具有如下性质：对于任意 *FP*-拟内射模 M，$\mathrm{Hom}_R(M, X)$ 是正合的。
- （命题 *8.1*。）$\mathcal{FP} \cap \mathcal{Z} = \mathcal{GFP}$，其中 $\mathcal{GFP}$ 表示所有 *Gorenstein FP*-拟内射模所组成的类。此外，任意由 *FP*-内射对象构成的正合链复形X 都自动是全正合的。
- （定理 *8.3*。）三元组 $\mathfrak{M}_{fp} = (\mathcal{FP}, \mathcal{W}, \mathcal{Z})$ 在 R-模 上表示一个余纤维生成的阿贝尔模型结构。
- （定理 *8.3*。）R 的稳定模范畴记为 $\mathrm{Stmod}(R)$，它与 $\mathfrak{M}_{fp}$ 的同伦范畴重合，从而得到一个三角等价。这里，$\mathrm{St}(\mathcal{GFP})$ 表示由所有 *Gorenstein FP*-拟内射模组成的 *Frobenius* 范畴的稳定范畴。

$$\mathcal{St}\mathrm{tmod}(R) \simeq \mathrm{Ho}(\mathfrak{M}_{fp}) \simeq \mathrm{St}(\mathcal{GFP}).$$

- *(*定理 *8.3.)* 以下等价的陈述进一步刻画了纤维对象类：（*1*）$M \in \mathcal{Z} = ({}^{\perp}\mathcal{wDI})^{\perp} = ({}^{\perp}(\mathcal{FI} \cup \mathcal{DI}))^{\perp}$。也就是说，$M = Z_0X$ 存在某个 *FP*-内射模的无挠复形 X，它必然具有这样的性质：对于任意 *FP-pro*-内射 M，$\mathrm{Hom}_R(M, X)$ 都是正合的。（*2*）存在一个短正合列 $0 \to D \to A \to M \to 0$，其中 $A \in \mathcal{FI}$ 且 $D \in \mathcal{DI}$。（*3*）对于所有 *FP-pro*-内射对象 W 和所有 $i \geq 1$，$\mathrm{Ext}^i_R(W, M) = 0$。（*4*）存在一个短正合列 $0 \to M \to D \to A \to 0$，其中 $A \in \mathcal{FI}$ 且 $D \in \mathcal{DI}$，并且具有这样的性质：对于任意 *FP-pro-* 内射模 M，应用 $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ 后，该列仍然正合。
- *(*定理 *8.4.)* $(\mathcal{GF}, \mathcal{Z})$ 是完备对偶对，按照 [GI22, 定义 7] 中的含义。特别地，$(\mathcal{GF}, \mathcal{Z})$ 和$(\mathcal{Z}, \mathcal{GF})$ 都是余积与积封闭对偶对，按照 [HJ09, 定义 2。1] 中的含义。

我们的结果与 Dalezios 关于 FP-pro-内射复形的工作 [Dal19] 一致，并为我们提供了 [CET20] 中平坦余挠理论在 Ding-Chen 情形下的对偶。将定理 1.1 与文献中的其他已知结果结合起来，Stmod(R)，即 aDing-Chen

环 R，现在有四种表示：它等价于由某个投射（分别为内射、平坦余挠、FP-pro-内射） R-模无挠复形的圈构成的所有模的范畴。此外，在每种情况下，任何此类复形都是全正合的。参见 [Gil10，定理 4.7/4.10], [Gil17，定理 1.2],以及 [CET20，定理 4.4/5.2]。

定理 3.2 和 3.4 是上述结果的理论基础。它们提供了一种方法，可从给定的阿贝尔模型结构构造出一种新的阿贝尔模型结构，其中每个对象要么是余纤维的，要么是纤维的。这些结果本身就很有意义，在第 4 节中，我们还给出它们的另一个应用。简要来说，仍令 R-Mod 表示环上的模所构成的范畴，现在用 Ch(R) 表示相应的链复形范畴。在 [Gil04] 中，我们描述了一种方法，可以将 R-Mod 中的余挠对 ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$) 提升为 Ch(R) 上的余挠对，从而得到潜在的模型结构。此过程要求余挠对满足遗传性，即对所有 $A \in \mathcal{A}$、$B \in \mathcal{B}$ 和 $i \geq 1$，都有 $\mathrm{Ext}^i_R(A, B) = 0$。有人不止一次问我，是否存在非遗传阿贝尔模型结构的例子。当然，一旦有了非遗传的完备余挠对（而这类余挠对确实存在），便可轻而易举地得到非遗传阿贝尔模型结构。例如，若 ($\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$) 是任意完备余挠对，那么令 $\mathcal{W}$ 为所有对象构成的类，就可轻而易举地得到阿贝尔模型结构 ($\mathcal{C}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{F}$)。但这类例子并不令人满意，因为它们对应的同伦范畴是零范畴。我们希望看到非平凡的例子。定理 4.1 是由定理 3.2 和 3.4 推出的，它展示了如何将 [Gil04] 中的方法推广到非遗传余挠对。

现在我们概述本文的结构。在第 2 节的预备知识之后，第 3 节专门证明新的模型范畴结果，即定理 3.2 和 3.4。我们给出一个适用于 Quillen 精确范畴且具有对偶形式的一般论述。第 4 节简要介绍了如何将其应用于构造环的导出范畴上的非遗传模型结构。第 5 节回到第 3 节的一般框架，以证明一些关于新模型结构所对应的同伦范畴的结果。这里的主要结果是定理 5.5，它给出了若干条件，确保同伦范畴可以用全无环复形来描述。在第 6 节中，我们推广 Iacob 从 [Iac26], and 得到的一些结果，随后将其与 Gorenstein 同调代数中某些阿贝尔模型结构的存在性联系起来。左凝聚环上的模的模型结构$\mathfrak{M}_{fp} = (\mathcal{FP}, \mathcal{W}, ({}^{\perp}\mathrm{w}\mathcal{DI})^{\perp})$ 是一个特例，并在第 7 节中加以研究。在第 8 节中，我们专门讨论 Ding-Chen 环，并证明定理 1.1 的其余部分。

2. Preliminaries

这里我们总结将要使用的相对同调代数中的主要术语和参考文献。本文最基本的概念包括余挠对、覆盖类、阿贝尔模型结构和 Ding-Chen 环。

2.1. 余挠对与阿贝尔模型范畴。 设 $\mathcal{A}$ 为一个阿贝尔范畴，例如 R-Mod，即环 R 上（左）模所构成的范畴。根据定义， $\mathcal{A}$ 中的一对类（$\mathcal{X}, \mathcal{Y}$）称为一个余挠对，如果 $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^{\perp}$ 且 $\mathcal{X} = {}^{\perp}\mathcal{Y}$。这里，给定 $\mathcal{A}$ 中的一个对象类 $\mathcal{C}$，其右正交类 $\mathcal{C}^{\perp}$ 定义为所有满足以下条件的对象 X 所成的类：对于任意 $C \in \mathcal{C}$，都有 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(C, X) = 0$。类似地，我们定义左正交类 ${}^{\perp}\mathcal{C}$。如果 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Y) = 0$，则称余挠对是遗传的

对于所有 $X \in \mathcal{X}$、 $Y \in \mathcal{Y}$ 和 $i \geq 1$。如果余挠对具有足够内射对象和足够投射对象，则称其完备 。这意味着，对于每个 $A \in \mathcal{A}$，都存在短正合列 $0 \to A \to Y \to X \to 0$ 和 $0 \to Y' \to X' \to A \to 0$ ，其中$X, X' \in \mathcal{X}$以及 $Y, Y' \in \mathcal{Y}$。关于 R-模的余挠对，标准参考文献包括 [EJ00] 和 [GT06] 两本书。

我们将使用 [Hov02] 中所展示的完备余挠对与阿贝尔模型范畴之间的对应关系。这些思想自然延伸到更一般的 Quillen 精确范畴情形；在这一框架下，我们将使用 [Gil24] 一书来引用有关余挠对和阿贝尔模型结构的标准事实。然而，Quillen 精确范畴仅在第 3 节和第 5 节中发挥作用，而我们使用精确范畴主要只是为了方便，并为将来参考保留主要结果。有兴趣的读者当然可以将第 3 节和第 5 节置于 R-模（或链复形）的范畴中阅读。毕竟，本文当前的应用仅涉及 R-模以及由 R-模构成的链复形。

若一个阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$（或精确范畴）中的对象类 $\mathcal{W}$ 对直和项封闭，并且满足：当一个短正合列中的三个项有两个属于 $\mathcal{W}$ 时，第三个也属于 $\mathcal{W}$，则称其为厚 类。于是，正如引言中所述，一个阿贝尔模型结构等价于一个厚类 $\mathcal{W}$ ，以及两个完备余挠对 $(\mathcal{Q},\ \mathcal{W}\cap\mathcal{R})$ 和 $(\mathcal{Q}\cap\mathcal{W},\ \mathcal{R})$。我们通过三元组 $\mathfrak{M} = (\mathcal{Q},\ \mathcal{W},\ \mathcal{R})$ 来表示这些信息，并称其为一个 *Hovey* 三元组。于是， $\mathcal{Q}$ （分别地， $\mathcal{R}$ ）是余纤维（分别地，纤维）对象类，而 $\mathcal{W}$ 是平凡对象类。值得一提的是，当底层加性范畴 $\mathcal{A}$ 是弱幂等完备时，我们无需区分 Hovey 三元组与阿贝尔模型结构。这是一个非常温和的条件；它仅意味着 $\mathcal{A}$ 中的每个分裂单态射都具有 $\mathcal{A}$ 中的余核，或者等价地，每个分裂满态射都具有核。

为方便起见，我们回顾一下内射余挠对的含义。设 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 是一个 Quillen 正合范畴，因此 $\mathcal{E}$ 表示短正合列的指定类。假设 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 有足够的内射对象，我们称 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 中的完备余挠对 $(\mathcal{W}, \mathcal{R})$ 为内射余挠对 ，如果 $\mathcal{W}$ 是厚的，且 $\mathcal{W}\cap\mathcal{R}$ 与所有内射对象组成的类相同。假设 $\mathcal{A}$ 弱幂等完备，则内射余挠对等价于 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 上的一种阿贝尔模型结构，其中每个对象都是余纤维对象。对偶概念定义于 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 有足够投射对象的情形，称为投射余挠对。

2.2. 覆盖、包络与对偶对。 </style}书籍 [EJ00]是我们研究相对同调代数和Gorenstein同调代数相关主题时的标准参考文献。特别是， R-模的（预）覆盖和（预）包络概念在 [EJ00] 中有讨论。我们有时会利用这些概念与 R-模对偶对之间的联系。为此，我们将引用 [HJ08], [HJ09], [Gil19],以及 [GI22]。

2.3. **Hom-无环性术语**。 设 X 是一个由 R-模构成的链复形，或者更一般地，是一个来自某个正合范畴（$\mathcal{A}, \mathcal{E}$）的对象所构成的链复形。设$\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$中的某类对象。若对于所有 $C \in \mathcal{C}$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, -)$ 所得的是阿贝尔群的正合复形，我们就称 X 为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, -)$- 无环的 。此外，若 X 本身也是 $\mathcal{E}$- 正合的，我们就称 X 为正合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, -)$-无环复形 。若在逆变变量中类似的陈述也成立，我们就称 X 为

（正合）$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,\mathcal{C})$-无环的。对于短正合列，我们也采用类似的术语：称 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C},-)$-正合 短正合列和 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,\mathcal{C})$-正合 短正合列。

2.4. **Ding-Chen 环**。 回顾一下，若双侧诺特环 R 满足 $\mathrm{id}(R_R)$ 和 $\mathrm{id}({}_RR)$，即把它视为自身上的左模和右模时，其内射维数均有限，则称其为 *Iwanaga-Gorenstein* 环。在这种情况下，有 $\mathrm{id}(R_R)=\mathrm{id}({}_RR)$。丁和陈将这一结果推广到了相干环：他们在 [DC93，推论 3.18] 中证明，若 R 是一个双侧相干环，且其自身的 FP-内射维数有限，即 $FP\text{-}\mathrm{id}(R_R)$ 和 $FP\text{-}\mathrm{id}({}_RR)$，那么必有$FP\text{-}\mathrm{id}(R_R)=FP\text{-}\mathrm{id}({}_RR)$。这样的环 R称为 丁和陈环；若这一共同维数为 $d<\infty$，则称 R 为维数为 d 的丁和陈环，或 *d-FC* 环。 [DC93] 还证明了，关于 R-模 M 的平坦维数和 FP-内射维数，以下命题等价：

$$\bullet\ \mathrm{fd}(M)<\infty \qquad \bullet\ \mathrm{fd}(M)\le d \qquad \bullet\ \text{FP-id}(M)<\infty \qquad \bullet\ \text{FP-id}(M)\le d.$$

令 $\mathcal{W}$ 表示所有此类模 M构成的类，我们将其关联的 稳定模范畴 定义为

$$\mathrm{Stmod}(R):=R\text{-Mod}/\mathcal{W},$$

其中右侧表示相对于 $\mathcal{W}$ 对 R-Mod（即范畴 R-模）作三角局部化。三角局部化的概念在 [Gil24, §6.7], 中有精确定义；简言之，它意味着以下各项均成立：(i) $\mathrm{Stmod}(R)$ 是一个三角范畴；(ii) 存在一个典范加性函子 γ: R-Mod $\to \mathrm{Stmod}(R)$, 它将短正合列函子性地映为正合三角；(iii) $\gamma(W)=0$ 对所有 $W\in\mathcal{W}$ 均成立；(vi) 关于性质 (i)–(iii)， γ 具有普遍初始性。正如引言中所述，$\mathrm{Stmod}(R)$ 可实现为三个阿贝尔模型结构的同伦范畴：$\mathfrak{M}_{proj}$、 $\mathfrak{M}_{inj}$和 $\mathfrak{M}_{flat}$。详情参见 [Gil10, Theorems 4.7/4.10], [Gil17, Theorem 1.2],以及 [CET20, Theorems 4.4/5.2]。

3. Merging a cotorsion pair with an injective model structure

本节将说明如何把一个内射（分别地，投射）模型结构与第二个完备余挠对结合起来。这样可以得到一个新的模型结构，它具有相同的平凡对象，但其余纤维（分别地，纤维）对象来自第二个余挠对。这一思想具有很强的普适性，因此在本节中，我们令（$\mathcal{A}$，$\mathcal{E}$）为任意正合范畴。也就是说， $\mathcal{A}$ 是一个带有正合结构 $\mathcal{E}$ 的加性范畴，其中的正合结构 $\mathcal{E}$ 依 Quillen [Qui73]的意义定义。

引理 3.1。 设 （$\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$）和 （$\mathcal{X}'$，$\mathcal{Y}'$）是 （$\mathcal{A}$，$\mathcal{E}$）中的余挠对。则以下每个陈述均成立：

（1） （$\mathcal{X}\cap\mathcal{X}'$，（${}^{\perp}(\mathcal{Y}\cup\mathcal{Y}')$）${}^{\perp}$）是由 $\mathcal{Y}\cup\mathcal{Y}'$生成的余挠对。

（2） （${}^{\perp}$（（$\mathcal{X}\cup\mathcal{X}'$）${}^{\perp}$） $\mathcal{Y}\cap\mathcal{Y}'$）是由 $\mathcal{X}\cup\mathcal{X}'$余生成的余挠对。

证明。 要证明（1）中的对确实是一个余挠对，只需证明$\mathcal{X}\cap\mathcal{X}'={}^{\perp}(\mathcal{Y}\cup\mathcal{Y}')$。显然， $\mathcal{X}\cap\mathcal{X}'\subseteq{}^{\perp}(\mathcal{Y}\cup\mathcal{Y}')$。为证明反向包含，注意到 $\mathcal{Y}\subseteq\mathcal{Y}\cup\mathcal{Y}'\implies{}^{\perp}\mathcal{Y}\supseteq{}^{\perp}(\mathcal{Y}\cup\mathcal{Y}')\implies\mathcal{X}\supseteq{}^{\perp}(\mathcal{Y}\cup\mathcal{Y}')$。同理，$\mathcal{X}'\supseteq{}^{\perp}(\mathcal{Y}\cup\mathcal{Y}')$，因此 $\mathcal{X}\cap\mathcal{X}'\supseteq{}^{\perp}(\mathcal{Y}\cup\mathcal{Y}')$。命题（2）类似。□

定理 3.2（由内射对象得到的新模型）。 设$(\mathcal{W},\mathcal{R})$ 和$(\mathcal{C},\mathcal{F})$ 均为正合范畴$(\mathcal{A},\mathcal{E})$ 中的完备余挠对，且该范畴有足够内射对象。那么$(\mathcal{W},\mathcal{R})$ 是一个内射余挠对，且满足 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{W}$，当且仅当 $\mathcal{F}\cup\mathcal{R}$ 生成一个 *Hovey* 三元组，

$$\mathfrak{M}=(\mathcal{C},\mathcal{W},({}^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}).$$

此外，以下陈述彼此等价，并刻画纤维对象类：

(1) $M\in({}^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}$.(2) M 的任意特殊 $\mathcal{W}$-预覆盖都属于 $\mathcal{F}$。(3) 存在一个短正合列 $R\rightarrowtail F\twoheadrightarrow M$，其中 $F\in\mathcal{F}$ 且 $R\in\mathcal{R}$。(4) $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}}(N,M)=0$，对所有模 $N\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$均成立。

注记 3.3。 注意，上述 Hovey 三元组中的纤维对象类 $({}^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}$ 是包含 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{R}$中所有对象的最小类。在 $\mathfrak{M}$ 为遗传的情形下，我们将在定理 3.4 中看到对纤维对象更为简洁的刻画。

证明。($\Longleftarrow$) 假设 $\mathfrak{M}$ 是一个 Hovey 三元组。那么，根据定义， $\mathcal{W}$ 是厚的，并且我们必须有 $\mathcal{F}=\mathcal{C}^{\perp}=\mathcal{W}\cap({}^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}$。特别地， $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{W}$。此外，由于 $\mathcal{F}$ 必须包含所有内射对象， $\mathcal{W}$也如此。容易得出，见 [Gil24, 命题 2.21](4)，$(\mathcal{W},\mathcal{R})$ 是一个内射余挠对。

($\Longrightarrow$) 假设 $(\mathcal{W},\mathcal{R})$ 是一个满足 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{W}$的内射余挠对。根据引理 3.1(1)， $\mathcal{F}\cup\mathcal{R}$ 生成余挠对 $(\mathcal{C}\cap\mathcal{W},({}^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp})$。接下来我们将证明 $\mathcal{W}\cap({}^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}=\mathcal{F}$。首先，由于 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{W}$且 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F}\cup\mathcal{R}\subseteq({}^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}$，可得包含关系 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{W}\cap({}^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}$。为证明反向包含，取 $Z\in\mathcal{W}\cap({}^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}$。由于 $(\mathcal{C},\mathcal{F})$ 是完备余挠对，我们可以写出一个短正合列 $Z\rightarrowtail F\twoheadrightarrow C$，其中 $F\in\mathcal{F}$ 且 $C\in\mathcal{C}$。由于F、$Z\in\mathcal{W}$ 且 $\mathcal{W}$ 是厚的，我们得到 $C\in\mathcal{W}$。因此 $C\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}={}^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R})$。由于$Z\in({}^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}$，前面的短正合列必分裂。这意味着 Z 是 F 的一个直和项，因此 $Z\in\mathcal{F}$ 也成立，从而完成对 $\mathcal{W}\cap({}^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}=\mathcal{F}$的证明。

我们可以直接证明 $(\mathcal{C}\cap\mathcal{W},({}^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp})$ 是完备的。为了证明它有足够的内射对象，设给定 M。我们构造一个拉回图

$$\begin{array}{ccccc} & & F & = & F \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ M & \rightarrowtail & P & \twoheadrightarrow & C \\ \| & & \downarrow & & \downarrow \\ M & \rightarrowtail & R & \twoheadrightarrow & W \end{array}$$

如下：利用 $(\mathcal{W},\ \mathcal{R})$ 有足够内射对象可得底行，而利用 $(\mathcal{C},\ \mathcal{F})$ 有足够投射对象可得右列。接着，由于 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{W}$，我们有 $F,\ W\in\mathcal{W}$，因此 $C\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$。我们还有$R\in\mathcal{R}\subseteq({}^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}$，以及 $F\in\mathcal{F}\subseteq({}^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}$，因此 $P\in({}^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}$。所以，该图的中间行表明，我们的余挠对有足够内射对象。

稍有不同的论证表明 $(\mathcal{C}\cap\mathcal{W},\ (^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp})$ 有足够投射对象。为此，我们构造一个拉回图

$$\begin{array}{ccccc} F & = & F & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ P & \rightarrowtail & C & \twoheadrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ R & \rightarrowtail & W & \twoheadrightarrow & M \end{array}$$

如下：底行是利用 $(\mathcal{W},\mathcal{R})$ 具有足够的投射对象得到的，而中间列是利用 $(\mathcal{C},\mathcal{F})$ 具有足够的投射对象得到的。然后我们同样可以论证 $C\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$，以及 $P\in(^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}$，从而中间行证明了我们的余挠对具有足够的投射对象。

由于 $\mathcal{W}$ 已经作为厚类提供给我们，这就完成了 $\mathfrak{M}$ 是 Hovey 三元组的证明。最后，我们证明所述纤维对象的刻画：

(1) $\Longrightarrow$ (2)。设 $M\in(^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}$。因为 $(\mathcal{W},\mathcal{R})$ 是完备余挠对，我们可以写出一个特殊的 $\mathcal{W}$-预覆盖序列 $R\rightarrowtail W\twoheadrightarrow M$，其中 $W\in\mathcal{W}$ 且$R\in\mathcal{R}\subseteq(^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}$。于是 $W\in\mathcal{W}\cap(^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}=\mathcal{F}$。
(2) $\Longrightarrow$(3) 是平凡的。
(3) $\Longrightarrow$ (4)。设 $N\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$。则将 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N,-)$ 作用于这样给定的短正合列，得到一个阿贝尔群的正合列

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}}(N,F)\to\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}}(N,M)\to\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{E}}(N,R).$$

我们有 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}}(N,F)=0$，因为 $N\in\mathcal{C}$，并且 $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{E}}(N,R)=0$，因为 $N\in\mathcal{W}$并且因为 $(\mathcal{W},\mathcal{R})$ 是遗传的，由 [Gil24，推论 2.17]。因此，对所有 $N\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$，$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}}(N,M)=0$。

(4) $\Longrightarrow$ (1)。我们已经知道 $(\mathcal{C}\cap\mathcal{W})^{\perp}=(^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}$。 □

现在我们证明，在遗传的情形下，对象 M 在 $\mathfrak{M}$ 中是纤维的，当且仅当 $M=Z_0X$，对某个正合的 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}\cap\mathcal{W},-)$-无挠复形 X，且每个$X_n\in\mathcal{F}$。

定理 3.4 (遗传条件与纤维对象)。 定理 *3.2* 中的 *Hovey* 三元组 $\mathfrak{M}=(\mathcal{C},\mathcal{W},(^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp})$ 是遗传的，当且仅当$(\mathcal{C},\mathcal{F})$ 是遗传的。在此情况下，刻画纤维对象的等价陈述 *(1)–(4)* 也等价于以下陈述：

(5) 存在一个 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}\cap\mathcal{W},-)$-正合短正合列 $M\rightarrowtail R\twoheadrightarrow F$ *with* $F\in\mathcal{F}$ *and* $R\in\mathcal{R}$.(6) $M=Z_0X$ 对某个正合复形 X 成立，其中每个 $X_n\in\mathcal{F}$，并且$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N,X)$ 对任意 $N\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$ 都保持正合。

证明。 由于 $\mathcal{W}$ 是厚的，因此只要 $\mathcal{C}$ 是投射分解的，$\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$ 就是投射分解的。所以，Hovey 三元组 $\mathfrak{M}=(\mathcal{C},\mathcal{W},(^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp})$ 是遗传的，当且仅当 $(\mathcal{C},\mathcal{F})$ 是遗传的；见 [Gil24，推论 2.17(2)]。

在证明的其余部分，我们假设 $\mathfrak{M}$ 是遗传的。我们需要证明，命题（5）和（6）也分别等价于前面的命题（1）–（4）。（5）$\Longrightarrow$（4）。假设存在一个 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}\cap\mathcal{W},-)$-正合短正合列 $M\rightarrowtail R\twoheadrightarrow F$，其中 $F\in\mathcal{F}$且 $R\in\mathcal{R}$。那么，对任意给定的 $N\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$，我们应用 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N,-)$，并利用 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}}(N,R)=0$，从而得出 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}}(N,M)=0$也成立。

（1） $\Longrightarrow$ （5）。假设 $M \in ({}^{\perp}(\mathcal{F} \cup \mathcal{R}))^{\perp}$，并利用 $(\mathcal{W},\ \mathcal{R})$ 有足够内射对象，写出短正合列 $M \rightarrowtail R \twoheadrightarrow W$，其中 $R \in \mathcal{R}$ 且 $W \in \mathcal{W}$。这个短正合列确实是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C} \cap \mathcal{W},\ -)$-正合的，因为 $\mathcal{C} \cap \mathcal{W} = {}^{\perp}(\mathcal{F} \cup \mathcal{R})$。此外，由于 $\mathfrak{M}$ 是遗传的，我们得到 $W \in ({}^{\perp}(\mathcal{F} \cup \mathcal{R}))^{\perp}$。因此，我们有$W \in \mathcal{W} \cap ({}^{\perp}(\mathcal{F} \cup \mathcal{R}))^{\perp} = \mathcal{F}$。

现在我们证明命题 (1)–(5) 蕴含 (6)。首先，利用 (3)，设 $R \rightarrowtail X_1 \twoheadrightarrow M$ 是一个短正合列，其中有 $X_1 \in \mathcal{F}$ 和 $R \in \mathcal{R}$。那么对于任意 $N \in \mathcal{W}$，$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}}(N,\ R) = 0$，因此对任意 $N \in \mathcal{W}$，在应用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N,\ -)$ 后，该短正合列仍然正合。由于 $R \in \mathcal{R} \subseteq ({}^{\perp}(\mathcal{F} \cup \mathcal{R}))^{\perp}$，等价命题 (1)–(5) 对 R 也成立。因此，我们可以迭代这一构造，得到一个正合复形

$$\cdots \to X_3 \to X_2 \to X_1 \twoheadrightarrow M$$

其中每个 $X_n \in \mathcal{F}$ 在对任意 $N \in \mathcal{W}$ 应用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N,\ -)$ 后仍然正合，因此特别地，对任意 $N \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ 也成立。另一方面，通过反复利用 $(\mathcal{C},\ \mathcal{F})$ 有足够内射对象这一事实，我们可以构造一个正合复形

$$M \rightarrowtail X_0 \to X_{-1} \to X_{-2} \to \cdots$$

每个 $X_n \in \mathcal{F}$ 都成立。由遗传条件可知，该复形的每个余核也属于 $({}^{\perp}(\mathcal{F} \cup \mathcal{R}))^{\perp}$。特别地，对任意 $N \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$，应用 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, -)$ 后，该复形仍然正合。这就完成了证明，说明 (1)–(5) 蕴含 (6)。

最后，我们证明 (6) 蕴含 (4)。因此，假设对某个正合复形 X，其中每个 $X_n \in \mathcal{F}$ 都成立，并且对所有 $N \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, X)$ 仍然正合。令 $N \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$，我们需要证明 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}}(N, M) = 0$。对短正合列 $M = Z_0X \rightarrowtail X_0 \twoheadrightarrow Z_{-1}X$ 应用 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, -)$，可得到另一个短正合列。此外，由于 $X_0 \in \mathcal{F} \subseteq ({}^{\perp}(\mathcal{F} \cup \mathcal{R}))^{\perp} = (\mathcal{C} \cap \mathcal{W})^{\perp}$，我们有 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}}(N, X_0) = 0$，因此得到一个阿贝尔群的正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, X_0) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, Z_{-1}X) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}}(N, M) \to 0$$

其中，同态 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N,\ Z_{-1}X) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}}(N,\ M)$ 是零映射。因此，$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}}(N,\ M) = 0$，从而证明了陈述 (4)。□

3.1. 投射对偶。 我们在上文构造了陈述及其证明，使其能够导出以下对偶结果。

定理 3.5 (由投射对象构造新的模型)。 设 $(\mathcal{Q}, \mathcal{W})$ 和 $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ 都是正合范畴 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 中的完备余挠对，且该范畴有足够多的投射对象。则$(\mathcal{Q}, \mathcal{W})$ 是一个投射余挠对，且 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{W}$，当且仅当 $\mathcal{C} \cup \mathcal{Q}$余生成一个 *Hovey* 三元组，

$$\mathfrak{M} = ({}^{\perp}((\mathcal{C} \cup \mathcal{Q})^{\perp}), \mathcal{W}, \mathcal{F}).$$

此外，以下陈述等价，并刻画了余纤维对象的类:

(1) $M \in {}^{\perp}((\mathcal{C} \cup \mathcal{Q})^{\perp})$。(2) 任意特殊的 $\mathcal{W}$-预包络 M 都属于 $\mathcal{C}$。(3) 存在一个短正合列 $M \rightarrowtail C \twoheadrightarrow Q$，其中 $C \in \mathcal{C}$ 且 $Q \in \mathcal{Q}$。(4)$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}}(M, N) = 0$，对所有模 $N \in \mathcal{W} \cap \mathcal{F}$ 均成立。

定理 3.6 （遗传条件与余纤维对象）。 定理 *3.5* 中的 *Hovey* 三元组 $\mathfrak{M} = ({}^{\perp}((\mathcal{C} \cup \mathcal{Q})^{\perp}), \mathcal{W}, \mathcal{F})$ 是遗传的，当且仅当 $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ 是遗传的。

在这种情况下，刻画余纤维对象的等价陈述 *(1)–(4)* 也等价于以下陈述：

(5) 存在一个$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,\mathcal{W}\cap\mathcal{F})$-正合短正合列 $C \rightarrowtail Q \twoheadrightarrow M$，其中$C\in\mathcal{C}$ 且 $Q\in\mathcal{Q}$。(6) $M = Z_0X$，对于某个正合复形 X，其中每个 $X_n \in \mathcal{C}$，并且满足$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, N)$ 对任意 $N \in \mathcal{W}\cap\mathcal{F}$仍保持正合。

例 3.7. 设 R 为一个环。取定理 3.5 中的 $(\mathcal{Q},\mathcal{W})$ 为投射余挠对，其中 $\mathcal{Q}$ 是所有 *Gorenstein AC*-投射 R-模构成的类，参见[BGH14，第 8] 节。取 $(\mathcal{C},\mathcal{F})$ 为完备遗传余挠对，其中$\mathcal{C}$ 是所有层 R-模构成的类，参见 [BGH14，第 2] 节。定理 3.5/3.6 的假设均得到满足，因此我们得到一个（余纤维生成的）阿贝尔模型结构，

$$\mathfrak{M} = ({}^{\perp}((\mathcal{C}\cup\mathcal{Q})^{\perp}), \mathcal{W}, \mathcal{F}).$$

模 M 在 $\mathfrak{M}$ 中是余纤维的，当且仅当 $M = Z_0L$ 对某个由 level 模构成的正合复形 L 成立，且对于任意 $N \in \mathcal{W}\cap\mathcal{F}$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L, N)$ 都保持正合。

若 R 是（右）相干的，则 level（左）模与平坦模相同。此外，在这种情况下，Gorenstein AC-投射对象恰好是*Ding* 投射 模，或者等价地，是*PGF*-模。由 [SS20, 定理 4.11(3)] 可知，${}^{\perp}((\mathcal{C}\cup\mathcal{Q})^{\perp})$ 等于所有 Gorenstein 平坦模组成的类。特别地，由平坦模构成的正合复形 X 是*F*-完全无挠 的（即，对于所有内射右 R-模，$I\otimes_R X$ 都是正合的），当且仅当对于 $\mathcal{W}$ 中所有余挠模，$\mathrm{Hom}_R(X, N)$ 都保持正合。

4. Existence of non-hereditary models for derived categories

本节简短且独立，是定理 3.2 的一个应用，展示了环 R 的导出范畴上非遗传模型结构的存在性。在本节中，我们用 R-Mod 表示环 R 上（左） R-模所构成的范畴，并用 Ch(R) 表示相应的链复形范畴。

在 [Gil04] 中，我们介绍了一种方法，可将 R-Mod 上的余挠对提升为余挠对，从而在 Ch(R) 上得到潜在的模型结构。沿用该处的记号，R-Mod 中任意一个余挠对 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 都可提升为两个余挠对 $(dg\mathcal{A},\mathcal{B})$ 和 $(\mathcal{A},dg\mathcal{B})$，它们位于 Ch($R$) 中。这里，$\mathcal{A}$（分别为 $\mathcal{B}$）表示所有圈属于 $\mathcal{A}$（分别属于 $\mathcal{B}$）的正合复形所构成的类。按定义，另外两个类分别是它们的 Ext 正交类。令 $\mathcal{E}$ 表示所有正合复形构成的类，[Gil04, 推论 3.13] 表明，余挠对 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是遗传的，当且仅当 $dg\mathcal{A}\cap\mathcal{E} = \mathcal{A}$ 和/或 $\mathcal{E}\cap dg\mathcal{B} = \mathcal{B}$。在这种情况下，若余挠对 $(dg\mathcal{A},\mathcal{B})$ 和 $(\mathcal{A},dg\mathcal{B})$ 完备，那么它们就是 Ch(R) 上同一个阿贝尔模型结构 $(dg\mathcal{A},\mathcal{E},dg\mathcal{B})$ 所对应的两个余挠对。以下结果表明，在非遗传的情形下，这两个余挠对中的每一个实际上都分别属于不同的阿贝尔模型结构。

下文中，dg 表示所有众所周知的*DG*-投射 链复形，而 $dg\mathcal{I}$ 表示所有*DG*-内射 复形的对偶类。

定理 4.1 (导出范畴的非遗传模型)。设 R 是一个环，且$(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是 R-模的一个（不一定是遗传的）余挠对，由一个集合余生成。那么$(dg\mathcal{A},\mathcal{B})$ 和$(\mathcal{A},dg\mathcal{B})$ 都是$\mathrm{Ch}(R)$ 中的完备余挠对，并且

它们各自都是 $\mathcal{D}(R)$上的一个余纤维生成的阿贝尔模型结构的一部分，即 R的导出范畴：

$$\text{(i)}\quad (dg\widetilde{\mathcal{A}}, \mathcal{E}, ({}^{\perp}(\widetilde{\mathcal{B}} \cup dg\widetilde{\mathcal{I}}))^{\perp}) \qquad \text{(ii)}\quad ({}^{\perp}((\widetilde{\mathcal{A}} \cup dg\widetilde{\mathcal{P}})^{\perp}), \mathcal{E}, dg\widetilde{\mathcal{B}}).$$

当且仅当(i) 和(ii) 中的模型结构相等时，$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是遗传的，在$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$这种情况下，它们与通常的 *Hovey* 三元组$(dg\mathcal{A}, \mathcal{E}, dg\mathcal{B})$重合。

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$证明。如前所述，两个余挠对 $(dg\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 和 $(\mathcal{A}, dg\mathcal{B})$ 存在。由于$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 由一个集合余生成，因此 $(dg\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 也由一个集合余生成；参见 [Gil07，命题 3.8] 或 [Gil24，命题 10.37]。另一方面，由$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ [Sto13，命题 1.7/命题 2.9(1)/定理 4.2(1)] 可知，$(\mathcal{A}, dg\mathcal{B})$ 也由一个集合余生成$\widetilde{\quad}$。因此，两个余挠对都是完备的。众所周知，$(dg\mathcal{P}, \mathcal{E})\widetilde{\quad}$是一个投射余挠对，而 $(\mathcal{E}, dg\mathcal{I})$ 是一个内射余挠对（同样，每一个都由一个集合余生成）。因此，根据定理 3.2，我们得到一个阿贝尔模型结构 $(dg\widetilde{\mathcal{A}}, \mathcal{E}, ({}^{\perp}(\widetilde{\mathcal{B}} \cup dg\widetilde{\mathcal{I}}))^{\perp})$；根据定理 3.5，我们得到另一个阿贝尔模型结构 $({}^{\perp}((\widetilde{\mathcal{A}} \cup dg\widetilde{\mathcal{P}})^{\perp}), \mathcal{E}, dg\widetilde{\mathcal{B}})$。由于余挠对相等，

$$(dg\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mathcal{B}}) = (dg\widetilde{\mathcal{A}}, \mathcal{E} \cap ({}^{\perp}(\widetilde{\mathcal{B}} \cup dg\widetilde{\mathcal{I}}))^{\perp}),$$

and

$$(\widetilde{\mathcal{A}}, dg\widetilde{\mathcal{B}}) = ({}^{\perp}((\widetilde{\mathcal{A}} \cup dg\widetilde{\mathcal{P}})^{\perp}) \cap \mathcal{E}, dg\widetilde{\mathcal{B}}),$$

我们推得，(i) 和 (ii) 中的模型结构相等，当且仅当

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{E} \cap dg\widetilde{\mathcal{B}} \quad \text{and} \quad \widetilde{\mathcal{A}} = dg\widetilde{\mathcal{A}} \cap \mathcal{E}.$$

但根据 [Gil04，推论 3.13]，，当且仅当余挠对 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是遗传余挠对时，情况才是如此。□

可以验证，$({}^{\perp}(\widetilde{\mathcal{B}} \cup dg\widetilde{\mathcal{I}}))^{\perp}$ 正是由所有满足以下条件的链复形 X 构成的类：每个链复形都有 $X_n \in \mathcal{B}$，并且任意链映射 $A \to X$ 满足 $A \in dg\widetilde{\mathcal{A}} \cap \mathcal{E}$ 时都是零伦的。对于 ${}^{\perp}((\widetilde{\mathcal{A}} \cup dg\widetilde{\mathcal{P}})^{\perp})$，也有类似的刻画。

例 4.2。 或许最为人熟知的非遗传余挠对涉及非凝聚环上的 FP-内射模。更具体地说，令 $\mathcal{S}$ 为所有有限呈R-模类的一组同构代表。 $\mathcal{S}$ 余生成一个完备余挠对，我们将其记为 $(\mathcal{FP}, \mathcal{FI})$。 $\mathcal{FI}$ 中的模恰好是 *FP*-内射 模，而 $\mathcal{FP}$ 中的模称为 *FP*-投射。已知， R 是（左）相干的，当且仅当 $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$$(\mathcal{FP}, \mathcal{FI})$ 是遗传余挠对；见 [Sto14，附录 B]。因此， $dg\mathcal{PF}$ 和 $dg\mathcal{FI}$ 始终是导出范畴的阿贝尔模型的（余）纤维对象，但当 R 不是（左）相干环时，它们对应两个不同的模型结构。

5. Bifibrant objects and totally acyclic complexes

为准备定理 3.2 和 3.4 的第二个应用，我们回到第 3 节的一般设定。因此，在本节中，我们始终假设 $(\mathcal{A},\ \mathcal{E})$ 是一个有足够内射对象的正合范畴，$(\mathcal{C},\ \mathcal{F})$ 是一个完备遗传余挠对，而 $(\mathcal{W},\ \mathcal{R})$ 是一个内射余挠对，且 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{W}$。那么， $\mathfrak{M} = (\mathcal{C},\ \mathcal{W},\ ({}^{\perp}(\mathcal{F} \cup \mathcal{R}))^{\perp})$ 表示定理 3.2 和 3.4 中相应的 Hovey 三元组。我们在此旨在记录一些一般条件，以便稍后应用；这些条件可确保同伦范畴 $\mathrm{Ho}(\mathfrak{M})$ 有一种特别简洁的描述。该描述见定理 5.5，并用到以下术语。

定义 5.1。我们为分量属于 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 的正合复形规定以下术语，其中 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 是余挠对 $(\mathcal{C},\ \mathcal{F})$ 的核。

(1) 我们所说的一个 **(全正合复形($\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$)-对象)**，是指一个 $\mathcal{E}$-正合复形 X，其中每个 $X_n\in\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 均成立，并且满足：只要 $N\in\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N,X)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,N)$ 都是阿贝尔群的正合复形。(2) 我们所说的一个 ***Gorenstein*** **($\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$)-对象**，是指对象 $M=Z_0X$，它等于某个由 $(\mathcal{C}\cap\mathcal{F})$-对象构成的全正合复形的 0-圈。

我们用 $\mathcal{GCF}$ 表示所有 Gorenstein $(\mathcal{C}\cap\mathcal{F})$-对象构成的类。

注意，下面的命题立即表明，$\mathfrak{M}$ 的所有双纤维对象都属于由所有 Gorenstein $(\mathcal{C}\cap\mathcal{F})$-对象构成的类 $\mathcal{GCF}$。

命题 5.2。对象 M 是双纤维的，也就是说 $M\in\mathcal{C}\cap({}^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}$，当且仅当 $M=Z_0X$ 存在某个 $\mathcal{E}$-正合复形 X，其中每个 $X_n\in\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 均成立，且对任意 $N\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N,X)$ 都是阿贝尔群的正合复形；此外，对任意 $N\in\mathcal{F}$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,N)$ 也是阿贝尔群的正合复形。

证明。($\Longleftarrow$) 假设 $M=Z_0X$ 对于这样的正合复形 X成立。那么根据定理 3.4(6)，我们显然有 $M\in({}^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}$。为证明 $M\in\mathcal{C}$，令 $N\in\mathcal{F}$，并证明 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}}(M,N)=0$。根据我们的假设，将 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,N)$ 应用于短正合列 $Z_1X\rightarrowtail X_1\twoheadrightarrow M$，可得到另一个短正合列。此外，由于 $X_1\in\mathcal{C}={}^{\perp}\mathcal{F}$，我们有 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}}(X_1,N)=0$，因此得到一个阿贝尔群正合列

$$0\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_1,N)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z_1X,N)\to\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}}(M,N)\to 0$$

其中同态 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z_1X,N)\to\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}}(M,N)$ 是零映射。由此可得 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}}(M,N)=0$，从而证明了 $M\in\mathcal{C}$。因此，$M\in\mathcal{C}\cap({}^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}$。($\Longrightarrow$) 我们再次回到定理 3.4 的证明，并沿用其中证明 (6) 部分的论证。首先取一个短正合列 $R\rightarrowtail X_1\twoheadrightarrow M$，使得 $X_1\in\mathcal{F}$ 且 $R\in\mathcal{R}$。现在我们还利用 $(\mathcal{C},\mathcal{F})$ 有足够多的投射对象，写出另一个短正合列 $F\rightarrowtail X_1'\twoheadrightarrow X_1$，使得 $X_1'\in\mathcal{C}$ 且 $F\in\mathcal{F}$。注意，X_1' 必然属于 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$。构造拉回图:

$$\begin{array}{ccccc}
F & = & F & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
R' & \rightarrowtail & X_1' & \twoheadrightarrow & M \\
\downarrow & & \downarrow & & \| \\
R & \rightarrowtail & X_1 & \twoheadrightarrow & M.
\end{array}$$

由于 $F\in\mathcal{F}$ 和 $R\in\mathcal{R}$，我们得到扩张 R' 属于类 $({}^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}$。此外，由于 $M,\ X_1'\in\mathcal{C}$ 且 $(\mathcal{C},\ \mathcal{F})$ 是遗传的，我们得到 $R'\in\mathcal{C}\cap({}^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}$。注意到该图的中间行具有 $R'\in\mathcal{C}\cap({}^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}$ 和 $X_1'\in\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$，我们可以迭代这一构造，从而得到一个正合复形

$$\cdots\to X_3'\to X_2'\to X_1'\twoheadrightarrow M$$

对每个 $X_n'\in\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$，以及 $\mathcal{C}\cap({}^{\perp}(\mathcal{F}\cup\mathcal{R}))^{\perp}$ 中的每个余核都是如此。特别地，对任意 $N\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$，应用 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N,\ -)$ 后该复形仍然正合；对任意 $N\in\mathcal{F}$，应用 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,N)$ 后也仍然正合。另一方面，由于 $M\in$

$\mathcal{C} \cap ({}^{\perp}(\mathcal{F} \cup \mathcal{R}))^{\perp}$，利用 $(\mathcal{C},\ \mathcal{F})$ 有足够内射对象这一点，构造正合复形

$$M \rightarrowtail X_0 \to X_{-1} \to X_{-2} \to \cdots,$$

将再次使每个 $X_n \in \mathcal{C} \cap \mathcal{F}$ 都成立；并且根据遗传条件，每个余核也将再次属于 $\mathcal{C} \cap ({}^{\perp}(\mathcal{F} \cup \mathcal{R}))^{\perp}$。因此，对任意 $N \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$，应用 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N,\ -)$ 后，该复形仍然正合；对任意 $N \in \mathcal{F}$，应用 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,\ N)$ 后也仍然正合。将这两个复形在 M 处拼接起来，即得到所需的正合复形 X。□

鉴于 $(\mathcal{C},\ \mathcal{F})$ 是一个完备遗传余挠对，定义对象 N 的 $\mathcal{F}$-维数是很自然的：若存在一个非负整数 n和一个正合列

$$N \rightarrowtail F^0 \to F^1 \to \cdots \to F^{n-1} \twoheadrightarrow F^n$$

其中每个 $F^i \in \mathcal{F}$ 都成立，则称 N 具有**有限 $\mathcal{F}$-维数**，并记作$\mathcal{F}$-dim$(N) \leq n$。若 d 是使得存在此类正合列的最小整数，则它就是 N 的 **$\mathcal{F}$- 维数**，记作 $\mathcal{F}$-dim$(N) = d$。若不存在这样的整数n ，则记作 $\mathcal{F}$-dim$(N) = \infty$。利用标准的维数平移论证，可以借助遗传条件验证， $\mathcal{F}$-dim$(N) \leq n < \infty$意味着对所有 $i \geq 1$ 和所有 $C \in \mathcal{C}$，都有 $\mathrm{Ext}^{n+i}_{\mathcal{E}}(C,\ N) = 0$。我们将在下一个引理的证明中使用这一点。

引理 5.3. </style}对象 具有有限的 维数，-维数($N) \leq n$，当且仅当存在正合列

$$N \rightarrowtail F^0 \to F^1 \to \cdots \to F^{n-1} \twoheadrightarrow F^n$$

其中每个 $F^i \in \mathcal{C} \cap \mathcal{F}$。

证明. ($\Longrightarrow$) 我们首先通过连续使用余挠对 (,) 有足够内射对象这一事实，构造一个余解

$$N \rightarrowtail F^0 \to F^1 \to F^2 \to \cdots$$

N的余解。由于$N \in \mathcal{C}$，每个圈（核）都属于 $\mathcal{C}$，因此每个 $F^i \in \mathcal{C} \cap \mathcal{F}$。若 $\mathcal{F}$-维数$(N) \leq n$，则根据标准的维数平移论证可知，该余解的第 n 个余叙（余核）必属于 $\mathcal{F}$。因此它属于 $\mathcal{C} \cap \mathcal{F}$，结论得证。

($\Longleftarrow$) 假设 N 具有这样的余解。由于 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{W}$，且 $\mathcal{W}$满足三取二性质，因此得到 $N \in \mathcal{W}$。显然， $N \in \mathcal{C}$ 也成立，因为余挠对 $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ 是遗传的。□

引理 5.4. 假设 $N \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ 的每个对象都具有有限的 $\mathcal{F}$-维数。那么，对于每个 $X_n \in \mathcal{F}$ 都具有 X 的链复形，以下条件等价。

(1) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, X)$ 对所有 $N \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ 都是正合的。

(2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, X)$ 对所有 $N \in \mathcal{C} \cap \mathcal{F}$ 都是正合的。

证明。 显然，由于 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{W}$，(1) 蕴含 (2)。为证明 (2) 蕴含 (1)，我们利用引理 5.3 写出一个正合列

$$N \rightarrowtail F^0 \to F^1 \to \cdots \to F^{d-1} \twoheadrightarrow F^d$$

每个 $F^i \in \mathcal{C} \cap \mathcal{F}$ 都满足这一条件。对于每个 $i = 0$、1，$\cdots$，$d-1$，令 N^i:=Ker($F^i \to F^{i+1}$)。那么，由于遗传条件，每个 N^i 都必须属于 $\mathcal{C}$，并且有$N^0 = N$。由于 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}}(N^i,\ X_n) = 0$，将 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,\ X)$ 应用于每个短正合

列 $N^i \rightarrowtail F^i \twoheadrightarrow N^{i+1}$，得到阿贝尔群的链复形之间的短正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N^{i+1}, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F^i, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N^i, X) \to 0.$$

因此，由于对任意 F^i，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F^i, X)$ 都是正合的，根据三取二性质可知，对所有 $i = 0, 1, \cdots, d-1$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N^i, X)$ 都是正合的。□

请回顾，$\mathcal{GCF}$ 表示定义 5.1 中所述的所有 Gorenstein（$\mathcal{C} \cap \mathcal{F}$）对象构成的类。

定理 5.5。假设定理 *3.2* 的 ***Hovey*** 三元组 $\mathfrak{M} = (\mathcal{C}, \mathcal{W}, ({}^{\perp}(\mathcal{F} \cup \mathcal{R}))^{\perp})$ 存在且是遗传的，并且满足以下两个条件：

(1) 每个对象 $N \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ 都具有有限的 $\mathcal{F}$ 维数。(2) 任意一个 $\mathcal{E}$-正合链复形 X，若其所有分量均为 $X_n \in \mathcal{C} \cap \mathcal{F}$，则其每个圈 $Z_n X \in \mathcal{C}$ 必然也是如此。

那么我们有 $\mathcal{C} \cap ({}^{\perp}(\mathcal{F} \cup \mathcal{R}))^{\perp} = \mathcal{GCF}$，即所有 ***Gorenstein***$(\mathcal{C} \cap \mathcal{F})$对象构成的类。因此，我们可以将同伦范畴识别为

$$\mathrm{Ho}(\mathfrak{M}) \simeq \mathrm{St}(\mathcal{GCF}),$$

其中，$\mathrm{St}(\mathcal{GCF})$ 表示由所有 ***Goren-stein*** $(\mathcal{C} \cap \mathcal{F})$-对象组成的 ***Frobenius*** 范畴的稳定范畴。

注 5.6。条件 (2) 可以用周期性 的语言表述，如 [BCE20]和 [BHP24]中所述。

证明。我们只需证明 $\mathcal{C} \cap ({}^{\perp}(\mathcal{F} \cup \mathcal{R}))^{\perp} = \mathcal{GCF}$。

($\subseteq$) $M \in \mathcal{C} \cap ({}^{\perp}(\mathcal{F} \cup \mathcal{R}))^{\perp}$。由命题 5.2，$M = Z_0 X$ 对某个 $\mathcal{E}$-正合复形 X 成立，该复形满足每个 $X_n \in \mathcal{C} \cap \mathcal{F}$，且对于任意$N \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, X)$ 都是正合的；此外，对于任意 $N \in \mathcal{F}$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, N)$ 也都是正合的。特别地，X 是由 $(\mathcal{C} \cap \mathcal{F})$-对象构成的全无挠复形。因此 $M \in \mathcal{GCF}$。

($\supseteq$) 假设 $M \in \mathcal{GCF}$。设 $M = Z_0 X$ 为某个由（$\mathcal{C} \cap \mathcal{F}$）对象组成的全无挠复形 X。根据周期性条件，即假设 (2)，我们得到$M \in \mathcal{C}$。由引理 5.4 还可知，对于每个$N \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, X)$ 都是一个正合复形。因此，根据定理 3.4(6)，我们也得到 $M \in ({}^{\perp}(\mathcal{F} \cup \mathcal{R}))^{\perp}$。□

本节的结果也可以再次表述其对偶形式。特别地，定理 5.5 有一个对偶结果。

6. Weakly Gorenstein $\mathcal{B}$-injective modules

现在我们再次设 R 为一个环，并令 R-Mod 表示（左）R-模的范畴。本节中，$\boldsymbol{\mathcal{B}}$ 表示一个包含所有内射模的 $\boldsymbol{R}$-模类。[GI22，定义 16] 中研究了 $Gorenstein\mathcal{B}$-内射模这一概念。下面这个较弱的变体基于 Iacob 最近的工作（[Iac23], [Iac25], 和 [Iac26]），她在这些工作中研究了 [ZC11] 中的弱 ***Ding***-内射模。

定义 6.1。与第 2.3 节中一样，我们称 X 的 R-模链复形为 $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{B}, -)$-无环的，如果对于所有$B \in \mathcal{B}$，$\mathrm{Hom}_R(B, X)$ 都是阿贝尔群的正合复形。如果 X 本身也是正合的，则称 X 为一个正合的 $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{B}, -)$-无环 复形。

(1) 一个 R-模 Z 是 ***Gorenstein*** $\mathcal{B}$-内射，如果 $Z = Z_0 E$ 存在某个正合 $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{B}, -)$-无挠复形 E，其各项都是 R-模，且每个 E_n 都是内射模。

(2) 一个 R-模 Z 是 弱 ***Gorenstein*** $\mathcal{B}$-内射，如果 $Z = Z_0E$ 存在某个正合 $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{B}, -)$-无挠复形 E，其各项都是 R-模，且每个 $E_n \in \mathcal{B}$都满足此性质。

记号。我们用 $\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}$ 表示所有 Gorenstein $\mathcal{B}$-内射 R-模构成的类，并用 $\mathrm{w}\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}$ 表示所有弱 Gorenstein $\mathcal{B}$-内射 R-模构成的类。一般而言，我们有 $\mathcal{GI}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathrm{w}\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}$, 且 $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{w}\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}$。还请注意，若 $\mathcal{GI}$ 表示所有通常的 Gorenstein 内射模构成的类，则我们有 $\mathcal{GI}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{GI}$；当 $\mathcal{B}$ 不过是所有内射模构成的类时，等式 $\mathcal{GI} = \mathcal{GI}_{\mathcal{B}} = \mathrm{w}\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}$ 成立。

接下来的几个引理彼此独立，但都将用于证明本节的主要定理。以下所有结果及其证明均基于 Iacob 的类似结果，这些结果散见于 [Iac23、Iac25、Iac26]，但主要见于 [Iac26]。

引理 6.2. 假设 $\mathcal{B}$ 是一个覆盖类，且对扩张封闭。设 L是弱 *Gorenstein* $\mathcal{B}$-内射模 Z的一个直和项。那么它的 $\mathcal{B}$-覆盖$\psi\colon\ C \to L$ 必为满射，且 核 $\psi \in \mathcal{B}^{\perp}$。特别地，$L = Z$也成立。

证明。根据 Z的定义，存在一个满射 $e\colon\ E \to Z$，且有 $E \in \mathcal{B}$。考虑满射的复合映射 $E \xrightarrow{e} Z \xrightarrow{\pi} L$，其中 π 是投影到直和项L上的映射。它可以提升到覆盖上，即存在某个 t，使得 $\pi e = \psi t$。由于 πe 是满射，ψ也是满射。由于假设$\mathcal{B}$ 对扩张封闭，Wakamatsu 引理 [EJ00，推论 7.2.3] 适用；它断言核 $\mathrm{Ker}\,\psi \in \mathcal{B}^{\perp}$。（我们笼统假设 $\mathcal{B}$ 包含所有内射对象，这一点并非必需。）□

引理 6.3. 假设 $\mathcal{B}$ 对单态射的余核封闭。那么，类 $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}^{\perp}$ 等于所有内射模构成的类。

证明. 每个内射模都属于 $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}^{\perp}$。反过来，设 $X \in \mathcal{B} \cap \mathcal{B}^{\perp}$，并写出一个短正合列

$$0 \to X \to I \to I/X \to 0$$

其中 I 是一个内射模。假设条件蕴含 $I/X \in \mathcal{B}$。因此我们得到 $\mathrm{Ext}^1_R(I/X,\ X) = 0$。这意味着该短正合列必定分裂，因此作为 I 的一个直和项，X 本身也是一个内射模。□

引理 6.4. 假设我们有一个由 R-模组成的短正合列

$$0 \to K \to C \xrightarrow{\psi} L \to 0$$

其中 ψ 是一个 $\mathcal{B}$-覆盖。那么对于任意 $B \in \mathcal{B}$，我们有一个短正合列

$$0 \to K \to C \bigoplus B \xrightarrow{\psi \oplus 1_B} L \bigoplus B \to 0$$

并且映射 $\psi \oplus 1_B\colon\ C \bigoplus B \to L \bigoplus B$ 也是一个 $\mathcal{B}$-覆盖，且 核 $(\psi \oplus 1_B) \cong K$。

证明。第二个序列只是第一个序列与序列$0 \to B \xrightarrow{1_B} B$的直和，因此它显然是一个短正合列。容易看出，$\psi \oplus 1_B$ 是一个 $\mathcal{B}$-预覆盖。为了检验覆盖的自同构条件，假设 $f\colon\ C \bigoplus B \to C \bigoplus B$ 满足 $(\psi \oplus 1_B) \circ f = \psi \oplus 1_B$。注意，这些映射等价于矩阵

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} : C \bigoplus B \xrightarrow{f} C \bigoplus B \quad , \qquad \psi \oplus 1_B = \begin{bmatrix} \psi & 0 \\ 0 & 1_B \end{bmatrix}$$

对于某些映射 x，y，z，w，其（余）定义域和值域适当。容易验证，f 必定具有如下形式

$$f = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1_B \end{bmatrix}$$

对于某个自同构 $x\colon\ C \to C$满足 $\psi x = \psi$，以及某个映射 $y\colon\ B \to C$满足 $\psi y = 0$。也容易验证，$\begin{bmatrix} x^{-1} & -x^{-1}y \\ 0 & 1_B \end{bmatrix}$ 是一个双侧逆 of $f = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1_B \end{bmatrix}$. □

下一个引理是 [ZC11 中引理 2] 的推广。

引理 6.5. 假设 $\mathcal{B}$ 是一个覆盖类，并且对直和项封闭。设E 是一个正合的$\mathrm{Hom}_R(\mathcal{B}, -)$-无挠复形

$$\cdots \to E_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} E_n \xrightarrow{d_n} E_{n-1} \to \cdots$$

如定义 *6.1 (2)* 所述，即对每个 $E_n \in \mathcal{B}$。那么每个圈 Z_nE 都有一个直和分解，$Z_nE = L_n \bigoplus B_n$，其中 $B_n \in \mathcal{B}$ 和 $L_n \in \mathcal{B}^{\perp}$。特别地，任意弱 *Gorenstein* $\mathcal{B}$-内射模都有这样的直和分解。

证明。 简言之，令 $Z_n := Z_nE$。由于 E 是正合的，我们得到如下图 (1) 中间行所示的短正合列，并且每个微分都可分解为 $d_n = k_{n-1}e_n$。每个圈 Z_n 都是弱 Gorenstein $\mathcal{B}$-内射的，因此将引理 6.2 应用于 Z_{n-1}，可得一个短正合列

$$0 \to L_n \xrightarrow{f_n} C_n \xrightarrow{\varphi_n} Z_{n-1} \to 0$$

其中 $\varphi_n\colon\ C_n \to Z_{n-1}$ 是一个满射的 $\mathcal{B}$-覆盖，且满足 $L_n \in \mathcal{B}^{\perp}$。$\varphi_n$ 的（预）覆盖性质给出了一个短正合列的态射（σ_n，β_n，1），如图底部两行所示:

$$(1)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L_n & \xrightarrow{f_n} & C_n & \xrightarrow{\varphi_n} & Z_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle\tau_n}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_n}\downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_n & \xrightarrow{k_n} & E_n & \xrightarrow{e_n} & Z_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle\sigma_n}\downarrow & & {\scriptstyle\beta_n}\downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & L_n & \xrightarrow{f_n} & C_n & \xrightarrow{\varphi_n} & Z_{n-1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

顶端两行之间的短正合列态射（τ_n，α_n，1）源自链复形 $\mathrm{Hom}_R(C_n,\ E)$的正合性。事实上（d_{n-1}）$_*$（$k_{n-1}\varphi_n$）$=d_{n-1}$（$k_{n-1}\varphi_n$）$=$（$d_{n-1}k_{n-1}$）$\varphi_n = 0\varphi_n = 0$。因此存在 $\alpha_n\colon\ C_n \to E_n$，使得

$$\begin{aligned} (d_n)_*(\alpha_n) &= k_{n-1}\varphi_n \\ d_n\alpha_n &= k_{n-1}\varphi_n \\ k_{n-1}e_n\alpha_n &= k_{n-1}\varphi_n. \end{aligned}$$

通过左消去单态射 k_{n-1}，我们得到 $e_n\alpha_n = \varphi_n$。接着，根据核 k_n 的泛性质，存在 $\tau_n\colon\ L_n \to Z_n$。现在，由于 φ_n 是一个覆盖，定义

意味着 $\beta_n\alpha_n$ 必须是 C_n 的自同构。令 r_n 为其逆，使得 $1_{C_n} = r_n(\beta_n\alpha_n) = (r_n\beta_n)\alpha_n$，我们看到 α_n 是一个分裂单态射，其收缩为 $r_n\beta_n$。因此，我们得到一个直和分解

$$E_n = C_n \bigoplus \operatorname{Ker}(r_n\beta_n) = C_n \bigoplus \operatorname{Ker}\beta_n.$$

由五引理（或蛇引理）可知， $\sigma_n\tau_n$ 也是 L_n的一个自同构。因此，我们得到类似的直和分解

$$Z_n = L_n \bigoplus \operatorname{Ker}\sigma_n.$$

此外，上述交换图左下方的方块必定是一个拉回方块，其中 β_n 和 σ_n 是（分裂）满态射。因此，$\operatorname{Ker}\sigma_n$ =$\operatorname{Ker}\beta_n$ 是 $E_n \in \mathcal{B}$的一个直和项，因而也是 $\mathcal{B}$中的一个直和项。因此，令$B_n := \operatorname{Ker}\sigma_n = \operatorname{Ker}\beta_n$，我们已经证明

$$Z_n = L_n \bigoplus B_n$$

其中 $L_n \in \mathcal{B}^{\perp}$ 和 $B_n \in \mathcal{B}$。 □

现在我们证明，引理 6.5 的直和分解中出现的直和项 L_n 实际上是 Gorenstein $\mathcal{B}$-内射的。这一结论的灵感源自并基于 [Iac26，命题 1]。

回顾 [Hol04]，一类 R-模 $\mathcal{B}$ 称为内射消解的，如果它包含所有内射模，且对扩张和单态射的余核封闭。

定理 6.6。 假设 $\mathcal{B}$ 是一个内射消解的覆盖类，且对直和项封闭。那么，每个弱 *Gorenstein* $\mathcal{B}$-内射模 Z，都是一个 *Gorenstein* $\mathcal{B}$-内射模与一个属于 $\mathcal{B}$的模的直和。也就是说，每个 $Z \in \mathrm{w}\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}$都有一个直和分解 $Z = B \bigoplus L$，其中 $B \in \mathcal{B}$和 $L \in \mathcal{GI}_{\mathcal{B}}$满足相应条件。

证明。 不妨设 Z 是前一个引理 6.5 中无挠复形 E 的一个圈。由该引理可知，每个圈都有一个直和分解$Z_nE = L_n \bigoplus B_n$，其中 $B_n \in \mathcal{B}$ 和 $L_n \in \mathcal{B}^{\perp}$满足相应条件。

现在，对每个 n，令 $\psi_n\colon\ I_n \to L_{n-1}$ 是 L_{n-1}的一个 $\mathcal{B}$-覆盖。根据引理 6.2，它处于一个短正合

$$0 \to \operatorname{Ker}\psi_n \xrightarrow{\kappa_n} I_n \xrightarrow{\psi_n} L_{n-1} \to 0$$

其中 $I_n \in \mathcal{B}$ 且 Ker $\psi \in \mathcal{B}^{\perp}$。由于 Ker ψ， $L_{n-1} \in \mathcal{B}^{\perp}$，实际上我们有 $I_n \in \mathcal{B} \cap \mathcal{B}^{\perp}$。因此，根据引理 6.3， I_n 是一个内射模。

接下来，我们将证明 Ker$\psi_n \cong L_n$。为此，我们只需利用引理 6.4。该引理断言，短正合列

$$0 \to \operatorname{Ker}\psi_n \to I_n \bigoplus B_{n-1} \xrightarrow{\psi_n \oplus 1} L_{n-1} \bigoplus B_{n-1} \to 0$$

满足 $\psi_n \oplus 1$ 是 $L_{n-1} \bigoplus B_{n-1} \cong Z_{n-1}$的一个 $\mathcal{B}$-覆盖。由此可知，这个短正合列同构于

$$0 \to L_n \xrightarrow{f_n} C_n \xrightarrow{\varphi_n} Z_{n-1} \to 0,$$

也就是说，它就是此前在引理 6.5 的证明中构造的那个列。特别地，我们得到 Ker $\psi_n \cong L_n$。

因此，我们现在已经证明存在短正合列

$$0 \to L_n \to I_n \to L_{n-1} \to 0,$$

每个整数 n 对应一个，每个短正合列都含有 I_n 一个内射模，并且满足 $L_n \in \mathcal{B}^{\perp}$。将所有这些短正合列拼接起来，显然所得的链复形 I 是一个正合的 $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{B}, -)$-无挠内射对象复形。这表明每个$L_n \in \mathcal{GI}_{\mathcal{B}}$，并完成了定理的证明。□

当覆盖类 $\mathcal{B}$ 是遗传余挠对 $(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ 的右半部分时，定理 6.6 的所有假设均成立。因此，我们得到以下推论。

推论 6.7。 假设$(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ 是一个遗传余挠对，且 $\mathcal{B}$ 是覆盖类。那么，每个弱 *Gorenstein* $\mathcal{B}$-内射模都是某个 *Gorenstein* $\mathcal{B}$-内射模与某个属于 $\mathcal{B}$ 的模的直和。

6.1. **弱 Gorenstein $\mathcal{B}$-内射模型结构**。 我们继续采用关于 $\mathcal{B}$ 的相同假设和相同记号： $\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}$ 表示所有 Gorenstein $\mathcal{B}$-内射模组成的类，而 $\mathrm{w}\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}$ 表示所有弱 Gorenstein $\mathcal{B}$-内射模组成的类。我们将使用定理 3.2，在 R-Mod 上得到一个阿贝尔模型结构，其纤维对象类由 $\mathrm{w}\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}$ 生成。

记号。我们令 $\mathcal{W}_{\mathcal{B}} := {}^{\perp}\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}$。

$\mathcal{W}_{\mathcal{B}}$ 将是我们模型结构中平凡对象的类。注意， $\mathcal{W}_{\mathcal{B}}$恰好是所有模 W 的类，使得对所有正合的 $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{B}, -)$-无环内射对象复形 E，$\mathrm{Hom}_R(W, E)$保持正合。事实上，由定义可知， $W \in \mathcal{W}_{\mathcal{B}}$ 当且仅当对所有 n 以及所有这样的E，$\mathrm{Ext}^1_R(W, Z_nE) = 0$，而这等价于 $\mathrm{Hom}_R(W, E)$正合。特别地， $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}_{\mathcal{B}}$。我们还注意到，$\mathrm{Hom}_R(W, E)$刻画容易推出 $\mathcal{W}_{\mathcal{B}}$ 是一个厚类；另见 [GI22，引理 22]。

推论 6.8. 设 $(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ 是 R-Mod 中由某个集合余生成的遗传余挠对，并假设 $\mathcal{B}$ 在余积与纯子模下封闭。则余挠对 $(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ 与 $(\mathcal{W}_{\mathcal{B}}, \mathcal{GI}_{\mathcal{B}})$ 满足定理 *3.2/3.4* 的假设，并且 ${}^{\perp}(\mathcal{B} \cup \mathcal{GI}_{\mathcal{B}}) = {}^{\perp}\mathrm{w}\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}$。因此我们在 R-Mod 上得到一个 *Hovey* 三元组，

$$\mathfrak{M} = (\mathcal{C}, \mathcal{W}_{\mathcal{B}}, ({}^{\perp}\mathrm{w}\mathcal{GI}_{\mathcal{B}})^{\perp}).$$

这是一个余纤维生成的遗传阿贝尔模型结构。其（双）纤维对象的刻画如定理 *3.4* 和命题 *5.2* 所述。特别地：

- M 是纤维的，即 $M \in ({}^{\perp}\mathrm{w}\mathcal{GI}_{\mathcal{B}})^{\perp}$，当且仅当 $M = Z_0X$ 存在某个正合的 $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, -)$-无挠复形 X，其各项都是 R-模，且每个 $X_n \in \mathcal{B}$。
- M 是双纤维的，即 $M \in \mathcal{C} \cap ({}^{\perp}\mathrm{w}\mathcal{GI}_{\mathcal{B}})^{\perp}$，当且仅当 $M = Z_0X$ 存在某个正合复形 X，满足每个 $X_n \in \mathcal{C} \cap \mathcal{B}$，并且对任意 $N \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}_{\mathcal{B}}$，$\mathrm{Hom}_R(N, X)$都是正合复形；此外，对任意 $N \in \mathcal{B}$，$\mathrm{Hom}_R(X, N)$ 也是正合复形。

正如我们在证明中指出的，关于 $\mathcal{B}$ 的这些条件意味着它必定是一个覆盖类。

证明。 注意，遗传假设自动意味着 $\mathcal{B}$ 在纯子模的商运算下也封闭，因而在直极限下封闭。因此，利用纯性的标准论证可知，存在一个集合 $\mathcal{T}$，使得 $\mathcal{B}$ 中的每个模都是由 $\mathcal{T}$中的模经超限扩张得到的。由 [GI22，定理 26] 可知，$(\mathcal{W}_{\mathcal{B}}, \mathcal{GI}_{\mathcal{B}})$是一个内射余挠对，且由一个集合余生成。如前所述， $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}_{\mathcal{B}}$，因此满足定理 3.2/3.4 的所有假设。

由此得到一个 Hovey 三元组： $\mathfrak{M}=(\mathcal{C},\mathcal{W}_{\mathcal{B}},({}^{\perp}(\mathcal{B}\cup\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}))^{\perp})$。相应的模型结构是余纤维生成的，因为其中每个余挠对都由一个集合余生成。事实上，由 [Sto13，命题 1.7/命题 2.9(1)]可知，$\mathcal{C}\cap\mathcal{W}_{\mathcal{B}}$ 是一个可分解类。

接下来，我们注意到，根据 [HJ08, Theorem 2.5]，我们的假设还保证 $\mathcal{B}$ 是一个覆盖类。因此，推论 6.7 的假设也满足了。因此，每个弱 Gorenstein $\mathcal{B}$-内射模都具有形式 $Z=B\bigoplus L$，其中 $B\in\mathcal{B}$，且 $L\in\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}$。利用这一点，我们证明如下结论：

$$^{\perp}(\mathcal{B}\cup\mathcal{GI}_{\mathcal{B}})={}^{\perp}\mathrm{w}\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}.$$

事实上，我们已经知道 $^{\perp}(\mathcal{B}\cup\mathcal{GI}_{\mathcal{B}})=\mathcal{C}\cap\mathcal{W}_{\mathcal{B}}$。现在我们证明 $^{\perp}\mathrm{w}\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}=\mathcal{C}\cap\mathcal{W}_{\mathcal{B}}$ 也成立。事实上，首先注意到 $\mathcal{B}\subseteq\mathrm{w}\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}$ 和 $\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}\subseteq\mathrm{w}\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}$。由此可得 $^{\perp}\mathrm{w}\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}\subseteq{}^{\perp}\mathcal{B}=\mathcal{C}$ 和 $^{\perp}\mathrm{w}\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}\subseteq{}^{\perp}\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}=\mathcal{W}_{\mathcal{B}}$。因此 $^{\perp}\mathrm{w}\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}\subseteq\mathcal{C}\cap\mathcal{W}_{\mathcal{B}}$。为证明反向包含关系，$\mathcal{C}\cap\mathcal{W}_{\mathcal{B}}\subseteq{}^{\perp}\mathrm{w}\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}$，令 $W\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}_{\mathcal{B}}$ 且 $Z\in\mathrm{w}\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}$。我们要证明 $\mathrm{Ext}^1_R(W,\ Z)=0$。但如前所述，$Z=B\bigoplus L$ 对某个 $B\in\mathcal{B}$ 成立，且 $L\in\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}$。因此，

$$\mathrm{Ext}^1_R(W,Z)=\mathrm{Ext}^1_R(W,B)\bigoplus\mathrm{Ext}^1_R(W,L).$$

我们有 $\mathrm{Ext}^1_R(W,\ B)=0$ 因为 $W\in\mathcal{C}$，并且 $\mathrm{Ext}^1_R(W,\ L)=0$ 因为 $W\in\mathcal{W}_{\mathcal{B}}$。因此，$\mathrm{Ext}^1_R(W,\ Z)=0$，并且我们已经证明了 $\mathcal{C}\cap\mathcal{W}_{\mathcal{B}}={}^{\perp}\mathrm{w}\mathcal{GI}_{\mathcal{B}}$。□

7. The weakly Ding injective modules and model structure

在本节中，令 R 为一个左凝聚环。应用推论 6.8，我们接下来在 R-Mod上得到一个阿贝尔模型结构，其纤维对象类由所有弱 Ding 内射模构成的类生成，见 [Iac26]。

事实上，由于 R 是左凝聚的，所有有限表示模组成的类余生成一个完备遗传余挠对 $(\mathcal{FP},\ \mathcal{FI})$，其中 $\mathcal{FI}$ 是所有FP-内射模（即绝对纯模）构成的类。回顾一下，$\mathcal{FP}$中的模称为 FP-投射模，并且它们恰好是有限表示模的超限扩张的直和项。取 Definition 6.1 中的 $\mathcal{B}=\mathcal{FI}$，我们得到所有***Ding***-内射模构成的类 $\mathcal{DI}$，以及所有弱 ***Ding*** 内射模构成的类 $\mathrm{w}\mathcal{DI}$。同样，弱 Ding 内射模已在 [ZC11], [Iac23], [Iac25], 和 [Iac26]中得到研究。我们得到以下结果。

定理 7.1. 设 R 为左凝聚环。则 ***FP***-内射余挠对 $(\mathcal{FP},\mathcal{FI})$ 与 ***Ding*** 内射余挠对 $(\mathcal{W},\mathcal{DI})$ 满足定理 ***3.2/3.4*** 的假设。此外，$^{\perp}(\mathcal{FI}\cup\mathcal{DI})={}^{\perp}\mathrm{w}\mathcal{DI}$，其中 $\mathrm{w}\mathcal{DI}$ 是弱 ***Ding*** 内射模类。我们在 R-Mod 上得到一个余纤维生成的遗传阿贝尔模型结构，

$$\mathfrak{M}_{fp}=(\mathcal{FP},\mathcal{W},({}^{\perp}\mathrm{w}\mathcal{DI})^{\perp}).$$

（双）纤维对象的刻画如定理 ***3.4*** 与命题 ***5.2*** 所述。特别地：

- 模 M 是纤维的，即 $M\in({}^{\perp}\mathrm{w}\mathcal{DI})^{\perp}$，当且仅当 $M=Z_0X$ 对某个由 ***FP***-内射模构成的正合 $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{FP}\cap\mathcal{W},-)$-无挠复形 X。
- 一个模 M 是双纤维的，即 $M\in\mathcal{FP}\cap({}^{\perp}\mathrm{w}\mathcal{DI})^{\perp}$，当且仅当，$M=Z_0X$ 存在某个正合复形 X，满足其中每个 X_n 既是 ***FP***-投射又是 ***FP***-内射，并且对于任意 $N\in\mathcal{FP}\cap\mathcal{W}$，复形 $\mathrm{Hom}_R(N,X)$ 都是正合的，同时对于任意 $N\in\mathcal{FI}$，$\mathrm{Hom}_R(X,N)$ 也是正合的。

证明。 这实际上是推论 6.8 的一个特例。众所周知，在左凝聚环 R 上，类 $\mathcal{B} = \mathcal{FI}$ 满足推论 6.8 的假设；参见 [Ste70]。因此结论得证。□

请注意，在上述对双纤维化模的描述中， X 尤其是一个如下意义下的 FP-投射-内射模全无挠复形。

定义 7.2. 我们将类 $\mathcal{FP} \cap \mathcal{FI}$ 中的模称为***FP*-投射-内射模**，简称***FP*-拟内射模**。

(1) 所谓***FP*-投射-内射模的全无挠复形**，是指一个正合复形 X ，其中每个 X_n 都是 FP-拟内射模，并且当 N 是 FP-拟内射模时，$\mathrm{Hom}_R(N,\ X)$ 和 $\mathrm{Hom}_R(X,\ N)$ 也都是正合的。(2) 所谓***Gorenstein FP*-拟内射模**，是指一个模 $M = Z_0X$ ，它等于某个 FP-投射-内射模全无挠复形的 0-循环模， X。

我们用 $\mathcal{GFP}$ 表示所有 Gorenstein FP-拟内射模构成的全子范畴。

推论 7.3。 设 R 为一个左凝聚环，使得每个模 $M \in \mathcal{FP} \cap \mathcal{W}$都具有 FP-内射维数$(M) < \infty$，即有限 ***FP*-内射维数**。则阿贝尔模型结构

$$\mathfrak{M}_{fp} = (\mathcal{FP}, \mathcal{W}, ({}^{\perp}\mathrm{w}\mathcal{DI})^{\perp})$$

满足 $\mathcal{FP} \cap ({}^{\perp}\mathrm{w}\mathcal{DI})^{\perp} = \mathcal{GFP}$。因此，我们可以将同伦范畴识别为

$$\mathrm{Ho}(\mathfrak{M}_{fp}) \simeq \mathrm{St}(\mathcal{GFP}),$$

其中 $\mathrm{St}(\mathcal{GFP})$ 表示所有 ***Gorenstein FP*-拟内射模所成 *Frobenius* 范畴的稳定范畴**。

证明。 定理 5.5 的两个条件均得到满足。事实上，根据 [BHP24，推论 4.7], ，任意 FP-投射模的正合复形的所有圈必然再次是 FP-投射模。（这里使用了 R 为左凝聚环这一事实。）这一证明也可见于 [GI24，命题 3.7]。□

注 7.4。 推论 6.8 也很好地适用于其他一些模类 $\mathcal{B}$ ： 它们同时是某个余挠对的右半部和某个对偶对的左半部，其含义见 [HJ09]。在这些情形下，可以借助 [HJ08，定理 2.5] 以及 [HJ09，定理 3.1]来验证推论 6.8 的假设。例如，定理 7.1 可以直接推广到一般环 R上的所有绝对纯 模。它是一个完备遗传余挠对的右半部，同时也是与层 模构成的对偶对的一部分。因此，它是一个具备全部必要性质的覆盖类，并且由 [BGH14，第 2] 节中的（弱）*Gorenstein AC*-内射 模补足。我们将推论 7.3 的推广的具体细节留给感兴趣的读者。特别地，可以利用 [BGH14，命题 2.7 和定理 5.5] 来获得所需的性质。

8. Acyclic complexes of FP-injectives over Ding-Chen rings

在本节中，我们设 R 是一个 Ding-Chen 环。回顾一下，这是一种双侧相干环，将其视为自身上的（左模和右模）时具有有限 FP-内射维数。本节中我们继续用 $(\mathcal{FP}, \mathcal{FI})$ 表示 FP-内射余挠对，并用 $(\mathcal{W}, \mathcal{DI})$ 表示 Ding-内射模

余挠对。由于 R 是 Ding-Chen 环，一个模属于 $\mathcal{W}$ 当且仅当它具有有限平坦维数，当且仅当它具有有限 FP-内射维数；参见第2.4节。因此，推论 7.3 的假设均已满足。

本节中我们还将使用以下记号。

记号。 $\mathcal{Z}$ 表示所有由 FP-内射模构成的正合复形的全部圈模组成的类。

也就是说， $M \in \mathcal{Z}$ 当且仅当存在一个正合复形 X ，使得每个$X_n \in \mathcal{FI}$都满足 $M = Z_0X$ 。

下一个结果表明，FP-内射模的正合复形具有一些性质，这些性质与已知的由投射、内射和平坦 R-模构成的正合复形的性质直接类似。与定义 7.2 中一样，$\mathcal{GFP}$ 表示所有 Gorenstein FP-投射内射模组成的类。

命题 8.1. 我们有 $\mathcal{Z} = ({}^{\perp}\mathrm{w}\mathcal{DI})^{\perp}$，并且 $\mathcal{FP} \cap \mathcal{Z} = \mathcal{GFP}$。事实上，我们有：

(1) 对于 *FP*-内射模的链复形 X ，以下条件等价。(a) X 是正合的。(b) X 是正合的，且是 $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{FP} \cap \mathcal{FI}, -)$-无挠的。(c) X 是正合的，且是 $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{FP} \cap \mathcal{W}, -)$-无挠的。(2) 对于 *FP*-内射模的链复形 X ，以下条件等价。(a) X 是正合的。(b) X 是 *FP*-拟内射模的全无挠复形。(c) X 是正合的，且 $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{FP} \cap \mathcal{W}, -)$-无挠，以及 $\mathrm{Hom}_R(-, \mathcal{FI})$-无挠。

证明。 注意，若 (1) 中的三个条件等价，则根据定理 7.1，我们自动得到 $\mathcal{Z} = ({}^{\perp}\mathrm{w}\mathcal{DI})^{\perp}$。接着， $\mathcal{FP} \cap \mathcal{Z} = \mathcal{GFP}$ 由推论 7.3 得出。

我们证明 (1) 中各陈述的等价性。显然，(c) $\Longrightarrow$(b) $\Longrightarrow$ (a)，因此只需证明 (a) $\Longrightarrow$ (c)。为此，假设 X是一个由 FP-内射模构成的正合复形。已知存在一个完备$\widetilde{\qquad\qquad}$余挠对 $(\mathcal{W}_{\mathrm{co}}, dw\mathcal{I})$，其中 $dw\mathcal{I}$ 表示所有由内射 R-模构成的链复形的类，而 $\mathcal{W}_{\mathrm{co}}$ 表示所有在 Becker [Bec14] 意义下为余无挠 的链复形的类。由于该余挠对有足够的投射对象，我们可以$\widetilde{\ }$写出一个短正合列 $0 \to I \to W \to X \to 0$ ，其中包含 $W \in \mathcal{W}_{\mathrm{co}}$ 和 $I \in dw\mathcal{I}$。由于 I 是一个由内射模构成的复形，该短正合列在每个次数上都分裂。因此，对于任意给定的模 N，应用 $\mathrm{Hom}_R(N, -)$，得到另一个由阿贝尔群构成的短正合复形列：

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(N, I) \to \mathrm{Hom}_R(N, W) \to \mathrm{Hom}_R(N, X) \to 0.$$

由于 W 和 X 都是正合的，因此 I也是正合的，所以只要$N \in \mathcal{W}$，$\mathrm{Hom}_R(N, I)$就是正合的；参见 [Sto14，命题 7.9] 或 [Gil17，推论 4.2]。此外，由于所有 FP-内射模构成的类对扩张封闭， W 是一个由 FP-内射模构成的余无循环复形。因此，根据 [Sto14，命题 6.11]，(或参见 [GI24，推论 3.6])，它有 FP-内射圈；所以只要 N是 FP-投射模，$\mathrm{Hom}_R(N, W)$就是正合的。我们由此得出，只要 $N \in \mathcal{FP} \cap \mathcal{W}$，$\mathrm{Hom}_R(N, I)$和 $\mathrm{Hom}_R(N, W)$都是正合复形，因而 $\mathrm{Hom}_R(N, X)$也是正合复形。

现在也可得出第 (2) 部分中三个陈述等价。事实上，正如我们在推论 7.3 的证明中已经指出的，任何具有 FP-投射分量的正合复形，其所有圈也自动都是 FP-投射的。因此，这样的复形是 $\mathrm{Hom}_R(-, \mathcal{FI})$-无圈的。□

根据 [DC93，推论 3.18], ，只要 FP-内射维数 $FP\text{-id}(R_R)$ 和 $FP\text{-id}({}_RR)$ 都有限，它们就相等。若这个数为 $d<\infty$，则称 R 为维数为 d 的 Ding-Chen 环（或 d-FC 环）。

命题 8.2. 设 R 是维数为 d的 *Ding-Chen* 环。那么，当且仅当存在一个正合列 $N\in\mathcal{FP}\cap\mathcal{W}$

$$0\to N\to W^0\to W^1\to\cdots\to W^d\to 0$$

其中每个 $W^i\in\mathcal{FP}\cap\mathcal{FI}$。此外，任意 $N\in\mathcal{FP}\cap\mathcal{W}$的投射维数满足 $\mathrm{pd}(N)\le d$。

证明。 第一个结论是引理 5.3 的特例。我们将证明，只要 $N\in\mathcal{FP}\cap\mathcal{W}$，就有 $\mathrm{pd}(N)\le d$。首先，由于 $N\in\mathcal{W}$，其平坦维数满足 $\mathrm{fd}(N)\le d$，因此我们可以写出一个正合列

$$0\to F\to P_{d-1}\to\cdots\to P_0\to N\to 0$$

其中每个 P_i 都是投射的，且 F 必定是平坦的。我们要证明 F 甚至是投射的。为此，再写出一个短正合列 $0\to K\to P\to F\to 0$，其中P是投射的。那么 K 也必定是平坦的，因此 $FP\text{-id}(K)\le d$。由于 $N\in\mathcal{FP}$，我们得出 $\mathrm{Ext}^{d+1}_R(N,K)=0$。通过维数平移，我们得到 $\mathrm{Ext}^{d+1}_R(N,K)\cong\mathrm{Ext}^1_R(F,K)=0$。这意味着上述短正合列必定分裂。特别地，$P\cong K\bigoplus F$，因此 F 是投射的。□

回顾第2.4节，我们记 $\mathrm{Stmod}(R):=R\text{-Mod}/\mathcal{W}$ 为 R的稳定模范畴。 R-Mod 上任何以 $\mathcal{W}$ 为平凡对象类的阿贝尔模型结构，其同伦范畴都将给出 Stmod(R)。由此得到以下主要结果。

定理 8.3。 设 R 是一个 *Ding-Chen* 环。那么 $(\mathcal{FP}\cap\mathcal{W},\mathcal{Z})$ 是一个完备的遗传余挠对，由一个集合余生成；并且在 R-模上还有一个余纤维生成的阿贝尔模型结构，

$$\mathfrak{M}_{fp}=(\mathcal{FP},\mathcal{W},\mathcal{Z}).$$

它满足 $\mathcal{FP}\cap\mathcal{Z}=\mathcal{GFP}$，因此

$$\mathrm{Stmod}(R)\simeq\mathrm{St}(\mathcal{GFP}),$$

其中 $\mathrm{St}(\mathcal{GFP})$ 表示由所有 *Goren- steinFP*-拟内射模构成的 *Frobenius* 范畴的稳定范畴。

此外，以下命题等价，并进一步刻画了纤维对象类 $\mathcal{Z}$：

(1) $M\in\mathcal{Z}=(^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}=(^{\perp}(\mathcal{FI}\cup\mathcal{DI}))^{\perp}$. *(2)* 存在一个短正合列 $0\to D\to A\to M\to 0$，其中 $A\in\mathcal{FI}$ 且$D\in\mathcal{DI}$。 *(3)* 对所有 *FP*-拟内射模 W及所有 $i\ge 1$, $Ext^i_R(W,M)=0$。 *(4)* 对某个由 *FP*-内射模组成的正合 *Hom*($\mathcal{FP}\cap\mathcal{FI}$, –)-无挠复形 X，有 $M=Z_0X$。 *(5)* 存在一个 Hom_R($\mathcal{FP}\cap\mathcal{FI}$, –)-正合短正合列 $0\to M\to D\to A\to 0$，其中 $A\in\mathcal{FI}$ 且 $D\in\mathcal{DI}$。

证明。 定理的第一部分可由推论 7.3 和命题 8.1 立即得到。下面证明纤维对象的等价刻画。

作为定理 3.2(1)(3) 的特例，我们得到命题 (1) 和 (2) 等价。此外，由于 $\mathcal{FP}\cap\mathcal{FI}\subseteq\mathcal{FP}\cap\mathcal{W}$且该余挠对是遗传的，这些命题显然蕴含 (3)。现在反过来证明 (3) 蕴含 (1)。因此，假设对于所有模 $W\in\mathcal{FP}\cap\mathcal{FI}$ 和所有 $i\geq 1$，都有 $\mathrm{Ext}^i_R(W,\ M)=0$。令 $N\in\mathcal{FP}\cap\mathcal{W}$，我们需要证明 $\mathrm{Ext}^1_R(N,\ M)=0$。由命题 8.2，存在一个正合列

$$0\to N\to W^0\to W^1\to\cdots\to W^d\to 0$$

对每个 $W^i\in\mathcal{FP}\cap\mathcal{FI}$。通过维数平移，我们有

$$\mathrm{Ext}^1_R(N,M)=\mathrm{Ext}^{d+1}_R(W^d,M)=0.$$

现在我们已经证明 (1)–(3) 等价。

根据命题 8.1，陈述 (1) 与 (4) 等价。最后，陈述 (5) 也与其他陈述等价，因为它是定理 3.4(5) 的一个特例。还要注意，陈述 (5) 中短正合列的存在很容易推出陈述 (3)。□

有人可能会问，$\mathcal{Z}$ 是否包含了 Gorenstein 内射模类 $\mathcal{GI}$ 之外的其他对象。因此，值得指出的是，如果 $\mathcal{GI}=\mathcal{Z}$，那么 R必定是左Noether环。事实上，$\mathcal{GI}=\mathcal{Z}$ 意味着每个 FP-内射模都是 Gorenstein 内射模。但在 Ding-Chen 环上，每个 Gorenstein 内射模都是 Ding-内射模。因此，任何 FP-内射模都必须属于 $\mathcal{W}\cap\mathcal{DI}$，即 Ding 内射余挠对的核（$\mathcal{W},\ \mathcal{DI}$）。由此可知，每个 FP-内射模都是内射模，因此 R 是左Noether环。

8.1. **关于 Gorenstein 平坦模的完备对偶**。我们继续用 R 表示一个 Ding-Chen 环。现在我们展示类 $\mathcal{Z}$ 中的模与类 $\mathcal{GF}$ 中的*Gorenstein* 平坦模之间的一个完美（特征模）对偶。我们用 R° 表示 R 的对环。那么，左（分别为右）R°-模等价于右（分别为左） R-模。在此记号下，回顾一下，对于任意给定的 R-模 M，其特征模 定义为 $M^+=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$，并且 M^+ 以一种自然的方式成为一个 R°-模。

定理 8.4。设 R 是一个 *Ding-Chen* 环，$\mathcal{Z}$ 是所有正合复形的圈所组成的类，其中这些正合复形由 *FP*-内射 R-模构成；$\mathcal{GF}$ 是所有 *Gorenstein* 平坦 R°-模组成的类。则 $(\mathcal{GF}、\ \mathcal{Z})$ 是一个完备对偶对，其含义见 [GI22，定义 7]。特别地，$(\mathcal{GF}、\ \mathcal{Z})$ 和 $(\mathcal{Z}、\ \mathcal{GF})$ 都是对偶对（对余积和直积封闭），其含义见 [HJ09，定义 2。1]。

证明。由于 R 是相干的，众所周知，$(\mathcal{F},\mathcal{FI})$ 是一个完备对偶对（按 [GI22，定义 7] 的含义），其中 $\mathcal{F}$ 是平坦 R°-模的类，而 $\mathcal{FI}$ 是 FP-内射 R-模的类。根据 [Gil17，命题 7.2/7.3]，，一个 R°-模L 是 Gorenstein 平坦的，当且仅当它是某个由平坦R°-模组成的无挠复形 X 的一个圈。因此显然，$Z\in\mathcal{Z}$ 蕴含 $Z^+\in\mathcal{GF}$，而 $L\in\mathcal{GF}$ 蕴含 $L^+\in\mathcal{Z}$。

我们必须证明反向蕴含。在此之前，令 $\mathcal{W}^\circ$ 表示平凡 R°-模的类。也就是说，具有有限平坦维数（等价地，有限 FP-内射维数）的 R°-模。注意，$W\in\mathcal{W}$（分别为 $\mathcal{W}^\circ$）当且仅当 $W^+\in\mathcal{W}^\circ$（分别为 $\mathcal{W}$）。

因此，现在设 Z 是某个 R-模，使得 $Z^+\in\mathcal{GF}$。利用 Ding 内射余挠对（$\mathcal{W},\ \mathcal{DI}$）具有足够多的投射对象，写出一个短

正合列 $0 \to D \to W \to Z \to 0$，其中 $W \in \mathcal{W}$ 和 $D \in \mathcal{DI}$。应用 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$，我们得到一个 R°-模的短正合列，

$$0 \to Z^+ \to W^+ \to D^+ \to 0.$$

我们看到 $D^+ \in \mathcal{GF}$，根据假设也有 $Z^+ \in \mathcal{GF}$。因此 $W^+ \in \mathcal{GF} \cap \mathcal{W}^\circ = \mathcal{F}$。由此可得 $W \in \mathcal{FI}$，而根据定理 8.3(2)，上述短正合列推出 $Z \in \mathcal{Z}$。

类似地，设 L 是一个 R°-模，满足 $L^+ \in \mathcal{Z}$。令 $(\mathcal{DP}, \mathcal{W}^\circ)$ 表示 Ding 投射余挠对，因此这里 $\mathcal{DP}$ 是所有 Ding 投射R°-模的类。利用该余挠对有足够内射对象这一点，我们可以写出一个短正合列 $0 \to L \to W \to P \to 0$，其中 $W \in \mathcal{W}^\circ$ 且 $P \in \mathcal{DP}$。应用 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$，得到一个 R-模的短正合列，

$$0 \to P^+ \to W^+ \to L^+ \to 0.$$

我们看到 $P^+ \in \mathcal{Z}$，根据假设也有 $L^+ \in \mathcal{Z}$。因此 $W^+ \in \mathcal{W} \cap \mathcal{Z} = \mathcal{FI}$。由此可得 $W \in \mathcal{F}$，所以根据 [SS20，定理 4.11(4)]，上述短正合列推出 $L \in \mathcal{GF}$。（同样，当 R 相干时，PGF-模与 Ding 投射模是同一类。）

最后，我们注意到，由于 R 是相干的，类 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{FI}$ 各自对集合指标乘积和余积封闭。因此，$\mathcal{GF}$ 和 $\mathcal{Z}$也具有同样的性质。它们也都对直和项封闭，并且 R（作为一个 R°-模）属于 $\mathcal{GF}$。所以 $(\mathcal{GF}, \mathcal{Z})$ 是一个对余积和乘积封闭的完备对偶对。□

References

[BCE 20] *Periodic modules and acyclic complexes* Silvana Bazzoni、Manuel Cortes-Izurdiaga 和 Sergio Estrada，，代数与表示论第 卷第 期第 页–，23，5，2020，1861–1883。[BHP24] Silvana Bazzoni、Michal Hrbek 和 Leonid Positselski，*fp-Projective periodicity*，纯粹与应用代数杂志第 228 卷第 3 期，2024年。[Bec14] H. Becker，*Models for singularity categories*，数学进展第 254 卷，2014年，第 187–232 页。[BGH 14] *The stable module category of a general ring* Daniel Bravo、James Gillespie 和 Mark Hovey，，arXiv:1405.5768。。。[CET 20] *Homotopy categories of totally acyclic complexes with applications to the flat–cotorsion theory* Lars Winther Christensen、Sergio Estrada 和 Peder Thompson，，《代数中的范畴、同调与组合方法》，当代数学第 751 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2020年，第 99–118 页。[Dal19] Georgios Dalezios，*A note on homotopy categories of FP-injectives*，同调、同伦及其应用第 21 卷第 1 期，2019年，第 95–105 页。[DC93] N. Ding 和 J. Chen，*The flat dimensions of injective modules*，数学手稿第 78 卷第 2 期，1993年，第 165–177 页。[EJ00] E. Enochs 和 O. Jenda，*Relative homological algebra*，de Gruyter Exp. Math. 第 30 卷，Walter de Gruyter，纽约，2000年。[Gil04] James Gillespie，*The flat model structure on Ch(R)*，美国数学会汇刊第 356 卷第 8 期，2004年，第 3369–3390 页。[Gil 07] *Kaplansky classes and derived categories* James Gillespie，，数学杂志第 卷第 期第 页–，257，4，2007，811–843。[Gil10] James Gillespie，*Model structures on modules over Ding-Chen rings*，同调、同伦及其应用第 12 卷第 1 期，2010年，第 61–73 页。[Gil17] James Gillespie，*On Ding injective, Ding projective and Ding flat modules and complexes*，落基山数学杂志第 47 卷第 8 期，2017年，第 2641–2673 页。[Gil19] James Gillespie，*Duality pairs and stable module categories*，纯粹与应用代数杂志第 223 卷第 8 期，2019年，第 3425–3435 页。[Gil24] James, Gillespie，*Abelian Model Category Theory*，剑桥大学出版社；2024年。

[GI24] *Homological dimensions of complexes over coherent reg-* James *ular rings* 2409 08393 Gillespie 和 Alina Iacob, , arXiv: arXiv:。。。[GI 22] *Duality pairs generalized Gorenstein modules and Ding* James *injective envelopes* ´ 360, 2022, 381 398 Gillespie 和 Alina Iacob, , , , 数学评论第 卷第 页–。[GT06] R¨udiger G¨obel 和 Jan Trlifaj, *Approximations and Endomorphism Algebras of Modules*, de Gruyter Exp. Math. 第 41 卷, Walter de Gruyter & Co., 柏林, 2006年。[Hol04] Henrik Holm, *Gorenstein homological dimensions*, 纯粹与应用代数杂志第 189 卷, 2004年, 第 167–193 页。[HJ08] Henrik Holm 和 Peter Jørgensen, *Covers, precovers, and purity*, Illinois J. Math. 第 52 卷第 2 期, 2008年, 第 691—703 页。[HJ09] Henrik Holm 和 Peter Jørgensen, *Cotorsion pairs induced by duality pairs*, J. Commut. Algebra 第 1 卷第 4 期, 2009年, 第 621—633 页。[Hov02] Mark Hovey, *Cotorsion pairs, model category structures, and representation theory*, 数学杂志第 241 卷, 553-592, 2002年。[Iac23] Alina Iacob, *Weakly Ding injective modules and complexes*, Comm. Algebra. 第 51 卷第 12 期, 2023年, 第 4899–4912 页。[Iac25] Alina Iacob, *Weakly Ding injective preenvelopes and covers*, Comm. Algebra. 第 53 卷第 10 期, 2025年, 第 4487–4497 页。[Iac26] *Gorenstein flat preenvelopes and Weakly Ding covers* 2601 15469 1, 2026 Alina Iacob, , arXiv:。v。[Qui73] D. Quillen, *Higher Algebraic K-theory I*, SLNM 第 341 卷, Springer-Verlag, 1973年, 第 85–147 页。[Ste 70] ¨ *Coherent rings and FP-injective modules* 2 2, Bo Stenstro 1970, 323 329 m, , J. London Math. Soc. ( ) 第 卷第 页–。[Sto13] Jan ˇSˇtov´ıˇcek, *Deconstructibility and the Hill lemma in Grothendieck categories*, Forum Math. 第 25 卷第 1 期, 2013年, 第 193–219 页。[Sto14]Jan ˇSˇtov´ıˇcek, *On purity and applications to coderived and singularity categories*, arXiv:1412.1615。[SS20] Jan ˇ Saroch 和 Jan ˇSˇtov ´ *Singular compactness and definability for* Σ*-cotorsion and* ıˇcek, , *Gorenstein modules* 26, 2, 2020, 23, 40 Selecta Math. (N.S.) 第 卷第 Paper No. 页[ZC11] Yuedi Zeng 和 Jianlong Chen, *On Gorenstein FP-injective modules*, J. Southeast Univ. (English Ed.) 第 27 卷第 1 期, 2011年, 第 115–118 页。

J.G. Ramapo College of New Jersey, School of Theoretical and Applied Science, 505 Ramapo Valley Road Mahwah NJ 07430 , , , U.S.A.*Email address*, Jim Gillespie: jgillesp@ramapo.edu

URL: http://pages.ramapo.edu/~jgillesp/