时变脉冲注入的空间电荷限制电流密度仿真

H. Huang，*IEEE* 会员，和 Y. Liu（刘泱杰）*，*IEEE* 会员

arXiv:2602.09399v1 [physics.plasm-ph] 10 Feb 2026

摘要——**通过二极管阴极进行时不变注入时，空间电荷限制（SCL）电流密度是可传输的最大密度；而当注入脉冲长度短于电子渡越时间时（即处于短脉冲条件下），可实现更高的电流密度。然而，已知的两种极限均适用于时不变注入条件，时变电流密度对注入的作用仍不明确。本文通过数值方法研究时变注入下的空间电荷限制电子流。利用粒子模拟，对电子注入施加四种不同的时变波形，并确定不同脉冲长度下由空间电荷效应产生的最大电流密度。我们推测，通过二极管阴极进行时变密度注入将有助于增强传输。**

索引词—**空间电荷、粒子束输运、电子发射、粒子网格法（等离子体模拟）**。

I. 引言

SPACE-CHARGE-LIMITED（空间电荷限制）电流密度描述的是：当阴极的注入电流密度不随时间变化时，二极管在阴极与阳极之间的电压降下可输运的最大电流密度。对于间隙距离为 D 、直流电压为V_g 的真空二极管，这一关系称为一维（1D）Child-Langmuir（CL）定律 [1], [2], ，其表达式为

$$J_{\mathrm{CL}} = \frac{4\epsilon_0}{9D^2}\sqrt{\frac{2e}{m_0}}V_g^{3/2}, \tag{1}$$

其中， ϵ_0、e和m_0 分别表示真空介电常数、电子电荷和电子质量。一维情况下，当发射电子所带的电荷足以将阴极电场抑制为零时，就会出现空间电荷限制电子流；此时静电势分布函数和电荷密度分别为

$$\begin{aligned}\phi(x) &= V_g\left(\frac{x}{D}\right)^{4/3},\\ \rho(x) &= \frac{4}{9}\epsilon_0 V_{\mathrm{g}}\left(D^2x\right)^{-2/3},\end{aligned} \tag{2}$$

其中x 为空间坐标。上述一维经典CL定律假设满足长脉冲条件，即阴极的注入电流密度恒定；当注入脉冲长度小于电子的渡越时间时，该定律可扩展至短脉冲模型 [3]。短脉冲模型所允许的最大可传输电流密度高于CL定律的预测值。其中，短脉冲空间电荷限制电流密度，即Valfells公式，可表示为（参见图3中的黑线）

$$J_{\mathrm{S}}(X_{\mathrm{CL}}) = 2\frac{1-\sqrt{1-3X_{\mathrm{CL}}^2/4}}{X_{\mathrm{CL}}^3}J_{\mathrm{CL}}, \tag{3}$$

其中，$X_{\mathrm{CL}} = \tau_p/\tau_{\mathrm{CL}} \le 1$ 为归一化脉冲长度，$\tau_{\mathrm{CL}} = 3D\sqrt{m_0/2eV_g}$ 为电子穿越二极管的CL渡越时间。从物理上看，电子束团以恒定电流密度J_{S} 注入间隙，持续时间为τ_{P} ($0 \le t \le \tau_{\mathrm{p}}$)。这一等效（虚拟）二极管模型捕捉了局限于时空中的虚拟阴极形成这一物理特征 [3]–[5] ，并得出上文的式（3） [3]。此外，长脉冲极限与短脉冲下的输运电荷之比可写为

$$Q_{\mathrm{mod}}(X_{\mathrm{CL}}) = \frac{J_{\mathrm{S}}\tau_{\mathrm{p}}}{J_{\mathrm{CL}}\tau_{\mathrm{CL}}} = 2\frac{1-\sqrt{1-3X_{\mathrm{CL}}^2/4}}{X_{\mathrm{CL}}^2}, \tag{4}$$

代入式（1）和式（3） [1]后可得。因此，总输运电荷不会超过常规CL条件下的电荷；在短脉冲极限下，该比值为$Q_{\mathrm{mod}} \simeq 3/4$，如图 1 [6]所示。短脉冲电子流的临界电流密度式（3）是仅考虑虚拟阴极束流前沿、而忽略脉冲空间内部斥力后得出的。

尽管人们已对空间电荷限制效应进行了大量研究 [7]–[15], ，但其中大多数都假设注入电流密度在时间上均匀。然而，后续研究在理解注入电流密度的时间变化性方面取得了一些进展 [16]–[20]。甚至有人推测，对于给定的时变电流，其时间平均空间电荷限制电流密度可能存在一个上限，而且该上限可能高于时不变情形（例如 CL 定律）。然而，注入电流的确切时间曲线仍然未知 [21]。此外，人们已经研究过长脉冲时变注入，并认为它对提高空间电荷限制密度作用甚微 [22]。请注意，我们的数值代码在考虑注入脉冲的时间变化性后，对相对论空间电荷限制密度的预测比 Jory解析公式更加准确（ [23]中的图 1）。

H. H. 和 Y. L. 现就职于中国武汉市武昌区（邮编 430062）湖北大学物理与电子科学学院。

* 通讯作者，yangjie@hubu.edu.cn。

Y. L. 曾任职于南洋理工大学电气与电子工程学院微电子学部计算纳电子学实验室，地址为新加坡南洋大道50号，邮编639798。

稿件于2018年7月25日收到；11月19日修订，12月7日重新提交；2019年2月10日再次修订，并于2019年2月11日重新提交（TPS11450.R2）。H. H. 得到中国湖北省自然科学基金（2018CFC797）的资助。L. Y. 感谢二级学术研究基金（MOE2008-T2-01- 033）提供的博士津贴资助，以及天线组提供的差旅补助（EECSRC2/4a）。

[1]关于CL电子流，一个有趣的注记是 $J_{\mathrm{CL}}\tau_{\mathrm{CL}} = 4\epsilon_0 V_g/3D \sim V_g/D$。

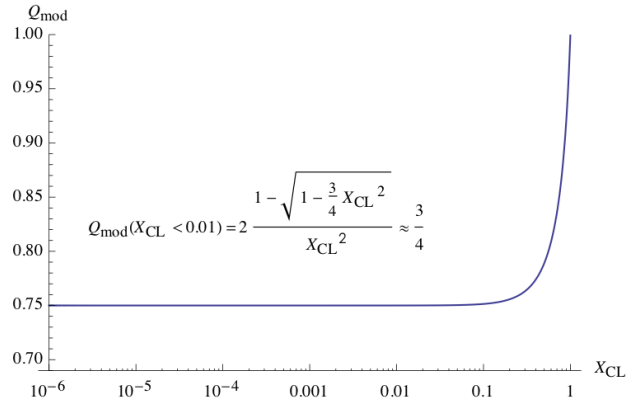


图1.（在线彩色）长脉冲极限与短脉冲的输运电荷之比$Q = \tau_p \ \tau_{\mathrm{CL}} \le 1$ 随归一化脉冲长度X_{CL}的变化。

通过数值方法 [22]。当注入电流密度变为脉冲状且随时间变化时，电子束内部的相互排斥会使其空间分布变得不均匀。此时，Valfells公式 [3] 不再适用，因此需要采用数值方法来研究短脉冲电子流的瞬态行为。在二极管发射装置实验中，通过调节短脉冲等离子体源的时间特性来达到空间电荷限制状态时，脉冲注入的时变问题尤为重要，例如在光阴极注入器中 [3]。随着飞秒范围内的超快激光器和纳米加工样品在现代等离子体发射实验装置中日益普及，人们不禁想要探究空间电荷效应在纳米级空间尺度和超快时间尺度下的表现。还需指出，为了揭示时变注入在空间电荷限制电子输运中的作用，我们有意忽略了其他发射机制（如场致发射等）。

本文旨在研究不同短时轮廓的特性，以提高时间平均电流密度，使其高于短脉冲Valfells公式 [3]给出的结果。具体而言，电子以可忽略不计的初速度注入间隙，并遵循四种指定的时间轮廓；随后在一维极限下进行粒子网格（PIC）仿真，以获得时间平均空间电荷限制电流密度。研究将表明，与时不变注入相比，此类时变剖面的时间平均空间电荷限制电流密度可提高2至3倍。此外，本文还讨论阴极和阳极电场的时间变化。

II. 模型与仿真

本节将介绍一维经典二极管中的短脉冲电子流问题，并说明用于 PIC 仿真的仿真设置。考虑一个间距为 $(0 \le x \le D)$ 的间隙，其上施加外加恒定电场 $F_{\mathrm{dc}} = V_g/D$ 。电子从阴极 $x = 0$ 注入，电流密度随时间变化，为 $J(t)$，脉冲长度为 $\tau_p \le \tau_{\mathrm{CL}} = 3D\sqrt{m_0/2eV_g}$。发射电子在间隙内仅受直接电场作用，不受其他发射机制的影响

发射机制 [24]–[28]。这里假设 $J(t)$ 可表示为

$$J(t) = \beta_m \cdot j_m(t), \tag{5}$$

其中， β_m 为电流密度的大小，而时间曲线$j_m(0 \le \bar{t} = t/\tau_p \le 1)$ 是模型中假设的一种特定时变剖面（对于$m \in \mathbb{N}$、$t \in [0, \tau_{\mathrm{p}}]$），见下文图 2。

$$j_0(\bar{t}) = 1, \tag{6}$$
$$j_1(\bar{t}) = 2\bar{t}, \tag{7}$$
$$j_2(\bar{t}) = 2(1-\bar{t}), \tag{8}$$
$$j_3(\bar{t}) = H\Big(\frac{1}{2}-\bar{t}\Big)\cdot 4\bar{t} + H\Big(\bar{t}-\frac{1}{2}\Big)\cdot 4(1-\bar{t}), \tag{9}$$
$$j_4(\bar{t}) = 3\bar{t}^2. \tag{10}$$

此处，$j_m(\bar{t})$ 已归一化（$\int_0^1 j_m(\bar{t})\mathrm{d}\bar{t} = 1$），而 $H(\cdot)$ 表示 Heaviside 阶跃函数。假设注入脉冲具有这样的时间曲线，是希望揭示短脉冲等离子体输运的某些动态特征。之所以选择多项式函数，是因为它们是一般时变函数进行泰勒展开时的基本函数。

因此，整个电子数密度（单位发射面积）N_{EC} 定义为

$$N_{\mathrm{EC}} = \int_0^{\tau_{\mathrm{p}}} \frac{J(t)}{e}\mathrm{d}t. \tag{11}$$

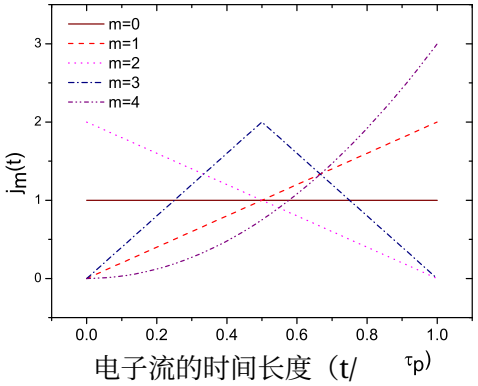


图 2.（在线彩色）模型中假设的五种归一化时间曲线$j_m(t)|_{m=0,1,2,3,4}$ [，见式 (5)]，用于 PIC 仿真。

为检验时变电流密度 $J_m(t)|_{m>0}$ 的任一代表形式是否能够在平均意义上超越式（5）中的恒定剖面 $m = 0$ 情形，本文使用商业 PIC 软件（VORPAL4.2） [29], [30] 确定短脉冲结束时是否出现空间电荷限制电流。为揭示空间电荷限制等离子体流的基本现象，仿真采用一维极限条件。通过逐步增大注入电流 β_m ，直至观察到电子反向运动 [31]–[33]，即可确定空间电荷限制电流。

这里还说明了如何设置 VORPAL 仿真，以研究空间电荷限制短脉冲流。正如前文所述，为避免等离子体膨胀带来的额外问题

在多维空间（如二维或三维情形）中，计算在一维极限下进行，以研究时变电子流的影响。随后采用全局均匀网格（*Python* 脚本中的 *uniCartGrid*）将一维空间等分，并为两侧壁面（阴极和阳极）赋予静电势值，作为狄利克雷边界条件。对于在模拟网格内发射的任何粒子 [30], , 都根据电子的物理性质定义一个粒子源。随后，一束电子从阴极表面静止发射（例如，在脚本中使用 $x = 0$ *emitSurface*）。方程（6）—（10）中的时变注入密度也在此部分纳入，以改变阴极随时间发射的电子数量。若在短脉冲流结束时，VORPAL 数据显示二极管间隙中的电子动量为零或负值，则达到空间电荷极限。为避免粒子跑出模拟网格，在网格两端分别放置两个粒子吸收器，以吸收穿过分界边界的任何粒子。我们从电流密度的角度计算阴极电子发射过程，而非依据空间中的粒子数密度。这种发射通量机制避免了将电流密度间接转换为粒子数密度。

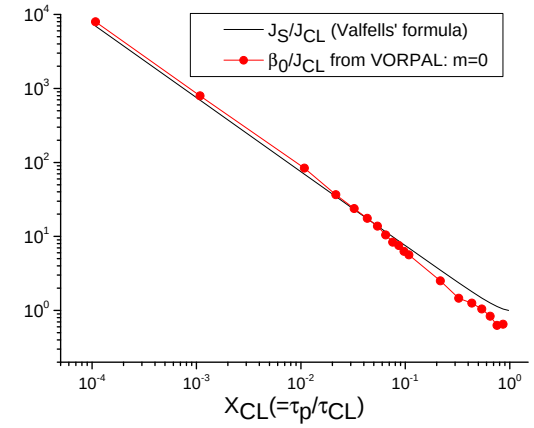


图3.（在线彩色）短脉冲条件下，相对于J_{CL} 的归一化空间电荷限制密度：β_0/J_{CL} （符号）和J_S/J_{CL} （曲线），随归一化脉冲长度X_{CL}变化。参数为 $D = 1$cm、$V_g = 30$MV，空间电荷限制渡越时间为 $\tau_p = 9.24$ps。第III节末尾解释了为何在10ps附近出现较低值。

III. 结果与讨论

本节将展示空间电荷极限短脉冲流的仿真结果，并进行一些讨论。对于参考情形，即式（6）中的注入密度$m = 0$ 不随时间变化，其空间电荷限制电流密度为常数$J_0 = \beta_0$。因此，预期这一时间不变情形$m = 0$ 应当符合Valfells公式（3），即 $\beta_0 = J_S$，如图 3 所示。

图 3 比较了空间电荷极限平均密度 [相对于 Valfells公式（3）的归一化结果]，分别对应 β_0 ($m = 0$ 情形) 和J_S，其中$D = 1$ cm、$F_{dc} = 3$ GV/m（$V_g = 30$ MV），并将其表示为X_{CL} 的函数，直至 $\lesssim 1$；电子渡越时间为 $\tau_p = 9.24$ ps。比较结果表明，与 β_0 符合良好，但在较小X_{CL}处，结果略高于式（3）的预测值。

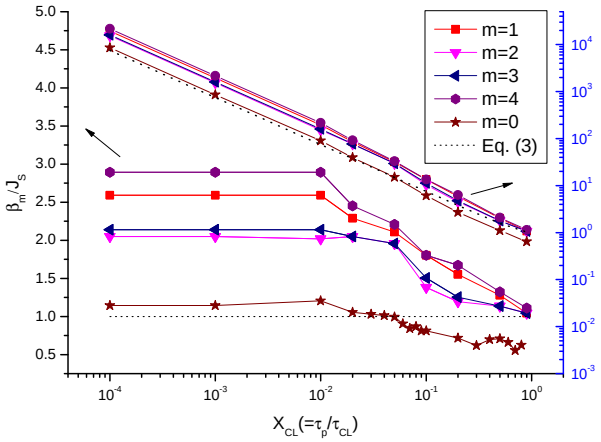


图4.（在线彩色）电流密度的大小 β_m （$m = 0, 1, 2, 3, 4$ 3）相对于J_S （左纵坐标）和J_{CL} （右纵坐标），根据式（ ）计算，随归一化脉冲长度$X_{CL} < 1$变化。参数与图3相同。注意，虚线表示单位值。

如图 4 所示，绘出了确定的 β_m （对于 $m = 0$、1、2、3 和 4）相对于 J_{CL} 和 J_S 随归一化脉冲长度 X_{CL} 的变化关系。比值 β_m/J_{CL} 的对数显示出其与脉冲长度 X_{CL} 之间清晰的双对数标度关系。比值 β_m/J_S 表明，增强效果在 $m = 4$ 情况下最高，其次依次为 m =1 、3、2 和 0。数据表明，随时间变化的

$J(t)$ 将具有更大的时间平均电流幅值（$\beta_4 > \beta_1 > \beta_3 > \beta_2$）。对于线性递增函数 $m = 1$ 情况，增强约为 2.6。对于线性递减函数 $m = 2$ 情况，增强约为 2。所有情况下，当 $X_{CL} < 0$ 较小时，增强均大于 2；随着 X_{CL} 增大，增强逐渐减小并趋近于 1。这种趋近于 1 的现象归因于：较长的脉冲长度会阻止电子脉冲尾部在脉冲前沿于阳极终止之前进入二极管。

为确认仿真中电子流时间变化性的影响，分别提取阴极和阳极的电场$E_K(t)$和$E_A(t)$，并在图 5 中绘出二者之差。$E_K(t) - E_A(t)$可解释如下。根据一维高斯定律和电荷守恒，阴极与阳极之间的电场差值与电流密度$J(t)$的积分成正比，即

$$E_K(t) - E_A(t) = -\int_0^D \frac{\partial E(x)}{\partial x}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^D \rho(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^t J(t')\mathrm{d}t', \qquad (12)$$

其中，$\rho(x)$表示不带符号的电荷密度，t' 为哑变量。图5给出了两种情况$m = 0$ 和4下阴极与阳极之间的电场差，这表明 $[E_K(t) - E_A(t)] \sim t$ （对于$m = 0$ 情况）以及t^3 （对于$m = 4$ 情况），这与式（12）的预期一致。由此可以确认，我们的仿真纳入了注入流的时间依赖性。

图 6 展示了脉冲末端阴极附近间隙内的电子计数直方图（$x \in$

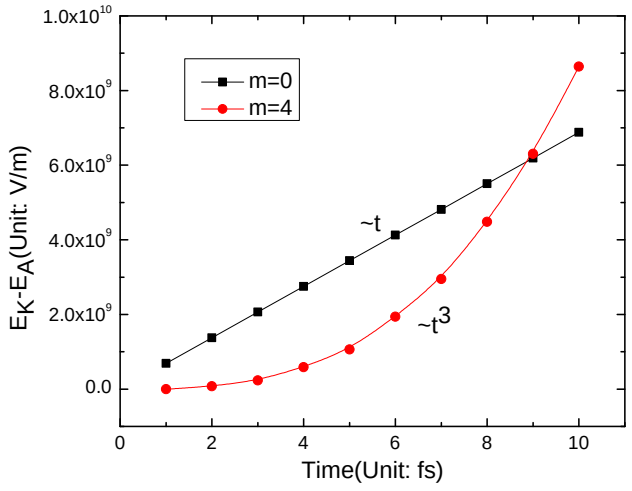


图 5.（在线彩色）阴极与阳极处电场之差随时间的变化，$E_K(t) - E_A(t)$，分别对应m =0 情形（黑色方块）和m = 4 情形（红点），分别呈现t 和 t^3 标度关系。所用参数为D = 1 cm、V_g = 30 MV 和 τ_p = 10fs。

$[0, D/100], t = \tau_p$），分别对应 (a) $m = 0$ 和 (b) $m = 4$ 两种情况，后者传输的平均电流密度最高。对于m = 4情况的注入，与m = 0情况相比，电子分布更集中在阴极附近。其传输更多电流的原因是，在m = 4 情况下，大部分电子流被压缩在脉冲末端，不过仍需进一步研究以证实这一推测。

最后，图 3 和图 4 中的所有数据仅适用于$X_{CL} < 1$ 短脉冲区间，即电子脉冲长度小于渡越时间的情况。仿真结果表明，对于所展示的数据，电子流需要 9.24ps 才能通过该空间。对于$X_{CL} \geq 1$，电子脉冲前沿被阳极收集时，其尾部尚未从阴极发射，这意味着 PIC 仿真无法检验空间电荷的真实物理极限。因此，所确定的输运电流密度实际上退化为式 (1) 中的稳态 CL 极限。

根据我们的仿真数据，可以得出结论：注入电流密度的时间变化性能够提高空间电荷限制电流密度，尽管我们选择的四种时变剖面远非穷尽，仍需进一步研究 [2]。

IV. 结论

本文介绍了使用 PIC 模拟获得的数值结果，研究脉冲电子流注入二极管并达到空间电荷限制（SCL）条件时，时变注入所产生的影响。结果表明，与时不变短脉冲 SCL 相比，时变注入廓形有助于获得更高的时间平均 SCL 电流密度 [3]，不过仍需进一步详细研究以明确

[2]更多时变剖面的仿真结果请参见博士学位论文第 3 章 [6]。

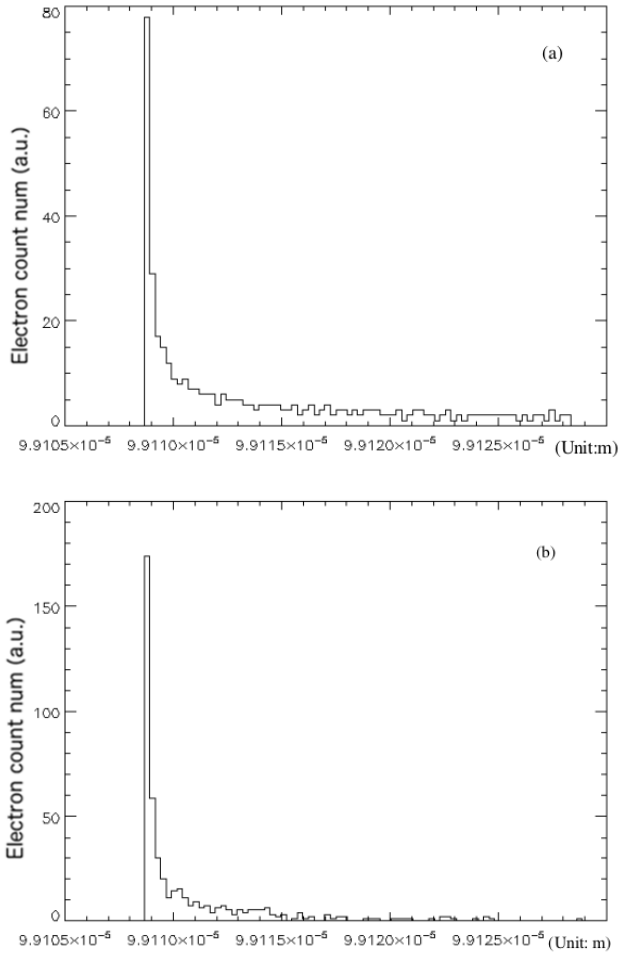


图 6. 短电子流在脉冲末端时，电子计数（任意单位）直方图与阴极和阳极之间的$x \in [0, D/100]$ 间距的关系（$t = \tau_p$），其中 (a) 为m = 0 情形，(b) 为m = 4 情形。由 VorpalView 4.0.0 [30] 和 Mathematica 9 [34] 生成。采用与图 5 相同的参数。转载自 [6]。

这一问题。时间依赖性应有利于在短脉冲注入中发挥空间电荷极限的作用。这些结果或可为在高电流区间使用激光或其他机制激发特定的时变注入开辟道路。

致谢

VORPAL 仿真在新加坡 A*STAR 的 IHPC 计算服务器 Axle 上进行。L. Y. 谨向 Ag´ust Valfells、Koh Wee Shing 和 Christine Roark 致谢，感谢他们提供有益的讨论和持续的指导；并感谢华南师范大学接待他于 2013年 访问。´

参考文献

[1] C. D. Child，《热阴极放电》，《物理评论》，第32卷，第5期，第0492–0511页，1911年。[2] I. Langmuir，《空间电荷和残余气体对高真空中热电子电流的影响》，《物理评论》，第2卷，第6期，第450–486页，1913年。[3] ´A. Valfells、D. W. Feldman、M. Virgo、P. G. O'Shea 和 Y. Y. Lau，《脉冲长度和发射极面积对电子枪中虚拟阴极形成的影响》，《等离子体物理》，第9卷，第5期，第2377–2382页，2002年。

[4] P. Liang 和 R. Groll, 《直流等离子体炬电弧放电过程中的等离子体-电极相互作用数值研究》, IEEE等离子体科学汇刊, 第46卷, 第363页, 2018年。[5] M. D. Campanell, 《等离子体中空间电荷限制热电子电流流动的替代模型》, 《物理评论E》, 第97卷, 第043207页, 2018年。[6] Y. Liu, 《电子的时变发射及其相关电磁现象》, 博士学位论文, 2014年。[7] Y. Y. Lau、D. Chernin、D. G. Colombant 和 P.-T. Ho, 《物理评论快报》, 第66卷, 第1446页, 1991年。[8] J. W. Luginsland、Y. Y. Lau 和 R. M. Gilgenbach, 《物理评论快报》, 第77卷, 第4668页, 1996年。[9] Y. Y. Lau, 《物理评论快报》, 第87卷, 第278301页, 2001年。[10] W. S. Koh、L. K. Ang 和 T. J. T. Kwan, 《均匀热电子发射的三维Child-Langmuir定律》, 《等离子体物理》, 第12卷, 第5期, 第053107页, 2005年。[11] J. W. Luginsland、Y. Y. Lau、R. J. Umstattd 和 J. J. Watrous, 《超越Child–Langmuir定律：多维空间电荷限制流近期成果综述》, 《等离子体物理》, 第9卷, 第5期, 第2371页, 2002年。[12] R. J. Umstattd 和 J. W. Luginsland, 《物理评论快报》, 第87卷, 第145002页, 2001年。[13] A. Rokhlenko 和 J. Lebowitz, 《强磁场中两个平板电极间的空间电荷限制二维电子流》, 《物理评论快报》, 第91卷, 第8期, 第085002页, 2003年。 [在线]。可访问：http://link.aps.org/doi/10 1103 ´ 91 085002 。/PhysRevLett.。[14] A. Pedersen、A. Manolescu 和 A. Valfells, 《太赫兹频率下真空微二极管中的空间电荷调制》, 《物理评论快报》, 第104卷, 第17期, 第175002页, 2010年。[15] P. Zhang、A. Valfells、L. K. Ang、J. W. Luginsland 和 Y. Y. Lau, 《二极管物理学百年》, 《应用物理评论》, 第4卷, 第011304页, 2017年。[16] M. E. Griswold、N. J. Fisch 和 J. S. Wurtele, 《时间平均空间电荷限制二极管电流的上限》, 《等离子体物理》, 第17卷, 第11期, 第114503页, 2010年。[17] Y. Zhu 和 L. K. Ang, 《库仑阻塞区中的Child-Langmuir定律》, 《应用物理快报》, 第98卷, 第5期, 第051502页, 2011年。[18] M. E. Griswold、N. J. Fisch 和 J. S. Wurtele, 《关于时变空间电荷限制电流上限的修正猜想》, 《等离子体物理》, 第19卷, 第2期, 第024502页, 2012年。[19] R. E. Caflisch 和 M. S. Rosin, 《超越Child-Langmuir极限》, 《物理评论E》, 第85卷, 第5期, 第056408页, 2012年。[20] M. E. Griswold 和 N. J. Fisch, 《时变空间电荷限制二极管电流的最大值》, 《等离子体物理》, 第23卷, 第014502页, 2016年。[21] Y. L. Liu、P. Zhang、S. H. Chen 和 L. K. Ang, 《均匀脉冲时间间隔下连续电子脉冲的最大电荷注入》, 《等离子体物理》, 第22卷, 第8期, 第084504页, 2015年。[22] Y. Liu、Q. Tang 和 B. Wu, 《二极管中时变电子注入的空间电荷效应：经典区和相对论区》, 《等离子体物理》, 第24卷, 第9期, 第093512页, 2017年。[23] H. R. Jory, 《一维二极管的精确相对论解》, 《应用物理杂志》, 第40卷, 第10期, 第3924页, 1969年。[24] B. Barwick、C. Corder、J. Strohaber、N. Chandler-Smith、C. Uiterwaal 和 H. Batelaan, 《场发射尖端的激光诱导超快电子发射》, 《新物理学杂志》, 第9卷, 第10页, 2007年。[25] S. Yalunin、M. Gulde 和 C. Ropers, 《表面的强场光电子发射：理论方法》, 《物理评论B》, 第84卷, 第19期, 第195426页, 2011年。[26] M. Pant 和 L. Ang, 《从多光子过程到光学隧穿的超快激光诱导电子发射》, 《物理评论B》, 第86卷, 第4期, 2012年。[27] W. Wendelen、B. Y. Mueller、D. Autrique、B. Rethfeld 和 A. Bogaerts, 《非平衡条件下铝表面经空间电荷修正的电子发射》, 《应用物理杂志》, 第111卷, 第11期, 第113110页, 2012年。[28] Y. Liu 和 L. K. Ang, 《超快激光光电子发射向一维间隙中空间电荷限制电流的转变》, 《物理学杂志D：应用物理》, 第47卷, 第12期, 第125502页, 2014年。[在线]。可访问：http://iopscience.iop.org/0022-3727/47/12/125502/, http://arxiv.org/abs/1307 5596 3 。v C. Nieter 和 J. R. Cary, 《VORPAL：一种通用等离子体模拟代码》, 《计算物理学杂志》, 第196卷, 第2期, 第448–473页, 2004年。[29] [30] 《VORPAL用户指南》, Tech-X Corporation, 博尔德, 2010年。[31] S. Mahalingam、C. Nieter、J. Loverich、D. Smithe 和 P. Stoltz, 《使用粒子网格模拟计算同轴圆柱二极管中的空间电荷限制电流》, 《开放等离子体物理学杂志》, 第2卷, 第7页, 2009年。[32] S. H. Chen、L. C. Tai、Y. L. Liu、L. K. Ang 和 W. S. Koh, “短脉冲电子流的二维电磁Child–Langmuir定律”, 《等离子体物理》, 第18卷, 第2期, 第023105页, 2011年。[33] Y. Liu 和 L. K. Ang, “时变空间电荷限制电子流”, 载于第*39*届*IEEE*等离子体科学国际会议, 系列：第3P场次：计算等离子体物理（第2场海报会议）, 2012年, 第3P–36页。[34] W. R. Inc., “Mathematica, 第9.0版”, 尚佩恩, 伊利诺伊州, 2012年。

此处放置照片

黄浩 此处为传记文本。

此处放置照片

Yangji´e Liu 此处为传记文本。