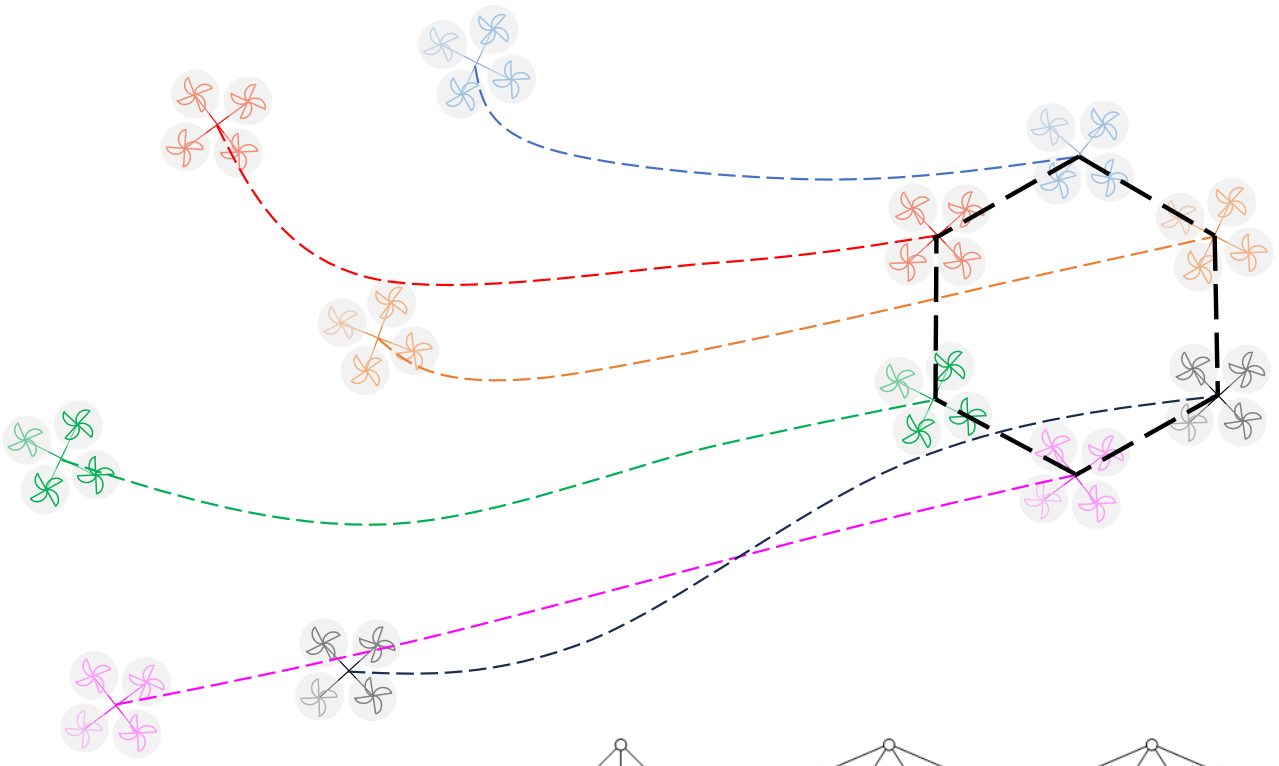
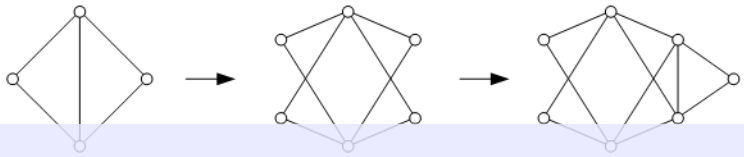
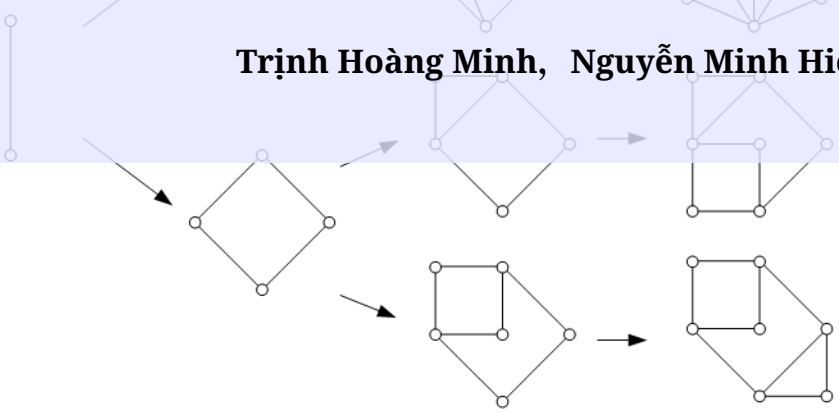
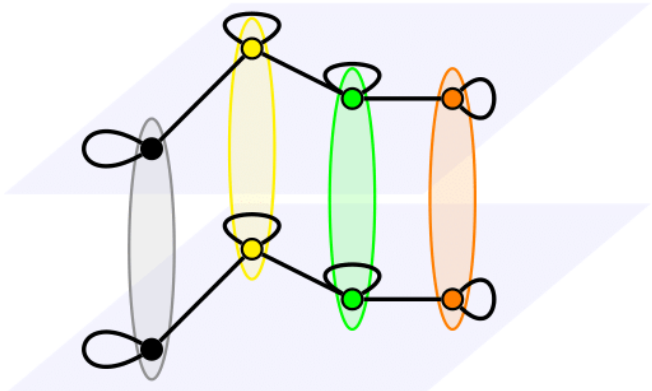


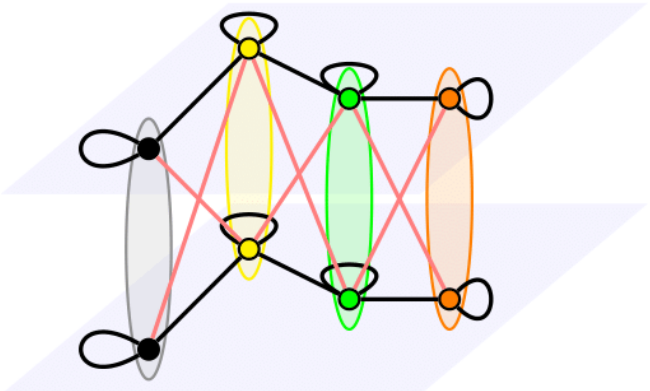


# 多智能体系统控制

Trịnh Hoàng Minh，Nguyễn Minh Hiệu







# 多智能体系统控制

Trịnh Hoàng Minh,
NguyễnMinh Hiệu 2026年2月11日

多智能体系统控制Trịnh Hoàng Minh，Nguyễn Minh Hiệu 版本：2026年2月

本书网页：本书的电子版、仿真代码和更新内容可在以下网站获取：

https://sites.google.com/view/minhhoangtrinh/dieu-khien-he-da-tac-tu

版权： 本文档的版权归作者所有。读者不得出于商业目的复制本文档中的内容，但可以将其用于学习和研究。

# 序言

自21世纪初以来，多智能体系统的控制一直受到广泛的研究关注，其应用范围从自然界的群体行为和社会动力学，延伸至自主车辆、传感器网络和智能电网等工程系统。

尽管多智能体系统研究已发展出众多专业方向，但系统阐述多智能体系统控制基本原理的教材仍然十分稀缺，英语教材也不例外。本书内容自2021年起便用于教学，最初是为河内理工大学的《网络化控制系统》和《多智能体系统控制》课程编写的一本简明越南语参考书。本书聚焦于该领域中一系列基础且长期受到关注的主题。若干主题的复杂程度已接近研究层面的内容；不过，本书以循序渐进的方式展开分析，便于读者掌握常用的方法和工具。

本书内容分为三个主要部分。第一部分介绍多智能体系统和基本图论概念。第二部分讨论线性一致性算法的设计与分析。第三部分介绍若干应用和研究方向，包括编队控制、网络定位、分布式优化、意见动力学以及矩阵加权网络。每章末尾均附有该领域杰出研究者简介、延伸阅读材料和练习题。

本书的完成离不开家人、同事和朋友的鼓励、支持与建议。作者感谢读者提供反馈，以便进一步完善本书内容。

Trịnh Hoàng Minh（trinhhoangminhbk@gmail.com），Tayan Polytechnic，河内，越南；
Nguyễn Minh Hiệu（nmhieulc1@gmail.com），HCLTechVietnam - ANZx，胡志明市，越南

# 前言

多智能体系统控制是自2000年代初以来在世界范围内持续受到关注的研究方向。研究内容包括自然界中的多智能体系统（鸟类群聚现象、鱼群、昆虫同步等）、社会现象（社交网络、学术网络、疾病传播模型等），以及工程领域中的系统（自主机器人系统、传感器网络、电网和智能交通系统、分布式计算系统等）。

尽管如今对多智能体系统的研究已沿着多个不同的专业方向发展，但全面系统地涵盖多智能体系统控制基础知识的教材（包括英文教材）仍然有限。本资料自2021年起编写并用于教学，最初旨在为河内理工大学的两门课程学员提供一份简明的越南语参考资料：联网控制 和多智能体系统控制 。作者团队选取并介绍了多智能体系统领域中广受关注的一些问题，并将其编写成教材。部分主题的内容复杂度接近科学出版物，但作者将其拆分并逐步讲解，以帮助读者更容易地掌握常用的方法和分析工具。

本文分为三个主要部分。第一部分介绍多智能体系统，并提供一些图论基础知识。第二部分重点介绍一致性协议与同步控制律的设计和分析。第三部分介绍多智能体系统的一些应用，包括编队控制、传感器网络定位、用于生产-配送问题的计算与分布式优化、若干观点动力学模型，以及矩阵加权图模型。每章还附有参考文献注释、练习，以及相关领域专家的介绍。附录提供了一些相关知识，方便读者查阅。

如果没有家人、朋友和同事的鼓励、支持与建议，本书便无法完成。作者团队希望收到读者的反馈，以便继续完善本书内容。

Trịnh Hoàng Minh (trinhhoangminhbk@gmail.com)，TayanPolytechnic，河内 Nguyễn Minh Hiệu (nmhieulc1@gmail.com)，HCLTech Vietnam - ANZx，胡志明市

# 目录

**Preface** **3**

**前言** **5**

**符号表 18**

**I 基础** **19**

**1 多智能体系统简介** **21**
1.1 多智能体系统的示例与定义.21 1.1.1 与多智能体系统相关的若干概念.23 1.1.2 与多智能体系统控制相关的若干概念.24 1.2 多智能体系统的分布式控制.26 1.2.1 目标与任务.26 1.2.2 范围.28 1.2.3 若干研究主题.29 1.3 文献结构.30 1.4 注释与参考文献.30

**2 多智能体系统理论 33**
2.1 图.33 2.1.1 无向图.33 2.1.2 有向图.37 2.1.3 加权图.38 2.2 图的代数.38 2.2.1 图的一些矩阵.38 2.2.1.1 邻接矩阵和度矩阵.38 2.2.1.2 关联矩阵.39 2.2.1.3 无向图的拉普拉斯矩阵.41 2.2.2 有向图的拉普拉斯矩阵.44 2.3 注释与参考文献.49 2.4 练习.49

**II 同步 53**

**3 Th一致性算法 55**
3.1 一阶连续同步.55 3.1.1 作用图中的同步问题.55 3.1.2 一般情况.56 3.1.3 若干特殊情况.59 3.2 二阶连续同步.59 3.3 包含连续线性模型智能体的同步系统.64 3.3.1 直接同步算法.64 3.3.2 间接状态同步算法.66 3.3.2.1 使用Luenberger观测器和扩展状态变量.67 3.3.2.2 基于输出误差的状态观测器.70 3.4 一阶离散同步.74 3.4.1 模型与同步条件.74 3.4.2 与连续同步模型的关系.75 3.5 注释与参考文献.77 3.6 练习.78

**4 Ph李雅普诺夫方法与一致性系统 83**
4.1 一致性函数.83 4.2 李雅普诺夫方法分析.86 4.3 一致性过程.88 4.4 系统输出同步.91 4.5 注释与参考文献.93 4.6 练习.94

**III 多智能体控制应用 103**

**5 iu 图 105**
5.1 引言.105 5.2 基于绝对位置的队形控制.109 5.3 基于相对位置的队形控制.109 5.3.1 智能体为一阶积分环节的情形.110 5.3.2 智能体为二阶积分环节的情形.111 5.4 基于距离的队形控制.112 5.4.1 距离刚性理论.113 5.4.2 基于距离的队形控制律.116 5.5 基于方向向量的队形控制.121 5.5.1 d维欧几里得空间中的方向刚性理论.123 5.5.2 使用方向向量的队形控制律.126 5.6 注释与参考文献.129 5.7 习题.130

**6 n传感器网络定位 13** **5**
6.1 传感器网络定位问题.135 6.2 基于相对位置的网络定位.136 6.2.1 网络不含参考节点的情形.136 6.2.2 网络中含参考节点的情形.137 6.2.3 基于方向向量的方法.138 6.2.3.1 网络不含参考节点的情形.138 6.2.3.2 网络含参考节点的情形.139 6.2.4 基于距离的方法.140 6.3 习题.142

**7 Ti 分布式 14** **9**
7.1 博弈中的优化问题.149 7.2 等式约束分布式优化.149 7.3 不等式约束分布式优化.154 7.4 在能源生产与分配系统中的应用.157 7.5 注释与参考文献.160 7.6 习题.160

**8 M意见动力学模型 16** **7**
8.1 French–DeGroot 模型.167 8.2 Friendkin - Johnsen模型.168 8.3 Abelson模型与Taylor模型.170 8.4 Friendkin - Johnsen模型的多维情形及若干推广.171 8.5 Hegselmann-Krause模型.177 8.6 Altafini模型.178 8.7 注释与参考文献.181 8.8 习题.181

**9 H 矩阵加权一致性 1** **87**
9.1 矩阵加权图.187 9.2 矩阵加权一致性算法.189 9.2.1 同步条件.189 9.2.2 聚类现象.191 9.3 领导者-跟随者框架下的矩阵加权一致性.195 9.3.1 领导者状态不更新的情况.195 9.3.2 领导者移动的情况.197 9.4 注释与参考文献.197 9.5 练习.197

**IV 附录 2** **03**

**线性 AIS 205**
A.1 矩阵的定义与基本运算.205 A.2 行列式与逆矩阵.206 A.3 特征值、特征向量、Cayley-Hamilton 定理.206 A.4 Gerschgorin 定理.207 A.5 矩阵对角化与 Jordan 形.207

A.6 矩阵函数.208 A.7 克罗内克积.208 A.8 正定矩阵与半正定矩阵.209 A.9 向量与矩阵的范数.209 A.10 Perron-Frobenius 理论.210

**B Tp 李雅普诺夫和李雅普诺夫函数** **211**
B.1 李雅普诺夫理论.211 B.2 李雅普诺夫函数.211

**C 李雅普诺夫理论 213**
C.1 不变集.213 C.2 李雅普诺夫稳定性理论.214 C.3 Barbalat 引理.215

**D MATLABTM 仿真** **217**
D.1 二维和三维图形的表示函数.217 D.2 图形随时间变化的表示.219

**目录** **220**

# 插图列表

1.1 (a) Hearsay II 系统——用于语音识别应用的分布式软件智能体（1980）[142]；(b) P. Erd¨os 学术合作网络示意图；(c) 美国国会大厦（来源：Microsoft 的 Encarta 百科全书）；(d) 鸟类以 V 字队形迁徙（来源：Google图片）.22 1.2 一个空间网络—物理系统的示例。在信息层面，每个智能体会收集或与邻近智能体共享有关位置和/或速度的信息，以计算轨迹和/或自身速度。在物理层面，每个智能体可以具有不同的运动学模型或动力学模型。每个智能体的独立控制器都会确定控制律，使该智能体跟踪自身轨迹.24 1.3 (a) 去中心化控制中的信息结构：中央控制器位于中心（黑色），各智能体的独立控制器以白色小圆圈表示，每条线段表示一条信息交换链路（智能体向中央控制器发送信息，中央控制器向智能体发送高层控制信号）；(b) 分布式控制中的信息结构：每个独立控制器以白色小圆圈表示，两个控制器之间的每个箭头表示单向交换的信息，每条线段表示双向信息交换链路。25 2.1 一些无向图示例.34 2.2 (a) 正则但非强正则图；(b) 和 (c)：强正则图。. . . . . 35 2.3 一个具有 5 个顶点和 8 条边的图 $G$ gm 的边割示例， $\kappa_0(G) = 1$.36 2.4 一个具有 5 个顶点和 8 条边的图 $G$ gm 的顶点割示例， $\kappa_1(G) = 2$.37 2.5 图 $G$ 在图 2.1(a) 中的几种不同方向.39 2.6 圆盘内 $B$ 的 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ nm 的特征值，圆心为 $\Delta + j0$，半径为 $\Delta = \max_i \deg^-(v_i)$（颜色最小）。与 $B$ 关于对角线对称的圆盘内 $B'$ 的 $-\boldsymbol{\mathcal{L}}$ nm 的特征值（对角线左侧最小）.47 2.7 与示例 2.6 的拉普拉斯矩阵对应的图.48 2.8 示例 2.6 的拉普拉斯矩阵的格尔施戈林圆盘及其特征值位置示意图。48 2.9 无向图 $G_1$ 和 $G_2$.49 2.10 无向图 $H_1$ 和 $H_2$.49 3.1 从智能体 $i$ 的视角看同步算法的框图.56 3.2 在三种不同的图上对同步算法进行仿真：$G_1$ 是一个具有 16 个顶点的立方体图，每个顶点有 3 个邻点； $G_2$ 是一个具有 60 个顶点的巴基球图； $G_3$ 是一个具有 20 个顶点的环.60 3.3 有向环图 $C_4$ 描述了四个智能体之间的信息流.64 3.4 使用同步律 (3.19) 对四智能体系统进行仿真.64 3.5 示例 3.3 中的交互图 $C_6$ .66 3.6 示例 3.3 中同步系统的仿真。状态变量为 $x_{ik} - x_{jk} \to 0$、 $i = 1, \ldots, 6$、 $k = 1, 2, 3$，其中 $t \to +\infty$.67

3.7 使用连续算法（3.31）–（3.34）的线性多智能体系统示意图 $n$ .....68 3.8 示例 3.4 中各智能体交互示意图.....69 3.9 示例 3.4 中智能体 1 的状态变量和估计变量（Luenberger观测器）.....70 3.10 示例 3.4 中包含 8 个智能体的连续系统仿真。状态变量 $x_{ik}$ 和辅助变量 $i = 1$，....., 8， $k = 1$，2，3，最终收敛到同一条轨迹.....71 3.11 使用连续算法（3.45）–（3.46）的系统示意图.....72 3.12 示例 3.5 中各智能体交互示意图.....73 3.13 示例 3.5 中采用离散算法（3.45）–（3.46）的 8 智能体系统仿真.....73 3.14 图 $G_1$ 是强连通且周期为 2；图 $G_2$ 和 $G_3$ 有根，包含根节点的强连通分量无周期，其中图 $G_3$ 包含自环；图 $G_4$、$G_5$ 是强连通且无周期.....74 3.15 连续与非连续算法的对比仿真.....77 3.16 练习 3.2 示意图.....78 3.17 练习 $G$ 3.11 示意图.....81 3.18 练习 $G$ 3.12 示意图.....81

4.1 (a) 图 $G$ ng vi $\boldsymbol{\mathcal{L}}$。(b) 图 $\bar{G}$ ng vi $\bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\mathcal{L}} + \boldsymbol{\mathcal{L}}^{\top}\boldsymbol{\Gamma}$.85 4.2 用三种不同有向图演示同步算法。示例 4.2.89 4.3 具有三个环的图，其中两个环彼此独立.90 4.4 示例 4.4 的演示仿真。彩色边构成图的一棵生成树。变量分别为 $\boldsymbol{\zeta}(t) \to \mathbf{0}$，当 $t \to +\infty$ 时.91 4.5 由 $n$ 个子图组成的 $\Sigma$，对应连接函数 $\boldsymbol{\phi}(\cdot)$.92 4.6 用于 6 个智能体系统的简化 Kuramoto模型仿真。示例 4.5.94 4.7 练习 4.10 中的图.97 4.8 函数 sgn($x$)、sat($x$) 和 tanh($x$) 的图.98

5.1 全局坐标系 ($^{g}\Sigma$)、公共坐标系 ($^{c}\Sigma$) 和各局部坐标系 ($^{i}\Sigma$ 和 $^{j}\Sigma$)。 . 107 5.2 基于绝对位置的编队控制算法仿真.110 5.3 基于二维和三维相对位置的编队控制算法仿真.112 5.4 距离刚性理论的一些示例.114 5.5 图示例 5.4：(a) 期望构型；(b)、(c)、(d)、(e)：属于 $\mathcal{U}^{*}$的四种不同构型.120 5.6 满足示例 5.5 中距离约束的一种构型.121 5.7 示例 5.5 中由 5 个智能体组成的编队。(a) 和 (b)：$\mathbf{p}$ 队伍趋近于期望构型；(c) 和 (d) $\mathbf{p}$ 队伍趋近于非期望构型.122 5.8 微分同胚示例：在 $\mathrm{R}^2$, 中，编队 (a)、(b)、(c) 是微分同胚的，编队 (d)、(e)、(f) 不是微分同胚的。在 $\mathrm{R}^3$, 中，编队 (g)、(h)、(i)、(j) 是微分同胚的，编队 (k)、(l) 不是微分同胚的.124 5.9 从连接两个顶点的一条边出发，在 $\mathrm{R}^3$ 中构造一般刚性图.126 5.10 从环 $C_4$出发，在 $\mathrm{R}^3$ 中构造一般刚性图.126 5.11 基于方位向量的编队控制算法稳定性分析示意图：(a) 仅使用方位向量的控制律；(b) 两个中心对称且质心相同的平衡点示例；(c) $\boldsymbol{\delta}$ 始终位于集合 $\mathcal{S}$中.127 5.12 在三维空间中，采用控制律 (5.42) 的 20 个智能体组成的编队仿真。 . . . . . 129 5.13 图 $G_1$ 和 $G_2$.132

6.2 由参考节点和普通网络节点组成的传感器网络模型。图中的每条边表示网络节点之间的信息流（测量或通信）。每条边上可能出现多个 $\varepsilon_{ij}$ .137 6.3 一个包含 10 个节点的传感器网络定位示意图，采用网络定位规则（6.9）.140 6.4 利用 3 个参考节点和 3 个距离测量值对节点 4 进行定位.141 6.5 具有 2 种二维实现的 3-连通刚性距离图。该图不是 1-冗余距离刚性的.142 6.6 练习 6.1 中的图.142 6.7 练习 6.4 中的传感器网络 ($G$, p).143 7.1 示例 7.1 中五个智能体之间交互关系的图示.152 7.2 示例 7.1 中五智能体系统的仿真。(a) 目标函数 $f_i(z)$ 和 $f(z)$ 的值；(b): 目标函数 $f$(x($t$)) 的值˜；(c) 估计的状态变量 $x_i(t)$；以及 (d) 变量 $\lambda_i(t)$。 . . . . 153 7.3 示例 7.4 中五个智能体的电力系统示意图.159 7.4 示例 7.4 中五智能体系统的仿真。(a)：发电量 $x_i(t)$（标幺值）、 $i = 1$、.....、6；(b) 线路 $y_k^i(t)$ $y_k^j(t)$ 上的估计输电量（标幺值），其中 $k = 1$、.....、6；以及 (c) 各节点的总负荷 $s_i = x_i - \sum_{e_k \sim i} h_{ki} y_k^i$（标幺值）， $i = 1$、.....、6。(d) 目标函数 $\tilde{f}$(x($t$)) 的值。 . . . 161 8.1 交互图的两种不同情况下，采用 F-J 模型的四智能体系统仿真。 . . . 170 8.2 扩展 Taylor 模型下十智能体系统的仿真.171 8.3 使用矩阵 C $= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$ 的 F-J 模型仿真.172 8.4 使用矩阵 C $= \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$ 的 F-J 模型仿真.173 8.5 系统具有和不具有偏置时的 Ye 模型 1.175 8.6 系统具有和不具有偏置时的 Ye 模型 2.175 8.7 增加智能体之间的连接会使 Ye 模型 1 失稳，同时加快达成共识的过程，但不会改变 Ye 模型 2 的共识点.175 8.8 示例 8.5 中智能体的图示.176 8.9 Ahn 模型下由拉普拉斯矩阵实现共识：左图—情形 1 ($x_i$,1, $i = 1, \ldots, 5$)。中图 — 情形 2 ($x_i$,2, $i = 1, \ldots, 5$)。右图 — 情形 3 ($x_i$,3, $i = 1, \ldots, 5$).177 8.10 Hegselmann-Krause 模型仿真，其中 $d = 0.2$、0.4、.....、1.2.179 8.11 (a) 结构平衡的符号图；(b) 结构不平衡的符号图.180 8.12 使用示例 8.7 中的图对 Altafini 模型进行仿真.180

9.1 (a) 图表明，传统图 (a) 与矩阵加权图 (b) 的连续关系相同。然而，当具体表示与各矩阵权重相对应的交互时，图则体现与横向、纵向和斜向交互的分层关系 (c).188 9.2 矩阵加权图示例，其中彩色边表示一条正定边，黑色边表示一条正定边或半正定边。由彩色边构成的图是 $G$ 的一棵正定生成树.189 9.3 示例 9.2 中四智能体系统的示意图.193 9.4 示例 9.2 中系统各状态变量随时间变化的仿真，采用一致性律 (9.6)。 193 9.5 示例 9.3 中包含 5 个顶点的图。 $v_1, v_4$ 同属一个簇，尽管被不属于同一簇的顶点隔开 $v_2, v_3$.194 9.6 示例 9.3：系统状态变量在一致性律 (9.6) 下的变化.194 9.7 习题 9.1 和 9.2 中的矩阵加权图.198

D.1 队形随时间的变化.221

# 表目录

1.1 多智能体系统的若干应用.29 5.1 编队控制问题的分类.107 7.1 $x_i$ 的边界值.159 7.2 $y_k$ 的边界值.159

# 符号表

N、Z、R、C 自然数、整数、实数、复数集合 N+、Z+、R+ 正自然数、正整数、正实数集合 $\mathrm{R}^d$、$\mathrm{C}^d$ $d$ 维向量空间，元素取实数、复数 $\mathrm{R}^{m\times n}$、$\mathrm{C}^{m\times n}$ 元素取实数、复数的 $m \times n$ 尺寸矩阵空间$\alpha$、$\beta$、$\gamma$、.....、 $a$、$b$、$c$、.....标量或标量值函数 a、b、c.....向量 A、B、C.....矩阵$\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$、$\mathcal{C}$、.....$\mathrm{R}^d$的向量子空间或子集$A$、$B$、$C$、.....图或与图相关的集合$\imath$、$\jmath$ 虚数单位 $\imath^2 = \jmath^2 = -1$Re($s$)、Im($s$) 复数的实部、虚部 $s$e 欧拉常数（e $\approx 2,71828$）$\mathrm{A}^\top$ 矩阵 A 的转置 $\mathrm{A}^{-1}$ 矩阵 A 的逆 det(A) 矩阵 A 的行列式 trace(A) 矩阵 A 的迹 ker(A) 矩阵 A 的核空间（零空间）span(a1, . . . , a$_n$)由向量 a$_i$、 $i = 1$、.....、 $n$张成的空间 im(A) 矩阵 A 的像空间 dim($\mathcal{A}$)空间 $\mathcal{A}$的维数 diag(a) 对角线元素为向量 a 的元素的对角矩阵 blkdiag(A$_k$)主对角线上为矩阵 A$_k$ 的块对角矩阵 rank(A) 矩阵 A 的秩$\|\mathrm{a}\|_\imath$、 $\|\mathrm{A}\|_l$ 向量 a 和矩阵 A 的$l$ 范数$\|\mathrm{a}\|$、 $\|\mathrm{A}\|$ 向量 $a$ 和矩阵 A 的 2 范数（或欧几里得范数）$|\cdot|$ 标量的模，或集合的基数$\mathbf{1}_n$、 $\mathbf{1}_{n\times m}$ 尺度为 $n \times 1$ 的向量和尺度为 $n \times m$ 且所有元素均为 1 的矩阵$\mathbf{0}_n$、 $\mathbf{0}_{n\times m}$ 尺度为 $n \times 1$, 的向量、尺度为 $n \times m$ 且所有元素均为 0 的矩阵 0 所有元素均为 0、尺寸与上下文相符的矩阵 I$_n$ 尺度为 $n \times n$的单位矩阵

$\otimes$ 克罗内克积$^g\Sigma$ 全局参考系$^i\Sigma$ 智能体 $i$的局部参考系a$_i$、b$_i$、c$_i$、.....智能体 $i$ 的相关向量，以全局参考系表示 $^g\Sigma$a$^i_i$、b$^i_i$、c$^i_i$、.....智能体 $i$ 的相关向量，以局部参考系表示 $^i\Sigma$a$^i_j$、b$^i_j$、c$^i_j$、.....智能体 $i$ 与 $j$ 之间的相对变量向量，以参考系 $^g\Sigma$ 表示a$^i_{ij}$、b$^i_{ij}$、c$^i_{ij}$、.....智能体 $i$ 与 $j$ 之间的相对变量向量，以参考系 $^i\Sigma$ 表示a$^*$、b$^*$、c$^*$、.....位置向量

# 第一部分

# 基础

# 第1章

# 多智能体系统简介

## 1.1 多智能体系统的示例与定义

科学与工程的发展拓展了人类的知识，也增强了人类干预和改造自然、服务生活的能力，同时不断带来新的问题与挑战。多智能体系统是一个统称，指在众多不同领域中出现的一系列研究对象，涵盖纯理论领域和应用技术领域。在给出多智能体系统的具体定义之前，我们先来看一些多智能体系统的示例。

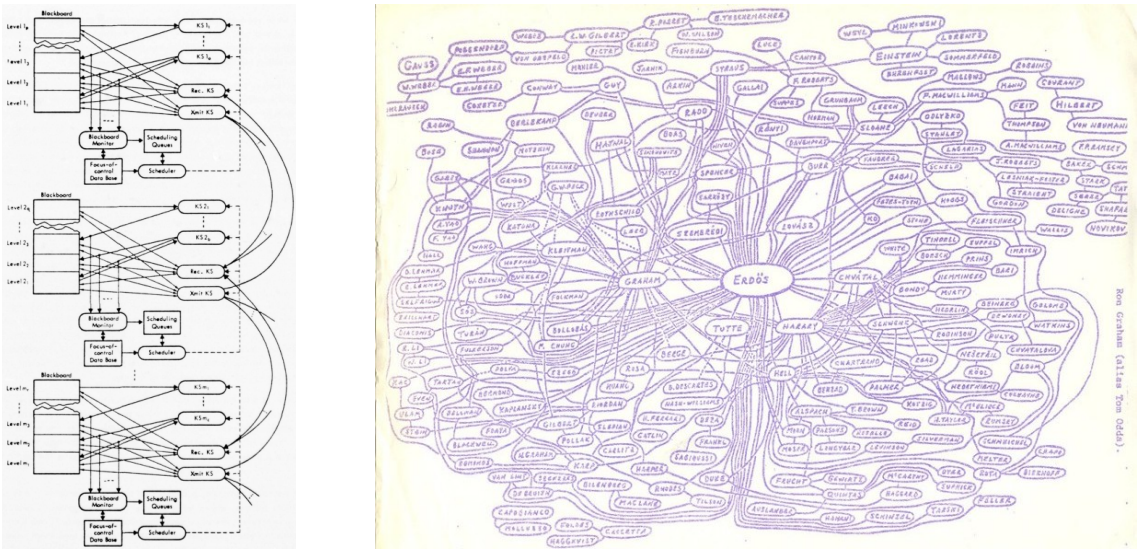
- **软件智能体**：软件中的各个分量被设计成彼此独立的模块，它们通过信息交换协同完成一项任务（图1.1a）。
- **学术网络**：与通常独立开展研究、较少合作研究的数学家不同，数学家 Paul Erdos（1913 - 1996）拥有数量极为庞大的科学出版物和合作者。若某人与埃尔德什共同发表一篇论文，则称其埃尔德什数为 1。若某人与一位埃尔德什数为 1 的人合作发表论文，但并非埃尔德什的合作者，则其埃尔德什数为 2。根据上述定义，并且由于数学是许多不同科学与工程学科的基础，每位科学家都可以查询自己的埃尔德什数[1]。埃尔德什数在一定程度上反映了研究者与数学以及与埃尔德什同时代的数学家之间的远近程度。学术网络是一个多智能体系统，由通过共同科学出版物相互连接的学者（智能体）组成。（图 1.1b）

- **电力传输网络**：每个局部电网都是一个智能体，拥有自身的发电能力和负荷需求，且在地理位置上彼此分离。全国电网连接着各个局部电网。每个局部的调度机构可以协调生产活动、与其他局部进行电力交易，并在本地配电，以实时维持功率平衡（图 1.1c）。

- **编队迁徙的鸟群**：鸟群中的每个个体都是一个智能体。候鸟以 V 字形编队飞行，其中一只智能体（在迁徙途中轮流更换）负责带队。一些假设已通过实际数据得到证明，这些数据表明，保持 V 字形飞行编队能让后方的飞行智能体通过空气动力学相互作用机制节省能量。然而，数据指出，大部分能量节省是

[1]埃尔德什数的相关信息可查询： https://mathscinet.ams.org/mathscinet/freetools/collab-di st

因为后方的飞行智能体可以在不消耗定向和寻路能量的情况下，部分处于休息状态 [309]。迷失的智能体通常无法独自完成迁徙（图 1.1d）。




(a) (b) (c) (d)

图1.1：(a) 描述Hearsay II的示意图——语音理解应用中的分布式软件智能体（1980） [142]；(b) 描述P. Erdös学术合作网络的图；(c) 美国电网（来源：Microsoft的Encarta百科全书）；(d) 候鸟以V字形编队飞行（来源：Google图片）。

在本文中，多智能体系统 （multiagent system）被定义为由较小的子系统（称为智能体）组成，且这些子系统彼此交互的系统。这些智能体在物理上和／或信息上通常彼此独立，具有相似的结构和行为。在多智能体系统中，人们通常关注两个要素：智能体间交互（局部交互），以及只有当系统中的智能体数量足够多时才会出现的整个系统的整体行为。

在进入本文的主要内容之前，我们先简要介绍一些常用术语，它们的含义与多智能体系统这一概念相近。尽管这些术语在学术文献中被广泛使用，但目前许多术语仍处于研究和发展过程中，因此尚无绝对准确的定义，只有公认的定义。本文中的定义依据作者的观点，并参考了一些学术文献、词典和维基百科。

### 1.1.1 与多智能体系统相关的一些概念

根据维基百科[2]，系统是由相互连接并按照一定规则和结构进行交互的元素所构成的集合，形成一个统一整体，通常执行某项共同功能或任务。系统通常会与外部环境进行交互，例如通过输入信号和输出信号；系统具有相应的功能，也存在不确定性。

术语智能体（intelligent agent）源自人工智能（artificial intelligence）研究，是对一种独立软件的抽象概念，它能够通过信息表示、逻辑推理和计算等基本任务来实现某个目标。术语多智能体系统（multiple agents, multiagent system）于 [134]1980年出现，其中规划智能体会考虑其他智能体的动作。该术语承接了分布式人工智能（distributed AI）这一概念，该概念自20世纪70年代起便开始使用；当人们考虑多个智能体共同解决问题时，它是对智能体之间关系及相互影响的自然扩展。

在多智能体系统中，智能体具有自组织（self-organization）能力，以执行共同任务，而无需外部作用。自组织能力是多智能体系统的一个典型特性。因此，自组织系统 （self-organized system）这一概念有时被用作换喻，来指代多智能体系统。

目前，在控制与网络科学（network science）研究界中，一个使用相当普遍的术语是网络系统 （network system）。尽管该术语相对较新，但其概念的本质——将各个系统连接起来以构建更大的系统（系统的系统（system ofsystems））——早在网络化系统成为一个严肃的研究方向之前很久就已付诸实践。例如，洁净水从高山源头经引水渠输送到城市，分配给城市居民，并在使用后收集排放，这一做法自大型都市出现以来就由管理者实施。各城市在古代国家出现的同时就已通过交通网络相互连接。城市电力网，或者说城市之间的电报系统，是在爱迪生发明电灯和发电机之后建成的，当时电路回路理论尚处于萌芽阶段。互联网已从若干局部专用网络迅速发展而来[19]。

互联网的出现和迅猛发展催生了大规模系统 (large-scale systems)和复杂网络 (complex network)等概念。大规模系统不仅指系统中的子系统数量庞大，也意味着系统在不同尺度下呈现出不同的特性。局域网（LAN）的结构简单，通常可以由一台服务器集中管理。相比之下，互联网规模庞大，连接着许多彼此独立的网络，即使部分网络出现故障，仍能继续运行。复杂系统这一概念强调的是，在寻找系统建模方式和分析方法时所面临的复杂性。大脑是一个由数百万个神经元构成的复杂系统。然而，模拟每个神经元的活动并不能有效解释人脑的运作，因为神经元之间的连接以及协同活动机制非常复杂。另一种方法是将大脑划分为不同的功能区，分析各区域的活动，以及各脑区在对象执行任务时如何相互协作

[2]参考： https://en.wikipedia.org/wiki/System

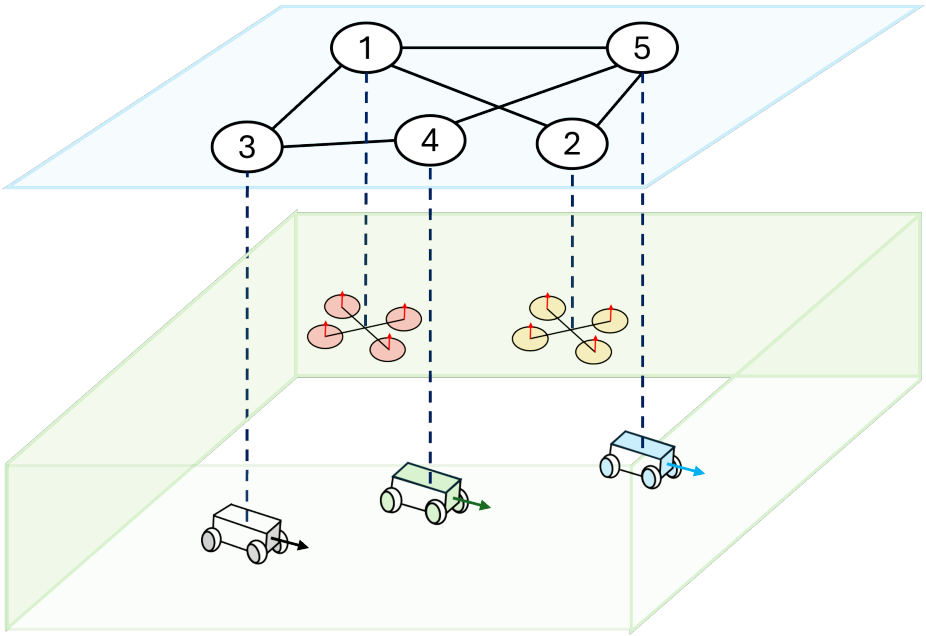



图 1.2：信息物理系统示例。在信息层，每个智能体收集或与邻居智能体共享位置和/或速度信息，以计算轨迹和/或设定速度。在物理层，每个智能体可能具有不同的运动学模型或动力学模型。每个独立的控制器都会为每个智能体确定控制律，使其跟踪设定轨迹。

。复杂网络中的连接通常具有多维、非线性的特点，遵循某些概率规律，并在一定时间内存在。

最后，信息物理系统（cyber-physical system）是一个工程术语，指具有物理连接、并基于传感器网络（观测物理过程）、通信（共享信息）和功能软件（可用于监控、控制）紧密集成而运行的多智能体系统。只有当通信、传感器、数据存储和控制计算方面的工程基础足以低延迟地实现多智能体系统的任务时，信息物理系统才是可行的。请注意，智能体通常在地理位置上相互分离，且在物理特性上并不相同。

### 1.1.2 多智能体系统控制相关的一些概念

在多智能体系统控制中，我们特别关注分布式控制算法。根据《系统与控制大辞典》 [18], ，基于多智能体系统中的信息结构和通信，我们有以下概念：

- **集中式控制**：系统中有一个控制器（中心），负责收集和处理所有智能体的信息，并据此计算相应的控制信号，发送给各个智能体。
- **分散式控制**：每个智能体都有一个局部控制器（低层控制），同时设有一个中央控制器，用于收集有关各智能体运行情况的一些信息，并为每个独立控制器计算（高层）控制信号。例如，




图 1.3：（a）去中心化控制中的信息结构：中央控制器位于正中央（红色背景），各智能体的独立控制器以白色背景的小圆表示，每条线段表示一条信息交换通道（智能体向中央控制器发送信息，中央控制器向智能体发送高层控制信号）；（b）分布式控制中的信息结构：每个独立控制器以白色背景的小圆表示，两个控制器之间的每个箭头表示单向信息交换，每条线段表示双向信息交换通道。

在工业机器人运动协调控制系统中，每个机器人都有独立的位置控制器和力控制器。中央控制器负责调度，使机器人系统按照各个工序运行。

- **分布式控制**：每个智能体都能够进行测量，并与系统中的其他若干智能体通信，从而自行决策并计算各自的控制信号。

图1.3描述了去中心化控制与分布式控制中的信息结构。去中心化控制中的信息结构呈星形，中央控制器位于正中位置，表明各智能体之间若存在信息交换，都必须经由中央控制器。在分布式控制中，智能体可以直接与其他若干智能体进行信息交换。分布式控制中的信息结构对具体构型没有约束，同时两个智能体之间的信息交换可以是单向的（一个智能体只接收，另一个智能体只发送）或双向的（两个智能体相互接收并发送信息）。

需要注意的是，在多智能体系统研究中，如果各智能体共享资源（数据库存储在同一台服务器上），但各自计算控制律，则该系统仍被归类为去中心化控制，而尚未被归类为分布式控制。在第5章的编队控制问题中，一种被归类为完全分布式的算法还要求对每个智能体可使用的局部信息量附加条件。

一些常用于表达与多智能体系统控制相近含义的术语包括：

- **多智能体系统协调**（coordination）：指系统中的运动由至少两个智能体共同完成，以实现共同目标，强调建立智能体间交互。

- **合作/非合作控制**（cooperative/non-cooperative control）：智能体间交互可分为协作交互和竞争交互。由于每个智能体都有自己的目标，根据控制算法的设计方法，每个智能体的运动可能有利于或损害其他智能体的目标。

然而，从外部控制设计者的角度来看，选择采用协作交互还是非协作交互，是为了确保整个系统的共同目标得以实现。

- **群体算法**（swarm algorithm）：多智能体系统通常很复杂且难以精确描述，因此，针对多智能体系统的一类算法是通过学习和模仿自然界中的群体现象而设计的。

因此，协调涵盖协作控制和非协作控制。每个智能体的行为及其控制律，除了包含该智能体自身的状态变量外，还包含系统中其他一些智能体的状态变量。蚁群、蜂群、粒子群等群体算法，是计算机科学中广泛使用的高效优化算法，但目前尚未成为多智能体系统控制研究的重点。尽管自然界为多智能体系统控制算法的建模和设计提供了灵感， [234], 本文主要关注精确算法，这些算法可以通过数学证明，且通常基于模型进行设计。

## 1.2 多智能体系统的分布式控制

以设计由多个自动执行任务、替代人类工作的元素组成的系统为共同目标，发展出了两个相对独立的研究分支：一支是基于动力系统控制理论的去中心化／分布式控制，自20世纪70年代起发展；另一支是信息技术，基于算法和系统的构建，利用并行、分布式方式处理信息，自20世纪80年代起发展。

分布式控制系统（Distributed Control System）自20世纪70年代起发展，并逐渐广泛应用于工业领域（过程控制）[114]。如今，分布式数据库在日常生活中的应用包括金融交易系统（ transaction）、云计算和各类网络服务，以及社交网络应用 [175]。

一些编队控制应用（自动驾驶车辆、无人机、人造卫星）处于两个研究分支的交汇处，这两个分支由机器人学和航空航天领域的研究群体自20世纪90年代以来陆续发表成果 [260, 33, 235, 321]。随着GPS定位、无线通信、传感器、微控制器和嵌入式系统等技术的发展与普及，编队控制应用得以开展研究并实现民用。

目前，对多智能体系统控制的研究始于 2000 [90, 195],年代初期左右，当时图论、一致性算法[3], 和控制理论的作用已得到相对明确的界定。

在本小节中，我们将更具体地讨论多智能体系统控制的目标、任务、范围，以及一些受到关注的问题。

### 1.2.1 目标与任务

首先，我们将尝试表述一个控制多智能体系统的问题。考虑一个由$n \geq 2$ 个智能体组成的系统，需要解决一个问题 $A$ ——这称为整个系统的全局问题（或全局目标）。假设条件包括：

[3]一致性协议（consensus/agreement protocol）是计算机科学领域分布式算法中广泛使用的术语。“一致性”这一概念也出现在社会学研究中 [65] ，并将在第8章作更具体的讨论。

- **局部问题/目标**：问题 $A$ 的信息被拆分为若干局部问题 $A_1$，$A_2$，……，$A_n$ 并分配给系统中的各个智能体。局部问题之间可能并非相互独立，但解决所有局部问题后，应能得出全局问题 $A$ 的解。

- **信息结构**：智能体能够接收和/或与系统中的其他智能体（也可能与外部环境）交换信息。

- **智能体**：假设系统中的每个智能体 $i = 1,\ldots,n$ 都能够以局部信息集合 $X_i$的形式，存储有关自身问题 $A_i$ 及其相关解的信息。接收到的信息也是智能体 $i$ 所拥有的局部信息的一部分。此外，每个智能体都能够基于控制算法计算、决策并更改局部信息。

多智能体系统控制包括以下任务：对多智能体系统进行建模，确定全局问题并设计局部问题，建立信息结构，以及设计基于局部信息的控制算法以执行局部问题 $A_i$，进而执行全局问题 $A$。

多智能体系统中的信息包括有关物理量的信息（承载智能体的运动学/动力学信息）或计算变量（用于决策过程）。因此，智能体可以通过测量相对变量，或通过通信网络进行信息交换，来收集与其他智能体相关的信息。同样，状态变量的变化可以通过作用于物理变量的执行机构，和/或更新存储器中的计算变量来实现。

多智能体系统的控制方案需要通过数学分析、数值仿真、在实验系统和实际产品上的实现来验证。本文接下来的章节将介绍若干多智能体系统的建模、控制设计，以及稳定性分析和渐近行为分析。需要注意的是，从理论控制研究者的角度来看，系统分析环节最为重要。有关多智能体系统控制的论文，无一不包含数学分析。

**示例 1.1**（鸟类和鱼类的群集）。 自20世纪80年代末以来，物理学家一直关注鸟类群集（flocking）现象与气体分子混沌热运动之间的相似性。Reynolds 提出了一个受自然启发的简单模型 [233]。在该模型中，每个智能体（称为 boid）都在三维空间中移动，并遵循三条简单规则：分离、对齐和内聚。借助这三条简单的控制律，Reynolds 成功仿真了自然界中观察到的一系列现象。

物理学家 Vicsek 的研究团队提出了另一种模型 [304]，用以描述一组在平面上以相同速度、但方位角各异的智能体的运动。每个智能体在等间隔的离散时刻更新其运动方向，依据的是自身与邻近智能体的方位角的算术平均值，以及来自环境的一个扰动项。仿真表明，如果噪声可以忽略不计，那么经过足够长的时间后，智能体将朝同一方向移动。然而，当噪声相对较大时，系统的运动具有随机性，运动方向并不一致。Vicsek 模型是最早基于稳定性理论 [121] 进行研究的多智能体动力系统示例之一。

### *Brian D. O. Anderson*与多智能体系统的分布式控制

Brian D. O. Anderson 于澳大利亚悉尼大学获得数学和电气工程学士学位（1962、1964），并于美国斯坦福大学获得电气工程博士学位（1966）。短暂在斯坦福大学和美国工业界工作后，Brian Anderson 先后担任纽卡斯尔大学（1967—1981）和澳大利亚国立大学（1981年至今）的教授，并在那里

创立了系统工程系，并领导澳大利亚国立大学信息科学与工程学院——一个专注于研究的单位。Anderson 教授于1990年至1993年担任国际自动控制联合会（IFAC）主席，1998年至2002年担任澳大利亚科学院院长，并且是澳大利亚、英国和美国多个知名学术机构及研究基金会的成员。
Brian Anderson 的研究涉足电路理论、信号处理和控制理论等领域。自 2000 年代初以来，他一直是编队控制、传感器网络定位以及当今意见动力学模型研究的奠基者之一。他在编队控制和传感器网络定位方面的研究与澳大利亚国防部合作开展，同时也与全球各地知名学术机构开展国际合作。

Anderson 及其同事的研究成果指出，刚性理论以及距离、方位角、偏差角等几何变量，在设计编队和传感器网络的信息结构方面发挥着重要作用。他重视学术交流，并致力于加强控制与自动化研究群体内的联系，包括与同事以及研究兴趣相同的学生之间的交流。

### 1.2.2 范围

根据文献 [164],[4] ，多智能体系统控制是在三个主要领域的基础上发展起来的：图论、优化和控制理论，其中：

- **图论**：是对多智能体系统中的交互进行建模的工具。需要注意的是，图描述了系统中的信息结构，直接决定系统目标是否能够实现。

- **优化**：全局问题和局部问题通常通过目标函数进行量化。优化是构建问题的工具，并据此为多智能体系统提出（高层）控制律。此外，对于影响系统质量的参数，[5] 优化是多智能体系统综合（synthesis）所必需的。

- **控制理论**：智能体及智能体间的交互由动力学和动态过程（微分方程）描述。控制理论提供了用于稳定性分析的工具、用于设计系统以便其在不确定性（系统内部以及来自外部环境的不确定性）影响下实现目标的方法，以及评估多智能体系统性能的方法。

目前，图论还没有太多结果能在多智能体系统 [329] 中找到合适的应用。优化在多智能体系统控制中的影响日益增大，但尚未深入。与此同时，控制理论的新成果相对迅速地应用于多智能体系统。这在一定程度上是因为多智能体系统研究界主要以工程背景研究这一方向，因此大部分关注点都放在实际应用上。相比之下，多智能体控制研究尚未受到组合学和图论研究界的广泛关注。

[4] [164] 是最早出版的多智能体系统控制参考书之一（2008）。该文献中的结果和思想在当前多智能体系统控制研究中仍具有现实意义。[5] 例如，在第3章中，我们将看到，趋近一致性值的渐近速度取决于图的拉普拉斯矩阵的最小正特征值。

### 1.2.3 若干研究主题

表1.1简要介绍了多智能体系统研究中的若干问题，并列举了相应主题的一篇论文作为参考。本文将用相当大的篇幅讨论一致性算法，因为多智能体系统中的许多问题都是以这一简单算法为基础发展起来的。

表1.1：多智能体系统的一些应用

| 序号 | 问题 | 描述 |
|---|---|---|
| 1 | 一致性 [192] | 智能体的状态变量相等 |
| 2 | 同步 [146] | 智能体的状态变量或输出变量具有相同的一条轨迹（微分方程的解） |
| 3 | 编队控制 [9] | 智能体分布在空间中的各个点，位置智能体的相对满足若干约束几何。相关问题包括：避碰、保持连通、参考系校准、设计与改变期望编队 |
| 4 | 定位网络感器 [15] | 根据一些参考节点估算网络节点的位置和几何测量变量 |
| 5 | 传感器数据融合（传感器融合）[316] | 一致性在传感器网络中的应用：确定根据一些观测（测量值）进行最大似然估计不同的传感器，或估计全局参数系统的 |
| 6 | 分布式优化 [173] | 最小化全局目标函数，并结合局部约束局部约束。 |
| 7 | 生产—分配分布式资源 [167] | 分布式优化在确定产量中的应用适合考虑资源约束的分配在电力、水和燃气等区室系统中燃烧、建筑供热系统、智能交通 |
| 8 | 频率稳定和电网功率 [253] | 一致性算法在系统控制中的应用由多个功率各不相同的发电机组成 |
| 9 | 该算法基于lý 博弈论 chơi [158] | 多智能体系统在博弈论中寻找纳什均衡点通过优化彼此对立的独立目标来博弈 |
| 10 | 社交网络 [218] | 研究社交网络的简化模型，着重分析渐近行为对以下因素的依赖性：模型的参数 |
| 11 | Mạng đa lớp（多层网络）[130] | 具有多层以及层内交互和层间交互的网络模型 |

除了已应用于多智能体系统的基本算法外，多智能体系统的一些扩展方法和设计趋势（受控制理论和分布式计算的影响）包括：

- 跟踪设计（tracking）：当全局问题的参数随时间变化时，该算法能够确保多智能体系统的质量指标。
- 鲁棒性设计（鲁棒性）：算法确保多智能体系统的质量指标

在考虑噪声和不确定性的影响时仍维持在允许区域内。

- 自适应设计（adaptive）：当运行条件发生变化时，算法能够改变参数或结构。
- 最优设计（optimal）：算法基于对与系统动力学过程相关的某些质量指标（代价函数）进行优化。
- 容错设计（fault-tolerance）：当发生故障时（如传感器偏差、部分执行机构损坏、通过网络交换的信息出现误差），算法能够确保多智能体系统正常运行。这可以通过故障检测与隔离及替换机制，或通过鲁棒控制来实现。
- 维持与恢复设计（resilience）：当发生故障时，算法能够确保多智能体系统正常运行，同时具备适应并在故障后恢复的机制。
- 隐私设计（privacy）：限制智能体之间交换信息的算法。
- 安全设计（security）：降低网络中智能体之间交换的信息被窃取可能性的算法（可以基于加密-解密（encryption/decryption）算法，.....

对本文未涉及的主题感兴趣的读者，可以轻松搜索相关关键词。

## 1.3 文献结构

本文分为三部分：基础、一致性系统和多智能体系统的应用。第一部分在定义多智能体系统之后，将于第2章介绍图论基础。接下来，在第二部分中，将介绍一致性系统分析中的一些重要结果。第3—4章关于一致性系统的结果，是多智能体系统控制研究的理论基础。本文将依次介绍一致性系统在编队控制、传感器网络定位、分布式优化等问题中的应用，以及社交网络研究中的一些动力学模型。第三部分最后，在第9章中，作者将介绍自己关于矩阵加权图和矩阵加权一致性算法的研究方向。

线性代数、凸优化和控制理论的一些结果在附录中给出，供读者查阅。文中提供了使用MATLAB™（R2022b 版本）进行仿真的示例源代码，以帮助读者理解文献中的理论结果。

## 1.4 注释和参考文献

阅读本文需要具备线性代数的基础知识 [257], 、多元函数微积分和微分方程方面的基础知识。读者可在阅读过程中自行补充线性控制、非线性控制和优化方面的相关知识。

除分布式优化和矩阵权重一致性系统的内容外，本文内容均曾在一个学期（15周）的课时内，向机电一体化和电气工程（控制与自动化）专业的本科生及研究生讲授。自学的读者可以重点阅读第一部分、第二部分，以掌握主题的核心内容。请注意，第三部分中的每个应用都完全可以作为一门独立课程来讲授。本文仅限于介绍各主题中的问题、若干算法和数学分析。

关于多智能体系统控制、联网控制和一致性系统的一些英文参考文献包括 [249, 164, 230, 221, 35]。在这些文献中，作者建议读者具备

工程数学基础，可参考 [35]。教材 [35] 的越南语译本 [282] 也发布在作者（F. Bullo）的网站上。

# 第2章

# 图论

图是一种离散结构，由顶点以及连接这些顶点的边组成。图论由 L. Euler 通过柯尼斯堡七桥问题发展起来。直到 20 世纪初，D. König 于 1936年 出版第一本图论教材之前，图论仍未被视为数学中一个严肃的研究分支。自 20 世纪中叶以来，图论凭借其在计算机科学中的应用逐渐受到广泛关注。

图被用于描述不同领域中的许多问题。本章旨在介绍图论中一些常用的结果，这些结果应用于多智能体系统控制研究。首先，第 2.1 小节介绍图的基本定义和结果。接着，第 2.2 小节介绍用于描述图的代数结构，例如邻接矩阵、关联矩阵和拉普拉斯矩阵。第 2 章中介绍的结果将在全文中用于描述和分析多智能体系统。

## 2.1 图

### 2.1.1 无向图

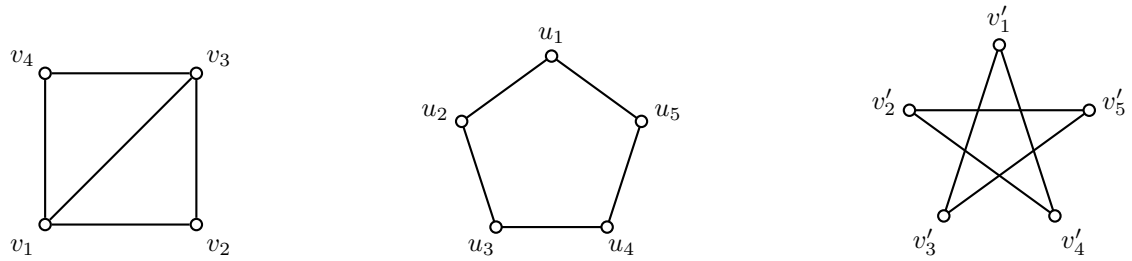
一个有限无向简单图（简称图） $G = (V, E)$，由一个含有 $|V| = n > 0$ 个元素的顶点集$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 和一个含有 $|E| = m$ 个元素的边集 $E = \{(v_i, v_j) | \, i, j = 1, \ldots, n, i \neq j\} \in V \times V$ 组成。我们称 $v_i \in V$和 $(v_i, v_j) \in E$ 分别为图 $G$的一个顶点和一条边。由于图是无向的，因此若存在 $(v_i, v_j) \in E$，则也存在 $(v_j, v_i) \in E$。[1] 当存在多个不同的图时，我们用 $V(G)$ 和 $E(G)$分别表示图 $G$ 的顶点集和边集。在某些语境下，为了简化，我们可以用 $i$表示顶点 $v_i$，用 $(i, j)$ 或 $e_{ij}$表示边 $(v_i, v_j)$。

每个图 $G$ 都有相应的几何表示，由表示顶点$v_i \in V$的小圆圈以及连接 $v_i$ 与 $v_j$ 的线段（或弧）组成，当且仅当（$v_i$，$v_j$）$\in E$。

**示例 2.1.** 在图 2.1 中：

- Đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ có tập đỉnh $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ và tập cạnh
$$E_1 = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1), (v_1, v_3)\}.$$
- 图 $G_2 =$（$V_2$，$E_2$）的顶点集为 $V_2 = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$，边集为
$$E_2 = \{(u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u_4), (u_4, u_5), (u_5, u_1)\}.$$

[1]因此，对于无向图 $G$，我们只需写成 $(v_i, v_j)$，而不区分 $(v_i, v_j)$ 与 $(v_j, v_i)$。




(a) $G_1$ (b) $G_2$ (c) $G_3$

图2.1：一些无向图示例。

- 图 $G_3 = (V_3, E_3)$ 有顶点集 $V_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ 和边集

$$E_3 = \{(v_1, v_3), (v_3, v_5), (v_5, v_2), (v_2, v_4), (v_4, v_1)\}.$$

假设 $(v_i, v_j) \in E(G)$，则称 $v_i$, $v_j$ 为相邻顶点（记作 $v_i \sim v_j$），而顶点 $v_i$ 与边 $(v_i, v_j)$关联。有一个公共顶点的两条不同边称为相邻边。如果两个图的顶点集之间存在一个保持邻接关系的双射，则称这两个图同构。从现在起，我们不再区分同构图。如果 $G$ 和 $H$ 是两个同构图，我们记作 $G \cong H$，或简写为 $G = H$。

**示例 2.2.** 考虑图 2.1(b) 和 (c) 中的两个图 $G_2$ 和 $G_3$。定义映射 $f: V_2 \to V_3$ 如下：$f(v_1) = v'_1$，$f(v_2) = v'_3$，$f(v_3) = v'_5$，$f(v_4) = v'_2$，以及 $f(v_5) = v'_4$。容易看出，$f$是$V_1$ 与 $V_2$之间的一个双射。此外，可以验证：

- $(v_1, v_2) \in E_1$则 $(f(v_1), f(v_2)) = (v'_1, v'_3) \in E_2$,
- $(v_2, v_3) \in E_1$则 $(f(v_3), f(v_3)) = (v'_3, v'_5) \in E_2$,
- $(v_3, v_4) \in E_1$则 $(f(v_3), f(v_4)) = (v'_5, v'_2) \in E_2$,
- $(v_4, v_5) \in E_1$那么 $(f(v_4), f(v_5)) = (v'_2, v'_4) \in E_2$,
- $(v_5, v_1) \in E_1$则 $(f(v_5), f(v_1)) = (v'_4, v'_1) \in E_2$。

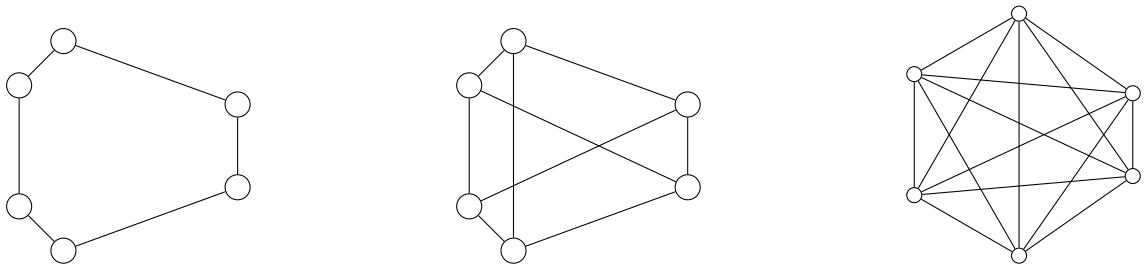
因此，$f$ 保持邻接关系，我们得出结论：$G_2 \cong G_3$。

图 $G' = (V', E')$ 是 $G = (V, E)$ 的一个子图，如果 $V' \subseteq V$且 $E' \subset E$。在这种情况下，我们记为 $G' \subseteq G$。如果 $V' \subset V$，则图 $(V', E \cap V' \times V')$ 是从$V'$得到的一个导出子图，并记为 $G[V']$。图 $H$是 $G$的一个导出子图，如果 $H \subset G$ 且 $H = G[V(H)]$。图 $G$的一个划分是集合 $V_1, \ldots, V_k \subset V$, $k \geq 2$, 使得 $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k = V$且$V_i \cap V_j = \emptyset, \forall i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $i \neq j$。

我们将图 $G$ 中顶点 $v_i$ 的邻集 定义为包含与 $v_i$相邻的顶点的集合，即 $N(v_i) = \{v_j | (v_i, v_j) \in E\}$。顶点 $v_i$ 的度 是邻集 $N(v_i)$ 的元素个数，即 $\deg(v_i) = |N(v_i)|$。我们也可以将图中一个顶点的度定义为与其关联的边数。当只有一个图 $G$ 时，可以使用简写记号 $N(v_i) = N_i$，并且 $\deg(v_i) = \deg_i$。当存在多个不同的图时，我们在下标中添加图的记号。例如，如果 $H$ 是 $G$ 的导出子图，并且 $v \in H$，那么

$$N_H(v) = N_G(v) \cap V(H), \text{ và } \deg_H(v) = |N_H(v)|.$$

对于集合 $V' \subset V$，我们将集合 $N(V') = \cup\{N(v)|\ v \in V'\}$ 定义为。 $G$ 的顶点的最小度 记作 $\delta$ ({v11)，而最大度 记作 $\Delta(G)$。如果 $\delta(G) = \Delta(G) = k$，即 $G$ 的每个顶点都具有 $k$ 度，则称 $G$ 为 $k$ 度正则图或 $k$ 度正则图。强正则图是这样一种正则图：每一对相邻顶点具有相同数量的公共邻点，且每一对不相邻顶点也具有相同数量的公共邻点。 $k = |V| - 1 = n - 1$ 度正则图称为 $n$ 度完全图，记作 $K_n$。图2.2 展示了正则图（a）、强正则图（b）和正则图（即一种特殊的强正则图）的概念。



(a) $C_6$ (b) (c) $K_6$

Hình 2.2: （a）正则图但非强正则图；（b）和（c）：强正则图 .

如果 $E' \subset E(G)$，那么 $G - E' \triangleq (V, E(G) \setminus E')$ 称为从 $G$ 删除 $E'$ 中的边后得到的删减图。类似地，如果 $V' \subset V(G)$，那么 $G - V'$ 是从 $G$ 删除属于 $V'$ 的顶点后得到的删减图，并规定当删除顶点 $v \in V'$ 时，与 $v$ 邻接的边也一并删除。换句话说，如果 $G = (V, E)$，那么 $G - V' = (V \setminus V', E \cap (V \setminus V') \times (V \setminus V'))$。如果 $V' = \{v\}$，通常用 $G - v$ 代替 $G - \{v\}$。类似地，用 $G - e$ 代替 $G - \{e\}$。对于图 $H \subset G$，可以用 $G - H$ 代替 $G - V(H)$。如果边 $e \in V \times V \setminus E$，那么通过添加边 $e$ 从 $G$ 得到的扩展图记作 $G + e = (V, E \cup \{e\})$。我们也可以类似地定义通过添加顶点得到的扩展图。

对于 $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\{\deg(v_i)\}_1^n$称为 $G$的度序列 。通常，我们将顶点排列成度序列单调递增或单调递减的顺序。显然，

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2|E(G)| = 2m,$$

因此，度序列之和 $\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i)$始终是偶数。

对于 $u$和 $v$这两个不一定相同的 $G$顶点，连接 $u-v$和 $W$的一条路径是顶点与边交替出现的序列， $u_1, e_1, u_2, e_2, \ldots, u_l, e_l, u_{l+1}$，其中 $u_1 = u$是起始顶点， $u_{l+1} = v$是终止顶点，而边 $e_i = (u_i, u_{i+1}) \in E(G)$ $1 \le i \le l$。通常，我们将 $W = v_1 v_2 \ldots v_{l+1}$记作这种形式，以便明确路径 $W$中的边。游走 $W$ 的长度为 $l$。 $W$的顶点集和边集分别记作 $V(W) = \{v_i|\ i = 1, \ldots, l+1\}$和 $E(W) = \{e_i|\ i = 1, \ldots, l+1\}$。所有边各不相同的路径称为游走。所有顶点两两不同的路径称为简单路。

首顶点和末顶点重合的路径称为一个环，首顶点和末顶点重合的游走称为一个回路 （circuit），而除首顶点和末顶点外所有顶点均互不相同的回路称为一个简单环。长度为 $l \ge 3$ 的简单环记作 $C_n$。环通常表示为 $v_1 v_2 \ldots v_l$（而不是 $v_1 v_2 \ldots v_l v_1$）。我们通常将简单路 $P$和简单环 $C$分别与图（$V$（$P$） $E$（$P$））和（$V$（$C$） $E$（$C$））视为同一对象。

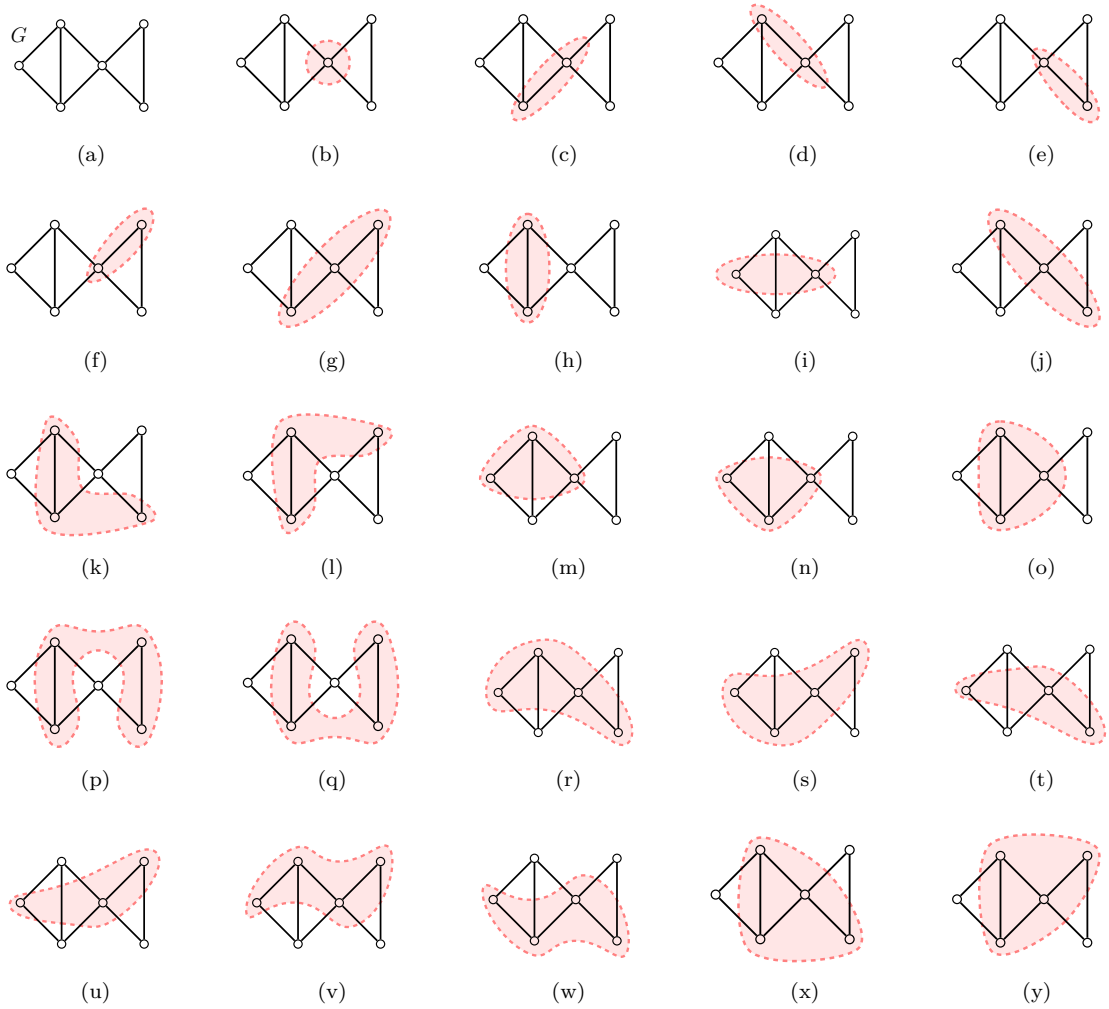



图2.3：图 $G$ 的边割示例，该图包含5个顶点和8条边， $\kappa_0(G) = 1$。

因此 y、 $v_1v_2 \dots v_{l+1}$ 和 $v_{l+1}v_l \dots v_1$ 表示同一条路径。同样， $v_1v_2 \dots v_l$ 和 $v_2v_3 \dots v_lv_1$ 记号 同一个环。

如果图中任意两个顶点之间都至少存在一条路径，则称该图为连通图。反之，则称该图为非连通图。 $G$ 的一个连通分量是一个子图 $H = (V(H)\ E(G) \cap V(H)\ \times V(H))$，满足 $H$ 是连通的，并且在 $G$ 中不存在连接 $H$ 与顶点 $v \in V(G) \setminus V(H)$ 的路径。

不含任何环的连通图称为一棵树。不含任何环的图称为森林。因此，森林包含一个或多个连通分量，每个分量都是不含环的子图。

包含图中所有顶点的树称为生成树。含有 $n$ 个顶点的树总有 $n-1$ 条边。树中任意两个顶点之间的路径是唯一的。一个含有 $n$ 个顶点和 $c$ 个分量的森林有 $n-c$ 条边。显然，含有生成树的图是连通的。

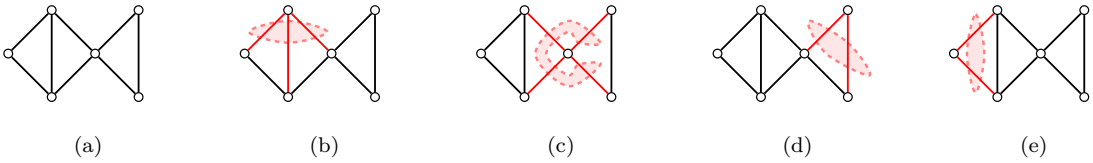



图2.4：图 $G$ 的顶点割示例，该图有5个顶点和8条边，$\kappa_1(G)=2$。

顶点 $u$、$v$ 之间的图上的距离，记作 $d(u,v)$，是连接 $u$ 和 $v$ 的路径的最小长度。如果不存在连接 $u-v$ 的路径，换句话说，$u$ 和 $v$ 属于不同的分量，则约定 $d(u,v)=\infty$。图的直径是图中两个顶点之间的最大距离。

**注释 2.1.** 在上述定义中，我们不考虑包含自环（连接一个顶点与其自身的边）的图，并假设任意两个顶点之间最多只有一条边（不存在重边）。含有重边的图称为多重图。含有自环的多重图称为伪图。

设 $G=(V,E)$是一个连通图。每个顶点割都是 $V$的一个顶点子集，移除这些顶点后，图将失去连通性。 $G$的顶点连通度记作 $\kappa_0(G)$，是 $G$所有顶点割中顶点数最少者。类似地，我们将边割定义为 $E$ 的一个子集，移除这些边后，图 $G$ 将失去连通性。 $G$ 所有边割中边数最少者称为边连通度，记作 $\kappa_1(G)$。图2.3和图2.4给出了顶点割和边割的示例。

设 $S,T\subset V$ 是连通图 $G$ ($S\cup T=V$ 和 $S\cap T=\emptyset$) 的任意二元划分，记 $\mathcal{C}_G$ 为由所有边割 $C(S,T)\subseteq E(G)$ 构成的集合。割 $C(S,T)$ 的大小是 $C(S,T)$ 的元素个数。假设 $|S|\geq|T|$，则称 $T$ 与 $G$ 被割开。割 $C(S,T)$ 的效率是比值 $\frac{|C(S,T)|}{|T|}$。图的 Cheeger 常数定义为

$$h(G)=\min_{C(S,T)\in\mathcal{C}_G}\frac{|C(S,T)|}{|T|}>0 \tag{2.1}$$

它是衡量连通图稳健性程度的指标。如果 $h(G)$ 较小，则存在一种二元划分，使两个分量的尺度相差不大，且它们之间仅由少量边连接。反之，如果 $h(G)$ 较大，则图 $G$ 中的边在图中分布得更加对称；对顶点集 $V(G)$ 的任意划分，其边割的尺度都相对较大。请注意，“大”和“小”的概念取决于所考察的图（将 $h(G)$ 与割效率的极大值进行比较）。

## 2.1.2 有向图

有向图 $G$ 由顶点集 $V=V(G)$ 和有向边集 $E=E(G)\subseteq V\times V$ 定义。有向边 $(u,v)\in E$ (其中 $u\neq v$) 的几何表示是从顶点 $u$ 指向顶点 $v$ 的有向弧。在有向图中，$(u,v)$ 和 $(v,u)$ 是两条不同的边，且可以同时存在。此外，如果 $(u,v)\in E$，则不能据此推断 $(v,u)\in E$。无向图的大多数定义都可以直接扩展到有向图。对于每个顶点 $u\in V$，我们将顶点 $u$ 的出度定义为从该顶点出发的有向边数

$u$，记作 $\deg^+(u)$。顶点 $u$ 的出邻域定义为 $N^+(u) = \{v | (u, v) \in E\}$，于是有 $\deg^+(u) = |N^+(u)|$。[2] 完全类似地，我们可以定义顶点 $u$ 的入度 $\deg^-(u)$ 和入邻域 $N^-(u)$。如果图 $G$ 对所有 $u \in V$ 都满足 $\deg^+(u) = \deg^-(u)$，则 $G$ 称为平衡图。

有向路径 $u_0u_1 \dots u_k$ 是一条包含有向边（$u_i, u_{i+1}$）的路径 $\in E$。对于简单无向图 $H$，可以通过为 $H$ 的每条边指定一个确定的方向来构造有向图 $G$ 。图 $G$ 称为 $H$的一个定向图。反之，对于有向图 $G$，可以去掉 $G$ 所有边的方向，从而得到无向图 $H$。[3] 如果无向图 $H$ 是连通的，则 $G$ 是一个弱连通图。如果对每一对顶点 $u, v \in V$（$G$） $u \neq v$都存在一条有向路径 $u - v$，则 $G$称为一个强连通图。可以看出，当图为无向图时，考察弱连通与强连通这两个概念是等价的。

如果在有向图 $G = (V, E)$ 中，存在一个顶点 $u \in V$，使得对于每个顶点 $v \in E$，$v \neq u$，都能找到一条从 $u$ 到 $v$ 的有向路径，且该路径位于 $G$ 中，那么顶点 $u$ 称为 $G$ 的一个出根，而 $G$ 称为以 $u$ 为出根的图。此时， $G$ 含有一棵有向生成树 $T$，使得从出根 $u$ 可以到达 $T$ 中的所有其他顶点。类似地，如果在 $G$ 中存在一个顶点 $u \in V$，使得对于所有 $v \in E$，$v \neq u$，都能在 $G$ 中找到一条从 $v$ 到 $u$ 的有向路径，那么顶点$u$ 称为 $G$ 的一个入根，而 $G$ 称为以 $u$ 为入根的图。此时， $G$ 含有一棵有向生成树 $T$，使得所有其他顶点都能到达入根 $u$ 。对于强连通图，图中的每个顶点既是入根，也是出根。

对于 $G$中的任意 $u$ 顶点，我们总能找到 $G$ 的一个极大强连通子图 $H$，使得 $u \in V(H)$。这里，“极大”意味着不存在 $G$ 的任何强连通子图 $K$，使得 $H$ 是 $K$的导出子图。注意，图 $H$可能只包含一个顶点 $u$。对于任意图 $G$，我们总能将其划分为极大强连通子图。这些子图分别称为 $G$的一个分量。由于每个分量都是极大的， $G$ 的这一划分是唯一的。

### 2.1.3 加权图

我们可以用一个三元组$(V, E, A)$来定义加权图 $G$，其中，除了顶点集 $V$和边集 $E$之外，还有权重集 $A = \{\omega_{ij} \in \mathrm{R}_+ | \ i \neq j, \ i, \ j \in V\}$。对于每条边$(i, j) \in E$，都有一个相应的权重 $\omega_{ij} > 0$ 。而当$(i, j) \notin E$ 时，权重 $\omega_{ij}$ 设为 0。借助权重，除了考察图中的连通性外，我们还可以相对地评估图中各条边（连接）的重要程度（或强弱）。

## 2.2 图论代数

### 2.2.1 图的一些矩阵

#### 2.2.1.1 度矩阵和邻接矩阵

考虑图 $G = (V, E, A)$，我们将邻接矩阵 $\mathbf{A}(G) = [a_{ij}]_{n \times n} \in \mathrm{R}^{n \times n}$ 定义为:

$$a_{ij} = \begin{cases} \omega_{ji}, & \text{nếu } (v_j, v_i) \in E, \\ 0, & \text{các trường hợp khác.} \end{cases} \tag{2.2}$$

[2]请注意，有些文献使用符号 $\deg_{out}(u)$ 和 $N_{out}(u)$ 表示相同的含义。[3]如果 $G$ 中存在两条边 $(u, v)$ 和 $(v, u)$，那么我们将它们视为 $H$ 中的一条边。

度矩阵 $\mathbf{D}(G)$定义为

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(G) &= \operatorname{diag}(\deg(v_1), \ldots, \deg(v_n)) \\ &= \begin{bmatrix} \deg(v_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \deg(v_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \deg(v_n) \end{bmatrix},\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中，$\deg(v_k) = \deg^-(v_k) = \sum_{j \in N_i} a_{ij}$。当只有无向图 $G$ 时，我们将简写为$\mathbf{A}(G) = \mathbf{A}$ 和$\mathbf{D}(G) = \mathbf{D}$。

**示例 2.3.** 图 2.1(a) 中图的邻接矩阵和度矩阵如下：

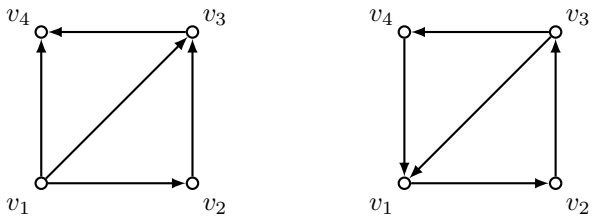
$$\mathbf{A}(G_1) = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix}, \qquad \mathbf{D}(G_1) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

容易看出，邻接矩阵$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$ 的主对角线上的元素始终为 0，其他元素均为非负数。此外，如果图 $G$ 是无向图，那么邻接矩阵是对称的$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$。

#### 2.2.1.2 关联矩阵

假设图 $G = (V, E, A)$ 有 $|V| = n$ 个顶点和 $|E| = m$ 条边。考虑 $G$ 的任意一个有向图，并将该图的边编号为 $e_1$、.....、$e_m$，关联矩阵 $\mathbf{H} = [h_{ki}]_{m \times n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$表示图 $G$中各顶点与各边之间的关系。关联矩阵的每一行对应 $E$ 的一条边，而每一列对应 $V$的一个顶点。具体而言，关联矩阵的元素定义如下：

$$h_{ki} = \begin{cases} -1, & \text{nếu } e_k = (v_i, v_j), \\ 1, & \text{nếu } e_k = (v_j, v_i), \\ 0, & \text{trường hợp khác.} \end{cases} \tag{2.4}$$




(a) $H_1$ (b) $H_2$

图 2.5：图 $G$ 在图 2.1(a) 上的几种不同有向图。

**例2.4**。 图2.5(a)所示图的关联矩阵为:

$$\mathbf{H}(H_1) = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} e_1 = (v_1, v_2) \\ e_2 = (v_1, v_3) \\ e_3 = (v_1, v_4) \\ e_4 = (v_2, v_3) \\ e_5 = (v_3, v_4) \end{array}$$

尽管对于 $G$ 的不同定向方式，矩阵 $\mathbf{H}$ 各行的符号会相应改变，但矩阵 $\mathbf{H}$ 的秩不受图 $G$ 定向方式的影响。

关联矩阵为我们提供了关于图 $G$ 结构的信息。具体来说，如果图 $G$ 是连通的，那么矩阵 $\mathbf{H}$ 的零空间由向量 $\mathbf{1}_n = [1, \ldots, 1]^\top$ 张成，换句话说，$\ker(\mathbf{H}) =$ 张成空间$\{\mathbf{1}_n\}$。另一方面，矩阵 $\mathbf{H}^\top$ 的核空间与图 $G$ 的循环空间 [4] 相关联。

考虑一个 $G$ 的有向图 $H$，并假设 $G$ 是连通的。在图 $H$ 中，带符号路径向量[5] $\mathbf{z}$ 对应于一条有向路径 $P$，使得$\mathbf{z} = [z_1, \ldots, z_m]^\top$ 的第 $i$ 个元素取值为:

$$z_i = \begin{cases} +1, & \text{nếu cạnh thứ } i \text{ được đi thuận hướng trong } P, \\ -1, & \text{nếu cạnh thứ } i \text{ được đi ngược hướng trong } P, \\ 0, & \text{nếu cạnh thứ } i \text{ không thuộc } P. \end{cases}$$

对于一条路径 $P$，其在图 $H$ 中具有不同的起点和终点，并由向量 $\mathbf{z}$ 描述，向量 $\mathbf{y} = \mathbf{H}^\top \mathbf{z}$ 取值为 $-1$，若顶点 $i$ 是该路径的起点；若顶点 $i$ 是终点则取 1；在其他情况下取 0。$\mathbf{H}^\top$ 的零空间由对应于 $H$ 的独立回路的线性无关带符号路径向量生成。设 $\mu$ 为 $H$ 中（以及 $G$ 中）独立回路的数目，则 $\mu =$维数(核($\mathbf{H}^\top$))。因此，秩($\mathbf{H}^\top$) $=$维数(像($\mathbf{H}^\top$)) $-$维数(核($\mathbf{H}^\top$)) $= m - \mu$。另一方面，若 $G$ 连通，则秩($\mathbf{H}$) $=$维数(像($\mathbf{H}$)) $-$维数(核($\mathbf{H}$)) $= n - 1$。由秩($\mathbf{H}$) $=$秩($\mathbf{H}^\top$)，我们推出公式

$$\mu = m - n + 1. \tag{2.5}$$

在 $G$ 非连通且有 $c$ 个分量的情况下，$\dim(\ker(\mathbf{H})) = c$。此时，独立回路数的计算公式变为 $\mu = m - n + c$。注意，公式（2.5）也可以如下推导:

考虑 $G$ 中任意一棵包含 $n-1$ 条边的生成树 $T$。显然，$T$ 不包含任何回路。对于添加到图中的每一条边 $e \in E(G) \setminus E(T)$，都对应一个独立回路。因此，$G$ 中的独立回路数等于 $|E(G) \setminus E(T)| = m - n + 1$。

**例2.5**。 考虑例2.4中的关联矩阵（图2.5(a)中的图）。由于该图是弱连通的，$\mathbf{H}$ 的核空间由向量 $\mathbf{1}_4$ 生成。容易看出，$\mathbf{H}$的核空间 $^\top$ 包含以下向量

- $\mathbf{z}_1 = [1, -1, 0, 1, 0]^\top$ 对应于经过顶点 $v_1, v_2, v_3, v_1$ 的环;
- $\mathbf{z}_2 = [0, 1, -1, 0, 1]^\top$ 对应于经过顶点 $v_1, v_2, v_3, v_1$ 的环;
- $\mathbf{z}_3 = [1, 0, -1, 1, 1]^\top$ 对应于经过顶点 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_1$ 的环。

由于 $\mathbf{z}_3 = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$与 $\mathbf{z}_1$ 和 $\mathbf{z}_2$ 线性相关。因此 $\mu(H) = 2$，且 $\ker(\mathbf{H}^\top) =$张成空间$\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$。可以再次验证 $\mu = m - n + 1 = 5 - 4 + 1 = 2$。

[4]循环空间[5]有向路径

向量

#### 2.2.1.3 无向图的拉普拉斯矩阵

无向图的拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}} = [l_{ij}]_{n\times n} \in \mathrm{R}^{n\times n}$ 定义为:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} \triangleq \mathbf{D} - \mathbf{A}. \tag{2.6}$$

换句话说，拉普拉斯矩阵的元素可以由矩阵$\mathbf{A}$ 的元素定义如下:

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & \text{nếu } i,j \in V,\ i \neq j, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, & \text{nếu } i = j. \end{cases}$$

我们也可以基于关联矩阵定义矩阵$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 。对于 $G$的任意定向，都有一个相应的关联矩阵$\mathbf{H}$ 。拉普拉斯矩阵可以写成:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \mathbf{H}^{\top}\mathbf{H}. \tag{2.7}$$

公式（2.7）的证明即为练习 2.17 的内容。因此，对于 $G$ 为无向图的情况，拉普拉斯矩阵$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 是对称且半正定的。因此，$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的特征值均为实数，我们可以将它们按升序排列如下:

$$\lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \ldots \leq \lambda_n(G). \tag{2.8}$$

尽管可以由矩阵$\mathbf{H}$ 定义（见方程（2.7））， 但在用矩阵$\mathbf{H}$ 表示边的定向时，矩阵$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 并不依赖于我们所选择的方式（方程（2.6））。

**定理 2.1** （无向图的拉普拉斯矩阵的性质）。 考虑无向图$G = (V, E)$，其拉普拉斯矩阵为$\boldsymbol{\mathcal{L}}$。有:

1. $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 是对称的: $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \boldsymbol{\mathcal{L}}^{\top}$。

2. $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 是半正定的。$\boldsymbol{\mathcal{L}}$的特征值按升序排列，满足:

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n.$$

3. $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 属于 M 类矩阵集合。每个 M 类矩阵都满足$\mathbf{M} = [\mathbf{M}]_{ij} \in \mathrm{R}^{n\times n}$，其非对角线元素非正（$[\mathbf{M}]_{ij} \leq 0, \forall i \neq j$），但其特征值的实部均非负（$\lambda_i(\mathbf{M}) \geq 0, \forall i = 1, \ldots, n$）。

4. $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的所有行和列之和均为 0。换言之，矩阵$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 和$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{\top}$ 都以向量$\mathbf{1}_n$ 为对应于特征值 $\lambda_1(G) = 0$的特征向量。

5. 图 $G$ 连通，当且仅当 $\lambda_2(G) > 0$。值 $\lambda_2(G)$ 也称为图 $G$的 Fiedler 特征值或连通度。

6. 如果 $G$ 由 $c$ 个连通分量组成，我们可以对 $G$ 的顶点进行编号，使矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 可以写成分块对角矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}} =$ 分块对角矩阵$(\boldsymbol{\mathcal{L}}_1, \ldots, \boldsymbol{\mathcal{L}}_c)$，其中 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_i, i = 1, \ldots, c$是图 $G$中各个连通分量对应的拉普拉斯矩阵。$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的零空间维数等于图的连通分量数（$\dim(\ker(\boldsymbol{\mathcal{L}})) = c$）。

7. 拉普拉斯矩阵的迹等于图 $G$的边数的两倍，换句话说，$\mathrm{trace}(\boldsymbol{\mathcal{L}}) = 2m$。

8.（矩阵树定理）记 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{v_i}$ 为从$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 中删除图中任意顶点 $v_i$ 对应的行和列后得到的矩阵。图 $G$ 的生成树数量由 $\tau(G) = \det(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{v_i})$ 计算得出。

9. 方程 $\mathbf{Lx} = \mathbf{b}$ 有解，当且仅当 $\mathbf{b}^\top \mathbf{1}_n = 0$。方程的解形式为 $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{1}_n + \mathbf{L}^\dagger \mathbf{b}$，其中 $\alpha \in \mathbf{R}$，且 $\mathbf{L}^\dagger = \mathbf{P}\mathrm{diag}(0, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})\mathbf{P}^\top$ 是 L 的 Moore-Penrose伪逆矩阵，$\mathbf{P} = [\mathbf{v}1, \ldots, \mathbf{v}_n]$，其中 $\mathbf{v}_k$ 是分别对应于矩阵 L 的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 的标准化特征向量。矩阵 $\mathbf{L}^\dagger$ 是对称、半正定的，行和与列和均为 0，并且满足 $\mathbf{L}^\dagger \mathbf{L} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\dagger = \mathbf{I}_n - \frac{1}{n}\mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top$。

10. 假设 $G$ 是连通图，$G'$ 是从 $G$ 中删除顶点 $V_1 = 1, \ldots, l, l \geq 1$后得到的图，则拉普拉斯矩阵可以写为:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{L}}_{11} & \boldsymbol{\mathcal{L}}_{12} \\ \boldsymbol{\mathcal{L}}_{21} & \boldsymbol{\mathcal{L}}_{22} \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

其中 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{11} \in \mathbf{R}^{l \times l}$，$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{12} = \boldsymbol{\mathcal{L}}_{12}^\top = \boldsymbol{\mathcal{L}}_{21} \in \mathbf{R}^{l \times (n-l)}$，且 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{22} = \boldsymbol{\mathcal{L}}(G') - \mathrm{diag}(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{21}\mathbf{1}_l) \in \mathbf{R}^{(n-l)\times(n-l)}$ 是一个对称正定矩阵。当 $l = 1$ 时，$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{22}$ 也称为接地拉普拉斯矩阵，其逆矩阵的元素均为非负，并满足 $(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{22}^{-1})_{ij} = (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_1)^\top \boldsymbol{\mathcal{L}}^\dagger (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_1)$，其中 $\mathbf{e}_i = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]^\top \in \mathbf{R}^n$ 是一个单位向量，除第 $i$ 个元素为 1 外，其余元素均为 0。

11. [131] 连通图 $G$ 中两个顶点 $i, j$ 之间的有效电阻 $r_{ij}^{\mathrm{eff}}$ 由 $r_{ij}^{\mathrm{eff}} = (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^\top \mathbf{L}^\dagger (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) = \mathbf{L}_{ii}^\dagger + \mathbf{L}_{jj}^\dagger - 2\mathbf{L}_{ij}^\dagger$给出。有效电阻是图上的一种度量，满足以下性质：(a) 非负性：$r_{ij}^{\mathrm{eff}} \geq 0, \forall i, j \in V$且 $r_{ij}^{\mathrm{eff}} = 0$ 当且仅当 $i = j$；(b) 对称性：$r_{ij}^{\mathrm{eff}} = r_{ji}^{\mathrm{eff}}, \forall i, j \in V$；(c) 三角不等式：$r_{ij}^{\mathrm{eff}} \leq r_{ik}^{\mathrm{eff}} + r_{kj}^{\mathrm{eff}}, \forall i, j, k \in V$。

证明。 1-4. 这些性质可由根据方程 (2.6)–(2.7) 对拉普拉斯矩阵的定义推得。

5. 根据方程 (2.7)，我们有 $\ker(\boldsymbol{\mathcal{L}}) = \ker(\mathbf{H}^\top \mathbf{H}) = \ker(\mathbf{H})$。由于$\mathbf{H}$ 的核空间由向量 $\mathbf{1}_n$ 生成当且仅当 $G$ 连通时成立，因此得证。

6. 类似于性质 5，我们可以对 $G_k = (V_k, E_k)$、$k = 1$，……，$c$中的各个连通分量的边编号，使得 $e_1$，……，$e_{m_1}$属于 $G_1$，$e_{m_1+1}$，……，$e_{m_1+m_2}$属于 $G_2$，……，并且$e_{\sum_{k=1}^{c-1} m_k + 1}$，……，$e_{\sum_{k=1}^{c} m_k}$，其中$\sum_{k=1}^{c} m_k = m$。由于各连通分量没有共同顶点，图的关联矩阵具有如下形式:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{H}_c \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

由于每个分量都是连通的，定义

$$\mathbf{v}_k = \mathrm{vec}(\mathbf{0}_{|V_1|}, \ldots, \mathbf{0}_{|V_{k-1}|}, \mathbf{1}_{|V_k|}, \mathbf{0}_{|V_{k+1}|}, \ldots, \mathbf{0}_{|V_c|}),\ k = 1, \ldots, c,$$

thì

$$\mathbf{H}\mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{|V_1|} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_k \mathbf{1}_{|V_k|} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{|V_c|} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_n,\ \text{do}\ \mathbf{H}_k \mathbf{1}_{|V_k|} = \mathbf{0}_{|V_k|}.$$

因此，维数(核(**H**)) $= c$。由于

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \mathbf{H}^\top \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^\top \mathbf{H}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2^\top \mathbf{H}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{H}_c^\top \mathbf{H}_c \end{bmatrix} = \mathrm{blkdiag}(\boldsymbol{\mathcal{L}}_1, \ldots, \boldsymbol{\mathcal{L}}_c). \tag{2.11}$$

因此也有 dim(ker(**H**)) = dim(ker($\mathbf{H}^\top\mathbf{H}$)) = ker($\boldsymbol{\mathcal{L}}$) $= c$。

7. 由方程 (2.6)，可得 trace($\boldsymbol{\mathcal{L}}$) $= \sum_{i=1}^{n}$deg($v_i$) $= 2m$。

8. 不失一般性，我们可以选择 $i = 1$。首先，我们证明以下结果：考虑集合 $S$，其中包含图 $G$ 的 $n-1$ 条任意边。如果 $S$ 的边没有构成 $G$ 的生成树，则 $\det(\mathbf{H}_{v_1}^\top[S]) = 0$ ($\mathbf{H}_{v_1}^\top[S]$ 是删除第 *1* 行以及与不属于 $S$ 的边对应的列后得到的 $\mathbf{H}^\top$ 子矩阵。反之，如果 $S$ 的边构成 $G$ 的生成树，则 $\det(\mathbf{H}_{v_1}^\top[S]) = \pm 1$。

事实上，如果 $S$ 的边不构成 $G$ 的生成树，那么 $S$ 中的一组边（假设这些边不与 $v_1$邻接）将构成 $G$中的一个环。选择与该环对应的带符号路径向量 $\mathbf{z}$，则 $\mathbf{H}_{v_1}^\top[S]\mathbf{z} = \mathbf{0}_m$。这证明 $\mathbf{H}_{v_1}^\top[S]$ 的列线性相关，由此可推出 det($\mathbf{H}_{v_1}^\top[S]$) $= 0$。

假设 $S$ 的边构成 $G$的生成树 $T$。对于 $T$ 中与 $v_1$ 关联的一条边 $e$，$e$ 在矩阵 $\mathbf{H}_{v_1}^\top[S]$ 中的对应列只包含一个非零元素（其值为 $\pm 1$）。在矩阵 $\mathbf{H}_{v_1}^\top[S]$中，删除与 $e$的非零元素对应的行和列后，得到矩阵 $\mathbf{H}_{v_1}^{'\top} \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$。注意，det($\mathbf{H}_{v_1}^\top[S]$) $= \pm$det($\mathbf{H}_{v_1}^{'\top}[S]$)。设 $T' = T \setminus e$ 为将边 $e$ 收缩到顶点 $v$后由 $T$得到的树。此时，$\mathbf{H}_{v_1}^{'\top}[S]$ 正是删除与顶点 $u$对应的行后的矩阵 $\mathbf{H}_{v_1}^{'\top}(T')$。因此，根据顶点数 $n$ 的归纳原理（$n = 2$ 的情形显然，det($\mathbf{H}_{v_1}^\top[S]$) $= \pm 1$），可得 det($\mathbf{H}_{v_1}^{'\top}$) $= \pm 1$。

接下来，我们证明矩阵-树定理。由$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \mathbf{H}^\top\mathbf{H}$，可得$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{v_1} = \mathbf{H}_{v_1}^\top\mathbf{H}_{v_1}$。根据柯西-比内定理:

$$\det(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{v_1}) = \sum_S \det(\mathbf{H}_{v_1}^\top[S])\det(\mathbf{H}_{v_1}[S]),$$

其中，$S$是集合 $\{1, \ldots, m\}$中任意一个由 $n-1$ 个元素组成的子集。由于 det($\mathbf{H}_{v_1}^\top[S]$) $=$det($\mathbf{H}_{v_1}[S]$), 可得

$$\det(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{v_1}) = \sum_S (\det(\mathbf{H}_{v_1}^\top[S]))^2.$$

应用上面刚证明的结果，对于每个构成 $G$ 的生成树的集合 $S$，det($\mathbf{H}_{v_1}^\top[S]$) $= \pm 1$；反之，det($\mathbf{H}_{v_1}^\top[S]$) $= 0$。因此，上述等式右侧的和恰好等于图 $G$的生成树数量。

9. 由于矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 是奇异的，且 ker($\boldsymbol{\mathcal{L}}$) $=$ im($\mathbf{1}_n$)，因此 im($\boldsymbol{\mathcal{L}}$) $\perp$ im($\mathbf{1}_n$)。所以，方程$\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解，当且仅当 $\mathbf{b} \in$ im($\boldsymbol{\mathcal{L}}$)，即 $\mathbf{1}_n^\top\mathbf{b} = 0$。方程的解为:

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{1}_n + \boldsymbol{\mathcal{L}}^\dagger\mathbf{b}, \tag{2.12}$$

其中 $\alpha \in \mathrm{R}$ 且 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{\dagger}\mathbf{b} \perp \mathrm{im}(\mathbf{1}_n)$。直接计算两个矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \mathbf{P}\mathrm{diag}(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\mathbf{P}^{\top}$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{\dagger} = \mathbf{P}\mathrm{diag}(0, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})\mathbf{P}^{\top}$，即可得到所需证明。

10. 由方程 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{22} = \boldsymbol{\mathcal{L}}(G') - \mathrm{diag}(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{21}\mathbf{1}_l)$ 可立即得出 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{22}$ 是对称的。由于图 $G$ 是连通的，$\mathbf{B} = -\mathrm{diag}(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{21}\mathbf{1}_l) = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_{n-1})$ 是一个对角矩阵，其中 $b_i = \sum_{j=1}^{l} a_{ij} \geq 0$，且至少存在一个元素 $b_i > 0$。

对于 $\boldsymbol{\mathcal{L}}(G')$ 对应于特征值 $\lambda_k \geq 0$ 的任意特征向量 $\mathbf{v}_k \in \mathrm{R}^{n-1}$，有 $\mathbf{v}_k^{\top}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{22}\mathbf{v}_k = \lambda_k + \sum_{j=1}^{n-1} b_j v_{kj}^2 > 0$。由于 $\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}) = \mathrm{R}^{(n-1)\times(n-1)}$，因此可推知 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{22}$ 是正定矩阵。

11. (a) 由于伪逆矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{\dagger}$ 是对称且半正定的，因此 $r_{ij}^{\mathrm{eff}}$ 非负。此外，当 $i \neq j$ 时，由于 $(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) \perp$ 属于核$(\boldsymbol{\mathcal{L}}^{\mathrm{dagger}}) = \mathrm{im}(\mathbf{1}_n)$，所以 $r_{ij}^{\mathrm{eff}} > 0$。因此，$r_{ij}^{\mathrm{eff}} = 0$ 当且仅当 $i = j$。

(b) Do $(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^{\top}\boldsymbol{\mathcal{L}}^{\dagger}(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i)^{\top}\boldsymbol{\mathcal{L}}^{\dagger}(\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i)$, ta có $r_{ij}^{\mathrm{eff}} = r_{ji}^{\mathrm{eff}}$.

(c) 在证明 [80]时，我们将使用以下结果（习题 2.20 的内容）：“设连通无向图 $G$ 的拉普拉斯矩阵为 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$。假设方程 $\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{V} = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ 有解 $\mathbf{V} = [v_1, \ldots, v_n]^{\top} \in \mathrm{R}^n$，则 $v_i \geq v_k \geq v_j, \forall k \in V \setminus \{i, j\}$。”

我们有在输入和输出强度分别为 1 和 -1 的电流时得到的电压方程

$$\mathbf{L}\mathbf{V}_1 = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j, \ \mathbf{V}_1 = [v_{11}, \ldots, v_{1n}]^{\top} \qquad (\text{vào } i \text{ ra } j) \tag{2.13}$$

$$\mathbf{L}\mathbf{V}_2 = \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_k, \ \mathbf{V}_2 = [v_{21}, \ldots, v_{2n}]^{\top} \qquad (\text{vào } j \text{ ra } k). \tag{2.14}$$

由上述两个方程可得

$$\mathbf{L}(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_k, \tag{2.15}$$

即 $\mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ 是顶点 $i$ 和顶点 $k$处分别流入和流出的电流强度为 1 和 -1 时各顶点的电压向量。由方程 (2.15) 可得

$$v_{1i} + v_{2i} - (v_{1k} + v_{2k}) = (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_k)^{\top}\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L}(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = r_{ik}^{\mathrm{eff}}. \tag{2.16}$$

应用证明开头的结果，可得 $v_{1k} \geq v_{1j}$ 和 $v_{2i} \leq v_{2j}$。将上述两个不等式代入 (2.16)，得到

$$\begin{aligned} r_{ik}^{\mathrm{eff}} &\leq (v_{1i} - v_{1j}) + (v_{2j} - v_{2k}) \\ &= (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_k)^{\top}\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L}\mathbf{V}_1 + (\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_k)^{\top}\mathbf{L}^{\dagger}\mathbf{L}\mathbf{V}_2 \\ &= r_{ij}^{\mathrm{eff}} + r_{jk}^{\mathrm{eff}}. \end{aligned}$$

□

## 2.2.2 有向图的拉普拉斯矩阵

对于有向图 $G = (V, E, A)$，带权邻接矩阵定义为

$$[\mathbf{A}]_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{nếu } (v_j, v_i) \in E, \\ 0, & \text{các trường hợp khác.} \end{cases} \tag{2.17}$$

（入）度矩阵定义为

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\deg^-(v_i)),$$

其中 $\deg^-(v_i) = \sum_{j \in N^-(v_i)} a_{ij}$。根据此定义，我们有

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\mathbf{A}\mathbf{1}_n). \tag{2.18}$$

拉普拉斯矩阵定义为

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} \triangleq \mathbf{D} - \mathbf{A} = \mathrm{diag}(\mathbf{A}\mathbf{1}_n) - \mathbf{A}. \tag{2.19}$$

根据此定义，我们仍有 $\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{1}_n = \mathrm{diag}(\mathbf{A}\mathbf{1}_n)\mathbf{1}_n - \mathbf{A}\mathbf{1}_n = \mathbf{0}_n$，或者 $\mathbf{1}_n \in \ker(\boldsymbol{\mathcal{L}})$，并且 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 总有一个特征值为 0。不过，此时 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 不对称，因此 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 各列之和可能不为 0。

***MeHran Mesbahi*、*Magnus Ergestedt*，以及《网络中的图论方法》一书**
***M*多智能体网络》**

Mehran Mesbahi 是华盛顿大学西雅图分校航空航天系教授。Mesbahi 的研究主要集中于网络化控制、优化和航空航天。Magnus Egerstedt 是加利福尼亚大学尔湾分校亨利·萨穆埃利工程学院教授。Egerstedt 的科学贡献涉及连续-离散混合系统理论、多智能体系统控制和机器人学。

《Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks》[164] 是最早出版的多智能体系统控制专著之一（2010 年）。本书旨在用于研究生教学，不过基础内容也可供没有控制知识背景的读者自学。自出版以来，书中十三章的内容一直是多智能体系统控制领域众多研究和科学出版物的主题。本书还介绍了许多实际应用，其中关于多智能体系统在航空航天和机器人学领域的应用更是颇具前瞻性。

希望在多机器人系统上测试算法的教材读者可以了解 Robotarium——Egerstedt 在佐治亚理工学院任教授期间开发的测试平台：`https://www.robotarium.gatech.edu/`。

有向图的矩阵树定理[6] 表述如下：

**定理2.2**（矩阵树定理 [302, 311]）。对于加权有向图 $G$ 的任意顶点 $v$，有

$$\det(\boldsymbol{\mathcal{L}}_v(G)) = \sum_{T \in \mathcal{T}_v} \prod_{(v_j, v_i) \in T} a_{ij},$$

其中，$\mathcal{T}_v$ 是 $G$ 中以 $v$为出根的所有生成树的集合，$\prod_{(v_j,\ v_i)\ \in T} a_{ij}$ 是生成树 $T$ 中各边的权值乘积；$\boldsymbol{\mathcal{L}}_v(G)$ 是从 $\boldsymbol{\mathcal{L}}(G)$ 中删除与顶点 $v$ 对应的行和列后得到的矩阵。

对于一个带有权重 $G$ 的有向图，$G$ 包含一棵出树（或者说 $G$ 是一个具有出根的图）的充要条件由以下定理给出：

[6]矩阵树定理

**定理 2.3.** 一个具有 $n$ 个顶点的有向图 $G$ 包含一棵出树，当且仅当秩($\boldsymbol{\mathcal{L}}$) $= n-1$。此时，核($\boldsymbol{\mathcal{L}}$) $=$ 像($\mathbf{1}_n$)。

证明。 需要证明的结论等价于：$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的特征多项式以 0 为单根。将特征多项式写成

$$p_G(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0, \tag{2.20}$$

则 $\alpha_0 = 0$ 因为拉普拉斯矩阵总有一个特征值为 0。因此，当且仅当 $\alpha_1 \neq 0$时，rank($\boldsymbol{\mathcal{L}}$) $= n-1$。另一方面，

$$\alpha_1 = \sum_v \det(\boldsymbol{\mathcal{L}}_v),$$

其中 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_v$ 是将$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的第 $v$ 行和列删除后得到的矩阵。根据矩阵—树定理，det($\boldsymbol{\mathcal{L}}_v$) $\neq 0$ 当且仅当存在一棵以 $v \in G$ 为出根的生成树。最后，由于$\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{1}_n = \mathbf{0}_n$总是成立，若 rank($\boldsymbol{\mathcal{L}}(G)$) $= n-1$，则可推出 ker($\boldsymbol{\mathcal{L}}(G)$) $=$ im($\mathbf{1}_n$)。 □

有向加权图 $G$ 的拉普拉斯矩阵的一些性质总结如下定理:

**定理 2.4** （有向加权图的拉普拉斯矩阵）。假设 $G = (V, E, A)$ 是一个有向加权图，且有出根。那么，

1. $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 以 $\mathbf{1}_n$ 为对应于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的右特征向量。$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的其他特征值满足 Re($\lambda_i$) $> 0$, $i = 2, \ldots\ldots, n$。$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的所有特征值都位于复平面上以 $\Delta + j0$ 为圆心、 $\Delta = \max_{i=1,\ \ldots\ldots,\ n}$deg$^-(v_i)$ 为半径的圆盘内（图 2.6）。

2. 如果 $G$ 强连通，则矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 是不可约的，也就是说，不存在置换矩阵 $\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{P}\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{P}^\top$ 具有上三角分块对角形式。如果 $G$ 有出根，则存在一个置换矩阵，将矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 变换为如下形式:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{L}}_{11} & \boldsymbol{\mathcal{L}}_{12} & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{L}}_{1k} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\mathcal{L}}_{22} & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{L}}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{L}}_{kk} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

其中 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ii}, i = 1,\ldots,k-1$ 是不可约的，至少有一行的行和为正，并且 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{kk}$ 不可约或等于 0。

3. 图 $G$ 强连通，当且仅当存在向量 $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \ldots, \gamma_n]^\top$ 满足 $\boldsymbol{\gamma}^\top\boldsymbol{\mathcal{L}} = \mathbf{0}_n^\top$,$\boldsymbol{\gamma}^\top\mathbf{1}_n = 1$，并且 $\gamma_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$。

证明。 1. 对矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 应用格尔施戈林定理（见附录 A），$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的特征值位于复平面上由以下圆盘构成的并集区域

$$B_i = \{s \in \mathbb{C} |\ |s - l_{ii}| \leq R_i\}, \tag{2.22}$$

其中 $R_i = \sum_{j\in N_i} |l_{ij}| = \sum_{j\in N_i} |a_{ij}| = l_{ii} =$ deg$^-(v_i)$。这些圆盘都在坐标原点处与虚轴相交，且都位于圆盘 $B$中心 $\Delta + j0$、半径 $R = \Delta = \max_i$ deg$^-(v_i)$ 内。根据定理 2.3，矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 只能有一个特征值等于 0，因此可推得 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的其余特征值都必须位于虚轴右侧，即 Re($\lambda_i$) $> 0$, $\forall i = 2, \ldots, n$。

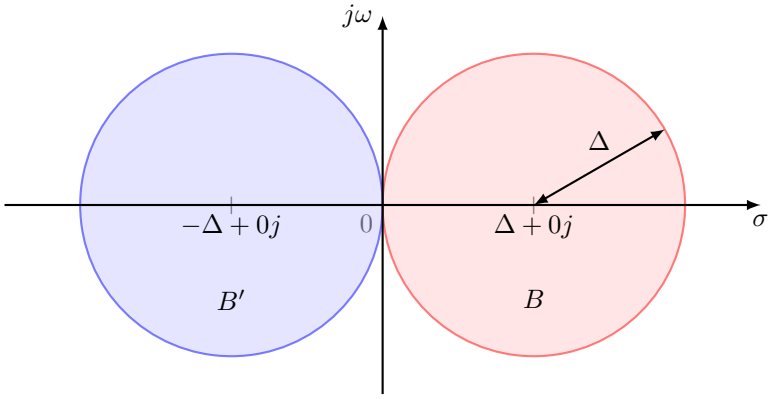



图2.6：$\mathcal{L}$ 的特征值位于以$\Delta + j0$为中心、半径为$\Delta = \max_i \deg^-(v_i)$的圆盘 $B$ 内（红色区域）。 $-\mathcal{L}$ 的特征值位于与 $B'$ 关于虚轴对称的圆盘 $B$ 内（虚轴左侧区域）。

2. 假设 $G$ 是强连通图，并且存在置换矩阵 $\mathbf{P}$ （对应于对 $V$ 中各顶点重新编号的一种方式），使得 $\mathcal{L}$ 可表示为

$$\mathcal{L}' = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathcal{L}_{22} \end{bmatrix}, \tag{2.23}$$

其中，$\mathcal{L}_{11} \in \mathbb{R}^{l\times l}$ 和$\mathcal{L}_{22} \in \mathbb{R}^{(n-l)\times(n-l)}$，其中 $l \geq 1$。由矩阵$\mathcal{L}'$的结构容易看出，顶点 $v_1, \ldots, v_l$ 没有到顶点 $v_{l+1}, \ldots, v_n$的有向路径。由此可推知， $G$不可能是强连通图，这与最初的假设相矛盾。

若 $G$ 是一个具有出根但非强连通的图，我们可以将 $G$ 中包含出根的极大强连通分量内的顶点编号为 $v_{l+1}, \ldots, v_n$。此时，相应的拉普拉斯矩阵具有式（2.23）所示的形式。接下来，将 $G$ 中包含出根的极大强连通分量视为一个顶点 $v_{l+1}$ ，并将与 $v_{l+1}$ 邻接的极大强连通分量中的顶点编号为 $v_{l_1}, \ldots, v_l$，那么此时相应的拉普拉斯矩阵形式为：

$$\mathcal{L}' = \begin{bmatrix} \mathcal{L}'_{11} & \mathcal{L}'_{12} & \mathcal{L}'_{13} \\ \mathbf{0} & \mathcal{L}'_{22} & \mathcal{L}'_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{L}'_{33} \end{bmatrix}. \tag{2.24}$$

继续按这种方式进行编号，就会得到方程（2.21）中的拉普拉斯矩阵 ).

3. 假设 $G$ 是强连通图。定义矩阵 $\mathrm{B} = \rho \mathrm{I}_n - \mathrm{L}$，其中 $\rho > \max_{i=1,\ldots,n} l_{ii}$，则 B 是一个非负矩阵。B 的主对角线以外的元素与 A 的主对角线以外的元素完全相同，因此，以 B 为邻接矩阵的图也是强连通图。由此可得 B 不可约。此外，$\mathrm{B}\mathbf{1}_n = (\rho \mathrm{I}_n - \mathrm{L})\mathbf{1}_n = \rho \mathbf{1}_n$。根据 Perron–Frobenius理论（见附录 A），$\rho$（B 的主导特征值）是一个单特征值，B 的左特征向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 可以选为满足 $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathrm{B} = \rho \boldsymbol{\gamma}^\top, \gamma_i > 0, \forall i = 1, \ldots, n$，且 $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{1}_n = 1$的唯一向量。由 $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathrm{B} = \rho \boldsymbol{\gamma}^\top$可得 $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathrm{L} = \mathbf{0}_n^\top$，即 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 L 对应于特征值 0 的左特征向量。

反过来，假设 $\mathcal{L}$ 只有一个满足条件的左特征向量 $\boldsymbol{\gamma}$ $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathcal{L} = \mathbf{0}_n^\top, \gamma_i > 0, \forall i = 1, \ldots, n$，并且 $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{1}_n = 1$ 但 $G$ 不是强连通的。由于 $G$ 不是强连通的，因此存在一种对 $G$ 的顶点编号方式，使得矩阵 $\mathcal{L}$ 可以表示为形式 (2.23)，其中$\mathcal{L}_{22}$ 是与包含出根的极大强连通分量对应的拉普拉斯矩阵。

由正向证明可知，存在 $\boldsymbol{\zeta}$，它是矩阵 $\mathcal{L}_{22}$ 中与特征值 0 对应的唯一左特征向量，其中 $\zeta_i > 0$, $\sum_i \zeta_i = 1$。注意到，当 $\boldsymbol{\gamma}' = [\mathbf{0}^\top, \boldsymbol{\zeta}^\top]^\top$ 时，$(\boldsymbol{\gamma}')^\top \mathcal{L} = \mathbf{0}_n^\top$,

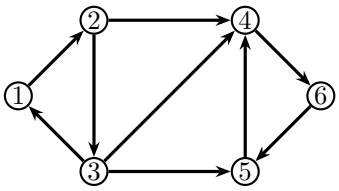



图 2.7：图 $G$ 对应于示例 2.6 中的拉普拉斯矩阵。

这与假设矛盾： $\gamma$ 是 $\mathcal{L}$ 对应特征值 0 的唯一特征向量。由此即可得证。

□

拉普拉斯矩阵的特征值 $\lambda_2$ 表明图是否具有出根，因此也称为代数连通度。

**示例 2.6.** 考虑图 $G$ ，其拉普拉斯矩阵 $\mathcal{L}$ 如下：

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

图 2.7 展示了与矩阵 $\mathcal{L}$对应的图。

根据格尔什戈林定理，$\mathcal{L}$ 的所有特征值都位于区域 $C = \bigcup_{i=1}^{6} C_i$内，其中

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_6 = \{s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C} |\ (\sigma - 1)^2 + \omega^2 = 1\},$$

$$C_4 = \{s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C} |\ (\sigma - 3)^2 + \omega^2 = 9\},$$

và

$$C_5 = \{s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C} |\ (\sigma - 2)^2 + \omega^2 = 4\}.$$

Vớ如图 2.8 所示，容易看出 $\Delta = 3$ 和 $C \equiv C_4$ 包含所有圆盘 $C_i$， $i = 1$，……，6。

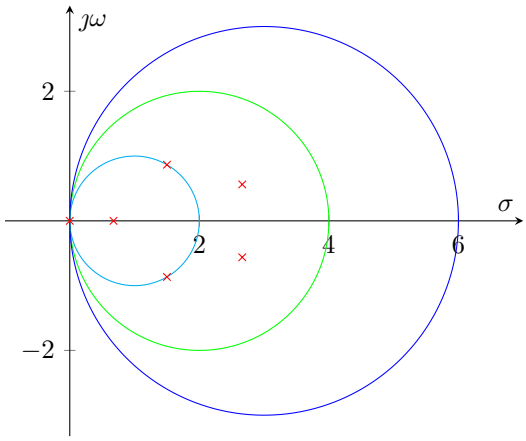


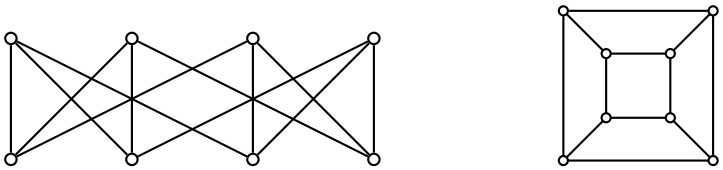

图2.8：格尔什戈林圆盘及示例 2.6 中拉普拉斯矩阵特征值位置的示意图。

## 2.3 注释和参考文献

本章简要介绍图论的内容，并将其用于后续章节对多智能体系统的分析。这也是多智能体系统教材 [164, 35] 的常见处理方式。本章的图论知识可见于大多数经典图论教材 [26, 103, 66]。第3章对一致性系统的分析将涉及拉普拉斯矩阵的谱性质。有关有向拉普拉斯矩阵和邻接矩阵谱性质的一些扩展结果，可参见 [115, 55]。关于图、电路理论（直流电导网络）与随机游走（random walk）之间的联系，可参见 [78]。图论中的一些拓展主题，例如匹配问题、图着色问题、拉姆齐理论、极值图论、超图（hypergraph）、随机图、矩阵加权图等，可参见文献 [32, 24, 100, 281]。

## 2.4 练习

**练习 2.1.** 图 $G_1$ 和 $G_2$ 在图 2.9 中是否同构？图 2.10 中的图 $H_1$ 和 $H_2$ 是否也同样如此？

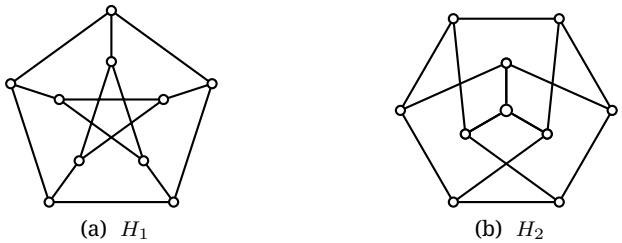


(a) $G_1$ (b) $G_2$

图 2.9：无向图 $G_1$ 和 $G_2$。

**练习 2.2.** 考察图 2.10 中的彼得森图。

i. 请确定该图的矩阵 $\mathbf{A}$、$\mathbf{H}$、$\boldsymbol{\mathcal{L}}$。ii. 使用 MATLAB，求拉普拉斯矩阵的特征值和特征向量。iii. 至少需要删除多少个顶点/边，才能破坏彼得森图的连通性？



(a) $H_1$ (b) $H_2$

图 2.10：无向图 $H_1$ 和 $H_2$。

**练习 2.3**。 证明一个由 $n$ 个顶点和 $k$ 个连通分量组成的简单图至多有 $\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$ 条边。

**练习 2.4.** 是否存在一个度序列为以下序列的图：(a) 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4；(b) 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4? 若该图存在，请画出所有满足该度序列的图。

**练习 2.5.** 用 $\tau(G)$ 表示图 $G$ 的生成树数量。设 $e$ 是 $G$ 的任意一条边，证明：

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \setminus e).$$

**练习 2.6.** 令 $\mathbf{e}_i$ 为单位向量，其中第 $i$ 个元素为 1，其余元素为 0。对于 $G$ 的每条边 $(v_i, v_j)$，定义向量 $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i$。证明：

i. 矩阵 $\mathbf{H}^\top$ 的每一行对应于一个向量 $\mathbf{e}_{ij} \in E$。ii. 拉普拉斯矩阵可以写成：$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \sum_{(v_i,v_j)\in E} \mathbf{e}_{ij}\mathbf{e}_{ij}^\top$。

**练习 2.7**。 对于每个矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，记 $\mathbf{A}_{ij}$ 为从 $\mathbf{A}$ 中删除第 $i$ 行和第 $j$ 列后得到的矩阵。$\mathbf{A}_{ij}$ 的代数余子式由 $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ij})$ 计算得到。矩阵 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵为 $\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = [C_{ji}]$，且满足 $\mathbf{A}\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}_n$。考虑连通图 $G = (V, E)$，其中 $|V| = n$ 以及其拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$，证明：

i. $\operatorname{adj}(\boldsymbol{\mathcal{L}}) = \tau(G)\mathbf{J}$，其中 $\mathbf{J} = \mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^\top$。 ii. $\tau(G) = \frac{1}{n}\prod_{i=2}^{n}\lambda_i(\boldsymbol{\mathcal{L}})$，其中 $\lambda_i, i = 2, \ldots, n$ 是 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的正特征值。

**练习 2.8.** 考虑矩阵 $\mathbf{B} = k\mathbf{I}_n + \mathbf{A}$，其中 $\mathbf{A}$ 是一个对称矩阵，半正定且其特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$。

i. 证明矩阵 $\mathbf{B}$ 的特征值为 $k + \lambda_1, \ldots, k + \lambda_n$。

ii. 求完全图 $K_n$ 对应的拉普拉斯矩阵的特征值。

**练习 2.9** (反向图)。 [35] 有向图 $G$ 的反向图是一个有向图，其中 $G$ 的每条有向边都反向。$G$ 的底层无向图是将 $G$ 的每条（有向）边替换为相应的无向边后得到的图。以下说法正确还是错误?

i. 有向图 $G$ 是强连通的，当且仅当它的反向图是强连通的。ii. 有向图包含一棵出树，当且仅当它的反向图包含一棵出树。iii. 如果 $G$ 的底层无向图是连通的，那么 $G$ 或反向图 $G$必定包含一棵出树。iv. 有向图 $G$ 是平衡的，当且仅当它的反向图是平衡的。

**练习 2.10** （Cheeger常数）。 在本练习中，我们考察连通无向图的 Cheeger常数的一些性质。

i. 求路径图 $P_6$ 和循环图 $C_6$的 Cheeger常数。ii. 求路径图 $P_n$的 Cheeger常数。评论当 $n \to +\infty$ 时， $h(P_n)$ 的值。

iii. 求循环图 $C_n$的 Cheeger常数。评论当 $n \to +$时， $h(C_n)$的值 $\infty$.

iii. 求完全图 $K_n$ 的 Cheeger常数。讨论当 $n \to +\infty$ 时 $h(K_n)$ 的取值。 .

**练习 练习 2.11.** 证明一个由 $n$ 个顶点组成且边数多于 $_{(n-1)(n-2)\ 2}$ 的图是连通的 .

**练习 2.12.** 证明一个由 $n$ 个顶点组成且边数多于 $n-1$ 的图必定包含一个环。

**练习 2.13** （欧拉图）**.** [236] 如果存在一条包含图 $G$ 的所有边的回路，则称图 $G$ 为欧拉图。证明欧拉图不含奇度顶点。反过来，证明没有奇度顶点的连通图 $G$ 是一个欧拉回路。

**练习 2.14.** 求矩阵 $\mathbf{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的特征值，分别对应于：

i. 由 $n$ 个顶点组成的无向循环图。ii. 由 $n$ 个顶点组成的有向循环图。iii. $K_n$ 阶无向正则图。iv. $S_n$阶星图。v. $W_n$阶轮图。

**练习 2.15.** 完成以下要求：

i. 画出 $C_3$ 阶循环图和 $S_4$阶星图。ii. 写出图 $C_3$ 和 $S_4$对应的邻接矩阵 $\mathbf{A}(C_3)$和$\mathbf{A}(S_4)$。iii. 计算$\mathbf{A} = \mathbf{A}(C_3) \otimes \mathbf{A}(S_4)$，并画出邻接矩阵为$\mathbf{A}$ 的图。[7]

**练习 2.16.** 考虑邻接矩阵为$\mathbf{A} \in \mathrm{R}^{n\times n}$的有向图 $G$ 。证明矩阵$\mathbf{B} = \mathbf{A}^2$ 的元素$[b_{ij}]$ 分别对应于 $G$ 中从 $i$ 到 $j$长度为 2 的路径数。推广上述结果，证明：如果存在 $k \in \mathrm{N}+$，使得矩阵$\sum_{i=1}^{k}\mathbf{A}^i$ 有一列的元素全为正数，那么该图具有出根。此外，证明该图是强连通的，当且仅当存在某个数 $k \in \mathrm{N}+$，使得矩阵$\sum_{i=1}^{k}\mathbf{A}^i$ 的所有元素都为正数。

**习题 2.17**。 证明，对于关联矩阵为 $\mathbf{H}$ 、拉普拉斯矩阵为$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的无向图，有 $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \mathbf{H}^\top\mathbf{H}$。对于加权图，上述结果将如何变化?

**习题 2.18** （补图）。 图 $G = (V, E)$ 的补图记为 $\bar{G} = (V, \bar{E})$，其中 $(i, j) \in \bar{E}$ 当且仅当 $(i, j) \notin E$。证明：

i. $\boldsymbol{\mathcal{L}}(G) + \boldsymbol{\mathcal{L}}(\bar{G}) = n\mathbf{I}_n - \mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^\top$ và với $2 \le j \le n$,

$$\lambda_j(\bar{G}) = n - \lambda_{n+2-j}(G).$$

ii. $G$ 和 $\bar{G}$ 不能同时是不连通的。

**习题 2.20**。 设 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 是具有 $n$ 个顶点的有向图 $G$ 的拉普拉斯矩阵。证明：不存在位于 $\mathrm{im}(\mathbf{1}_n)$ 之外的 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的右特征向量$\mathbf{v}$ ，使得 $\mathbf{v}$ 的所有元素均为正。

[7] $\otimes$ 表示克罗内克积（定义见附录 A）。

**习题 2.20**。 [172] 考虑一个连通无向图 $G$，其拉普拉斯矩阵为 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$。向图的顶点$i$ 注入电流，并从顶点 $j$ 流出电流，电流强度为 $I$，图中各顶点对应的电压为 $v_i,\ i=1,\ \ldots\ldots,\ n$。证明这些电压取遍介于 $v_i$ 和 $v_j$ 之间的所有值。（换言之，证明 $v_i \geq v_k \geq v_j,\ \forall k \in V \setminus \{i,\ j\}$。）

# 第二部分

# 一致性系统

# 第3章

# 一致性算法

共识问题是多智能体系统控制中最基本的问题之一，其中智能体就一个（或若干个）所关注的状态变量的取值达成一致 [18]。在本文献中，一致性算法（或称协议）是基于通过网络接收和交换信息的更新律，使智能体所关注的变量渐近趋于一个共同值——称为一致性值 [121, 192, 229]。所关注的变量可以是会合时间、编队质心、智能体的方向角、某一区域的温度等.....

对一致性系统的研究揭示了系统收敛到共同值的能力与智能体之间的信息交换结构密切相关。我们将考察智能体所关注的变量按照连续或不连续的一阶动力学模型变化时的一致性问题。

## 3.1 一阶连续一致性系统

### 3.1.1 多智能体系统中的一致性问题

考虑一个由 $n$ 个智能体组成的系统，编号从 1 到 $n$。假设在时刻 $t \geq 0$，每个智能体都有一个状态变量 $x_i(t) \in \mathrm{R}$，并且可以测量来自若干邻近智能体的相对变量 $x_{ij}(t) = x_j(t) - x_i(t)$。智能体根据相对变量的加权和更新自身状态变量。为了描述系统中智能体之间的交互，我们使用一个带权有向图 $G = (V, E, A)$。图中的每个顶点代表一个智能体，而每条边 $(j, i)$ 描述智能体 $i$ 可以测量相对变量 $x_{ij}$。用 $i$ 的邻近智能体集合表示为 $N_i = \{j = 1,\ldots, n | (j, i) \in E\}$，每个智能体根据一致性算法（也称为一致性协议）更新自身状态变量，其方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \sum_{j \in N_i} a_{ij} x_{ij}(t) \\ &= -\sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_i(t) - x_j(t)),\ \forall i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

框图展示了相对于智能体 $i$ 的一致性算法，如图3.1所示。

用 $\mathbf{x}(t) = [x_1, \ldots, x_n]^\top \in \mathrm{R}^n$表示由 $n$ 个智能体组成的系统的状态变量向量，则整个系统的方程可表示如下

$$\dot{\mathbf{x}} = -\boldsymbol{\mathcal{L}}(G)\mathbf{x}(t), \tag{3.2}$$

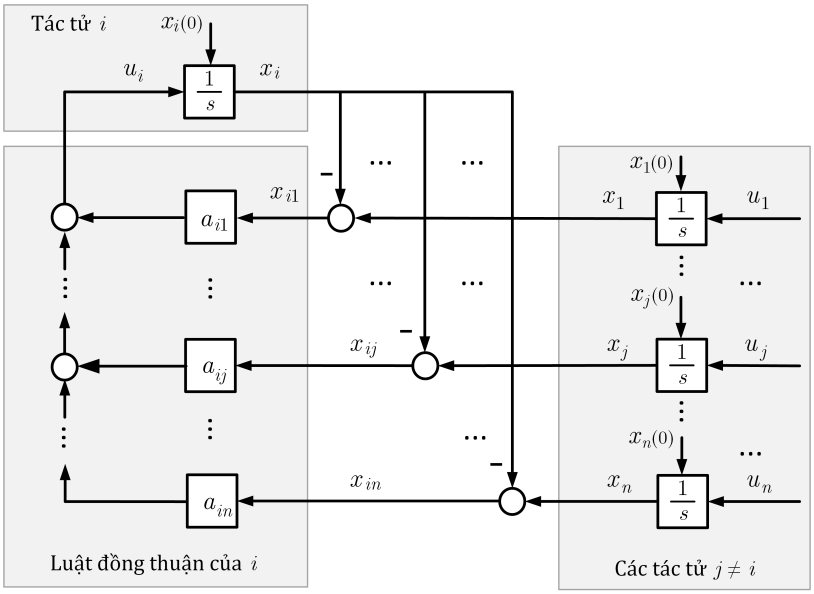



图3.1：从智能体 $i$ 的视角看一致性算法的框图。

其中 $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}$ 是智能体间交互图 $G$ 的拉普拉斯矩阵（出度）。在一些文献中，人们也将 $G$ 称为系统的信息流[1] 。

对于系统 (3.1)，若 $x_i = x_j$，则称两个智能体 $i$ 和 $j$ 彼此达成一致。若 $x_i = x_j,\ \forall i,\ j = 1, \ldots, n$，则这 $n$ 个智能体处于一致状态。将一致性集合定义为

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \ x_1 = x_2 = \ldots = x_n\},$$

则 $\mathcal{A}$ 是由向量 $\mathbf{1}_n$ 张成的 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间。显然，若向量 $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$，则 $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{1}_n$，其中 $\alpha \in$ 属于 $\mathbf{R}$。

在接下来的小节中，我们将分析在图 $G$ 的若干不同假设下，一致性系统 (3.2) 随时间的变化过程。

### 3.1.2 一般情况

考虑图 $G = (V,\ E,\ A)$，系统 (3.2) 渐近趋于一致性集合的一般条件是 $G$ 包含一棵出树。该结果见以下定理：

**定理3.1**。 对于包含一棵出树的图 $G$，系统 (3.2) 在初始条件 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ 下的状态轨迹满足

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{x}(t) = (\mathbf{1}_n \boldsymbol{\gamma}^\top)\mathbf{x}_0 = \mathbf{1}_n \Big( \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i(0) \Big),$$

其中 $\mathbf{1}_n$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 分别是 $\mathcal{L}$ 对应于特征值 0 的右特征向量和左特征向量，且已归一化使得 $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{1}_n = 1$。换言之，当且仅当 $G$ 包含一棵出树时，$\mathbf{x}(t) \to \mathcal{A},\ \forall \mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$。

[1]信息流

证明。由于图有一个根节点，矩阵 $\mathcal{L}$ 在 0 处有一个单特征值，而 $\mathcal{L}$ 的其他特征值实部非负。因此，$\mathcal{L}$ 可以作如下 Jordan 标准形分解：

$$\mathcal{L} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1} \tag{3.3}$$

$$= \mathbf{P}\begin{bmatrix} \mathbf{J}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{J}(\lambda_r) \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}, \tag{3.4}$$

其中 $\mathrm{J}_i(\lambda_i)$ 是与特征值 $\lambda_i$ 对应的 Jordan块矩阵，并假设 L 的谱分解中有 $r$ 个不同的特征值。注意，由于拉普拉斯矩阵只有一个特征值 0，因此 $\mathrm{J}_1(\lambda_1) = 0$，并令 $p_i$ 表示特征值 $\lambda_i$ 的代数重数，则 $n = \sum_{i=1}^{r} p_i$（关于矩阵的若尔当形，请参见附录 A）。矩阵 $\mathrm{P} = [\mathrm{p}1, \ldots, \mathrm{p}_n]$ 的第一列是 $\mathrm{p}_1 = \mathbf{1}_n$，矩阵 $\mathrm{P}^{-1} = [\mathrm{q}1, \ldots, \mathrm{q}_n]^\top$ 中的 $\mathrm{q}_1^\top$是 L 对应于特征值 $\lambda_1 = 0$的左特征向量。由于 $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P} = \mathrm{I}_n$，我们有 $\mathrm{q}_1^\top \mathbf{1}_n = 1$，因此令 $\boldsymbol{\gamma} = \mathrm{q}_1$。注意，矩阵 P 的元素可以是复数。

根据线性系统理论，一致性系统（3.2）的状态轨迹满足

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbf{x}(t) = \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\mathcal{L}t}\mathbf{x}_0$$

$$= \mathbf{P}\left(\lim_{t\to+\infty}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathbf{J}(\lambda_2)t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{e}^{-\mathbf{J}(\lambda_r)t} \end{bmatrix}\right)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0.$$

由于$\mathcal{L}$ 的非零特征值均具有正实部，

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\mathbf{J}(\lambda_i)t} = 0,\ \forall i = 2, \ldots, r.$$

因此，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{P}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0 \\ &= (\mathbf{p}_1\mathbf{q}_1^\top)\mathbf{x}_0 \\ &= (\mathbf{1}_n\boldsymbol{\gamma}^\top)\mathbf{x}_0 \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i x_i(0)\Big)\mathbf{1}_n,\end{aligned}$$

即 $x_i(t)$ 渐近达到一致性状态 $x^* = \sum_{i=1}^{n}\gamma_i x_i(0)$，当 $t \to +\infty$ 时。 □

$x^* = \sum_{i=1}^{n}\gamma_i x_i(0)$ 的值称为一致性值。注意，由于 $\boldsymbol{\gamma}^\top\mathcal{L} = \mathbf{0}_n^\top$，我们有

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\gamma}^\top\mathbf{x}(t)) = \boldsymbol{\gamma}^\top\frac{d}{dt}(\mathbf{x}(t)) = -\boldsymbol{\gamma}^\top\mathcal{L}\mathbf{x}(t) = 0. \tag{3.5}$$

由上面的等式，我们得到以下定理。

**定理 3.2.** 加权算术平均值

$$\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{x}(0) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i(0) = x^*$$

在一致性协议 (3.2) 下保持不变。

还要指出，在对$\mathbf{x}(t)$进行渐近分析时，与Jordan块矩阵 $\mathrm{e}^{-\mathbf{J}(\lambda_k)t}$ 相对应的分量以指数速率收敛至 0。$\mathrm{e}^{-\mathbf{J}(\lambda_k)t}$ 的收敛速度取决于 $\mathrm{Re}(\lambda_k) > 0$的大小，因此，$\mathbf{x}(t) \to \mathcal{A}$ 的过程主要取决于 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的特征值 $\lambda_2$ 。因此， $\lambda_2$除了是衡量图连通性的定性指标外，也是衡量一致性速度的定量指标。根据图的信息和拉普拉斯矩阵的权重，可以估算 $\lambda_2$ 的一些上界和下界。由于这些结果由 Fiedler [92], 确定，一些文献将 $\lambda_2$ 称为 Fiedler 特征值。

**一致性算法概述**

一致性是分布式计算领域中的基础问题，自20世纪70年代左右开始受到研究。一致性算法旨在通过能够在通信网络出现故障时（消息丢失、消息内容出错、消息读取和处理不同步，或消息被某些节点故意篡改）仍能运行的消息传输协议，统一各智能体（分布式数据库）中的决策变量 [156]。区块链技术是一种一致性协议。

描述物理变量一致性过程的数学模型已出现在不同领域：DeGroot模型（1974年）用于研究一群人通过讨论就观点达成一致的机制 [65], ；Vicsek 模型（1995年）解释自然界中的群集机制，并结合 Ali Jadbabaie（2003年）的数学分析 [121], ；Kuramoto模型（1975年）则将昆虫、机械振荡、交流发电机等众多现象中的自同步现象进行了概括。多智能体系统中的连续一致性算法由 Richard Murray 在加州理工学院 CA 的研究实验室提出 [89, 195]。Olfati-Saber 在 Richard Murray 的研究小组进行博士后研究期间，发表了一系列与一致性算法及其在传感器网络和自动驾驶车辆中的应用相关的论文 [195, 192]。目前，Olfati-Saber 致力于人工智能系统研究。多智能体系统控制中的一致性算法，其区别性因素在于一致性算法中出现了动力学。系统中的一致性变量可以是物理变量（位置、角度、频率、相位角等），而一致性过程则可以依据稳定性理论进行考察。 [195] 是主题为一致性系统的论文中被引用次数最多的论文之一。

目前，Murray 关注控制在网络化系统和生物工程中的应用。Murray 倡导结合计算机科学与自动控制这两个领域的问题解决方法。他与 Åström 合编了《控制》教材 [16] ，以满足从事计算机科学领域读者的需求。

Murray 的一个特别之处在于，自从他开始担任加州理工学院动力学与控制学教授以来，始终提出一些尚待解决的重要问题。自2003年起，控制各领域的问题与挑战由一个工程技术委员会遴选，并以技术报告的形式发布 [171]。目前，这份报告是控制系统学会（IEEE控制系统学会）面向2030年的开放式发展路线图，展望控制与人工智能将日益紧密地结合，以解决复杂问题

(https://ieeecss.org/control-societal-scale-challenges-road-map-2030)。

### 3.1.3 一些特殊情况

在许多应用中，特别关注这样一类一致性算法：其一致性值为 $x_i(0)$、 $i = 1,..,n$ 的算术平均值。例如，当我们有 $n$ 个传感器监测某个区域的温度时，各传感器交换测量值，并希望求出代表整个区域温度的平均温度。这些算法统称为算术平均共识算法[2]。

对于一致性算法（3.2），一致性值为算术平均值的充要条件取决于图 $G$。首先，考虑 $G$ 为一个无向、连通图。此时，由于$\mathcal{L} = \mathcal{L}^\top$ 且 $\mathcal{L}\mathbf{1}_n = \mathbf{0}_n$，我们也有 $\mathbf{1}_n^\top\mathcal{L} = \mathbf{0}_n^\top$。与方程（3.5）进行比较，可推得 $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{1}_n/n$、$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\mathcal{L}t} = \frac{1}{n}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^\top$，并且一致性值由 $\mathbf{1}_n^\top\mathbf{x}_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i(0)$ 确定，即所有变量 $x_i(0)$ $\forall i \in \mathcal{I}$ 的算术平均值。

由上述观测可知，除了一致性条件要求 $G$ 包含一棵出树外，要使一致性值为算术平均值，拉普拉斯矩阵还必须将 $\mathbf{1}_n^\top$ 作为对应于特征值 0 的一个左特征向量。这等价于 $l_{ii} = \sum_{i=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij}$，也就是 $\deg^+(v_i) = \deg^-(v_i)$ $\forall i = 1$，...，$n$。若一个有向图在所有顶点处的入权重之和等于出权重之和，则称其为（权重）平衡图。我们有如下定理：

**Định 定理 3.3**。算法 (3.2) 是一个算术平均共识算法，当且仅当图 $G$ 是弱连通且平衡的。

图$G$ 是弱

最后，考虑图 $G$ 是强连通但不平衡的情形。由于 $G$ 强连通， $G$ 的每个顶点都是一个入根。由于满足一致性条件，系统趋于一致于 $x^* = \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i(0)$。根据定理 2.4， $\boldsymbol{\gamma}$具有元素 $\gamma_i > 0$、$\forall i = 1$、...、 $n$，以及 $\sum_{i=1}^n \gamma_i = 1$。由此可知，当 $G$ 强连通时，系统 (3.2) 的一致性值是各个 $x_i(0)$ $i = 1$、...、 $n$的加权平均。

**示例 3.1.** 在若干不同图上的一致性算法仿真。状态变量的初始值随机选取为 $-5 \le x_i(0) \le 5$。对于一致性协议 (3.1)， $x_i(t)$ 在三种图上都渐近趋于一致性空间。一致性速度取决于代数连通度$\lambda_2(\mathcal{L})$，仿真结果如图 3.2 (b)、(d)、(f) 所示。

## 3.2 二阶连续一致性系统

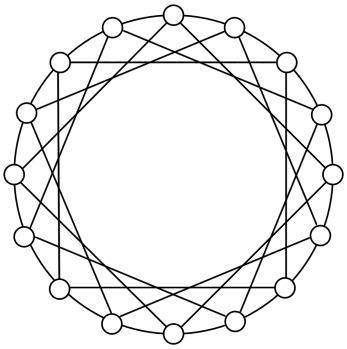
本小节考虑由智能体组成的系统，其模型为二阶积分环节：

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= y_i, \\ \dot{y}_i &= u_i,\ i = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{3.6}$$

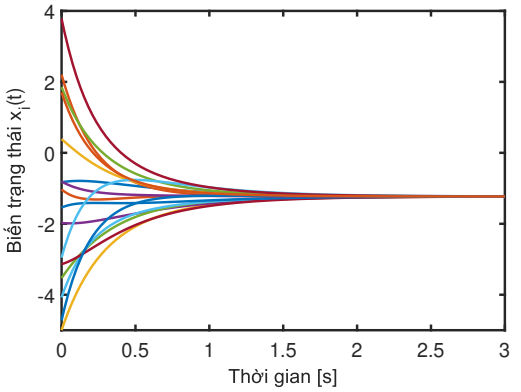
其中 $x_i \in$R、 $y_i \in$ R 和 $u_i \in$ R。[3] 为系统 (3.6) 提出的一致性协议为：

$$u_i = -\sum_{j\in N_i} \Big( (x_i - x_j) + \beta(y_i - y_j) \Big),\ i = 1, \dots, n, \tag{3.7}$$

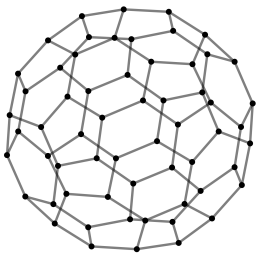
[2]平均一致性算法 [3]通常，变量 $x_i$， $y_i$， $u_i$ 描述质点在空间中的位置、速度和加速度。



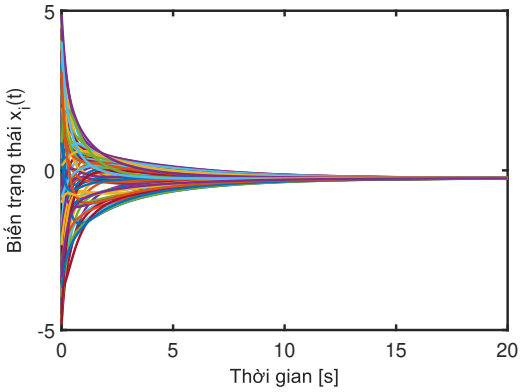
(a) $G_1$



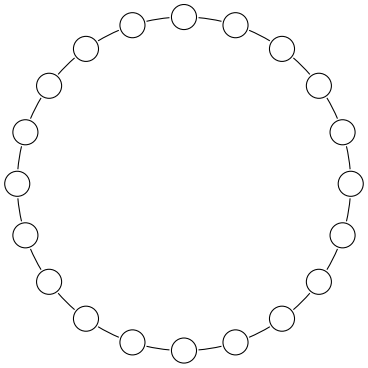

(b) $x_i(t)$



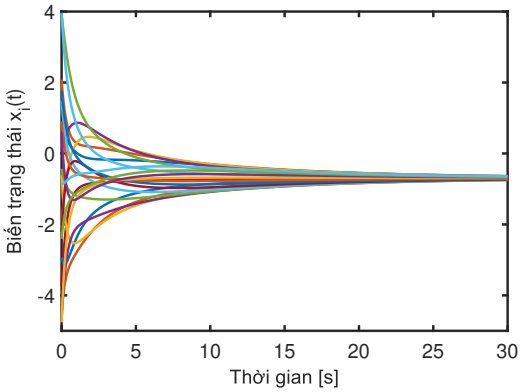
(c) $G_2$




(d) $x_i(t)$



(e) $G_3$




(f) $x_i(t)$

图 3.2：在三种不同的图上仿真一致性算法： $G_1$ 是一个包含 16 个顶点的正则图，每个顶点有 3 个邻接顶点； $G_2$ 是一个包含 60 个顶点的巴基球图； $G_3$ 是一个包含 20 个顶点的环。

其中，$\beta > 0$ 是一个正常数。一致性算法 (3.7) 是分散式的，因为每个智能体只需获取若干邻居智能体的信息。我们将证明，在控制律 (3.7) 下，当 $t \to +\infty$ 时，系统渐近收敛到一致性集合，以 $|x_i - x_j| \to 0$ 和 $|y_i - y_j| \to 0$表示。注意，如果 $x_i$ 和 $y_i$ 分别表示第 $i$ 个智能体的位置和速度，那么 (3.7) 表示该智能体的加速度。

令 $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^\top$ 和 $\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_n]^\top$。将控制律 (3.7) 应用于系统后，可将 (3.6) 重写为如下矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n\times n} & \mathbf{I}_n \\ -\boldsymbol{\mathcal{L}} & -\beta\boldsymbol{\mathcal{L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

注意，对于具有以下形式的分块矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{22} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$，有 $\det(\mathbf{M}) = \det(\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12})$，前提是两个矩阵 $\mathbf{A}_{11}$ 和 $\mathbf{A}_{21}$ 可交换（即 $\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}$）[229]。应用上述公式，$\mathbf{M}$ 的特征值是以下特征方程的解：

$$\det(s\mathbf{I}_{2n} - \mathbf{M}) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda\mathbf{I}_n & -\mathbf{I}_n \\ \boldsymbol{\mathcal{L}} & s\mathbf{I}_n + \beta\boldsymbol{\mathcal{L}} \end{bmatrix}\right) = \det\big(s^2\mathbf{I}_n + (1+\beta s)\boldsymbol{\mathcal{L}}\big) \tag{3.9}$$

注意，$\det(s\mathbf{I}_n + \boldsymbol{\mathcal{L}}) = \prod_{i=1}^{n}(s + \lambda_i)$，其中 $\lambda_i$ 表示 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$的第 $i$ 个特征值。因此，与方程 (3.9) 对比，可得：

$$\det\big(s^2\mathbf{I}_n + (1+\beta s)\boldsymbol{\mathcal{L}}\big) = \prod_{i=1}^{n}(s^2 + (1+\beta s)\lambda_i). \tag{3.10}$$

方程 (3.10) 表明，$\mathbf{M}$ 的特征值均可由方程$s^2 + \lambda_i\beta s + \lambda_i = 0$求得。该方程的解为：

$$s_{i\pm} = \frac{-\beta\lambda_i \pm \sqrt{\beta^2\lambda_i^2 - 4\lambda_i}}{2}, \tag{3.11}$$

其中，$s_{i+}$ 和 $s_{i-}$ 是与 $\lambda_i$相对应的$\mathbf{M}$ 的特征值。

由方程（3.11）容易看出，对于$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的每个特征值 $\lambda_i = 0$，$\mathbf{M}$ 都有两个相应的特征值为 0。假设图 $G$ 是连通的，则$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 只有一个特征值为 0，其余特征值的实部均为正（定理 2.4）。由此可知，$\mathbf{M}$具有二重特征值 0，记为 $s_{1+} = s_{1-} = 0$。下面的定理给出了系统实现一致性的充要条件：

**定理 3.4**。系统（3.8）渐近趋于集合 $\mathrm{im}(\mathbf{1}_n) \times \mathrm{im}(\mathbf{1}_n)$，当且仅当矩阵$\mathbf{M}$ 恰好有两个特征值为 0，且根据（3.11）计算得到的其余特征值均具有负实部。此时，当 $t \to +\infty$时，$\mathbf{x} \to \mathbf{1}_n\boldsymbol{\gamma}^\top\mathbf{x}(0) + t\mathbf{1}_n\boldsymbol{\gamma}^\top\mathbf{y}(0)$，其中 $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{R}^n$ 是$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 中与特征值 0 相对应的一个右特征向量（其元素均为非负），且 $\boldsymbol{\gamma}^\top\mathbf{1}_n = 1$。

证明。（充分条件）首先，我们证明：在$\mathbf{M}$ 恰好有两个等于 0 的特征值的情形下，$\mathbf{M}$ 的特征值 0 的几何重数为 1。设$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_a^\top, \mathbf{q}_b^\top]^\top$ 是$\mathbf{M}$ 对应于特征值 0 的一个特征向量（$\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b \in \mathbf{R}^n$），则

$$\mathbf{M}\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n\times n} & \mathbf{I}_n \\ -\boldsymbol{\mathcal{L}} & -\beta\boldsymbol{\mathcal{L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n \end{bmatrix}, \tag{3.12}$$

也就是说，必须有$\mathbf{q}_b = \mathbf{0}_n$与$\mathcal{L}\mathbf{q}_a = \mathbf{0}_n$。这表明$\mathbf{q}_a$是$\mathcal{L}$对应于特征值0的一个特征向量。由于$\mathbf{M}$只有两个等于0的特征值，$\mathcal{L}$只有唯一一个等于0的特征值。因此，核($\mathcal{L}$)仅由唯一一个线性无关向量生成。由此推出，核(M)也仅由唯一向量$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_a^\top, \mathbf{0}_n]^\top$生成。这等价于$\mathbf{M}$的特征值0的几何重数为1。

注意，我们可以将$\mathbf{M}$写成如下形式：

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1} \\ &= [\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{2n}] \begin{bmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0}_{1\times(2n-2)} \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{1\times(2n-2)} \\ \mathbf{0}_{(2n-2)\times 1} & \mathbf{0}_{(2n-2)\times 1} & \mathbf{J}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}_{2n}^\top \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

其中$\mathbf{J}$是$\mathbf{M}$的若尔当形，$\mathbf{w}_j \in \mathrm{R}^{2n}$, $j = 1, \ldots, 2n$,是矩阵$\mathbf{M}$的右特征向量和广义特征向量，$\boldsymbol{\eta}_j, i = 1, \ldots, 2n$,是$\mathbf{M}$的左特征向量和广义特征向量，而$\mathbf{J}'$是具有块对角形式（呈上三角形）的Jordan矩阵，对应于非零特征值$s_{i+}$和$s_{i-}$, $i = 2, \ldots, n$。

不失一般性，我们可以选择$\mathbf{w}_1 = [\mathbf{1}_n^\top, \mathbf{0}_n^\top]^\top$和$\mathbf{w}_2 = [\mathbf{0}_n^\top, \mathbf{1}_n^\top]^\top$，使得$\mathcal{L}\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}_n$和$\mathcal{L}\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1$。此时可以验证，$\boldsymbol{\eta}_1 = [\boldsymbol{\gamma}^\top, \mathbf{0}_n^\top]^\top$和$\boldsymbol{\eta}_2 = [\mathbf{0}_n^\top, \boldsymbol{\gamma}^\top]^\top$是$\mathbf{M}$对应于特征值0的广义特征向量和特征向量。注意，$\boldsymbol{\eta}_1^\top \mathbf{w}_1 = 1$和$\boldsymbol{\eta}_2^\top \mathbf{w}_2 = 1$。由于$\mathbf{M}$的特征值$s_{i\pm}$均具有负实部，因此

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{\mathbf{M}t} &= \mathbf{P} \lim_{t\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{\mathbf{J}t}\right) \mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P} \lim_{t\to+\infty} \left( \begin{bmatrix} 1 & t & \mathbf{0}_{1\times(2n-2)} \\ 0 & 1 & \mathbf{0}_{1\times(2n-2)} \\ \mathbf{0}_{(2n-2)\times 1} & \mathbf{0}_{(2n-2)\times 1} & \mathrm{e}^{\mathbf{J}'t} \end{bmatrix} \right) \mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{w}_1 \boldsymbol{\eta}_1^\top + (t\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)\boldsymbol{\eta}_2^\top \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n \boldsymbol{\gamma}^\top & t\mathbf{1}_n \boldsymbol{\gamma}^\top \\ \mathbf{0}_{n\times n} & \mathbf{1}_n \boldsymbol{\gamma}^\top \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

因此，当$t \to +\infty$时，$\mathbf{x}(t) \to \mathbf{1}_n \boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{x}(0) + t\mathbf{1}_n \boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{y}(0)$，且$\mathbf{y}(t) \to \mathbf{1}_n \boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{y}(0)$。换言之，我们有$|x_i(t) - x_j(t)| \to 0$且$|y_i(t) - y_j(0)| \to 0$当$t \to +\infty$时，即系统达到一致性。

（必要条件）假设充分条件“M有两个特征值为0，且其余特征值的实部均为负”不成立。由于M至少有两个特征值0，因此，当M有多于两个特征值为0，或M至少有一个实部为正的特征值时，该充分条件不成立。不失一般性，假设$\iota_1 = \iota_2 = 0$且Re($\iota_3$)$\geq 0$，其中$\iota_k, k = 1, \ldots, 2n$表示M的第$k$个特征值。设J $= [J_{kl}]$为M的Jordan矩阵，则$J_{kk} = \iota_k, k = 1, \ldots, 2n$。于是有lim$_{t\to+\infty}$ e$^{J_{kk}t} \neq 0, k = 1, 2, 3$，即lim$_{t\to+\infty}$e$^{\mathbf{J}t}$的前三列线性无关。因此$\mathbf{1}_n$rank(lim$_{t\to+\infty}$e$^{\mathbf{J}t}$) $\geq 3$。由于系统渐近趋于一致性集合，当且仅当lim$_{t\to+\infty}$ e$^{\mathbf{J}t}$ $\begin{bmatrix}$x(0) y(0)$\end{bmatrix}$ $\to$ $\begin{bmatrix}$$\mathbf{1}_n$p(t)$^\top$x(0) q(t)$^\top$ y(0)$\end{bmatrix}$，其中p, q 2 R$^n$，rank(lim$_{t\to+\infty}$ e$^{\mathbf{J}t}$)$\leq 2$，由此得到矛盾。

□

根据定理3.4，如果初始时智能体静止（$y_i(0) = 0, \ \forall i = 1, \ \ldots, \ n$），那么当$t \to +\infty$时，有$x_i(t) \to \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i(0)$，且$y_i(t) \to 0, \ \forall i = 1, \ \ldots, \ n$。

Nếu 例如，其他智能体的初始速度不为零，而我们希望系统实现一致性

关于在某一点的位置，则可以使用以下一致性协议：

$$u_i = -\alpha y_i - \sum_{j\in N_i}\Big((x_i - x_j) + \beta\big(y_i - y_j\big)\Big),\ i = 1,\dots,n, \tag{3.15}$$

其中 $\alpha > 0$。

应用一致性协议 (3.15) 后，可以将系统表示为如下矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}\\ \dot{\mathbf{y}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{0}_{n\times n} & \mathbf{I}_n\\ -\boldsymbol{\mathcal{L}} & -\alpha\mathbf{I}_n - \beta\boldsymbol{\mathcal{L}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix} = \mathbf{N}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

$\mathbf{N}$ 的特征值满足

$$\begin{aligned}\det(s\mathbf{I}_{2n} - \mathbf{N}) &= \det\left(\begin{bmatrix}s\mathbf{I}_n & -\mathbf{I}_n\\ \boldsymbol{\mathcal{L}} & (s+\alpha)\mathbf{I}_n + \beta\boldsymbol{\mathcal{L}}\end{bmatrix}\right)\\ &= \det\big((s^2\mathbf{I}_n + \alpha s)\mathbf{I}_n + (1+\beta s)\boldsymbol{\mathcal{L}}\big)\end{aligned} \tag{3.17}$$

方程 (3.17) 的解可以通过求解方程 $s^2+\alpha s+\lambda_i(1+\beta s) =0$ 得到，其中 $i = 1,\dots,n$。该方程的解为：

$$s_{i\pm} = \frac{-\beta\lambda_i - \alpha \pm \sqrt{(\beta\lambda_i+\alpha)^2 - 4\lambda_i}}{2}, \tag{3.18}$$

其中 $s_{i+}$ 和 $s_{i-}$ 是 $\mathbf{N}$ 对应于 $\lambda_i$的特征值。与 $\mathbf{M}$不同，$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 在 0 处的每个特征值都对应于矩阵 $\mathbf{N}$在 0 处的一个特征值。假设 $\lambda_1 = 0$，则有 $s_{1+} = 0$ 和 $s_{1-} = -\alpha$。

**定理 3.5.** 对于一致性协议 (3.15)，

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}(t) \to \mathbf{1}_n(\boldsymbol{\gamma}^\top\mathbf{x}(0)) + \frac{1}{\alpha}\mathbf{1}_n(\boldsymbol{\gamma}^\top\mathbf{y}(0)),\\ &\mathbf{y}(t) \to \mathbf{0}_n,\end{aligned}$$

当且仅当 $t \to +\infty$ $\mathbf{N}$ 有一个单特征值 0，且$\mathbf{N}$ 的所有其他特征值的实部均为负。

证明。（充分条件）。此证明与定理 3.4 的充分条件证明类似，唯一不同的是，对于矩阵$\mathbf{N}$，有 $\boldsymbol{\eta}_1 = [\boldsymbol{\gamma}_1^\top,(1/\alpha)\boldsymbol{\gamma}_1^\top]^\top$，$\mathbf{w}_1 = [\mathbf{1}_n^\top, \mathbf{0}_n^\top]^\top$，并且

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix}0 & \mathbf{0}_{2n-1}^\top\\ \mathbf{0}_{2n-1} & \mathbf{J}'\end{bmatrix}$$

其中$\mathbf{J}'$是$\mathbf{N}$ 的 Jordan 矩阵$\mathbf{J}$ 中对应于$(2n-1)$实部为负的特征值的分量。

（必要条件）。如果$\mathbf{x}(t) \to \mathbf{1}_n\boldsymbol{\gamma}^\top\mathbf{x}(0) + \frac{1}{\alpha}\mathbf{1}_n\boldsymbol{\gamma}^\top\mathbf{y}(0)$，且$\mathbf{y}(t) \to \mathbf{0}_n$，当 $t \to +\infty$ 时，我们知道 $\lim_{t\to+\infty}\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1}$ 的秩为 1。这意味着 $\lim_{t\to+\infty} e^{\mathbf{J}t}$ 的秩也为 1。如果充分条件不成立，与定理 3.4 的必要条件证明类似，我们可以看到 $\lim_{t\to+\infty}e^{\mathbf{J}t}$ 的秩至少为 2，这是矛盾的。

□

**例 3.2**。考虑由四个二阶积分器智能体组成的系统，它们通过一个有向循环图（图 3.3）进行交互，其一致性协议为：

$$\begin{aligned}&\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{v}_i,\\ &\dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{u}_i = -k_1\sum_{j\in N_i}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) - k_2\mathbf{v}_i,\ i = 1,2,3,4,\end{aligned} \tag{3.19}$$

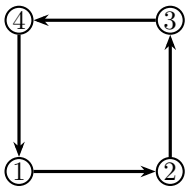
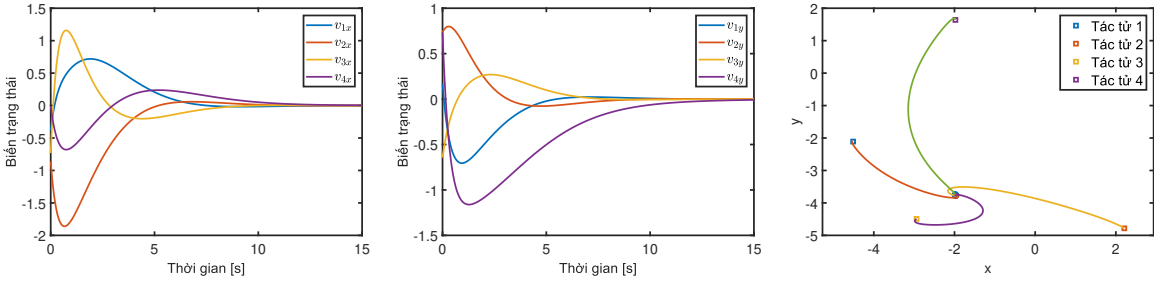



图 3.3：有向循环图 $C_4$ 描述了四个智能体之间的信息流。

其中 $k_1 = 1$、$k_2 = 3$、$\mathbf{p}_i$ 和 $\mathbf{v}_i \in \mathrm{R}^2$。

仿真结果如图 3.4 所示。显然，$\mathbf{v}_i \to \mathbf{0}_2$ 和智能体的位置 $\mathbf{p}_i$ 收敛到平面上的同一个点（一致状态）。由于一阶和二阶动力学模型可以简单地描述机器人在空间中（二维或三维）的运动，因此一致性算法是解决会合问题（rendezvous problem）[149]的一种简单方法。在第5章中，一种一致性算法 (3.19) 的变体将用于基于相对位置的编队控制。




(a) 沿 $x$ 轴的速度　(b) 沿 $y$ 轴的速度　(c) 4 个智能体的轨迹

图 3.4：采用一致性协议 (3.19) 的四智能体系统仿真。

## 3.3 由具有连续线性模型的智能体组成的一致性系统

### 3.3.1 直接同步算法

考虑由 $n$ 个同构智能体组成的系统，其状态方程可表示为线性形式

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{B}\mathbf{u}_i,\ i = 1, \ldots, n, \tag{3.20}$$

其中 $\mathbf{A} \in \mathrm{R}^{d\times d}$ 是系统矩阵，$\mathbf{B} \in \mathrm{R}^{d\times p}$ 是可控性矩阵，$\mathbf{x}_i \in \mathrm{R}^d$ 是状态变量向量，$\mathbf{u}_i \in \mathrm{R}^p$ 是智能体 $i$ 的控制信号。我们将系统改写为如下矩阵形式：

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A})\mathbf{x} + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B})\mathbf{u}, \tag{3.21}$$

v与 $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^\top, \ldots, \mathbf{x}_n^\top]^\top$ =向量$(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ 2 $\mathbb{R}^{dn}$ 和 $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1^\top, \ldots, \mathbf{u}_n^\top]^\top$ =向量$(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ 2 $\mathbb{R}^{pn}$ .

所设计系统的一致性算法形式如下：

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_1\mathbf{x}_i - \mathbf{K}_2 \sum_{j\in N_i} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j), \tag{3.22}$$

其中 $\mathbf{K}_1,\mathbf{K}_2 \in \mathrm{R}^{p\times d}$ 是需要设计的常权重矩阵。利用拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$，由 $n$ 个智能体组成的系统在一致性协议 (3.22) 下可表示为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \big(\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}_1)\big)\mathbf{x} - (\boldsymbol{\mathcal{L}}\otimes \mathbf{B}\mathbf{K}_2)\mathbf{x}\\ &= \big(\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}_1) - (\boldsymbol{\mathcal{L}}\otimes \mathbf{B}\mathbf{K}_2)\big)\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{3.23}$$

为简 单起见，假设 $G$ 是无向、连通的。此时，存在 $\mathbf{P}$ 为满足条件的正交矩阵 n

$$\mathbf{P}^{\top}\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{P} = \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1(\boldsymbol{\mathcal{L}}),\ldots,\lambda_n(\boldsymbol{\mathcal{L}})).$$

令 $\mathbf{z} = (\mathbf{P}^{\top}\otimes \mathbf{I}_d)\mathbf{x}$，则系统（3.23）关于变量 $\mathbf{z} = [\mathbf{z}_1^{\top},\ldots,\mathbf{z}_n^{\top}]^{\top}$ 可写为

$$\dot{\mathbf{z}} = \big(\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}_1) - (\boldsymbol{\Lambda}\otimes \mathbf{B}\mathbf{K}_2)\big)\mathbf{z}. \tag{3.24}$$

注意， $\lambda_1(\boldsymbol{\mathcal{L}}) = 0$ 对应于特征向量 $\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_n$，因此 $\dot{\mathbf{z}}_1 = (\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}_1)\mathbf{z}_1$ 不受一致性协议的影响。对于每个对应于非零特征值的特征向量，我们有子系统

$$\dot{\mathbf{z}}_k = (\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}_1-\lambda_k\mathbf{B}\mathbf{K}_2)\mathbf{z}_k,\ k=2,\ldots,n. \tag{3.25}$$

定理 3.6 描述了系统（3.23）的一致性过程。

**定理 3.6**。考虑由 $n$ 个线性智能体 (3.21) 构成的一致性系统，其交互图 $G$ 无向且连通。采用一致性算法 (3.22) 时，系统的状态变量向量 $\mathbf{x}(t)$ 渐近趋于一致性空间，当且仅当 $n-1$ 子系统 (3.25) 渐近稳定。

证明。（充分条件）假设 $n-1$ 子系统 (3.25) 渐近稳定，则矩阵 $\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}_1-\lambda_k\mathbf{B}\mathbf{K}_2$ 均为赫尔维茨矩阵。(3.23) 的解可表示为:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathrm{e}^{(\mathbf{I}_n\otimes(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}_1)-(\boldsymbol{\mathcal{L}}\otimes\mathbf{B}\mathbf{K}_2))t}\mathbf{x}(0)\\ &= (\mathbf{P}\otimes\mathbf{I}_d)\mathrm{e}^{(\mathbf{I}_n\otimes(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}_1)-(\boldsymbol{\Lambda}\otimes\mathbf{B}\mathbf{K}_2))t}(\mathbf{P}^{\top}\otimes\mathbf{I}_d)\mathbf{x}(0)\\ &= \bar{\mathbf{P}}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}_1)t} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathrm{e}^{(\mathbf{I}_{n-1}\otimes(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}_1)-\mathrm{diag}(\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\otimes\mathbf{B}\mathbf{K}_2)t}\end{bmatrix}\bar{\mathbf{P}}^{\top}\mathbf{x}(0),\end{aligned} \tag{3.26}$$

其中 $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1,\ .....,\ \mathbf{p}_n]$，$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\otimes\mathbf{I}_d$，$\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_n$。由于 $\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}_1-\lambda_i\mathbf{B}\mathbf{K}_2)t} = \mathbf{0}_{d\times d}$，因此有:

$$(\mathbf{P}\otimes\mathbf{I}_d)\mathrm{e}^{(\mathbf{I}_n\otimes(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}_1)-(\boldsymbol{\Lambda}\otimes\mathbf{B}\mathbf{K}_2))t}(\mathbf{P}^{\top}\otimes\mathbf{I}_d) = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{p}_i\otimes\mathbf{I}_d)\mathrm{e}^{(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}_1-\lambda_i\mathbf{B}\mathbf{K}_2)t}(\mathbf{p}_i^{\top}\otimes\mathbf{I}_d),$$

nên

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{p}_i\otimes\mathbf{I}_d)\mathrm{e}^{(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}_1-\lambda_i\mathbf{B}\mathbf{K}_2)t}(\mathbf{p}_i^{\top}\otimes\mathbf{I}_d) - \frac{1}{n}(\mathbf{1}_n\otimes\mathbf{I}_d)\mathrm{e}^{(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}_1)t}(\mathbf{1}_n^{\top}\otimes\mathbf{I}_d)\right\|\\ &= \left\|\sum_{i=2}^{n}(\mathbf{p}_i\otimes\mathbf{I}_d)\mathrm{e}^{(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}_1-\lambda_i\mathbf{B}\mathbf{K}_2)t}(\mathbf{p}_i^{\top}\otimes\mathbf{I}_d)\right\| \to 0,\end{aligned} \tag{3.27}$$

当 $t\to+\infty$。由此可推出

$$\left\|\mathbf{x}(t) - \frac{1}{n}(\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^{\top}\otimes\mathbf{I}_d)\mathrm{e}^{(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}_1)t}\mathbf{x}(0)\right\| = 0, \tag{3.28}$$

或者$\mathbf{x}_i(t)$ 渐近于

$$\mathbf{x}^*(t) = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}_1)t}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{x}(0),\ \forall i = 1,\ldots,n, \tag{3.29}$$

当 $t \to +\infty$。注意，方程 (3.29) 中的 $\mathbf{x}^*(t)$ 是状态方程$\dot{\mathbf{q}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_1)\mathbf{q}(t)$ 的解，其初始条件为 $\mathbf{q}(0) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{x}(0)$。

（必要条件）假设系统趋于一致，则存在轨迹 $\mathbf{x}^*(t)$，使得 $\lim_{t\to+\infty}\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{x}^*(t)\| = 0$。由于 $\mathbf{1}_n^{\top}\mathbf{p}_k = 0, \forall k = 2,\ldots,n$, $\mathbf{z}_i = (\mathbf{p}_i^{\top}\otimes \mathrm{I}_d)\mathbf{x}$，因此当 $t \to +\infty, \forall i = 2,\ldots,n$ 时，$\|\mathbf{z} - (\mathbf{p}_i^{\top}\mathbf{1}_n) \otimes \mathbf{x}^*(t)\| \to 0$。这表明 $n-1$ 子系统 (3.25) 渐近稳定，也就是说，所有矩阵 $(\mathrm{A} - \mathrm{BK}_1 - \lambda_k \mathrm{BK}_2)$ $k = 2,\ldots,n$ 都是 Hurwitz 矩阵。□

注意，要使系统在空间中的某一点达到一致性，还需要满足有限极限 $\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}_1)t}$ 存在这一条件。一般情形下，系统不会收敛到一个不动点。状态变量满足 $\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t) \to \mathbf{0}_d$，并且共同渐近于系统的一个（时变）解 $\dot{\mathbf{q}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_1)\mathbf{q}(t)$。我们使用“状态变量同步”这一术语来描述一致性系统 (3.23) 中发生的现象。如果智能体的状态矩阵在数值和维数上各不相同，就无法实现状态变量同步。此时，我们可以定义智能体的一些输出变量，并设计一致性协议，使智能体的输出变量渐近于同一条一致性轨迹 [314, 259]。

**示例 3.3.** 考虑由 $n = 6$ 个智能体组成的系统，其状态位于 $\mathrm{R}^3$，交互图为图 3.5 中的环 $C_6$。这些

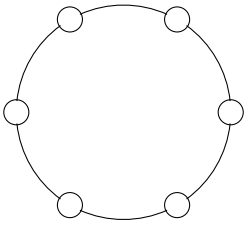


图 3.5：示例 3.3. 中的交互图 $C_6$
示例 3.3。

矩阵选取如下：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\ \mathbf{K}_1 = [1,1,1],\ \mathbf{K}_2 = 400\cdot[1,7,1].$$

此时，矩阵 $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_1$ 在 $-1 + 0j,\ 0 \pm j$ 处有特征值，而 $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_1 - \lambda_k\mathbf{B}\mathbf{K}_2,\ k = 2$、3，4 为赫尔维茨矩阵。

系统仿真结果如图3.6所示。状态变量$\mathbf{x}_i$ 渐近趋于微分方程 $\dot{\mathbf{r}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_1)\mathbf{r}$的一个解。由于 $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_1$ 有一对共轭复根，一致性轨迹呈简谐振荡形式。

## 3.3.2 间接状态同步算法

本小节介绍一种基于若干中间变量的线性多智能体系统一致性算法设计方法，这些变量由状态观测器获得。本小节的主要假设包括：

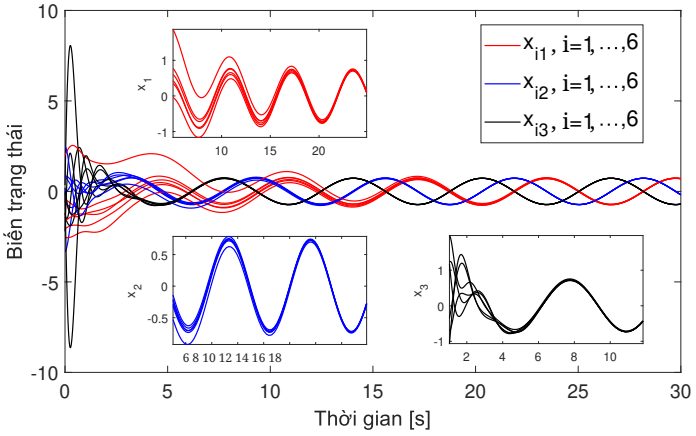



图3.6：示例3.3中的一致性系统仿真。当 $t \to +\infty$时，状态变量 $x_{ik} - x_{jk} \to 0$、$i = 1, \ldots, 6$、$k = 1, 2, 3$。

- 每个智能体的模型如下：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{B}\mathbf{u}_i \\ \mathbf{y}_i &= \mathbf{C}\mathbf{x}_i,\ i = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{3.30}$$

其中 $\mathbf{x}_i = [x_{i,1}, \ldots, x_{i,d}]^\top \in \mathrm{R}^d$、$\mathbf{u}_i \in \mathrm{R}^m$、$\mathbf{y}_i \in \mathrm{R}^p$ 依次为智能体 $i$ 的状态变量向量、控制信号和测量变量/输出变量。[4]

- $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 是可稳定的[5]，且 $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$ 是可检测的[6]，即存在矩阵 $\mathbf{K} \in \mathrm{R}^{m \times n}$ 和 $\mathbf{H} \in \mathrm{R}^{p \times n}$，使得 $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})$ 和 $(\mathbf{A} + \mathbf{H}\mathbf{C})$ 均为Hurwitz矩阵。
- 描述系统中智能体之间交互的图具有出根。每个智能体都可以测量相对于邻居智能体的输出变量。

- 拉普拉斯矩阵 $\mathcal{L}$ 具有不同的特征值，重数为 (,,和 )，因此可以将该矩阵表示为若尔当形 $\mathcal{L}$ $\mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}$，其中 $\mathbf{J}$ 为分块对角矩阵$(0, \mathbf{J}(\lambda_2). . ., \mathbf{J}(\lambda_l))$。

因此，在这个问题中，智能体无法获得自身状态的完整信息，也无法测量相对状态变量，这与前面小节中讨论的大多数一致性问题不同。

#### 3.3.2.1 使用Luenberger观测器和辅助状态变量

考虑以下状态变量同步算法 [244]:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_i = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_i + \mathbf{B}\mathbf{u}_i + \mathbf{H}(\hat{\mathbf{y}}_i - \mathbf{y}_i) - \mathbf{B}\mathbf{K} \sum_{j \in N_i} ((\boldsymbol{\eta}_j - \boldsymbol{\eta}_i) - (\hat{\mathbf{x}}_j - \hat{\mathbf{x}}_i)), \tag{3.31}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_i = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{B}\mathbf{u}_i + \mathbf{H}(\hat{\mathbf{y}}_i - \mathbf{y}_i),\ \hat{\mathbf{y}}_i = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_i, \tag{3.32}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{B}\mathbf{u}_i,\ \mathbf{y}_i = \mathbf{C}\mathbf{x}_i, \tag{3.33}$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{K}\boldsymbol{\eta}_i, \tag{3.34}$$

[4]在线性多智能体系统同步问题中，我们区分每个智能体的测量变量与输出变量。这里的输出变量可以是由测量变量得到的次级变量，也可以是用于连接智能体与网络的变量。[5]可稳定[6]可检测

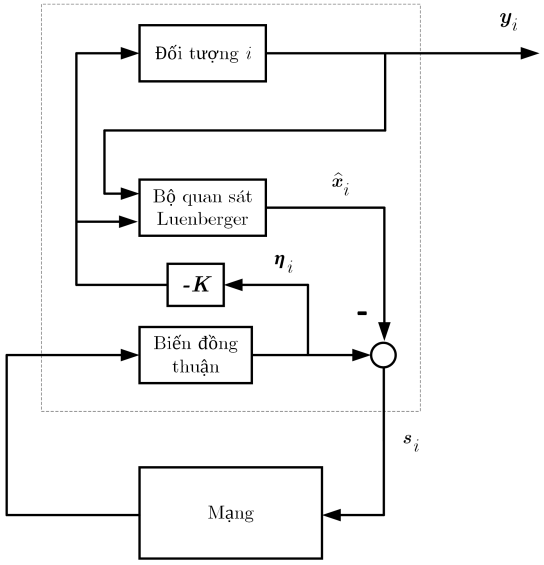



图3.7：描述采用一致性算法（3.31）–（3.34）的 $n$ 个线性智能体系统的框图。

其中，(3.32) 是为系统 (3.33) 设计的 Luenberger观测器，(3.34) 是为使 (3.31) 中的 $\boldsymbol{\eta}_i$ 稳定而设计的控制律，而 (3.31) 是带有辅助变量 $\mathbf{s}_i = \hat{\mathbf{x}}_i - \boldsymbol{\eta}_i$ 的一致性协议。假设$\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ 和 $\mathbf{A} + \mathbf{HC}$ 是 Hurwitz矩阵。图3.7 描述了 (3.31)–(3.34) 的同步结构。

设$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^\top, \ldots, \mathbf{x}_n^\top]^\top$, $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{\mathbf{x}}_1^\top, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_n^\top]^\top$, $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$, $\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\eta}_1^\top, \ldots, \boldsymbol{\eta}_n^\top]^\top$, 和$\mathbf{s} = \hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\eta}$。我们可以将系统表示为：

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = (\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{BK}))\boldsymbol{\eta} + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{HC})\mathbf{e} - (\boldsymbol{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{BK})\mathbf{s} \tag{3.35}$$

$$\dot{\mathbf{s}} = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A})\mathbf{s} + (\boldsymbol{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{BK})\mathbf{s} \tag{3.36}$$

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{HC}))\mathbf{e}. \tag{3.37}$$

由于$\mathbf{A} + \mathbf{HC}$ 是Hurwitz矩阵，由（3.37）可知， $\|\mathbf{e}(t)\|$ 按指数函数收敛到0。系统（3.36）是一个关于变量$\mathbf{s}$的一致性系统。进行变量变换

$$\mathbf{r} = (\mathbf{P}^{-1} \otimes \mathbf{I}_d)\mathbf{s}, \tag{3.38}$$

其中 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{LP} = \mathbf{J} =$分块对角矩阵$(0, \mathbf{J}(\lambda_2) \ldots, \mathbf{J}(\lambda_s))$ ，可得：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= (\mathbf{P}^{-1} \otimes \mathbf{I}_d)(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} + \boldsymbol{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{BK})(\mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_d)\mathbf{r} \qquad (3.39)\\ &= (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} + \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{P} \otimes \mathbf{BK})\mathbf{r}\\ &= (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} + \mathbf{J} \otimes \mathbf{BK})\mathbf{r}. \qquad (3.40)\end{aligned}$$

由此，我们将系统（3.40）改写为由 $l$ 子系统构成的形式：

$$\dot{\mathbf{r}}_{[i:i+n_i]} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_{n_s} + \mathbf{J}(\lambda_i) \otimes \mathbf{BK})\mathbf{r}_{[i:i+n_i]},\ i = 1, \ldots, l, \tag{3.41}$$

其中 $\mathbf{r}^{[i:i+n_i]} := [\mathbf{r}_i^\top, \ldots, \mathbf{r}_{i+n_i}^\top]^\top$。对于所选取的矩阵 $\mathbf{K}$，使得 $\mathbf{A} + \lambda_i\mathbf{BK} \quad i = 2, \ldots, l$ 为赫尔维茨矩阵，则（3.41）是指数稳定的，$\mathbf{r}_i(t) \to \mathbf{0}_d$, $i = 2, \ldots, n,$ 当 $t \to +\infty$ 时。由此可推出，解 $\mathbf{s}(t)$ 渐近趋于微分方程 $\dot{\mathbf{s}}_0 = \mathbf{A}\mathbf{s}_0$ 的一个解。具体而言，有 $\mathbf{s}(t)$ 渐

近趋于

$$(\mathbf{P}\otimes\mathbf{I}_d)\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{r}_1(0)\\ \mathbf{0}_d\\ \vdots\\ \mathbf{0}_d\end{bmatrix}=(\mathbf{P}\otimes\mathbf{I}_d)\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\\ \mathbf{0}_d\\ \vdots\\ \mathbf{0}_d\end{bmatrix}(\boldsymbol{\gamma}^\top\otimes\mathbf{I}_d)\mathbf{s}(0)=\mathbf{1}_n\otimes(\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\bar{\mathbf{s}}(0)),\tag{3.42}$$

当 $t\to+\infty$ 时，其中 $\bar{\mathbf{s}}(0)=\sum_{i=1}^n\gamma_i\mathbf{s}_i(0)$ 是 $\mathbf{s}_i(0)$、$\boldsymbol{\gamma}^\top\mathcal{L}=\mathbf{0}_n^\top$ 和 $\boldsymbol{\gamma}^\top\mathbf{1}_n=1$ 的加权平均。因此，$(\mathcal{L}\otimes\mathbf{I}_d)\mathbf{s}(t)\to\mathbf{0}_{dn}$ 当 $t\to+\infty$ 时。

考虑状态变量为 $\boldsymbol{\eta}$ 的系统 (3.35)，以及外部信号[7] $\mathbf{d}_1(t)=(\mathbf{I}_n\otimes\mathbf{HC})\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{d}_2(t)=(\mathcal{L}\otimes\mathbf{I}_d)\mathbf{s}(t)$。当没有外部作用（$\mathbf{d}_1=\mathbf{d}_2=\mathbf{0}_{dn}$）时，(3.40) 的无输入系统[8] 为

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}=(\mathbf{I}_n\otimes(\mathbf{A}+\mathbf{BK}))\boldsymbol{\eta},\tag{3.43}$$

当 $\mathbf{A}+\mathbf{BK}$ 赫尔维茨时，该系统指数稳定。外部信号满足 $\|\mathbf{d}_1\|=\|(\mathbf{I}_n\otimes\mathbf{HC})\mathbf{e}\|\to0$ 和 $\mathbf{d}_2=\|(\mathcal{L}\otimes\mathbf{I}_d)\mathbf{s}\|\to0$ 当 $t\to+\infty$ 时。这表明 $\boldsymbol{\eta}(t)$ 渐近趋于 (3.43) 的无输入系统的一个解，即当 $t\to+\infty$ 时 $\boldsymbol{\eta}\to\mathbf{0}_{dn}$。

Cuố因此，由$\mathbf{x}=\boldsymbol{\eta}+\mathbf{s}-\mathbf{e}$，而$\mathbf{e}\to\mathbf{0}_{dn}$, $\boldsymbol{\eta}\to\mathbf{0}_{dn}$，且$\mathbf{s}$ 渐近趋于一致性空 ồ间，我们有$\mathbf{x}$ 也渐近趋于一致性空间，当 $t\to+\infty$，$\mathbf{x}_i(t)\to\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\bar{\mathbf{s}}(0)=\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}(\bar{\hat{\mathbf{x}}}(0)-\bar{\boldsymbol{\eta}}(0))$。

**例3.4.** 考虑一个由 8 个智能体组成的系统，其采用基于状态观测器的一致性协议。每个智能体 $i$ 的系统矩阵为:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1.25 & 1\\ 0 & -5.5625 & 1.25\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ \text{và}\ \ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

且该系统的交互图是一个有向（无权重）图，如图 3.8 所示 .

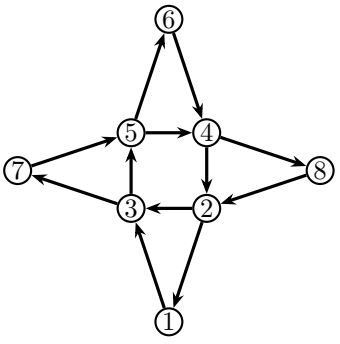



图 3.8：例3.4中智能体之间交互关系的示意图。

所设计的观测器与控制器的两个矩阵$\mathbf{H}$ 和$\mathbf{K}$ 为

$$\mathbf{H}=-\begin{bmatrix}-0.0730\\ 0.5255\\ 7.5474\end{bmatrix},\ \mathbf{K}=-\begin{bmatrix}1 & -3.25 & 5\end{bmatrix}.$$

容易验证，$\mathbf{A}$ 有三个特征值 $-1, 0\pm\jmath2$，$\mathbf{A}+\mathbf{BK}$ 在 $-2+\jmath0$ 处有一个三重特征值，并且$\mathbf{I}_8\otimes\mathbf{A}+\mathbf{L}\otimes\mathbf{BK}$ 有一对共轭虚特征值 $0\pm\jmath2$，以及 22 个负实部特征值。

[7]外生输入[8]标称系统，无外力系统

初始条件$\mathbf{x}(0)$、$\hat{\mathbf{x}}(0)$、$\boldsymbol{\eta}(0)$是随机选取的。采用一致性协议(3.31)–(3.34)的系统仿真结果如图3.9和3.10所示。

图3.9展示了智能体1的状态变量和估计变量。显然，$e_{1k} = \hat{x}_{1k} - x_{1k}$ 按指数函数收敛。

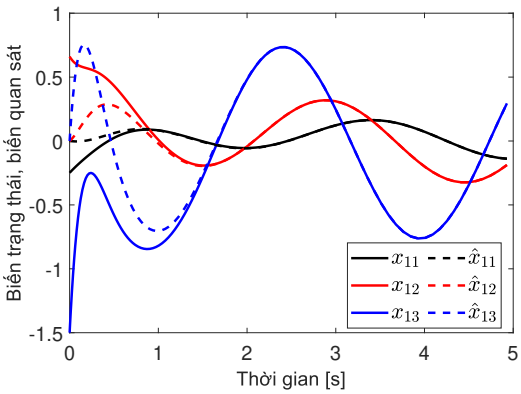



图3.9：示例3.4中智能体1的状态变量和估计变量（Luenberger观测器）。

图3.10（a）–（c）和（g）–（h）显示，状态变量$\mathbf{x}_{ik}(t)$和辅助状态变量 $s_{ik}(t), i = 1,\ldots,8$逐渐同步到一条轨迹（各坐标分别同步 $k = 1, 2, 3$）。由于矩阵$\mathbf{A}$ 的特征值位于 $-1 + \jmath 0, 0 \pm \jmath 2$，一致性轨迹（方程 $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{A}\mathbf{r}$的解）呈简谐振荡形式。

与此同时，辅助状态变量 $\eta_{ik}$ 在 $t \to +\infty$ 时收敛（图3.10 (d)–(f)）。因此，仿真结果与本小节进行的分析一致。

### 3.3.2.2 基于输出变量误差的状态观测器

在与邻居，且每个智能体都能测量相对输出误差，并将其合并为一个向量 本小节中，我们假设$\mathbf{y}_i$ 是直接连接的邻居智能体的输出变量

$$\boldsymbol{\zeta}_i = \sum_{j \in N_i} (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j),\ i = 1,\ldots,n. \tag{3.44}$$

由于缺少状态变量的信息，我们设计基于相对输出误差总和的状态观测器 $\boldsymbol{\zeta}_i$，用于每个智能体，并基于可观测变量设计如下的一致性协议 [146]:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_i = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\boldsymbol{\eta}_i + \mathbf{H}\Big(\sum_{j \in N_i} \mathbf{C}(\boldsymbol{\eta}_i - \boldsymbol{\eta}_j) - \boldsymbol{\zeta}_i\Big), \tag{3.45}$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{K}\boldsymbol{\eta}_i,\ i = 1,\ldots,n, \tag{3.46}$$

其中 $\boldsymbol{\eta}_i \in \mathrm{R}^d$ 为辅助状态变量，$\mathbf{F} \in \mathrm{R}^{d\times n}$ 和 $\mathbf{K} \in \mathrm{R}^{m\times n}$ 为待设计的矩阵。采用同步算法 (3.45)–(3.46) 的多智能体系统示意图如图3.11所示。

对于一致性协议 (3.45)–(3.46)，系统 (3.30) 可改写为矩阵形式:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = (\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}))\boldsymbol{\eta} - (\boldsymbol{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{F}\mathbf{C})(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{x}), \tag{3.47}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A})\mathbf{x} + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}\mathbf{K})\boldsymbol{\eta}, \tag{3.48}$$

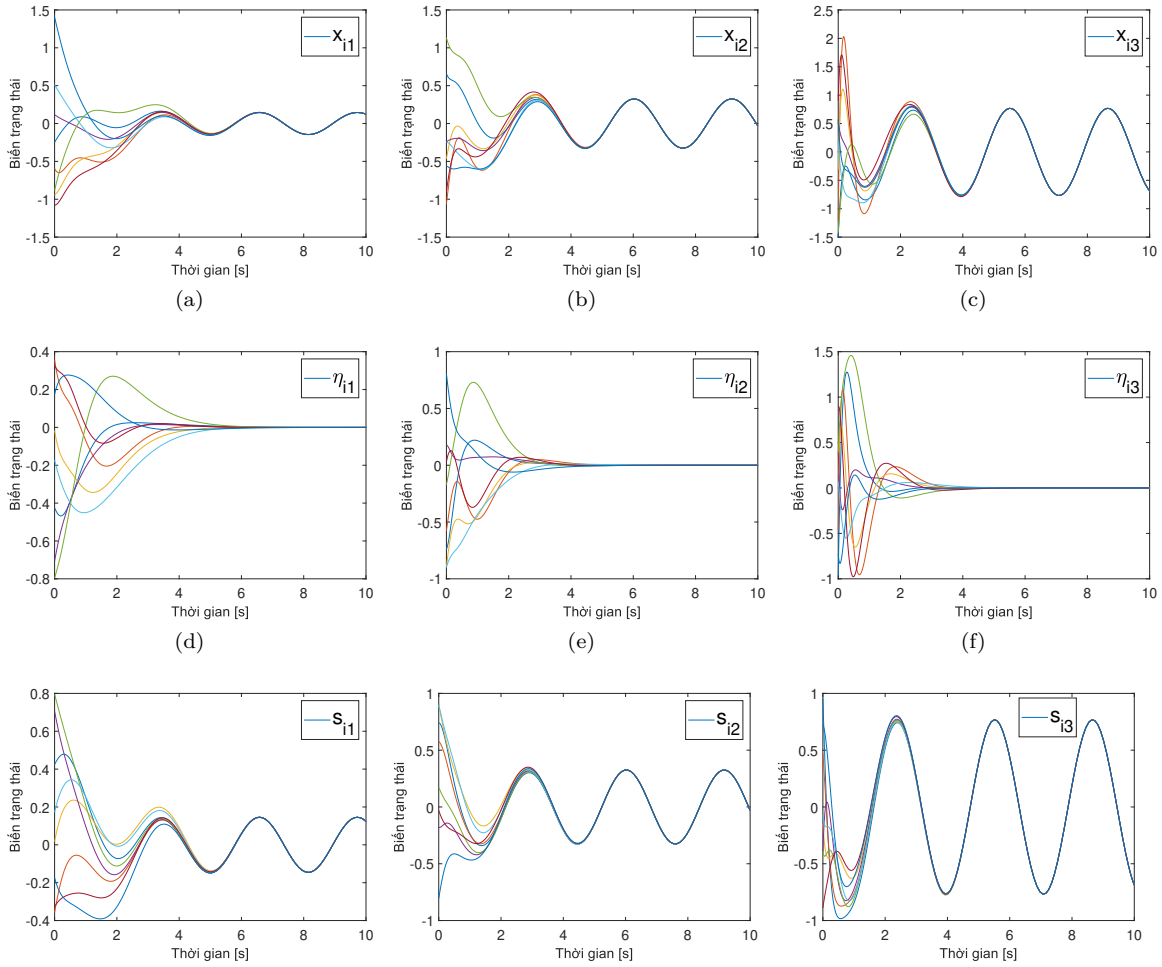



图3.10：例3.4中由8个智能体组成的一致性系统仿真。状态变量 $x_{ik}$ 和辅助变量，$i = 1,..,8$, $k = 1,2,3$, 渐近趋于同一条轨迹。

其中 $\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\eta}_1^\top, \ldots, \boldsymbol{\eta}_n^\top]^\top \mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^\top, .., \mathbf{x}_n^\top]^\top$。令辅助变量 $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\eta} - \mathbf{x}$，可得关于辅助变量的动力学方程：

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} + \boldsymbol{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{FC})\boldsymbol{\zeta}. \tag{3.49}$$

与小节 3.3.2 类似，进行变量变换 $\boldsymbol{\delta} = (\mathbf{P}^{-1} \otimes \mathbf{I}_d)\boldsymbol{\delta}$，可得：

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} + \mathbf{J} \otimes \mathbf{FC})\boldsymbol{\delta}. \tag{3.50}$$

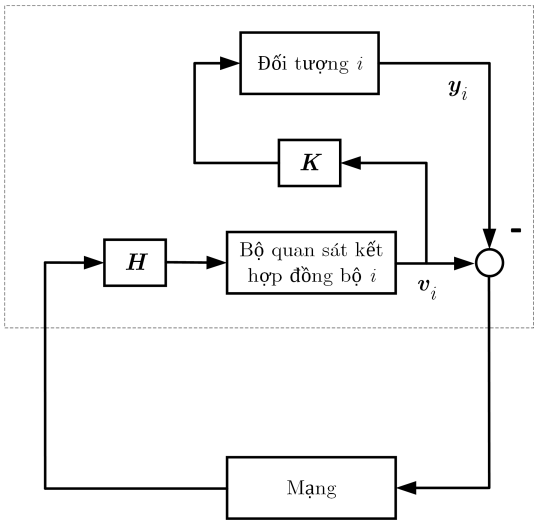



图3.11：一致性算法（3.45）–（3.46）对应的一致性系统示意图。

在条件 $\mathbf{A}+\lambda_i\mathbf{FC}$ 为赫尔维茨时，$\forall i=2,\ldots,n$, 系统 (3.48) 满足

$$\boldsymbol{\delta}(t)\to\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{\delta}_1(0)\\ \mathbf{0}_d\\ \vdots\\ \mathbf{0}_d\end{bmatrix}, \tag{3.51}$$

当 $t\to+\infty$ 时。由此可得,

$$\boldsymbol{\zeta}(t)\to(\mathbf{P}\otimes\mathbf{I}_d)\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\\ \mathbf{0}_d\\ \vdots\\ \mathbf{0}_d\end{bmatrix}(\boldsymbol{\gamma}^\top\otimes\mathbf{I}_d)\boldsymbol{\zeta}(0)=\mathbf{1}_n\otimes(\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\bar{\boldsymbol{\zeta}}(0)), \tag{3.52}$$

对于 $\bar{\boldsymbol{\zeta}}(0)=\sum_{i=1}^n\gamma_i\boldsymbol{\zeta}_i(0)$。

转换回以变量 $\boldsymbol{\eta}$ 表示的动力系统:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}=(\mathbf{I}_n\otimes(\mathbf{A}+\mathbf{BK}))\boldsymbol{\eta}+(\boldsymbol{\mathcal{L}}\otimes\mathbf{FC})\boldsymbol{\zeta}, \tag{3.53}$$

我们将（$\boldsymbol{\mathcal{L}}\otimes\mathbf{FC}$）$\boldsymbol{\zeta}$ 视为作用于系统的渐消扰动信号

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}=(\mathbf{I}_n\otimes(\mathbf{A}+\mathbf{BK}))\boldsymbol{\eta}, \tag{3.54}$$

是一个指数渐近稳定系统，因为 $\mathbf{A}+\mathbf{BK}$ 是赫尔维茨矩阵。由于 $\boldsymbol{\zeta}$ 渐近趋于一致性空间，我们有

$$(\boldsymbol{\mathcal{L}}\otimes\mathbf{HC})\boldsymbol{\zeta}\to(\boldsymbol{\mathcal{L}}\otimes\mathbf{FC})\mathbf{1}_n\otimes(\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\bar{\boldsymbol{\zeta}}(0))=\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{1}_n\otimes\mathbf{FC}(\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\bar{\boldsymbol{\zeta}}(0))=\mathbf{0}_{dn}. \tag{3.55}$$

由此可得，$\boldsymbol{\eta}\to\mathbf{0}_{dn}$ 当 $t\to+\infty$。最后，由关系 $\mathbf{x}=-\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{\eta}$，可得

$$\mathbf{x}(t)\to-\mathbf{1}_n\otimes(\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\bar{\boldsymbol{\zeta}}(0))=-\mathbf{1}_n\otimes\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}(\bar{\mathbf{x}}(0)-\bar{\boldsymbol{\eta}}(0)), \tag{3.56}$$

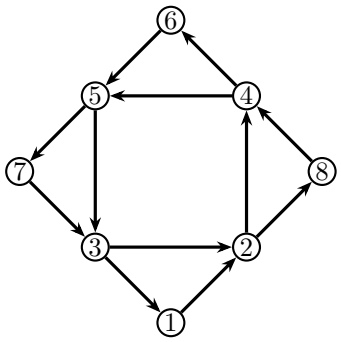



图3.12：示例3.5中智能体之间交互关系的图示。

当 $t \to +\infty$ 时，也就是说系统将逐渐实现同步。

因此，我们看到，采用控制律（3.46）的多智能体系统中的共识问题，转化为考察一组具有相同尺度 $d \times d$ 的矩阵的稳定性。共识协议（3.45）–（3.46）是面向多智能体系统的控制器与状态观测器相结合方案的扩展。基于状态观测的控制器的分离原理在多智能体系统中仍然成立。交互图 $G$ 的影响通过拉普拉斯矩阵在以下方程中的（复）特征值体现 $\mathbf{A} + \mathbf{BK} + \lambda_i \mathbf{FC}$，$i = 1, \ldots, n$。

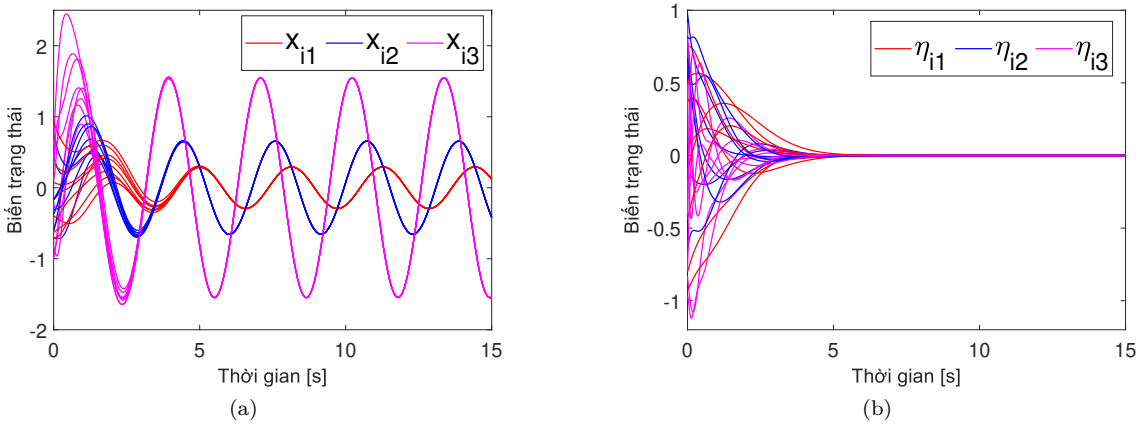


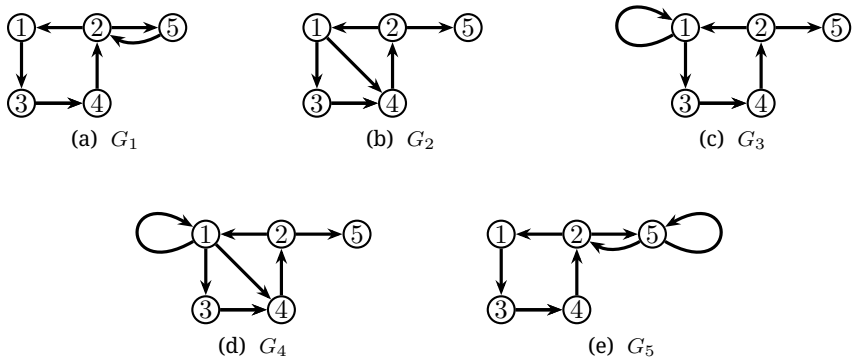

图3.13：示例3.5中采用同步算法（3.45）–（3.46）的8智能体系统仿真。

**示例3.5**。 在本示例中，我们对采用一致性算法（3.45）–（3.46）的8智能体一致性系统进行仿真。仿真中的多智能体系统矩阵选择如下：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1.25 & 1 \\ 0 & -5.5625 & 1.25 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -0.0730 & 0.5255 & 7.5474 \end{bmatrix}, \ \mathbf{K} = -\begin{bmatrix} 1 & -3.25 & 5 \end{bmatrix}.$$

初始值 $\mathbf{x}_i(0)$ $\boldsymbol{\eta}_i(0)$通过随机生成。图3.12展示了智能体之间的信息流图$G$ 。

仿真结果如图3.13所示。状态变量$\mathbf{x}_i(t)$渐近一致于同一条轨迹，且 $\boldsymbol{\eta}_i(t) \to \mathbf{0}$, $i = 1, \ldots, 8$，当 $t \to +\infty$。




(a) $G_1$ (b) $G_2$ (c) $G_3$

(d) $G_4$ (e) $G_5$

图3.14：图 $G_1$ 是强连通的，周期为 2；图 $G_2$ 和 $G_3$ 有出根，包含出根的强连通分量没有周期，其中图 $G_3$ 包含自环；图 $G_4$，$G_5$ 是强连通的且没有周期。

## 3.4 非连续一阶一致性系统

### 3.4.1 模型和一致性条件

本小节中，我们考察一类一致性算法，其中智能体仅在时刻 $k = 1, 2, \ldots, +\infty$更新状态变量。考虑一个由 $n$ 个智能体组成的系统，其中每个智能体的状态变量为$x_i[k] \in \mathrm{R}\ \forall k = 1, 2, \ldots$。

假设图 $G$ 描述的系统中的信息交换是有向的、带权重的，且这些权重满足 $\sum_{j=1}^{n} w_{ij} = 1$。注意，此处图 $G$ 可以包含自环（从顶点 $v_i$指向其自身的边），因此 $w_{ii}$ 可能不为 0。定义集合 $M_i = \{j \in V |\ w_{ij} > 0\}$，其由智能体 $i$ 的邻近智能体组成（可能包括 $i$）。在时刻 $k$，智能体 $i \in V$ 按照以下一致性算法更新其状态变量：

$$x_i[k+1] = \sum_{j \in M_i} w_{ij} x_j[k], \tag{3.57}$$

一致性算法（3.57）是一种线性迭代的分布式算法，因为它只需要智能体 $i$ 以及 $i$的邻居智能体的状态变量。我们可以将（3.57）改写为如下形式：

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k], \tag{3.58}$$

其中$\mathbf{x}[k] = [x_1[k], \ldots, x_n[k]]^\top$。点$\mathbf{x}^* = [x_1^*, \ldots, x_n^*]^\top$ 是（3.58）的一个平衡点，如果$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}^*$。系统渐近趋于平衡点$\mathbf{x}^*$，如果$\lim_{k \to +\infty} \mathbf{x}[k] = \mathbf{x}^*$，当 $k \to +\infty$。

方程（3.58）中的矩阵$\mathbf{A}$ 具有满足$\mathbf{A}\mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n$ 的非负元素，因此$\mathbf{A}$ 是一个行随机矩阵。一个行随机矩阵$\mathbf{A}$ 是不可约且非周期的（SIA）[9]，如果$\lim_{k \to +\infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{1}_n \mathbf{y}^\top$，其中$\mathbf{y}$ 是一个列向量。有向图 $G$ 是周期的，如果 $G$ 的各简单环长度的最大公约数大于1。否则，图$G$ 称为非周期的（见示例，图3.14）。

我们有如下结果：

[9]随机不可分解非周期矩阵

**引理3.7**。 [225] 随机矩阵 $\mathbf{A} = [w_{ij}] \in \mathrm{R}^{n\times n}$ 有一个单特征值 $\lambda = 1$，且其他特征值满足 $|\mu| < 1$，当且仅当与矩阵 $\mathbf{A}$ 对应的图有出根，并且包含出根的极大强连通分量没有周期。此时，$\mathbf{A}$ 是SIA，$\lim_{k\to+\infty}\mathbf{A}^k = \mathbf{1}_n\boldsymbol{\gamma}^\top$，其中$\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}$、 $\mathbf{1}_n^\top\boldsymbol{\gamma} = 1$和 $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \ldots, \gamma_n]^\top$ 的元素为 $\gamma_i \geq 0$、 $\forall i = 1$、.....、 $n$，并且 $\gamma_i > 0$当且仅当 $i$ 属于图中包含出根的极大强连通分量。

根据上述引理，可得到关于系统（3.58）渐近过程的如下定理：

**定理 3.8**。 对于一致性协议（3.58），智能体渐近趋于一致性集合中的某一点，当且仅当图 $G$ 含有出根，且包含出根的极大强连通分量中没有环。

证明。 （充分条件）根据线性系统理论，可得

$$\lim_{k\to+\infty}\mathbf{x}[k+1] = \lim_{k\to+\infty}\mathbf{A}^k\mathbf{x}[0].$$

根据假设 $G$ 含有出根，由引理3.7可得

$$\lim_{k\to+\infty}\mathbf{x}[k+1] = (\mathbf{1}_n\boldsymbol{\gamma}^\top)\mathbf{x}[0].$$

因此，系统趋于一致性，其一致性值为 $\boldsymbol{\gamma}^\top\mathbf{x}[0] = \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i[0]$。

（必要条件）假设 $G$ 没有出根，那么根据引理3.7，特征值 1 是$\mathbf{A}$的特征多项式的重根$m > 1$。因此，$\mathbf{A}^k$ 的若尔当形为$\mathbf{A}^k = \mathbf{M}\mathbf{J}^k\mathbf{M}^{-1}$，其中$\mathbf{M}$ 是可逆矩阵，且$\mathbf{J}^k$ 是一个上三角矩阵，其对角线上的 $m$ 元素均为 1。因此，$\lim_{k\to+\infty}\mathbf{A}^k$ 的度至少为 $m > 1$，与一致性空间不同。这意味着存在初始条件$\mathbf{x}[0]$，使得系统不趋于一致性，这与定理的假设矛盾。

□

注意，如果进一步假设与矩阵$\mathbf{A}$ 对应的图 $G$ 是强连通的，并且 $G$ 中至少有一个自环，那么矩阵$\mathbf{A}$ 是行随机矩阵、不可约且非周期。定理 3.8 中的结果仍然成立，唯一不同的是，$\mathbf{A}$的左特征向量 $\boldsymbol{\gamma}^\top$ 此时所有元素均为正（$\gamma_i > 0, \forall i = 1, \ldots, n$）。

## 3.4.2 与连续一致性系统模型的联系

我们考虑一种特殊情况，即将离散一致性系统视为连续一致性系统 $\dot{\mathbf{x}}(t) = -\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{x}(t)$ 在时刻 $t = k\delta$ 的状态，其中 $k = 0$，1，2，. . . ，$\infty$。

令 $\mathbf{z}[k] = \mathbf{x}(k\delta)$，则根据微分方程的解公式，有：

$$\mathbf{z}[k] = \mathbf{x}(k\delta) = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\mathcal{L}}k\delta}\mathbf{x}(0). \tag{3.59}$$

由此可得 $\mathbf{z}[0] = \mathbf{x}(0)$ 和

$$\mathbf{z}[k+1] = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\mathcal{L}}(k+1)\delta}\mathbf{x}(0) = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\mathcal{L}}\delta}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{\mathcal{L}}k\delta}\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{z}[k], \tag{3.60}$$

其中 $\mathbf{A} = \mathrm{e}^{-\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}}$。矩阵 $\mathbf{A}$ 的一些性质见下述引理。

**引理 3.9.** 假设图 $G$ 是出根图，其拉普拉斯矩阵为 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$。矩阵 $\mathbf{A} = [w_{ij}] = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\mathcal{L}}\delta}$ 满足：

1. $\mathbf{A}$ 是行随机矩阵。

2. 含有非负元素： $w_{ij} \geq 0,\ \forall i,\ j \in V$。

3. $w_{ij} > 0$ 当且仅当在图 $G$中存在一条从 $j$ 到 $i$ 的有向路径。

4. $\mathbf{A}$ 至少有一列的所有元素均为正。

证明。 由于 $G$ 有出根，因此 $\ker(\boldsymbol{\mathcal{L}})=\mathrm{im}(\mathbf{1}_n)$。

1. 将矩阵 $\mathbf{A}$ 改写为：

$$\mathbf{A} = \mathrm{e}^{-\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\delta\boldsymbol{\mathcal{L}})^k}{k!} = \mathbf{I}_n - \frac{\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}}{1!} + \frac{(\delta\boldsymbol{\mathcal{L}})^2}{k!} - \dots \tag{3.61}$$

那么 $\frac{(-\delta\boldsymbol{\mathcal{L}})^k}{k!}\mathbf{1}_n = \mathbf{0}$ 对所有 $k = 1, \dots, n$均成立。因此 $\mathbf{A}\mathbf{1}_n = \mathbf{I}_n\mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n$，即 $\mathbf{A}$ 是行随机矩阵。

2. 取 $\mu > \max_i l_{ii}$ ，则 $\mathrm{e}^{-\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}} = \mathrm{e}^{-\mu\delta}\mathrm{e}^{\delta(\mu\mathbf{I}_n - \boldsymbol{\mathcal{L}})}$ ，因此矩阵 $\mathbf{W}$ 和 $\mathrm{e}^{\delta(\mu\mathbf{I}_n - \boldsymbol{\mathcal{L}})}$ 的元素符号均相同。此外，矩阵 $\mathbf{L}_+ = \delta(\mu\mathbf{I}_n - \boldsymbol{\mathcal{L}})$ 的所有元素均为非负，因此

$$\mathrm{e}^{\delta(\mu\mathbf{I}_n - \boldsymbol{\mathcal{L}})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta(\mathbf{L}_+)^k}{k!} \tag{3.62}$$

它也是一个所有元素均为非负的矩阵。

3. 矩阵 $\mathbf{L}_+ = (\mu\mathbf{I}_n - \boldsymbol{\mathcal{L}})$ 的每个元素 $[\mathbf{L}_+]_{ij}$ 非负，当且仅当存在一条边 $(j, i) \in E$ （因为矩阵 $\mathbf{L}_+$ 的所有非主对角线元素都与图 $G$ 的邻接矩阵相同）。同样， $[\mathbf{L}_+^2]_{ij} > 0$ 当且仅当在由 $[\mathbf{L}_+^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [\mathbf{L}_+]_{ik}[\mathbf{L}_+^2]_{kj}$ 表示的图中，存在一条从 $j$ 到 $i$ 的长度为 2 的有向路径。一般而言，由方程（3.62）可推得，每个元素 $w_{ij} > 0$ 当且仅当在 $G$ 中存在一条从 $j$ 到 $i$ 的有向路径。

4. 由于图 $G$ 有出根，因此如果 $j$ 是出根，那么从 $j$ 到 $G$中的每个顶点都存在一条有向路径。因此，对于任意 $i \in V$，都有 $w_{ij} > 0$；换言之，$\mathbf{W}$ 的第 $j$ 列必须所有元素均为正。

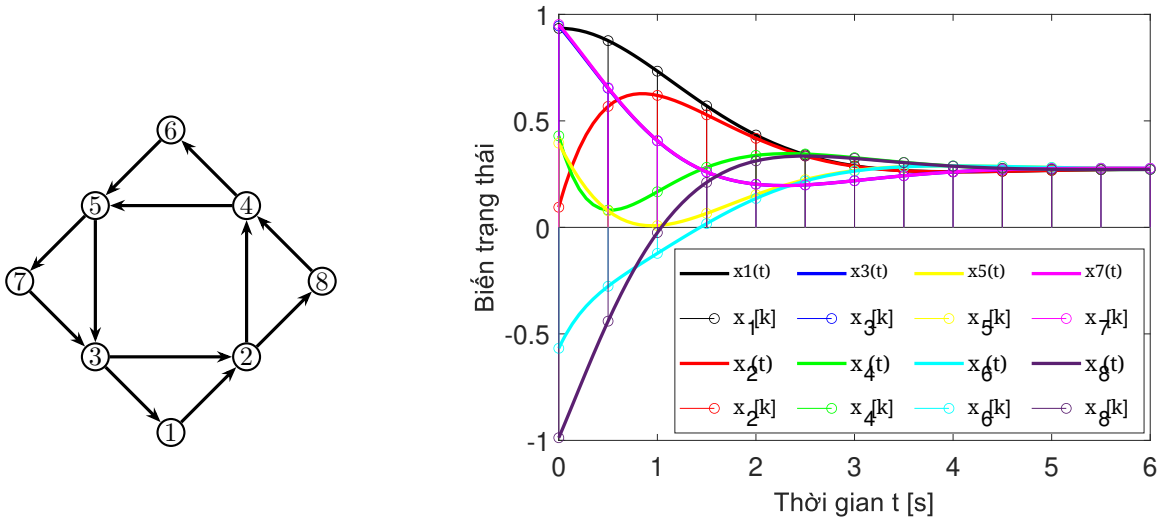
□

**定理 3.10.** 由 (3.60) 给出的一致性系统渐近收敛到一致性集合中的一个平衡点，当 $k \to +\infty$。

证明. 这一结论可直接由连续一致性模型的收敛性推出。另一种方法是，我们注意到 $\mathbf{A}$ 是一个不可约且非周期的行随机矩阵。通过应用定理 3.8，可以得到该模型的收敛性。

□

**示例 3.6.** 考虑一个由 8 个智能体组成的系统，其有向图 $G$ 如图 3.15(a) 所示。连续一致性算法和非连续一致性算法的仿真结果（ $\delta = 0.5$ ）如图 3.15(b) 所示。显然，非连续模型（状态用“o”表示）和连续模型（状态用实线表示）的收敛情况相同。




(a) 图 $G$ (b) 状态变量与时间

图 3.15：连续一致性算法与非连续一致性算法的对比仿真

## 3.5 注释和参考文献

本章关于一致性系统的基本结果均基于线性微分/差分方程理论。尽管这些结果简单，却是后续大多数扩展的基础。最需要注意的是图 $G$ 与一致性算法收敛之间的关系。对于一阶积分器智能体的一致性协议，系统渐近收敛至算术平均值的充要条件是交互图强连通且平衡。当图强连通时，一致性值是各智能体状态变量的加权平均值。系统趋于一致的充要条件是图具有出根。此时，一致性值仅取决于出根所在的临界强连通分量中各智能体的初始值。

关于参考文献、综述、主要结果以及一致性系统的应用，[192] 和 [231]中进行了较为详细的介绍。关于一阶积分器智能体的连续一致性算法，最早的研究成果可见于 [195, 169]。关于二阶积分器智能体、高阶积分器智能体以及一般线性智能体的连续一致性算法，相关内容见文献 [229, 227]和[244, 147, 314, 178]。与此同时，曲面上的共识问题具有更为复杂的解。此时，一致性条件不仅与图有关，还与曲面的性质有关[241, 119]。一些相关问题，例如存在时延和噪声时的一致性问题，在文献 [192, 324, 44]中进行了研究。

最后，离散一致性系统已得到研究，并应用于意见动力学模型的研究或物理模型（Vicsek 模型）的解释 [121], [231], [65]。文献 [35]提供了关于基本离散一致性算法的相当详细的分析。在 [225]中研究了具有时变图的离散一致性算法。请注意，为使离散一致性算法（3.57）渐近达到一致性，某些权重（常数） $w_{ij}$ 可以取负值 [315]。

## 3.6 练习

**练习 3.1** （循环追逐（Cyclic pursuit））。 考虑平面上的四个机器人，其位置为 $\mathbf{p}_i \in \mathrm{R}^2, i = 1, 2, 3, 4$， 并按照方程 $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{u}_i$运动，其中 $\mathbf{u}_i \in \mathrm{R}^2$ 为速度向量。考虑会合问题，其中机器人需要在一个共同点集合，并且每个机器人获得的信息只能来自安装在自身上的传感器。循环追逐是解决会合问题所需信息结构最为简化的一种方案。每个机器人 $i$ 将追逐第 $i+1$ 个机器人（这里我们约定 $4+1 \equiv 1$）。换句话说，我们使用控制律 $\mathbf{u}_i = \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i$，并得到描述该系统的运动学方程组：

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\mathbf{p}_1\\ \mathbf{p}_2\\ \mathbf{p}_3\\ \mathbf{p}_4\end{bmatrix} = -(\mathcal{L}\otimes \mathbf{I}_2)\begin{bmatrix}\mathbf{p}_1\\ \mathbf{p}_2\\ \mathbf{p}_3\\ \mathbf{p}_4\end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\otimes \mathbf{I}_2\right)\begin{bmatrix}\mathbf{p}_1\\ \mathbf{p}_2\\ \mathbf{p}_3\\ \mathbf{p}_4\end{bmatrix}$$

证明：

i. 四个机器人 $\bar{\mathbf{p}}$ 的质心对于任意 $t \geq 0$ 都是一个常向量。

ii. 当 $t \to +\infty$ 时，机器人将在 $\bar{\mathbf{p}}$ 相遇。

iii. 求矩阵 $\mathcal{L}$ 的特征值和特征向量。

iv. 如果4个智能体的初始位置构成一个正方形，那么在任意时刻 $0 \leq t \leq +\infty$，4个智能体的位置仍构成一个正方形。 v. 使用 MATLAB 对由4个机器人组成的系统进行仿真，并采用不同的初始条件，以验证上述结论。

**练习3.2.** [35] 考虑一致性协议 $\dot{\mathbf{x}} = -\mathcal{L}\mathbf{x}$，其网络由图3.16所示的图描述。

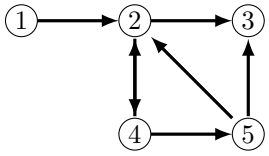



图3.16：练习3.2中的图。

i. 当 $t \to +\infty$ 时，系统中的智能体能否达到一致？ ii. 如果智能体能够达到一致，那么一致性值是否与算术平均值相同？

iii. 说明如何在图中添加一条边，使系统在算术平均值处达到一致。

**练习 3.3.** 分析存在作用于系统的常值噪声 $d_i \in$R 时的一致性系统：

$$\dot{x}_i = -\sum_{j\in N_i}(x_j - x_i) + d_i,\ i = 1, \ldots, n, \tag{3.63}$$

在 (a) 的情况下，$\mathbf{d} = [d_1, \ldots, d_n]^\top \perp$像$(\mathbf{1}_n)$，而 (b) 中 $\mathbf{d}$ 任意。

**习题3.4**。 考虑由 $n$ 一阶积分器智能体组成的系统，它们通过一个连通无向图 $G$进行交互。假设每个智能体 $i$ 以不同的速率更新状态变量：

$$\dot{\mathbf{x}}_i = -\gamma_i \sum_{j\in N_i} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j),\ i = 1, \ldots, n, \tag{3.64}$$

其中 $\gamma_i > 0$ 是第 $i$ 个智能体的更新系数，且 $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^d$, $d \geq 1$。记作 $\mathbf{x} = \text{vec}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$。

i. 求矩阵 $\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\mathcal{L}}$的左右特征向量，其中 $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$，且$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 是图 $G$的拉普拉斯矩阵。

ii. 假设 $d = 1$，写出描述系统 (3.5) 的矩阵形式方程，并求 $\lim_{t\to+\infty}\mathbf{x}(t$ )。ii

i. 假设 $d > 1$，写出描述系统 (3.5) 的矩阵形式方程，并求 $\lim_{t\to+\infty}\mathbf{x}(t$ ).

**练习 3.5.** [195] 考虑带有时延的加权图上的一致性算法，其形式为

$$\dot{x}_i = \sum_{j\in N_i} a_{ij}(x_j(t-\tau) - x_i(t-\tau)),\ i = 1, \ldots, n, \tag{3.65}$$

其中 $\tau > 0$。证明 $x_i$ 渐近收敛到同一个一致性值（即平均值
nh công c
嗅 $x_i(0)$, $i = 1, \ldots, n$) 如果

$$\tau < \frac{\pi}{2\lambda_n(G)},$$

其中 $\lambda_n(G)$ 是对应于 $G$的拉普拉斯矩阵的最大特征值。据此得出结论：对于带时延的一致性协议，收敛速度与边上的时延稳定性界限之间存在权衡。

**练习 3.6.** [164] 两个图 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$ 的笛卡尔积记作

$$G = G_1 \square G_2$$

它是一个边集为 $V_1 \times V_2$, 的图，并且每对顶点 $(v_1, v_2)$ 和 $(v_1', v_2') \in V(G)$ 相邻，当且仅当以下条件之一成立：$v_1 = v_1'$ 且 $(v_2, v_2')$ 是 $E_2$ 中的一条边；或者 $v_2 = v_2'$ 且 $(v_1, v_1')$ 是 $E_1$ 中的一条边。对于 $|V_1| = n$ 和 $|V_2| = m$，两个图的笛卡尔积具有如下性质

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{L}}(G_1 \square G_2) &= \boldsymbol{\mathcal{L}}(G_1) \otimes \mathbf{I}_m + \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\mathcal{L}}(G_2) \\ &= \boldsymbol{\mathcal{L}}(G_1) \otimes \mathbf{I}_m + \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\mathcal{L}}(G_2) = \boldsymbol{\mathcal{L}}(G_1) \oplus \boldsymbol{\mathcal{L}}(G_2),\end{aligned}$$

其中 $\oplus$ 表示两个矩阵的克罗内克和。

i. 求两个路径图 $L_n$ 和 $L_m$ 的笛卡尔积。

ii. 求两个图 $L_n$ 和 $C_m$的笛卡尔积。

iii. 证明，对于两个方阵$\mathbf{A}$ 和$\mathbf{B}$，$\text{e}^{\mathbf{A}\oplus\mathbf{B}} = \text{e}^{\mathbf{A}} \otimes e^{\mathbf{B}}$。由此证明，如果$\mathbf{x}_1(t)$ 和$\mathbf{x}_2(t)$ 是一致性系统的解

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= -\boldsymbol{\mathcal{L}}(G_1)\mathbf{x}_1, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= -\boldsymbol{\mathcal{L}}(G_2)\mathbf{x}_2,\end{aligned}$$

那么一致性系统的解

$$\dot{\mathbf{x}} = -\boldsymbol{\mathcal{L}}(G)\mathbf{x}$$

是 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) \otimes \mathbf{x}_2(t)$。

**练习 3.7** (PI一致性算法)。考虑由 $n$ 个智能体组成的系统，其方程为

$$\dot{x}_i = u_i + d,\ i = 1, \ldots, n,$$

其中，$u_i \in$R 是控制信号，$d_i \in$ R 是一个常数。上述方程组可以描述一个 $n$ 时钟系统，其中 $x_i(t)$ 是时间指示变量，$d$ 是时间读数变化率。我们需要设计一致性协议 $u_i$，使得对于任意初始值 $x_i(0)$、$\neq x_j(0)$ 以及给定值 $d > 0$，当 $t \to +\infty$ 时，$x_i(t) \to x_j(t)$（换句话说，各时钟会逐渐同步）。

i. 证明以下一致性协议：

$$u_i = -\sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_i - x_j) + y_i,$$
$$\dot{y}_i = -\sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_i - x_j),$$

能够解决时钟同步问题。

ii. 如果将一致性协议替换为：

$$u_i = -\sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_i - x_j) + y_i,$$
$$\dot{y}_i = -\sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_i - x_j) - \alpha y_i,$$

当 $\alpha > 0$ 时，结果会有什么变化?

iii. 使用上述一致性协议对一致性系统进行仿真。

**练习 3.8.** 为二阶一致性系统（3.7）和（3.15）绘制基于智能体 $i$ 动力学的一致性系统框图（参见图3.1）。

）和（3.15）绘制基于智能体 $i$ 动力学的一致性系统框图（参见图3.1）。

**练习 3.9**（比例一致性 [237]）。给定由 $n$ 个智能体组成的一致性系统，智能体通过一个具有出根的有向图进行交互。系统中的每个智能体 $i$ 都有一个值 $s_i \neq 0$，并按照以下方程更新状态变量：

$$\dot{x}_i = -\text{sgn}(s_i) \sum_{j \in N_i} (s_i x_i - s_j x_j),\ i = 1, \ldots, n. \tag{3.66}$$

i. 请用矩阵形式写出一致性方程 $\dot{\mathbf{x}} = -\boldsymbol{\Theta}\mathbf{x}$。

ii. 证明 $\boldsymbol{\Theta}$ 只有一个特征值为 0，$\boldsymbol{\Theta}$的其他特征值都位于虚轴右侧。

iii. 证明 $s_i x_i \to s_j x_j$ 当 $t \to +\infty$时，系统将逐渐达到比例一致性。

**习题 3.10**（矩阵比例一致性 [293]）。考虑一个由 $n$ 个智能体组成的一致性系统，这些智能体通过一个连通无向图进行交互。系统中的每个智能体 $i$ 都有一个值 $\mathbf{S}_i \in \mathbb{R}^{d \times d}$，它是一个正定或负定矩阵，但不一定对称。定义符号函数 $\text{sign}(\mathbf{S}_i) = 1$，当 $\mathbf{S}_i$ 为正定矩阵时取此值；定义 $\text{sign}(\mathbf{S}_i) = -1$，当 $\mathbf{S}_i$ 为负定矩阵时取此值。每个智能体按以下方程更新状态变量：

$$\dot{\mathbf{x}}_i = -\text{sign}(\mathbf{S}_i) \sum_{j \in N_i} (\mathbf{S}_i \mathbf{x}_i - \mathbf{S}_j \mathbf{x}_j),\ i = 1, \ldots, n, \tag{3.67}$$

其中$\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$ 是系统中第 $i$ 个智能体的状态变量向量。

i. 请将一致性方程写成矩阵形式 $\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{\Theta}\mathbf{x}$。

ii. 证明 $\mathbf{\Theta}$ 仅有 $d$ 个特征值为 0， $\mathbf{\Theta}$ 的其余特征值都位于虚轴右侧。

iii. 证明$\mathbf{S}_i\mathbf{x}_i \to \mathbf{S}_j\mathbf{x}_j$ 当 $t \to \infty$时，或者说系统将逐渐达到一致性，比例 lệ.

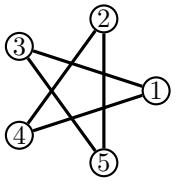



图 3.17：习题 3.11 中的 $G$ 图。

**练习 3.11** （ $p \geq 2$ [227]阶积分器智能体一致性系统）. 考虑一个由 $n$ 个智能体组成的一致性系统，这些智能体通过一个无向连通图进行交互。系统中的每个智能体按照以下 $p \geq 2$阶积分器模型更新状态变量:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{i,1} &= x_{i,2},\\ &\vdots\\ \dot{x}_{i,p-1} &= x_{i,p},\\ \dot{x}_{i,p} &= u_i,\end{aligned}$$

其中$\mathbf{x}_i = [x_{i,1}, \ldots, x_{i,p}]^\top \in \mathrm{R}^p$ 是 $u_i$的状态变量向量和控制信号，分别对应智能体$i = 1$，……， $n$。令$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^\top$，……， $\mathbf{x}_n^\top]^\top \in \mathrm{R}^{np}$。

i. 假设 $p = 2$和 $u_i = -k\sum_{j\in N_i}(x_{i,2} - x_{j,2})$， $i = 1, \ldots, n$。系统是否渐近收敛到一致性值?

i. 当 $u_i = -\alpha_1 x_i - \sum_{k=2}^{p}\alpha_k \sum_{j\in N_i}(x_{i,k} - x_{j,k})$,$i = 1, \ldots, n$ 时，请将 $n$ 个智能体系统表示为矩阵形式。

ii. 求参数 $\alpha_k$, $k = 1, \ldots, p$ 的条件，使系统渐近收敛到一致性集合

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{np} | x_{1,1} = \ldots = x_{n,1},\ x_{1,k} = \ldots = x_{n,k} = 0,\ k = 2, \ldots, p\}.$$

iii. 对一个由 5 个智能体组成的系统进行仿真，其交互图如图 3.17 所示， $p = 3$，并且$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可自行选择。

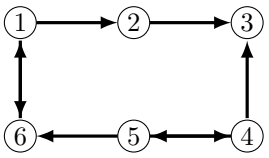



图3.18：习题 3.12 中的 $G$ 图。

**习题 3.12** （弹簧—重物—阻尼器系统同步）。 考虑一个一般线性多智能体系统，其中各智能体的模型由以下方程给出

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{D}{m}\end{bmatrix}\mathbf{x}_i(t) + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u_i(t),\ i = 1, \ldots, n, \tag{3.68}$$

với 质量 $m = 10.6$ (kg)、阻尼系数 $D = 50.5$ ($\frac{N\cdot s}{m}$)， 以及弹簧刚度 $k = 120$ (N/m) .

i. 假设智能体通过图 $G$ 进行交互，如图 3.18 所示。请写出该图对应的拉普拉斯矩阵，并求出相应的特征值。

ii. 对于如下形式的一致性协议：

$$u_i = \mathbf{K}_1 \mathbf{x}_i + \mathbf{K}_2 \sum_{j \in N_i} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i),\ i = 1, \ldots, 6, \tag{3.69}$$

请设计矩阵 $\mathbf{K}_1$ 和 $\mathbf{K}_2$，使系统同步到一条（a）渐近稳定轨迹，或（b）具有简谐振荡形式的轨迹。

iii. 使用 MATLAB 对每种情况进行仿真。

**练习 3.13**（偏差一致性）。 [4] 考虑由方程给出的一致性系统

$$\dot{\mathbf{x}}_i = -\mathbf{R}_i \sum_{j \in N_i} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j),\ i = 1, \ldots, n, \tag{3.70}$$

其中 $\mathbf{x}_i \in \mathrm{R}^2$, $\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \cos(\phi_i) & -\sin(\phi_i) \\ \sin(\phi_i) & \cos(\phi_i) \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^{2\times 2}$ 是一个旋转矩阵，交互图 $G$ 是无向且连通的。

i. 将系统表示为矩阵形式。ii. 求矩阵$\mathbf{R}_i$ 的条件，使系统渐近收敛到某个一致性值，并确定该一致性值。iii. 通过若干具体情形的仿真进行验证。

**练习 3.14**（领导者-跟随者一致性系统）。 考虑一个包含 $n$ 个智能体的系统，其交互图 $G$为无向连通图。假设系统中的智能体按照以下方程更新状态变量：

$$\dot{\mathbf{x}}_i = 0,\ i = 1, \ldots, l,$$
$$\dot{\mathbf{x}}_i = -\sum_{j \in N_i} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j),\ i = l+1, \ldots, n,$$

其中$\mathbf{x}_i \in \mathrm{R}^d$、 $d \geq 1$和 $l \geq 1$。采用上述算法， $l$个智能体 $i = 1$，.....， $l$为领导者智能体，其余智能体 $i = l+1$，.....， $n$为跟随者。领导者保持初始状态不变，而跟随者则根据 $G$ 中邻居智能体（包括领导者和跟随者）的状态变量更新自身的状态变量。

i. 设$\mathbf{x}(t) = [x_1, \ldots, x_n]^\top \in \mathrm{R}^n$。写出矩阵形式的动力学方程，以表示$\mathbf{x}$ 随时间的变化。ii. 证明当$t \to +\infty$时，跟随者智能体的状态变量渐近趋于常数值。确定向量$\mathbf{x}^* = \lim_{t\to+\infty}\mathbf{x}(t)$的值。iii. 证明跟随者的值 $x_i^*, i = l{+}1, \ldots, n$ 位于$\mathbf{x}_1(0) \ldots, \mathbf{x}$（领导者智能体的位置）的凸包内。点$\mathbf{x}_1(0) \ldots, \mathbf{x}_l(0)$的凸包定义为集合

$$_l(0)$$

$$\mathrm{conv}(\mathbf{x}_1(0), \ldots, \mathbf{x}_l(0)) = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^d |\ \mathbf{q} = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \mathbf{x}_i(0),\ \sum_{i=1}^{l} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0,\ \forall i = 1, \ldots, l\}$$

iv. 使用一个具体系统进行仿真。

# 第4章

# 基于李雅普诺夫方法分析一致性系统与边一致性过程

本章将运用 Lyapunov 稳定性理论这一工具来研究一致性系统。尽管前一章介绍的一致性系统相当简单，可以直接运用矩阵理论进行分析，但基于 Lyapunov 理论的分析方法能让我们更深入地认识趋于一致性的过程，从而拓展前一章的结果 [330]。

接下来，我们不再关注状态变量的动力学 $x_i$，而是考察系统中各条边（$x_i - x_j$）对应的相对变量（$j$，$i$）。用边来表示动力学时，一致性系统的状态模型可以借助边拉普拉斯矩阵表示。基于边动力学对一致性过程进行分析表明，我们总能用图 $G$的一棵生成树的边所对应的（$n-1$）个微分方程构成一个约化模型来表示一致性过程，而其余（$m-n+1$）条边的动力学则可由上述（$n-1$）个方程推得。

更广泛地说，基于边的一致性模型具有被动性。根据无源系统的性质，我们可以分析由智能体及其非线性交互构成的一致性系统。使多智能体系统的输出达到一致性，通常称为输出一致性问题。我们将通过简单Kuramoto模型，考察一个输出一致性的示例（振荡器的相位）。

## 4.1 不一致函数

考虑由 $n$ 个智能体组成的一致性系统，其模型为一阶积分环节，信息图为 $G$，一致性协议为：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{x}(t). \tag{4.1}$$

如前一章所定义，一致性空间定义为 $\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n | x_1 = \ldots = x_n\}$。我们可以将任意两个智能体 $i, j$ 之间的不一致程度定义为 $(x_i - x_j)^2$，并注意到，当 $(x_i - x_j)^2 = 0$ 时，智能体 $i$ 和 $j$ 达成一致性。

考虑无向图 $G$，则 $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \boldsymbol{\mathcal{L}}^\top$。我们可以将该系统的不一致函数 定义为$V_L = \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{x}$。将 $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \mathbf{H}^\top \mathrm{diag}(a_{ij})\mathbf{H}$重写为此形式，我们有 $\mathbf{x}^\top \mathbf{H}^\top \mathrm{diag}(a_{ij})\mathbf{H}\mathbf{x} = \sum_{(i,j)\in E} a_{ij}(x_i - x_j)^2$。显然，当图 $G$ 连通时，系统达到一致性当且仅当 $V_L = 0$。

接下来，考虑 $G$ 是有向平衡图的情形。此时 $\deg^+(v_i) = \deg^-(v_i)$，即 $\sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ji}$。因此，我们可以将这些求和式写为

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\mathcal{L}} \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^n \Big( x_i^2 \sum_{j=1}^n a_{ij} \Big) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i (x_i - x_j), \\
\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\mathcal{L}}^\top \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^n \Big( x_i^2 \sum_{j=1}^n a_{ji} \Big) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (x_j - x_i).
\end{aligned}$$

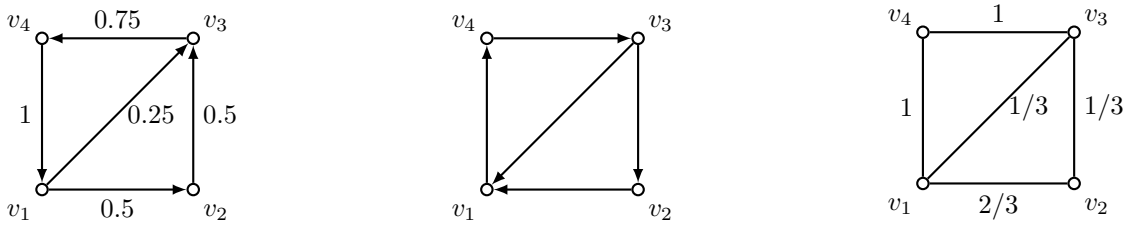
因此，我们可以选择 $V_L = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top (\boldsymbol{\mathcal{L}} + \boldsymbol{\mathcal{L}}^\top) \mathbf{x} = \sum_{i,\ j=1}^n a_{ij} (x_i - x_j)^2$。如果假设图 $G$ 是弱连通的，那么 $V_L = 0$ 当且仅当 $x_i = x_j,\ \ \forall i,\ \ j = 1, \ldots\ldots, \ n, \ \ i \neq j$；换句话说，系统 (4.1) 处于一致状态。

最后，考虑 $G$ 有向且强连通的情形。此时，根据定理 2.4，拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 有一个单特征值 $\lambda_1 = 0$，其右特征向量 $\boldsymbol{\gamma}^\top$ 的所有元素均为正。考虑矩阵 $\mathbf{M} = \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\mathcal{L}} + \boldsymbol{\mathcal{L}}^\top \boldsymbol{\Gamma}$，其中 $\boldsymbol{\Gamma} = \mathrm{diag}(\gamma_i)$，我们有 $\mathbf{M}$ 是一个对称矩阵。此外，

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\mathcal{L}} \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i - x_j) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_i a_{ij} x_i (x_i - x_j).
\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{\gamma}^\top \boldsymbol{\mathcal{L}} = \mathbf{0}^\top$，可得出 $\gamma_i \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \gamma_j a_{ji}$。因此，

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \gamma_i x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i - x_j) &= \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i^2 \sum_{j=1}^n a_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_i a_{ij} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{j=1}^n \gamma_j a_{ji} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_i a_{ij} x_i x_j \\
&= \sum_{j=1}^n x_j^2 \sum_{i=1}^n \gamma_i a_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_i a_{ij} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_i a_{ij} x_j (x_j - x_i).
\end{aligned}$$




(a) $G$ (b) $G$ (c) $\bar{G}$

图 4.1：（a）与 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 对应的 $G$ 图。（b）与 $\bar{G}$ 对应的图 $\bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\mathcal{L}} + \boldsymbol{\mathcal{L}}^\top\boldsymbol{\Gamma}$。

因此，

$$\begin{aligned} V_L &= \mathbf{x}^\top(\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\mathcal{L}} + \boldsymbol{\mathcal{L}}^\top\boldsymbol{\Gamma})\mathbf{x} = 2\mathbf{x}^\top\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_i a_{ij}x_i(x_i - x_j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_i a_{ij}x_j(x_j - x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_i a_{ij}(x_i - x_j)^2. \end{aligned}$$

我们证明，对于 $G$ 为强连通时，L 的核 = L 的核 = im($\mathbf{1}_n$)。事实上，如果 x 是 L 的特征值 0 对应的特征向量，则 $\mathbf{x}^\top\mathbf{M}\mathbf{x} = 2\mathbf{x}^\top\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{L}\mathbf{x} = 0$，从而 x 2 M 的核。由于 L 的核 = im($\mathbf{1}_n$)，可得 im($\mathbf{1}_n$) $\subseteq$ M 的核。矩阵 M 是与图 $\bar{G}$对应的拉普拉斯矩阵，其顶点集与 $G$ 相同，且边 $(v_i, v_j)$ 的边权重为 $\bar{a}_{ij} = \gamma_i a_{ij} + \gamma_j a_{ji}$。显然，$\bar{G}$ 是一个无向图。由于 $G$ 是强连通的，$\bar{G}$ 是强连通的。这意味着 M 的秩 $= n-1$，且 M 的核 =im($\mathbf{1}_n$)。这证明了系统达到一致性，当且仅当 $V_L = 0$。

**例 4.1.** 在图 4.1(a)中，$G$ 是一个有向图，其拉普拉斯矩阵为

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.25 & -0.5 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & -0.75 & 0.75 \end{bmatrix}.$$

显然，$G$ 是一个强连通且不平衡的图。矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \boldsymbol{\mathcal{L}}(G)$ 有一个对应于特征值 0 的左特征向量 $\boldsymbol{\gamma}^\top = [\frac{3}{4}, 1, 1, 1]$。在图 4.1(b) 中，$G'$是一个有向图，其无权拉普拉斯矩阵的元素分别为 0、负数和正数，对应于 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^\top$。最后，图 4.1(c) 是与该矩阵对应的无向图

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\mathcal{L}} + \boldsymbol{\mathcal{L}}^\top\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & -0.25 & -0.75 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 \\ -0.25 & -0.5 & 1.5 & -0.75 \\ -0.75 & 0 & -0.75 & 1.5 \end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}(\bar{G}).$$

**Francesco Bullo 与《网络系统讲义》**

Francesco Bullo 获得了意大利帕多瓦大学电气工程学士学位，并于 1998 年获得美国加州理工学院博士学位。Bullo 目前的研究方向是网络化控制及其在工程、社会学和物理系统中的应用。目前，Bullo 是某系的教授。此前，Bullo 的研究方向是机器人控制。

Bullo 在联网控制方面的研究具有跨学科合作的特点：与 Noah Friendkin 研究社交网络，与 F. Döfler 研究智能电力系统，并与 J. Cortes 和 S. Martinez 合作开展控制领域的应用数学研究。

Bullo 开创了为若干与自身研究方向相关的主题编写教材，并在个人网站上免费公开的先河。这些教材编排精美，秉持 Richard Hamming 的理念："后人会珍视那些系统梳理核心概念、阐明基础思想，并删去低效方法和重复内容的教材。"

《网络化控制讲义》 [35] （简称：LNS）是一部自2016年以来持续公开发布并逐步完善的教材。教材内容分为三部分：第一部分介绍图论和线性一致性系统，其中大部分内容涉及离散一致性算法。第二部分介绍线性一致性系统中的一些高级主题，第三部分则讲述一些非线性网络化系统。与现有的多智能体系统控制相关文献相比，Bullo 的教材提供了大量练习，并通过许多示例对所介绍的理论进行了相当详尽的讲解。

Bullo 的 LNS 教材可通过 `https://fbullo.github.io/lns/` 获取。

## 4.2 使用李雅普诺夫方法进行一致性过程分析

根据上一小节的结果，不一致函数 $V_L$ 可用作李雅普诺夫势函数。本小节将基于李雅普诺夫方法，在图 $G$ 的不同假设下，分析一致性过程 $\dot{\mathbf{x}}(t) = -\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{x}(t)$。

首先，若图 $G$ 是无向且连通的，则拉普拉斯矩阵对称且半正定，并且 $\ker(\mathbf{L}) = \mathrm{im}(\mathbf{1}_n)$。考虑李雅普诺夫函数 $V = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top\mathbf{x}$，则

$$\dot{V} = \mathbf{x}^\top\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^\top\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{x} \leq 0.$$

根据LaSalle不变性原理，轨迹渐近趋于 $\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ [126]中的最大不变集。由于图是连通的，我们可推得 $\mathcal{S} = \mathrm{im}(\mathbf{1}_n)$。因此，当$t \to +\infty$时，$\mathbf{x}(t) \to \alpha\mathbf{1}_n$，其中 $\alpha \in \mathbb{R}$；也就是说，系统渐近趋于一致集。根据定理3.2，我们可得：

i. 与轨迹 $\mathbf{x}(0)$ 对应的不变集仅包含元素 $x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i(0)$。

ii. $\mathbf{1}_n^\top(\mathbf{x}(t) - x^*\mathbf{1}_n) = 0$, hay $(\mathbf{x}(t) - x^*\mathbf{1}_n) \perp \ker(\boldsymbol{\mathcal{L}})$.

由 (i)，我们推出 $\mathbf{x} \to x^*\mathbf{1}_n$ 当 $t \to +\infty$时。由 (ii)，选择 $W = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - x^*\mathbf{1}_n)^\top(\mathbf{x} - x^*\mathbf{1}_n)$ 我们ó:

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= -(\mathbf{x} - x^*\mathbf{1}_n)^\top\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{x} \\
&= -(\mathbf{x} - x^*\mathbf{1}_n)^\top\boldsymbol{\mathcal{L}}(\mathbf{x} - x^*\mathbf{1}_n) \\
&\leq -\lambda_2(\boldsymbol{\mathcal{L}})(\mathbf{x} - x^*\mathbf{1}_n)^\top(\mathbf{x} - x^*\mathbf{1}_n) \\
&\leq -2\lambda_2(\boldsymbol{\mathcal{L}})W.
\end{aligned}$$

由此我们得出结论：$\mathbf{x}(t)$ 以指数速率渐近趋近于 $x^*\mathbf{1}_n$。$\mathbf{x}(t) - x^*\mathbf{1}_n$的收敛速度取决于 $\lambda_2(\mathcal{L})$——拉普拉斯矩阵的最小正特征值。

接下来，考虑图 $G$ 是有向、平衡且弱连通的。此时，对于李雅普诺夫函数$V = \mathbf{x}^\top\mathbf{x}$，有

$$\dot{V} = -\mathbf{x}^\top(\mathcal{L} + \mathcal{L}^\top)\mathbf{x}.$$

根据小节 4.2 的结果，有 $\dot{V} \leq 0$ 且 $\dot{V} = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$。根据 LaSalle不变性原理，$\mathbf{x}(t) \to \mathcal{A}$ 当 $t \to +\infty$。

考虑有向且强连通的图 $G$。选取李雅普诺夫函数 $V = \mathbf{x}^\top\Gamma\mathbf{x}$，有：

$$\dot{V} = -\mathbf{x}^\top(\Gamma\mathcal{L} + \mathcal{L}^\top\Gamma)\mathbf{x}.$$

同样根据小节 4.2 的结果，有 $\dot{V} \leq 0$，$\dot{V} = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$，因此 $\mathbf{x} \to \mathcal{A}$ 当 $t \to +\infty$。由此可见，对应于特征值 0 的左特征向量在选择李雅普诺夫函数时发挥着重要作用。换言之，与系统 (4.1) 对应的李雅普诺夫方程的解为 $\Gamma = \mathrm{diag}(\gamma)$。

对于具有入树但非强连通的图，$\mathcal{L}$ 的左特征向量 $\gamma^\top$中，与不属于包含 $G$出根的临界强连通分量的顶点对应的元素均为 0。我们可以将位于包含入根的强连通分量中的顶点标记为$v_1,\ldots,v_l$。其余顶点为 $v_{l+1},\ldots,v_n$。由此，可以将矩阵 $\mathcal{L}$ 写成如下形式：

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{bmatrix},$$

其中 $\mathrm{L}_{11} \in \mathrm{R}^{l\times l}$, $\mathrm{L}_{21} \in \mathrm{R}^{(n-l)\times l}$, $\mathrm{L}_{22} \in \mathrm{R}^{(n-l)\times(n-l)}$。L 的表示式中的零矩阵表明，没有信息从顶点 $v_{l+1},\ldots,v_n$ 传递到属于包含入根的强连通分量的顶点。因此，我们可以单独分析属于包含入根的强连通分量的智能体的一致性过程，如上文所述。不失一般性，我们可以假设与 $G - \{v_1,\ldots,v_l\}$ 对应的图是强连通的；其他情况也都可以用类似的方法分析。显然，$\det(\lambda\mathrm{I}_n - \mathrm{L}) = \det(\lambda\mathrm{I}_l - \mathrm{L}_{11})\det(\lambda\mathrm{I}_{n-l} - \mathrm{L}_{22}) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$。由于 $G$ 是一个具有入根的图，L 有一个单特征值 $\lambda_1 = 0$，且 $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0, \forall i = 2,\ldots,n$。由于 $\mathrm{L}_{11}$ 是与强连通图 $G - \{v_{l+1},\ldots,v_n\}$ 对应的拉普拉斯矩阵，因此单根 $\lambda_1 = 0$ 是多项式 $\det(\lambda\mathrm{I}_l - \mathrm{L}_{11})$的根。因此，多项式 $\det(\lambda\mathrm{I}_{n-l} - \mathrm{L}_{22})$的所有根的实部均为正，亦即 $-\mathrm{L}_{22}$ 是赫尔维茨矩阵。

令 $\mathbf{y} = [x_1,\ldots,x_l]^\top$ 和 $\mathbf{z} = [x_{l+1},\ldots,x_n]^\top$，则

$$\dot{\mathbf{y}} = -\mathcal{L}_{11}\mathbf{y}, \tag{4.2}$$

$$\dot{\mathbf{z}} = -\mathcal{L}_{22}\mathbf{z} - \mathcal{L}_{21}\mathbf{y}. \tag{4.3}$$

我们考察智能体$1,\ldots,l$已处于一致状态的系统，即此时 $\mathbf{y} = x^*\mathbf{1}_l$。记 $\mathcal{L}'$为与图 $G' = G - \{v_1,\ldots,v_l\}$对应的拉普拉斯矩阵，则可写为 $\mathcal{L}_{22} = \mathcal{L}' + \mathrm{diag}(-\mathcal{L}_{21}\mathbf{1}_{n-l})$。由于$-\mathcal{L}_{22}$是赫尔维茨的，线性系统 $\dot{\mathbf{z}} = -\mathcal{L}_{22}\mathbf{z} - \mathcal{L}_{21}\mathbf{1}_{n-l}x^*$具有

$$\lim_{t\to+\infty}\mathbf{z}(t) = -\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21}\mathbf{1}_{n-l}x^*.$$

注意，$\mathcal{L}_{22}\mathbf{1}_{n-l} = (\mathcal{L}' + \mathrm{diag}(-\mathcal{L}_{21}\mathbf{1}_{n-l}))\mathbf{1}_{n-l} = -\mathcal{L}_{21}\mathbf{1}_{n-l}$。因此，$\lim_{t\to+\infty}\mathbf{z}(t) = \mathbf{1}_{n-l}x^*$。

最后，我们可以定义 $\mathbf{q} = [q_1,\ldots,q_{n-l}]^\top = \mathcal{L}_{22}^{-1}\mathbf{1}_{n-l}$, $\mathbf{P} = \mathrm{diag}(p_i) = \mathrm{diag}(1/q_i)$, $\mathbf{Q} = \mathbf{P}\mathcal{L}_{22} + \mathcal{L}_{22}^\top\mathbf{P}$，则 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 是对称正定矩阵，因此可以为式（4.3）选取李雅普诺夫函数 $V_z = \mathbf{z}^\top\mathbf{P}\mathbf{z}$。

**示例4.2**（采用若干不同有向图的一致性系统仿真）。本例中，我们对若干不同有向图的一致性算法进行仿真。仿真结果如图4.2所示。

在第一次仿真中，初始值由 $\mathbf{x}(0) = [1,2,3,4,5]^\top$ 给出。图 $G_1$ 是一个包含 5 个顶点的有向环。显然，$G_1$ 是平衡图。因此，智能体的状态变量逐渐一致于算术平均值 $\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i(0) = 3$。

在第二次和第三次仿真中，系统的初始值由 $\mathbf{x}(0) = [1,2,3,4,5,6]^\top$ 给出。图 $G_2$ 是一幅具有出根的图。包含出根的强连通分量是一个由顶点 1、2、3 构成的有向环。因此，智能体渐近趋于算术平均值 $\frac{1}{3}(x_1(0) + x_2(0) + x_3(0)) = 2$。最后，图 $G_3$ 的唯一出根是顶点 $v_1$，因此智能体逐渐在 $x_1(0) = 1$ 达成一致性。

## 4.3 边一致性过程

考虑由连通无向图 $G = (V, E)$ 描述的线性一致性系统，其中系统中的智能体由一阶积分环节描述。该一致性系统的方程为：

$$\dot{\mathbf{x}} = -\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{x}, \tag{4.4}$$

其中，$\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^\top \in \mathbf{R}^n$ 是系统中 $n$ 个智能体的状态向量。设 $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{H}\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$，其中 $\mathbf{H}$ 是 $G$ 的关联矩阵，则 $\boldsymbol{\zeta}$ 包含 $m$ 个元素，其形式为 $(x_j - x_i)$，对应图中的边 $(i, j)$。将(4.4)两边左乘矩阵 $\mathbf{H}$，并注意到对于 $G$ 无向图，有 $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \mathbf{H}^\top\mathbf{H}$，可得如下边一致性模型：

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = -\mathbf{H}\mathbf{H}^\top(\mathbf{H}\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\mathcal{L}}_e\boldsymbol{\zeta}, \tag{4.5}$$

其中 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_e \triangleq \mathbf{H}\mathbf{H}^\top \in \mathbf{R}^{m\times m}$ 称为边拉普拉斯矩阵[1]。显然，$\boldsymbol{\mathcal{L}}_e$ 是一个对称半正定矩阵。由于 $G$ 连通，$m \geq n-1$。设 $\lambda$ 是 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的任意一个特征值，$\mathbf{v}$ 是对应的特征向量，则有：

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_e(\mathbf{H}\mathbf{v}) = \mathbf{H}\mathbf{H}^\top\mathbf{H}\mathbf{v} = \mathbf{H}\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{H}\mathbf{v}). \tag{4.6}$$

因此，$\lambda$ 也是 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_e$ 的一个特征值，其对应的特征向量为 $\mathbf{H}\mathbf{v}$。我们还有

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{\mathcal{L}}) = \operatorname{rank}(\mathbf{H}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{\mathcal{L}}_e) = n-1.$$

因此，$\boldsymbol{\mathcal{L}}_e$ 恰有 $n-1$ 个正特征值（也就是 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的正特征值）和（$m-n+1$）个特征值 0，其对应的特征向量是位于 $G$ 的循环空间中的向量（第2章）。

令 $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{x} - \mathbf{1}_n\bar{x}$，其中 $\bar{x} = \frac{1}{n}\mathbf{1}_n^\top\mathbf{x}$，那么我们知道，当 $t \to +\infty$ 时，$\|\boldsymbol{\delta}\| \to 0$。因此，

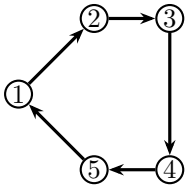
$$\|\boldsymbol{\zeta}\| = \|\mathbf{H}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{H}\boldsymbol{\delta}\| \leq \|\mathbf{H}\|\|\boldsymbol{\delta}\| \to 0,$$

当 $t \to +\infty$ 时。这表明，当与顶点对应的状态变量渐近趋于一致性集合时，与边对应的状态变量也渐近收敛。

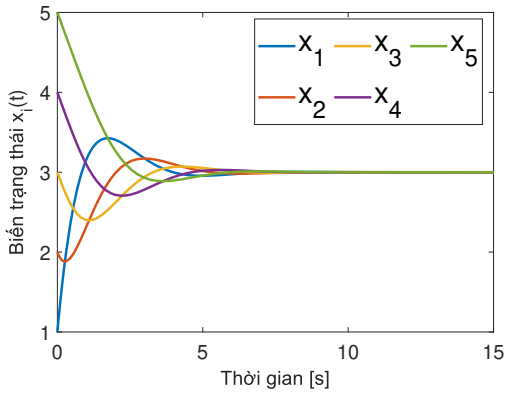
假设我们已为图 $G$ 的边编号，使得生成树 $T$ 的边依次为 $e_1, \ldots, e_{n-1}$，则可以将矩阵 $\mathbf{H}$ 改写为：

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{E(T)} \\ \mathbf{H}_{E\setminus E(T)} \end{bmatrix}, \tag{4.7}$$

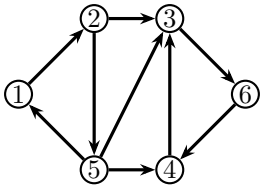
[1] 边拉普拉斯矩阵



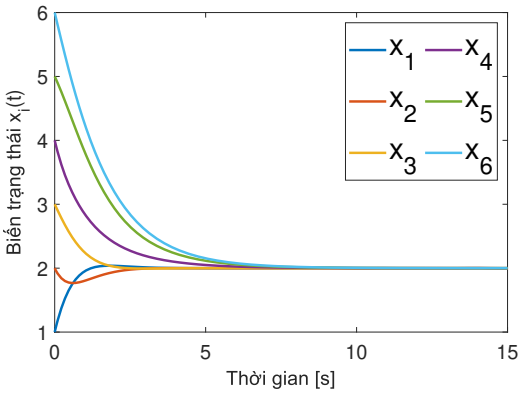

(a) $G_1$



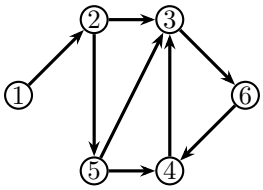

(b)



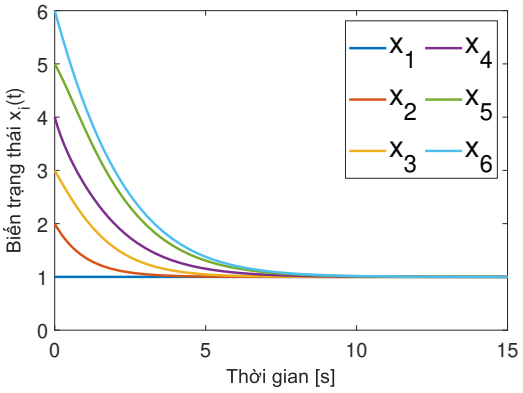

(c) $G_2$




(d)

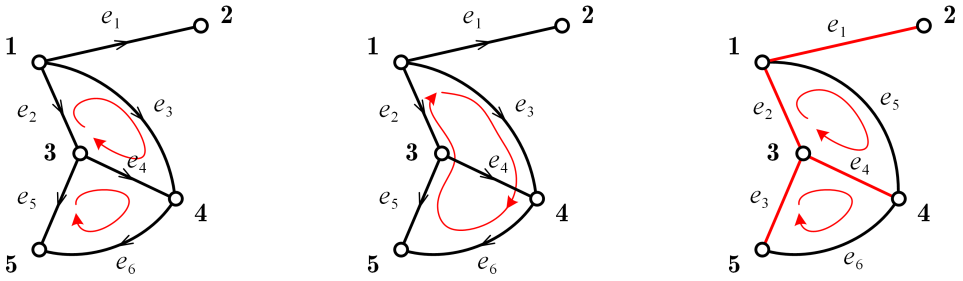



(e) $G_3$




(f)

图4.2：示例4中三个不同有向图下的一致性算法仿真。 2.




(a) (b) (c)

图 4.3：图 $G$ 有三个环，其中两个环是独立的。

其中，$\mathrm{H}_{E(T)} \in \mathrm{R}^{(n-1)\times n}$ 是生成树 $T$的关联矩阵，而 $\mathrm{H}_{E\setminus E(T)} \in \mathrm{R}^{(m-n+1)\times n}$ 是删除 $E(T)$ 中的边后，$G$的剩余子图所对应的关联矩阵。由于 $T$连通，$\mathrm{H}^{E(T)}$ 满足 $\ker(\mathrm{H}^{E(T)}) = \mathrm{im}(\mathbf{1}_n)$。由于 $\mathrm{H}_{E\setminus E(T)}$ 中的每一行都可以表示为 $\mathrm{H}^{E(T)}$中各行的线性组合，存在矩阵 $\mathrm{T} \in \mathrm{R}^{(m-n+1)\times(n-1)}$，使得 $\mathrm{H}_{E\setminus E(T)} = \mathrm{T}\mathrm{H}_{E(T)}$。注意，$\mathrm{H}_{E(T)}$具有满行秩，因此 $\mathrm{L}_e(T) = \mathrm{H}_{E(T)}\mathrm{H}_{E(T)}^{\top}$ 可逆，我们可以写成

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}_{E\setminus E(T)}\mathbf{H}_{E(T)}\left(\mathbf{H}_{E(T)}\mathbf{H}_{E(T)}^{\top}\right)^{-1}. \tag{4.8}$$

令$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-1} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix}$，则有$\mathbf{H} = \mathbf{R}\mathbf{H}^{E(T)}$ 且$\boldsymbol{\mathcal{L}}_e = \mathbf{H}\mathbf{H}^{\top} = \mathbf{R}\mathbf{H}^{E(T)}\mathbf{H}_{E(T)}^{\top}\mathbf{R}^{\top} = \mathbf{R}\boldsymbol{\mathcal{L}}_e(T)\mathbf{R}^{\top}$。

回到边一致性方程 (4.5)，我们可以将其表示为

$$\mathbf{y} = \left[\boldsymbol{\zeta}_t^{\top},\ \boldsymbol{\zeta}_c^{\top}\right]^{\top} = \mathbf{R}\boldsymbol{\zeta}_t,$$

其中，$\boldsymbol{\zeta}_t$ 是与生成树 $T$对应的边状态变量向量，而 $\boldsymbol{\zeta}_c$ 对应其余边。因此，由 (4.5) 可得

$$\mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\zeta}}_t = -\boldsymbol{\mathcal{L}}_e\mathbf{R}\boldsymbol{\zeta}_t. \tag{4.9}$$

将 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_e = \mathbf{R}\boldsymbol{\mathcal{L}}_e(T)\mathbf{R}^{\top}$ 代入 (4.9)，可得:

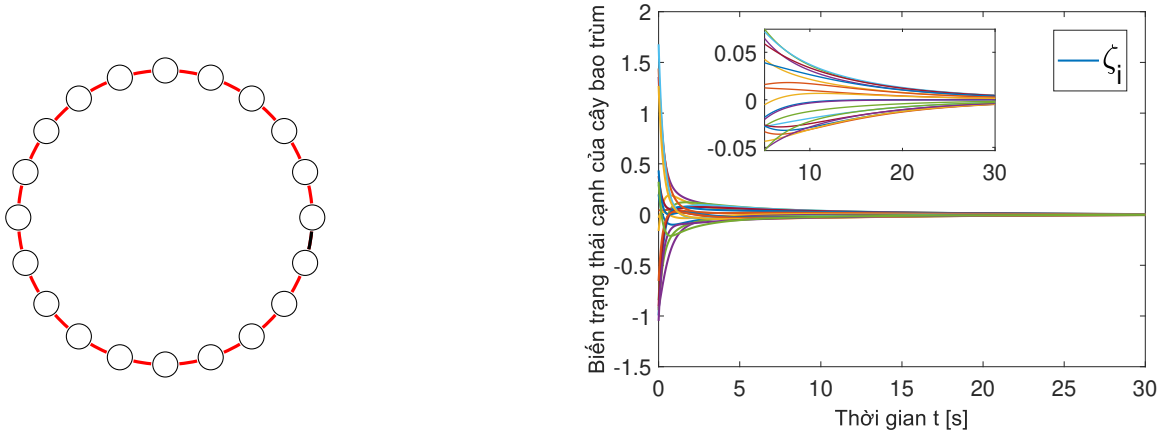
$$\mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\zeta}}_t = -\mathbf{R}\boldsymbol{\mathcal{L}}_e(T)\mathbf{R}^{\top}\mathbf{R}\boldsymbol{\zeta}_t. \tag{4.10}$$

由方程 (4.10) 和矩阵 $\mathbf{R}$的结构可知，所描述的降阶系统为

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}_t = -\boldsymbol{\mathcal{L}}_e(T)\mathbf{R}^{\top}\mathbf{R}\boldsymbol{\zeta}_t \tag{4.11}$$

完全描述了边一致性系统 (4.5)。当确定了任意一棵树所对应状态变量的动力学后，其余边状态变量 $\boldsymbol{\zeta}_c$ 便可根据公式$\boldsymbol{\zeta}_c = \mathbf{T}\boldsymbol{\zeta}_t$立即推得。

**示例 4.3.** 考虑图 $G$，如图 4.3 所示。对于由红色边构成的生成树，以及




(a) 图 $C_{20}$ (b) $\zeta_t(t)$

图 4.4：示例4.4的仿真说明。红色边构成图的一棵生成树。相对变量 $\boldsymbol{\zeta}(t) \to \mathbf{0}$ 当 $t \to +\infty$。

正向定向的环，我们可以写出

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{E(T)} \\ \hline \mathbf{H}_{E\setminus E(T)} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right], \text{ và } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

**示例4.4**。 在此示例中，我们仿真一个由20个顶点组成的循环图中的边一致性过程。对于图 $C_{20}$，任意19条边都构成该图的一棵生成树。图4.4中的仿真结果表明 $\boldsymbol{\zeta}_t(t) \to \mathbf{0}$，因此 $\boldsymbol{\zeta}(t) \to \mathbf{0}$ 当 $t \to +\infty$。

## 4.4 各无源系统输出同步

本小节中，我们研究非线性一致性系统。非线性关系可能存在于智能体模型中，也可能存在于智能体间交互关系中。这里的分析工具是无源系统理论[13, 328]。

考察非线性系统

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t)), \tag{4.13}$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{z}(t), \tag{4.14}$$

其中 $\mathbf{f}$ 满足关于变量 $\mathbf{z}$ 的局部 Lipschitz 条件（即对于任意 $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in D$，总存在$L > 0$使得 $\|\mathbf{f}(\mathbf{z}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{z}_2)\| \leq L\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|$），且 $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$。此时，若存在一个连续可微、半正定的函数 $V$，称为储能函数，并满足以下条件，则系统 (4.13) 是无源系统：

$$\mathbf{u}(t)^\top \mathbf{y}(t) \geq \dot{V}(t), \ \forall t \geq 0. \tag{4.15}$$

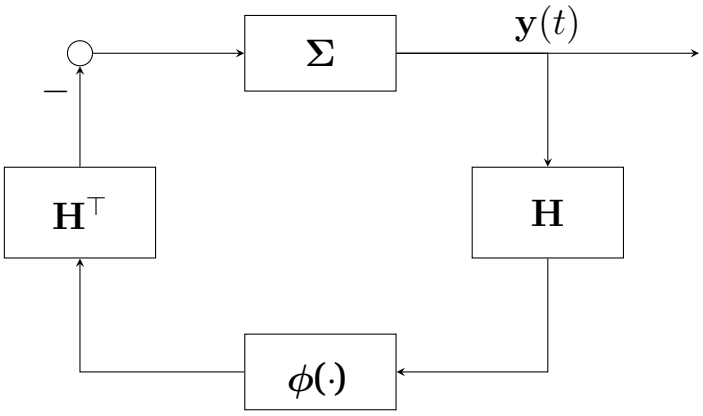



图 4.5：由 $n$ 个被动子系统组成的系统 $\Sigma$，其连接函数为 $\boldsymbol{\phi}(\cdot)$。

如果在方程 (4.15) 中，$\dot{V}$由 $\dot{V}+\psi(\mathbf{z})$ 替代，且函数 $\psi$为正定函数，则称该系统为严格无源系统。此外，由于输出变量与状态变量相同，$\mathbf{u}^\top(t)\mathbf{y}(t) \geq \dot{V}(t)+\psi(\mathbf{y}(t))$ $\forall t$,因此系统 (4.13) 是输出严格无源的。关于无源系统 (4.13)，我们有如下结果：

**定理 4.1.** [126] 假设系统（4.13）是被动的，则坐标原点 Lyapunov 稳定。若系统严格被动，则 (4.13) 坐标原点渐近稳定。

接下来，我们研究由 $n$ 个被动智能体组成的系统的一致性协议设计问题。假设系统中的每个智能体具有如下运动学模型：

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i)\mathbf{u}_i, \tag{4.16}$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{h}_i(\mathbf{x}_i), \tag{4.17}$$

其中 $\mathbf{x}_i \in \mathrm{R}^d$，$\mathbf{u}_i \in \mathrm{R}^l$，$\mathbf{f}_i\colon \mathrm{R}^d \to \mathrm{R}^d$，$\mathbf{g}_i\colon \mathrm{R}^d \to \mathrm{R}^{d\times l}$，$\mathbf{h}_i\colon \mathrm{R}^d \to \mathrm{R}^q$，且 $i=1,\ldots,n$。假设智能体通过无向图 $G=(V,E,W)$相连，且每个子系统都是被动的，其储能函数 $V_i(\mathbf{x}_i)$满足：

$$\dot{V}_i \leq \mathbf{y}_i^\top \mathbf{u}_i. \tag{4.18}$$

假设函数 $\boldsymbol{\phi}:\mathrm{R}^p \to \mathrm{R}^p$ 是局部 Lipschitz 的（即在给定集合 $D\subset \mathrm{R}^d$ 中，总存在$L>0$ 使得 $\|\boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}_1)-\boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}_2)\| \leq L\|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2\|, \forall \mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2 \in D$），并满足：(i) $\boldsymbol{\phi}(-\mathbf{r}_1)=-\boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}_1)$，(ii)$\mathbf{r}_1^\top\boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}_1)>0, \forall \mathbf{r}_1 \neq \mathbf{0}_d$。一致性算法设计如下：

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j\in N_i} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{y}_j-\mathbf{y}_i). \tag{4.19}$$

采用一致性协议 (4.19) 的一致性系统示意图如图 4.5 所示。

选取李雅普诺夫函数 $V=\sum_{i=1}^n V_i$，可得：

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i^\top \mathbf{u}_i = -\mathbf{y}^\top \bar{\mathbf{H}}^\top \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{H}}\mathbf{y}) \leq 0. \tag{4.20}$$

因此，$\mathbf{x}(t)$ 有界且 $\dot{V}=0$ 当且仅当 $\bar{\mathbf{H}}\mathbf{y}=\mathbf{0}_{nq}$。根据 LaSall 不变性原理 e,

$$\mathbf{x}(t) \to \Omega = \{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^{dn} |\ \mathbf{y}_i=\mathbf{y}_j, \forall i,j=1,\ldots,n,(i,j)\in E\}. \tag{4.21}$$

由于图是连通的，不变集仅包含满足 $\mathrm{y}_i = \mathrm{y}_j$ 的值。因此，对于一致性协议 (4.19)，智能体的输出变量渐近趋于一致性空间。若进一步假设 $\mathrm{h}_i(\cdot) = \mathrm{h}_j(\cdot) = \mathrm{h}(\cdot) \forall i, j \in V$ 且 $\mathrm{h}(\cdot)$ 是单射，则由 $\mathrm{h}_i(\mathrm{x}_i) = \mathrm{h}_j(\mathrm{x}_j)\ \forall i, j = 1, \ldots, n$，还可推出状态变量上的系统一致性 ($\mathrm{x}_i \to \mathrm{x}_j \forall i, j = 1, \ldots, n$)。

例如，可以选取函数 $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{W}\mathbf{x}$，其中 $\mathbf{W} = \mathrm{diag}(\omega_k) \in \mathrm{R}^{m \times m}$ 是一个正定对角矩阵。

**示例4.5.** [简单Kuramoto模型] 考虑一个由 $n$ 个振荡智能体组成的系统，其角频率为 $\omega_i > 0$，相位角由 $\theta_i(t)$ 给出。智能体间的交互由无向图 $G$ 描述，并由以下方程给出：

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i - \frac{k}{n} \sum_{j \in N_i} \sin(\theta_i - \theta_j),\ i = 1, \ldots, n. \tag{4.22}$$

Kuramoto模型在物理学中得到了广泛研究，并可用于解释萤火虫同步闪烁等现象，或用于建立振荡源同步模型。

考虑简单Kuramoto模型，其中角频率为 $\omega_i = \omega_j = \omega$，同时智能体之间的连接由无向连通图 $G$ 描述。

描述该系统的微分方程由下式给出

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) = \omega \mathbf{1}_n - \frac{k}{n} \mathbf{H}^\top \sin(\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}). \tag{4.23}$$

进行变量变换 $\boldsymbol{\zeta}(t) = \boldsymbol{\theta}(t) - \omega t \mathbf{1}_n$，则

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = -\frac{k}{n} \mathbf{H}^\top \sin(\mathbf{H}\boldsymbol{\zeta}). \tag{4.24}$$

可以验证，系统 (4.24) 是一个无源系统。同时，当 $|x| < \frac{\pi}{2}$ 时，正弦函数$(x)$ 满足条件 (i) 和 (ii)。因此，对于 $\max_{i,j \in V} |\theta_i(0) - \theta_j(0)| < \frac{\pi}{2}$，当 $t \to +\infty$ 时有 $\boldsymbol{\zeta}(t) \to \mathrm{im}(\mathbf{1}_n)$。由此可得，当 $t \to +\infty$ 时，$\theta_i \to \theta_j$。

对包含 6 个智能体的系统 (4.23) 进行仿真，其选取如图 4.6 所示。在本示例中，所选取的图 $G$ 具有关联矩阵

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$k = n$，以及 $\omega_i = 1$。初始条件 $\theta_i(0)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 内随机选取，因此对所有 $i \neq j$，有 $|\theta_i(0) - \theta_j(0)| < \frac{\pi}{2}$。图4.6 表明，当 $t \to +\infty$ 时，各相位角逐渐达到一致性。（注意：在仿真中，当 $t \to +\infty$ 时，$\theta_i$ 有增大至无穷的趋势，然而实际上 $\theta_i$ 的取值位于区间 $[0, 2\pi]$ 内。）

## 4.5 注释和参考文献

本章中关于为一致性系统选择李雅普诺夫函数的一些结果参考自[330]。李雅普诺夫方法为分析一致性过程提供了一种直接途径，不仅

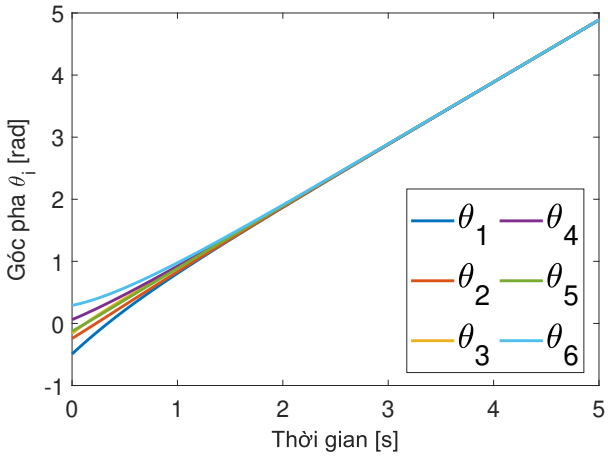



图4.6：示例4.5中6个智能体的简单Kuramoto模型仿真。

适用于线性一致性系统，也适用于智能体模型更复杂的一致性系统，以及具有时延、拓扑随时间变化的一致性系统 [192],.....其他一些研究则着重于设计有限时间一致性协议，其依据是对李雅普诺夫定理和LaSalle不变性原理的一些扩展定理 [308, 57, 208, 183]。 [256, 95, 127, 17]介绍了输入信号随时间变化的一致性算法。

本章基于文献[328]介绍了关于边一致性、降阶一致性模型以及采用无源化方法分析一致性系统的结果。关于一致性系统无源方法的其他文献包括 [13, 54, 36]

## 4.6 练习

**练习4.1**。 考虑由下式给出的二阶积分器型智能体的一致性系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_{i1} &= x_{i2},\\ \dot{x}_{i2} &= -k_1 \sum_{j\in N_i}(x_{i1}-x_{j1}) - k_2 x_{i2},\ i=1,\ldots,n,\end{aligned}$$

其中$\mathbf{x}_i = [x_{i1}, x_{i2}]^\top$是第 $i$个智能体的状态变量， $k_1$， $k_2 > 0$为正常数，且交互图 $G$ 是无向图。请采用李雅普诺夫方法分析上述一致性系统的收敛性。

**练习 4.2.** 问题与练习 4.1 相同，但一致性系统由下式给出：

$$\begin{aligned}\dot{x}_{i1} &= x_{i2},\\ \dot{x}_{i2} &= -k_1 \sum_{j\in N_i}(x_{i1}-x_{j1}) - k_2 x_{i2} - k_3 \sum_{j\in N_i}(x_{i2}-x_{j2}),\ i=1,\ldots,n.\end{aligned}$$

**练习 4.3** （衰减噪声对一致性系统的影响）. 考虑受噪声影响的一致性系统：

$$\dot{x}_i = -\sum_{j\in N_i}(x_i - x_j) + \omega_i(t),\ i=1,\ldots,n, \tag{4.25}$$

其中 $\omega_i(t)$ 满足 $|\omega_i(t)| \le k_i e^{-\rho_i t}$。证明，当 $t \to +\infty$ 时，$\mathbf{x}$ 趋于一致性集合。（提示：使用引理："若 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}$ 是一个满足 $\mathbf{A}$ 为 Hurwitz矩阵的系统，则当 $t \to +\infty$ 时，$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 渐近稳定。"结合将系统 (4.25) 改写为矩阵形式，对 $\mathcal{L} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$ 进行分析，并作变量替换 $\mathbf{z} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$。）

**练习 4.4** (有限时间一致性算法)。 [25, 297] 对于 $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$ 和 $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$。若存在连续函数 $V(\mathbf{x}) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$，使得满足以下条件

(i) $V(\mathbf{x})$ 是正定的，

(ii) 存在 $\kappa > 0, \alpha \in (0,1)$，以及一个包含坐标原点的开集 $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{D}$，在该集合上

$$\dot{V}(\mathbf{x}) + \kappa (V(\mathbf{x}))^{\alpha} \le 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \setminus \{\mathbf{0}_d\},$$

则 $V(\mathbf{x}) \to 0$ 在有限时间内达到，其上界为 $T \le V(0)^{1-\alpha}/(\kappa(1-\alpha))$.

利用上述结果，考虑无向图 $G$ 上的一致性系统。证明由下式给出的控制律

$$\dot{x}_i = -k \sum_{j \in N_i} \operatorname{sig}^{\alpha}(x_i - x_j),\ i = 1, \ldots, n, \tag{4.26}$$

其中 $k > 0, \alpha \in (0,1)$ 且 $\operatorname{sig}^{\alpha}(x) = |x|^{\alpha}\operatorname{sign}(x)$，将帮助系统在有限时间内收敛至算术平均值。求收敛时间的上界，并分析该值对系统参数 $k, \alpha$ 和 $\lambda_2(\mathcal{L})$ 的依赖关系。

**练习 4.5.** [228, 318] 考虑通过一个连通无向图进行交互的机器人网络模型 $G$。网络中的每个机器人由以下方程描述：

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}(\mathbf{q}_i) = \mathbf{u}_i,\ i = 1, \ldots, n, \tag{4.27}$$

其中：

- $\mathbf{q}_i = [q_{i1}, \ldots, q_{id}]^{\top}$：关节变量的广义坐标向量，
- $\mathbf{u}_i = [u_{i1}, \ldots, u_{id}]^{\top}$：输入控制向量（外力），
- $\mathbf{M}(\mathbf{q}_i) = \mathbf{M}(\mathbf{q}_i)^{\top} > 0,\ \forall \mathbf{q}_i$：惯性矩阵，满足 $0 < k_m \le \|\mathbf{M}(\mathbf{q}_i)\| \le k_{\bar{m}}$，
- $\mathbf{C}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i$：向心力分量和科里奥利力，$\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}_i) = \mathbf{C}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) + \mathbf{C}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)^{\top}$，
- $\mathbf{g}(\mathbf{q}_i) = \left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}_i}\right)^{\top}$：重力，$P(\mathbf{q}_i)$：势能函数，$\mathbf{g}(\mathbf{q}_i) = \mathbf{0}_d \Longleftrightarrow \mathbf{q}_i = \mathbf{0}_d$。

i. 考虑机器人 $i$，使用李雅普诺夫函数 $V = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}_i)^{\top}\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathrm{P}(\mathbf{q}_i)$，证明对于控制律 $\mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_d\dot{\mathbf{q}}_i$，其中 $\mathbf{K}_d = \mathbf{K}_d^{\top} > 0$，$\mathbf{q}_i = \mathbf{0}_d$，$\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0}_d$ 是全局渐近稳定的。

ii. 考虑每个智能体如下形式的一致性协议：

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{M}(\mathbf{q}_i)\Big(-\sum_{j \in N_i} a_{ij}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) - k\dot{\mathbf{q}}_i\Big) + \mathbf{C}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}(\mathbf{q}_i),$$

其中 $i = 1$，……，$n$。写出描述上述一致性协议下系统的矩阵形式方程，其中状态变量为 $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^{\top}$，……，$\mathbf{q}_n^{\top}]^{\top}$ 和 $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\mathbf{q}}_1^{\top}$，……，$\dot{\mathbf{q}}_n^{\top}]^{\top}$。

iii. 对于第 (ii) 小题中的一致性协议，考虑李雅普诺夫函数 $V_1 = \frac{1}{2}\mathbf{q}^\top(\mathcal{L}\otimes\mathbf{I}_d + 2k_1\mathbf{I}_{dn})\mathbf{q} + 2\mu\mathbf{q}^\top\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^\top\dot{\mathbf{q}}$，其中 $\mathcal{L}$ 是图 $G$、$k_1 = \mu k$ 和 $k > 2\mu > 0$ 的拉普拉斯矩阵。证明 $V_1$ 是正定的，且 $\dot{V}_1$ 是负半定的。利用LaSalle不变性原理，证明对于 $\mathbf{q}(0)$、$\dot{\mathbf{q}}(0)$ 的任意初始条件，系统都将达到一致性。

iv. 对于第(ii)项中的一致性协议，考虑李雅普诺夫函数 $V_1 = \frac{1}{2}\mathbf{q}^\top(\mathcal{L}\otimes\mathbf{I}_d)\mathbf{q} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^\top\dot{\mathbf{q}}$。证明 $(\mathcal{L}\otimes\mathbf{I}_d)\mathbf{q}$ 与 $\dot{\mathbf{q}}$ 是有界的。利用Barbalat引理（见附录 C），证明 $\mathbf{q}(t) \to \ker(\mathcal{L})$ 且 $\dot{\mathbf{q}} \to \mathbf{0}_{dn}$，当 $t \to +\infty$ 时，即广义坐标变量将逐渐达到一致性。

**练习 4.6.** 考虑无向连通图 $G$，包含 $n$ 个顶点与 $m$ 条边，其拉普拉斯矩阵为 $\mathcal{L}$，边拉普拉斯矩阵为 $\mathcal{L}_e$。设 $T$ 为 $G$ 的一棵生成树，并假设 $\lambda_i(\mathbf{A})$ 表示矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 $i$ 小特征值。证明此时

$$\lambda_i(\mathcal{L}) \geq \lambda_i(\mathcal{L}_e(T)).$$

**练习 4.7.** 设 $G=(V,\ E)$ 是一棵树，其边拉普拉斯矩阵 $\mathcal{L}_e$ 的谱为 $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$。设$G'$ 是通过向 $G$中添加一条新边得到的图，且 $\mathcal{L}'_e$ 是对应的边拉普拉斯矩阵，其特征值为 $\hat{}\,\lambda_1 \leq \ldots \leq \hat{}\lambda_{n+1}$。证明:

$$0 \leq \hat{\lambda}_1 \leq \lambda_1 \leq \hat{\lambda}_2 \leq \ldots \lambda_n \leq \hat{\lambda}_{n+1}. \tag{4.28}$$

注释：该结果可由特征值交错定理（eigenvalue interlacing theorem）推出。

**练习 4.8.** 对于一个含有 $n$ 个顶点和 $m$ 条边的连通无向图 $G$，证明以下关系:

i. Với $\mathbf{S}_v = \begin{bmatrix}\mathbf{H}_{E(T)}^\top\big(\mathbf{H}_{E(T)}\mathbf{H}_{E(T)}^\top\big)^{-1} & \mathbf{1}_n\end{bmatrix}$ và $(\mathbf{S}_v)^{-1} = \begin{bmatrix}\mathbf{H}_{E(T)} \\ \frac{1}{n}\mathbf{1}_n^\top\end{bmatrix}$ thì

$$(\mathbf{S}_v)^{-1}\mathcal{L}\mathbf{S}_v = \begin{bmatrix}\mathcal{L}_e(T)\big(\mathbf{H}_{E(T)}\mathbf{H}_{E(T)}^\top\big)^{-1} & \mathbf{0}_{n-1} \\ \mathbf{0}_{n-1}^\top & 0\end{bmatrix}. \tag{4.29}$$

ii. 对于 $\mathbf{S}_e = \begin{bmatrix}\mathbf{R} & \mathbf{V}_e\end{bmatrix}$，$(\mathbf{S}_e)^{-1} = \begin{bmatrix}(\mathbf{R}^\top\mathbf{R})^{-1} & \top \\ \overset{\top}{e}\end{bmatrix}\mathbf{R}\mathbf{V}$，其中 $\mathbf{V}_e \in \mathbb{R}^{n\times(m-n+1)}$ 是一个矩阵，其列构成了 $G$ 的循环空间的一组基础，则

$$(\mathbf{S}_e)^{-1}\mathcal{L}_e\mathbf{S}_e = \begin{bmatrix}\mathcal{L}_e(T)\mathbf{R}^\top\mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{m-n+1,m-n+1}\end{bmatrix}. \tag{4.30}$$

iii. 对于 $\mathbf{S} = \mathbf{S}_e(\bar{\mathbf{S}}_v)^{-1}$，其中 $\bar{\mathbf{S}}_v = \begin{bmatrix}\overset{v}{\mathbf{S}\mathbf{0}^\top} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{I}_{n-m}\end{bmatrix}$

则

$$(\mathbf{S})^{-1}\mathcal{L}_e\mathbf{S} = \begin{bmatrix}\mathcal{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{m-n,m-n}\end{bmatrix}. \tag{4.31}$$

**练习　命题 4.9**。证明路径图 $P_n$ 的边拉普拉斯矩阵及其矩阵

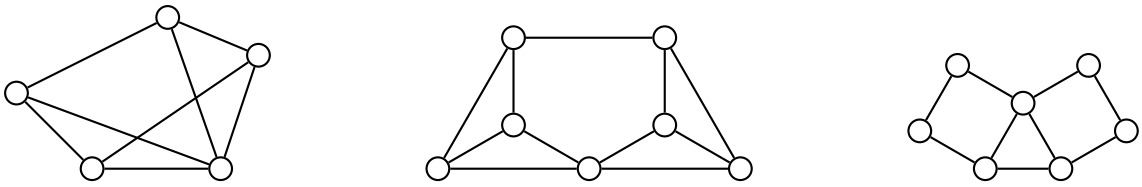



图 4.7：习题 4.10 中的图。

逆矩阵由下式给出

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_e(P_n) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{và } [(\boldsymbol{\mathcal{L}}_e(P_n))^{-1}]_{ij} = \frac{\min(i,j)(n-\max(i,j))}{n}.$$

**习题 4.10.** 求图 4.7 中各图对应的矩阵 $\mathbf{H}$、$\boldsymbol{\mathcal{L}}_e$、$\mathbf{T}$ 。求这些图的循环空间的一组基础。

**练习　习题 4.11.** 考虑无向图 $G = (V, E)$，它有 $n$ 个顶点和 $m$ 条边，其拉普拉斯矩阵为 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$。证明

i. 对任意 $\mathbf{x}$,$\mathbf{y} \in \mathrm{R}^n$，均有

$$\mathbf{y}^\top \boldsymbol{\mathcal{L}} \mathbf{x} = \sum_{(i,j)\in E} a_{ij}(x_i - x_j)(y_i - y_j).$$

ii. 由此证明，对任意 $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$ ，有

$$\mathrm{sign}(\mathbf{x})^\top \boldsymbol{\mathcal{L}} \mathbf{x} \le 0,$$

且当且仅当存在一条边 $(i, j)$，使得 $\mathrm{sign}(x_i) \neq \mathrm{sign}(x_j)$ 时，该不等式取等号。

**练习 4.12.** 考虑一个由 $n$ 个顶点和 $m$ 条边组成的连通无向图 $G$ 。设 $T(G)$ 是 $G$ 的一棵生成树。证明 $\lambda_i(\boldsymbol{\mathcal{L}}) \ge \lambda_i(\boldsymbol{\mathcal{L}}_e(T))$。

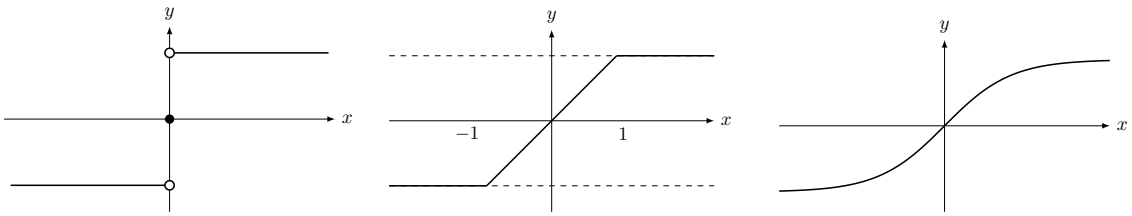
**练习 4.13.** 基于 Lyapunov 稳定性理论分析以下一致性系统：

i.（符号函数一致性算法 [44, 48]）

$$\dot{x}_i = -\sum_{j\in N_i} \mathrm{sgn}(x_i - x_j),\ i = 1, \ldots, n,$$

其中

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$




(a) $y$ =sgn($x$) (b) $y$ =sat($x$) (c) $y$ =tanh($x$)

图 4.8：sgn($x$)、sat($x$) 和 tanh($x$) 函数的图像。

在无向图的情况下，或在有向图弱连通且平衡的情况下。

ii.（饱和函数一致性算法）

$$\dot{x}_i = -\sum_{j\in N_i} \mathrm{sat}(x_i - x_j),\ i = 1,\ldots,n,$$

其中

$$\mathrm{sat}(x) = \begin{cases} x, & |x| \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

iii.（双曲正切函数一致性算法）

$$\dot{x}_i = -\sum_{j\in N_i} \tanh(x_i - x_j),\ i = 1,\ldots,n,$$

其中

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

iv.（饱和输出一致性算法 [148]）

$$\dot{x}_i = -\sum_{j\in N_i} (\mathrm{sat}(x_i) - \mathrm{sat}(x_j)),\ i = 1,\ldots,n.$$

v.（正定矩阵加权一致性算法 [286]）

$$\dot{\mathbf{x}}_i = -\sum_{j\in N_i} \mathbf{A}_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j),\ i = 1,\ldots,n,$$

其中 $\mathbf{x}_i \in \mathrm{R}^d$、$\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{ji} = \mathbf{A}_{ij}^\top \in \mathrm{R}^{d\times d}$ 是对称正定矩阵。

**练习 4.14 (**自适应一致性算法 I)。 [146] 考虑一组通过 $G$ 无向连通图进行交互的一般线性多智能体系统。智能体的动力学描述模型由以下方程给出

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_i(t),\ i = 1,\ldots,n, \tag{4.32}$$

其中，$\mathbf{x}_i \in \mathrm{R}^d$、$\mathbf{u}_i \in \mathrm{R}^m$、$\mathbf{A} \in \mathrm{R}^{d\times d}$ 和 $\mathbf{B} \in \mathrm{R}^{d\times m}$。假设 **(A**,**B)** 是可控的。

i. 对于如下形式的一致性协议：

$$\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{K}\sum_{j\in N_i} c_{ij}(t)(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i),\ i = 1,\ldots,n, \tag{4.33}$$

$$\dot{c}_{ij}(t) = \kappa\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^2,\ \forall (i,j)\in E, \tag{4.34}$$

其中 $\mathbf{A}+\mathbf{BK}$ 是赫尔维茨矩阵，$c_{ij}(t)$ 为自适应系数，选取时满足 $c_{ij}(0) > 0$，$\kappa > 0$ 为自适应速率。请将系统表示为矩阵形式，并证明系统逐渐同步至 $\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0$, 的一个解，当 $t \to +\infty$时。

ii. 对于如下形式的一致性协议：

$$\mathbf{u}_i(t) = c_i(t)\mathbf{K}\sum_{j\in N_i}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), \tag{4.35}$$

$$\dot{c}_i(t) = \kappa\left\|\sum_{j\in N_i} c_i(t)(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)\right\|^2,\ i = 1,\ldots,n, \tag{4.36}$$

其中 $\mathbf{A}+\mathbf{BK}$ 是赫尔维茨矩阵，$c_i(t)$ 为自适应系数，选取时满足 $c_i(0) > 0$，$\kappa > 0$ 为自适应速率。请将系统表示为矩阵形式，并证明系统逐渐同步至 $\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0$, 的一个解，当 $t \to +\infty$时。

iii. 用 MATLAB 仿真上述情况。

**习题4.15**（自适应一致性算法II）. [161] 考虑由无向连通图 $G$ 描述的多智能体系统。假设智能体模型为 $\dot{x}_i = u_i + f_i(x_i,t)\theta_i$，其中 $\theta_i \in \mathbb{R}$ 是一个未知参数，而 $f_i(x_i,t)$ 是一个已知函数，满足关于变量$\mathbf{x}_i$ 的 Lipschitz 条件，且关于变量 $t$可微。考虑如下自适应一致性算法：

$$u_i = -\sum_{j\in N_i}(x_i - x_j) - f_i(x_i,t)\hat{\theta}_i, \tag{4.37}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \gamma_i f_i(x_i,t)\sum_{j\in N_i}(x_i - x_j),\ i = 1,\ldots,n, \tag{4.38}$$

其中 $\gamma_i > 0$ 是自适应系数。

i. 请将系统表示为矩阵形式。

ii. 考虑李雅普诺夫函数 $V = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \|\tilde{\theta}_i - \theta_i)_{2\gamma_i}\|^2$。使用 Barbalat引理（参见附录 C），证明 $x_i \to x_j, \forall i,j = 1,\ldots,n$ 当 $t \to +\infty$时。

**习题4.16** (复权重拉普拉斯矩阵)。 [150] 考虑无向连通图 $G = (V,E)$，它不含自环，由 $n$ 个顶点和 $m$ 条边组成。对于 $E$中的每条边 $(i,j)$，赋予一个复权重 $c_{ij} \in \mathbb{C}$。定义复权重拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}} = [l_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$，其元素为

$$l_{ij} = \begin{cases} -c_{ij}, & (i,j)\in E, \\ 0, & (i,j)\notin E, \\ \sum_{j=1,j\neq i}^n & i = j. \end{cases}$$

i. 设 $\mathbf{H}\in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是图 $G$ 的关联矩阵，且 $\mathbf{W} \triangleq \mathrm{diag}(c_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times m}$。证明拉普拉斯矩阵可表示为 $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \mathbf{H}^{\top}\mathbf{W}\mathbf{H}$。

ii. 考虑由 $n$ 个智能体组成的系统，其复权重图为 $G$，其中每个智能体都有一个复状态变量 $x_i \in\mathbb{C}$。假设系统中的智能体按照复权重一致性算法更新状态变量：

$$\dot{x}_i(t) = -\sum_{j\in N_i} c_{ij}(x_i(t) - x_j(t)),\ i = 1,\ldots,n. \tag{4.39}$$

令 $\mathbf{x} = [x_1,\ldots,x_n]^{\top} \in \mathbb{C}^n$，请将系统表示为矩阵形式。

iii. 进一步假设，对于 $\mathrm{Re}(c_{ij}) > 0, \forall (i,j) \in E$。证明该系统中的 $n$ 个智能体渐近收敛到一致性集合 $\mathcal{A}_C = \{\mathbf{x} = [x_1,\ldots,x_n]^{\top} \in \mathbb{C}^n |\ x_1 = \ldots = x_n\}$，并确定一致性值。（提示：考虑李雅普诺夫函数 $V = \mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{x}$，其中 $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ 表示矩阵 $\mathbf{A}$ 的共轭转置矩阵。）

iv. 不使用复权重，而是定义单位四元数加权拉普拉斯矩阵：

$$q_{ij} = q_{ij,0} + \mathsf{i}q_{ij,1} + \mathsf{j}q_{ij,2} + \mathsf{k}q_{ij,3} \in \mathbb{H},\ (i,j) \in E,$$

其中 [303]

$$\mathsf{i}^2 = \mathsf{j}^2 = \mathsf{k}^2 = \mathsf{i}\mathsf{j}\mathsf{k} = -1, \tag{4.40}$$

$q_{ij,\,0}$，$q_{ij,\,1}$，$q_{ij,\,2}$，$q_{ij,\,3} \in \mathbb{R}$，且 $\|q_{ij}\| = \sqrt{q_{ij,\,0}^2 + q_{ij,\,1}^2 + q_{ij,\,2}^2 + q_{ij,\,3}^2} = 1$。假设每个智能体都有状态变量 $x_i \in\mathbb{H}$，提出相应的一致性算法，并求出系统渐近收敛到一致性集合的条件。

**练习4.17**（基于李雅普诺夫方法分析同步算法）。 [146, 294] 使用李雅普诺夫方法，分析第3章中线性系统（3.23）的（直接）一致性算法，以及（3.31）–（3.34）的（间接）一致性算法。

**练习4.18**（胞腔层图与异构交互多智能体系统）. [106, 105] 胞腔层图提供了一种方法，可用于描述状态变量数量以及邻居智能体之间交互维数均不相同的多智能体系统。为简化起见，考虑这样一个多智能体系统：每个智能体都有状态变量向量$\mathbf{x}_i \in\mathbb{R}^{n_i}$, $n_i \geq 1$ 并通过一个连通无向图进行交互 $G = (V,E)$。每条边 $(i,j) \in E$ 描述系统中两个智能体 $i,j$之间的一个 $m_{ij} \geq 1$ 维交互。由于两个邻居智能体的状态变量数量彼此不同，且不同于连接 $(i,j)$ 中的状态变量数量，因此定义两个矩阵$\mathbf{F}_{ij} \in \mathbb{R}^{m_{ij}\times n_i}$ 和$\mathbf{F}_{ji} \in \mathbb{R}^{m_{ij}\times n_j}$ 以及状态向量

$$\mathbf{y}_{ij} = \mathbf{F}_{ij}\mathbf{x}_i - \mathbf{F}_{ji}\mathbf{x}_i = -\mathbf{y}_{ji} \tag{4.41}$$

边 $(i,j) \in E$的。每个交互状态变量通过矩阵 $\mathbf{F}_{ij}^{\top}$作用于智能体 $i$，并通过矩阵 $\mathbf{F}_{ji}^{\top}$作用于智能体 $j$：

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j\in N_i} \mathbf{F}_{ij}^{\top}\mathbf{y}_{ij} = \sum_{j\in N_i} \mathbf{F}_{ij}^{\top}(\mathbf{F}_{ij}\mathbf{x}_i - \mathbf{F}_{ji}\mathbf{x}_j), \tag{4.42}$$

$$\mathbf{u}_j = \sum_{i\in N_j} \mathbf{F}_{ji}^{\top}\mathbf{y}_{ji} = \sum_{i\in N_j} \mathbf{F}_{ji}^{\top}(\mathbf{F}_{ji}\mathbf{x}_j - \mathbf{F}_{ij}\mathbf{x}_i). \tag{4.43}$$

i. 设 $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^\top, \ldots, \mathbf{x}_n^\top] \in \mathrm{R}^{\sum_{i=1}^n n_i}$, $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1^\top, \ldots, \mathbf{y}_m^\top] \in \mathrm{R}^{\sum_{(i,j)\in E} m_{ij}}$, 以及 $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1^\top, \ldots, \mathbf{u}_n^\top] \in \mathrm{R}^{\sum_{i=1}^n n_i}$。求矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$，表示向量 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{x}$之间的线性关系。

ii. 证明矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 是对称且半正定的。（提示：使用势函数$V = \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\mathcal{L}} \mathbf{x}$。）

iii. 对于 $G$ 的一种边的定向，令 $\tilde{\mathbf{H}} = [\mathbf{H}_{ki}]$，其中

$$\tilde{\mathbf{H}}_{kt} = \begin{cases} -\mathbf{F}_{ij}, & \text{cạnh thứ } k \text{ là } (i,j) \text{ xuất phát từ đỉnh } t = i, \\ \mathbf{F}_{ji}, & \text{cạnh thứ } k \text{ là } (i,j) \text{ kết thúc tại đỉnh } t = j, \\ \mathbf{0}_{m_{ij} \times n_t}, & \text{trường hợp khác.} \end{cases}$$

用 $\tilde{\mathbf{H}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$。如果每条边 $e_{ij} \in E$ 都有一个权重 $\mathbf{W}_{ij} \in \mathrm{R}^{m_{ij} \times m_{ij}}$，则用 $\boldsymbol{H}$ 和 $\mathbf{W} =$ 分块对角矩阵$(\mathbf{W}_{ij})$表示矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$。

iv. 在 $n_i = d, \forall (i,j) \in E$ 的情况下表示矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$。求 $d$ 和 $\mathbf{F}_{ij}, \mathbf{F}_{ji}$ 的充分条件，使得 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\mathcal{L}}) = dn - d$。

v.（联系有向刚性拉普拉斯矩阵）在 $\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{ji} \in \mathrm{R}^{d \times d}$ 且 $\mathbf{F}_{ij}^2 = \mathbf{F}_{ij}$（幂等）的情况下，表示此时的矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$。求矩阵 $\mathbf{F}_{ij}$ 和 $G$ 的条件，使得 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的秩为 $dn - d, dn - d - 1$。（提示：参见小节 5.5。）

# 第三部分

# 多智能体系统的一些应用

# 第5章

# 编队控制

## 5.1 引言

编队控制[1] 是多智能体系统控制中研究最广泛的问题之一。假设我们需要控制一个由 $n$ 个智能体（可以是无人机、无人水下航行器或自动驾驶车辆）组成的系统，使其按期望编队移动。期望编队，也称为期望编队，由一组变量定义，这些变量描述系统中各智能体位置之间的距离等价、方向向量或偏角。

编队控制算法可应用于智能高速公路交通系统：彼此靠近的车辆自行组成编队并移动，使车辆之间的距离保持不变，且车辆的速度彼此一致[90]。编队建立后，编队高速行驶可确保安全（车辆之间不会发生碰撞）；同时，由于无需频繁改变速度，还能节省燃料。除军事应用外，近年来无人机技术的发展也催生了新的民用应用，例如地质勘探、搜索救援、缺陷检查和监控（太阳能电场、建筑工程）等。如果无人机按预设编队飞行，这些应用便能更高效、更轻松地实现[9]。最后，一些编队控制算法用于仿真、分析和解释自然界中昆虫、鱼和鸟的群体现象 [35]。

编队控制中的核心问题是生成期望编队。为解决生成期望编队这一问题，已提出许多方法。现有的所有编队控制方法都要求智能体测量若干关于编队的几何变量，或将测量与向其他智能体通信若干关于编队的几何变量相结合，从而控制位置，使这些几何变量满足期望值。在建立编队的过程中，有时会选择若干特殊智能体作为领航智能体（领导者），各领导者的位置作为参考，供其余智能体（跟随者）据此控制相应位置。

目前，编队控制方法通常根据对测量变量、控制变量以及描述智能体之间信息流的图的条件所作的假设进行分类。表5.1按照这种分类方式对编队控制问题进行了分类 [191, 2]。根据表5.1，主要的控制方法包括基于绝对位置的控制、基于相对位置的控制、基于方向向量的控制、基于距离的控制以及基于不同几何变量组合的控制。在每种方法中，我们还可以进一步细分

[1]编队控制

具体类别取决于所作的假设。例如，方向向量可以在每个智能体的局部参考系中测量，也可以在已同步的参考系中测量。

| 方法 | 测量变量 | Biến điều khiển | 条件图 thị | 参考文献 |
|---|---|---|---|---|
| 基于位置 | 位置 | 位置 | | [143, 321] |
| Dựa trên sai 位置误差 | 误差 vị trí | 误差 vị trí | 连通 | [90, 137, 150] |
| 基于距离 | Sai lệch 局部角度 定向 | 局部误差 集合与 góc 定向 | 连通 | [190, 168, 140, 141] |
| | Dựa trên tọa độ 相 đối 局部 | Tọa độ 相 đối 局部 | 刚性图 距离 | [85, 135, 275, 189, 170, 266, 214] |
| | Tọa độ 相互 đối 局部 | Tọa độ 相互 đối 局部 | 图不 刚性区间 cách | [68, 200, 216] |
| | 区间 cách | 区间 cách | 刚性图 距离 | [8, 43, 271] |
| 基于方向向量 | 向量 方向 địa 方向 | Góc | Đồ thị đơn 简化 $C_3, C_4$ 或 $C_n$ | [21, 28, 27, 333, 332] |
| | 向量 方向 địa 方法 | Góc | 刚性图 yếu; 图 角刚性（二维和三维） | [34, 123, 51, 49, 50] |
| | 向量 方向 | 向量 方向 | 刚性图 内部定向 $\mathbb{R}^d$ | [30, 81, 246, 289, 338, 299, 285] |
| | 向量 方向 địa 方向 và Góc 定向 相对 | 向量 方向 địa 方向 và góc 定向 相对 | 刚性图 内部定向 $SE(d)$ | [94, 327, 245, 166] |
| | 向量 方向 địa 方向 và góc 定向 相对 | 向量 方向 địa 方向 và góc 定向 相对 | 刚性图 内部定向 $\mathbb{R}^d$ | [338, 298, 284] |
| | 相对位置 đối | 相对位置 đối | 刚性图 内部定向 $\mathbb{R}^d$ | [337, 335] |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 结合向量方向, góc 偏差和距离 cách | 向量方向, góc lệch 以及间距 cách | 向量方向, góc 偏差, 间距 cách, tỉ lệ 间距 cách | 刚性图混合 | [29, 88, 270, 204, 136, 87] |

表5.1：编队控制问题分类

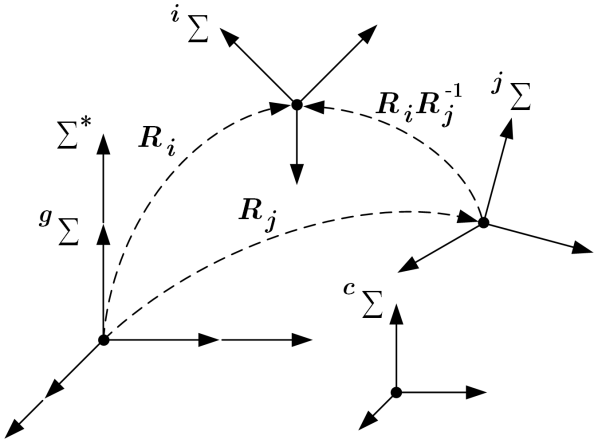



图5.1：全局参考系（$^{g}\Sigma$）、公共参考系（$^{c}\Sigma$）和局部参考系（$^{i}\Sigma$ 和 $^{j}\Sigma$）。

分布式智能体的状态变量包括在与该智能体关联的参考系中表示的一些量。通常，所选状态变量包括智能体的位置和速度，以及参考坐标系的方向（统称为智能体在空间中的定向）。为了比较各智能体的数值，需要在同一参考坐标系下给出智能体的位置和定向。在 $\mathrm{R}^d$ 空间中，智能体 $i$ 的定向由矩阵 $\mathbf{R}_i \in SO(d)$ 表示，而定向和位置则由 $SE(d)$ 中的元素表示。由于每个智能体都有自己的参考坐标系，各智能体的定向通常彼此之间存在误差，并且也会与全局参考系存在偏差。

在图 5.1 中，全局参考系用 $^{g}\Sigma$ 表示，而局部参考系用 $^{i}\Sigma$ 和 $^{j}\Sigma$ 表示。智能体 $i$ 和 $j$ 的坐标轴彼此不重合，也不与全局坐标系重合。矩阵 $\mathbf{R}_i \in SO(d)$ 描述了从坐标系 $^{g}\Sigma$ 到 $^{i}\Sigma$ 的坐标变换。从 $^{j}\Sigma$ 到 $^{i}\Sigma$ 的变换矩阵为 $\mathbf{R}^{ij} = \mathbf{R}_i\mathbf{R}_j^{-1}$。因此，矩阵 $\mathbf{R}_i^{-1}$ 描述了从局部坐标系 $^{i}\Sigma$ 到全局坐标系 $^{g}\Sigma$ 的变换。

记 $\Sigma^*$ 为一个公共参考系，它不一定与 $^{g}\Sigma$ 重合。坐标轴与 $\Sigma^*$ 重合的坐标系称为公共参考系 $^{c}\Sigma$。请注意，参考系 $\Sigma^* \neq {}^{c}\Sigma$ 的坐标原点由 $\Sigma^*$ 和 $^{c}\Sigma$ 决定，因此可能有所不同。

在许多编队控制问题中，我们通常希望智能体能够基于公共参考系 $^{c}\Sigma$确定位置和方向。矩阵 $\mathbf{R}_c \in SO(3)$描述了从 $^{g}\Sigma$ 到 $^{c}\Sigma$的坐标变换。如果将智能体的方向调整为 $^{i}\Sigma = {}^{j}\Sigma = {}^{c}\Sigma$，那么我们就称这些智能体在方向上达成了一致性。

Vớ对于每个智能体 $i$，我们将该智能体在全局参考系中的位置记为 $\mathbf{p}_i \in \mathrm{R}^d$。V ới

对于两个智能体 $i$ 和 $j$，误差向量 $\mathbf{z}^{ij} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j$ l是用全局参考系 ${}^g\Sigma$表示的向量。该向量也可以在 ${}^i\Sigma$ 中表示为 $\mathbf{z}_{ij}^i = \mathbf{p}_i^i - \mathbf{p}_j^i = -\mathbf{p}_j^i$，或者在 ${}^i\Sigma$ 中表示为 $\mathbf{z}_{ij}^j = \mathbf{p}_j^j - \mathbf{p}_i^j = -\mathbf{p}_i^j$，因为 $\mathbf{p}_i^i = \mathbf{p}_j^j = \mathbf{0}$。请注意，向量 $\mathbf{z}^{ij}$ 的方向是从 $j$ 指向 $i$，而 $\mathbf{z}^{ji}$ 的方向是从 $i$ 指向 $j$。请注意，$\mathbf{z}_{ji}^j = \mathbf{p}_i^j$（$i$ 的位置由 $j$ 在参考系 ${}^j\Sigma$中测量）或 $\mathbf{z}_{ji}^i = -\mathbf{p}_j^i$（$j$ 的位置由 $i$ 在参考系 ${}^i\Sigma$中测量）。尽管 $\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i = \mathbf{z}^{ji} = -\mathbf{z}^{ij} = -(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)$，由于不同智能体的参考系不同，我们有 $\mathbf{p}_i^j \neq -\mathbf{p}_j^i$ 因为

$$\mathbf{z}_{ji}^j = \mathbf{p}_i^j = \mathbf{R}_j\mathbf{R}_i^{-1}\mathbf{z}_{ji}^i = \mathbf{R}_{ji}(-\mathbf{p}_j^i).$$

请注意，尽管方向和参考系各不相同，向量 $\mathbf{z}_{ij}^i$，$\mathbf{z}_{ji}^i$，$\mathbf{z}_{ij}^j$ 和 $\mathbf{z}_{ji}^j$ 的长度都相同，且等于智能体 $i$ 与智能体 $j$之间的距离。我们用 $d_{ij} = \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| = \|\mathbf{z}_{ij}^i\| = \|\mathbf{z}_{ij}^j\| = \|\mathbf{z}_{ij}\| = d_{ji}$表示从智能体 $i$ 到智能体 $j$ 的距离。

两个智能体 $i$ 和 $j$ 之间还可以测量另一个（相对）量，即方向（单位）向量$\mathbf{g}^{ij} = \mathbf{p}\| {}^{j-}{}_{j-}{}^{i} \mathbf{ppp}_i\|$，假设$\mathbf{p}_i \neq \mathbf{p}_j$。显然，$\|\mathbf{g}_{ij}^i\| = \|\mathbf{g}_{ij}\| = 1$。请注意，$\mathbf{g}^{ij} = -\mathbf{g}^{ji}$，但$\mathbf{g}_{ij}^i \neq -\mathbf{g}_{ji}^j$，原因与相对位置向量相同。

对于每个智能体 $i$，我们假设智能体 $i$ 具有一阶积分器模型

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{u}_i,\ i = 1, \ldots, n, \tag{5.1}$$

其中$\mathbf{u}_i$ 是控制信号。方程 (5.1) 在参考系 ${}^g\Sigma$ 中表示。我们可以将方程 (5.1) 改写如下

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i\dot{\mathbf{p}}_i &= \mathbf{R}_i\mathbf{u}_i \\ \dot{\mathbf{p}}_i^i &= \mathbf{u}_i^i, \end{aligned} \tag{5.2}$$

其中$\mathbf{u}_i^i$ 是表示在与智能体 $i$ 关联的局部参考系 ${}^i\Sigma$ 中的控制信号。

接下来，我们定义描述系统中智能体间交互的结构（边集），包括：测量、控制和通信。

**定义 5.1**（测量、控制与通信结构）。如果智能体 $i$ 测量了相对于智能体 $j$ 的某个变量，那么智能体 $j$ 是图 $G^s$ 中 $i$ 的出邻居，记为 $j \in N_i^o$，且 $(i,j) \in E^s$。如果智能体 $i$ 的控制信号基于智能体 $j$ 的运动，那么 $j$ 是控制图 $G^a$ 中 $i$ 的出邻居，记为 $(i,j) \in E^a$。如果智能体 $j$ 向智能体 $i$ 发送一个信息变量，那么 $j$ 是信息图 $G^c$ 中智能体 $i$ 的出邻居，记为 $(i,j) \in E^c$。

因此，在一个一般编队控制问题中，测量、控制以及通信结构各不相同：$E^s \neq E^a \neq E^c$。当谈到某个编队的结构而未作进一步说明时，我们默认指的是这三种结构。当每个智能体所拥有的信息量受到限制时，结构的选择将决定智能体能否形成预先设定的编队。刚性图理论是确定期望编队背后隐藏结构的基础。

当一个智能体 $i$ 测量与智能体 $j$之间的相对位置时，$i$ 可能不会根据相对位置来更新自身位置，而只依据两个智能体之间的距离，或者依据从 $i$指向 $j$的方向向量。本文中，如果系统中的智能体根据变量“X”控制自身位置，而不考虑智能体测量或传输的其他变量，我们就将其称为基于“X”的编队控制。按照这一约定，我们将依次考察基于绝对位置、相对位置、距离和方向向量的编队控制方法。这是近年来受到广泛关注并持续开展研究的两种编队控制方法。

## 5.2 基于绝对位置的编队控制

当所有智能体都能够从全局参考系 $^{g}\Sigma$获取自身的位置信息时，编队控制问题就变得相当简单。具体而言，当每个智能体 $i$ 已知$\mathbf{p}_i$ 并希望到达设定位置$\mathbf{p}_i^*$ 时，可将为每个智能体设计的编队控制律（5.1）简单地写成

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{u}_i = -k_p(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_i^*),\ i = 1, \ldots, n, \tag{5.3}$$

其中 $k_p > 0$ 为正常数。

记作 $\mathbf{p} = [\mathbf{p}_1^\top, \ldots, \mathbf{p}_n^\top]^\top$, $\mathbf{p}^* = [(\mathbf{p}_1^*)^\top, \ldots, (\mathbf{p}_n^*)^\top]^\top$，并令 $\mathbf{e}_p \triangleq \mathbf{p} - \mathbf{p}^*$，则可将（5.3）统一写成

$$\dot{\mathbf{e}}_p = -k_p \mathbf{e}_p. \tag{5.4}$$

显然，由方程（5.4）可得 $\mathbf{e}_p(t) \to \mathbf{0},\ t \to +\infty$ 按指数函数变化。这等价于 $\mathbf{p}(t) \to \mathbf{p}^*,\ t \to +\infty$ 按指数函数变化。

为提高控制质量，可以假设智能体能够通过图 $G$ 相互交换位置信息，并在编队控制律（5.3）中加入分量 $\sum_{j\in N_i} a_{ij}\big((\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_j^*) - (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_i^*)\big)$，从而得到如下新的控制律:

$$\mathbf{u}_i = -k_p(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_i^*) + \sum_{j\in N_i} a_{ij}\big((\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_j^*) - (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_i^*)\big),\ i = 1, \ldots, n, \tag{5.5}$$

其中 其中 $a_{ij} > 0$ 是与（$v_j$, $v_i$）$\in E$（$G$）对应的权重。方程（5.5）可以改写为 g

$$\dot{\mathbf{p}} = -k_p(\mathbf{p} - \mathbf{p}^*) - (\boldsymbol{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{I}_d)(\mathbf{p} - \mathbf{p}^*), \tag{5.6}$$

其中 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 是 $G$的拉普拉斯矩阵。再令 $\boldsymbol{\delta} \triangleq \mathbf{p} - \mathbf{p}^*$，则误差$\boldsymbol{\delta}$ 对应的微分方程可写为:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\delta}} &= -k_p\boldsymbol{\delta} - (\boldsymbol{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{I}_d)\boldsymbol{\delta} \\ &= -\big((k_p\mathbf{I}_n + \boldsymbol{\mathcal{L}}) \otimes \mathbf{I}_d\big)\boldsymbol{\delta}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

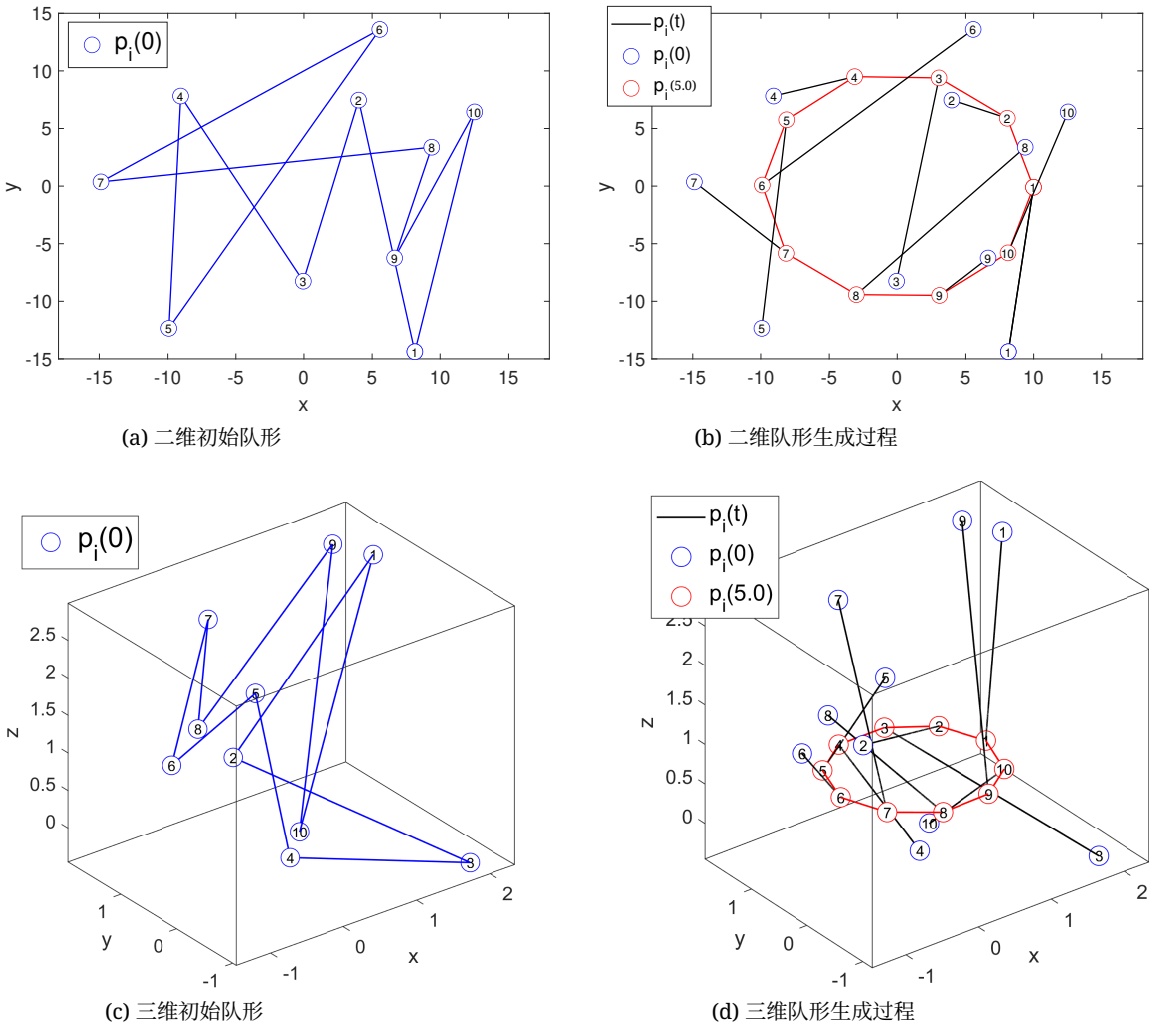
假设 $G$ 是一个出根图，则根据定理 2.4，矩阵 $k_p\mathbf{I}_n + \boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的特征值均大于或等于 $k_p$，这表明基于信息交换的控制分量可以提高编队形成的速度。

**示例 5.1**。 二维和三维空间中基于绝对位置的 10 个智能体编队控制仿真如图5.2所示。根据控制律（5.3），智能体直接移动到空间中的指定位置（一个由 10 个顶点组成的正多边形的各顶点）。附录 D 提供了一些编队控制算法仿真的示例代码。

## 5.3 基于相对位置的编队控制

在 在基于相对位置的控制方案中，智能体系统需要满足以下假设 u:

- 测量变量：各智能体具有定向相同且与全局参考系一致的局部参考系。然而，智能体无需知道该全局参考系的坐标原点。在局部参考系中，智能体可以测量若干邻居智能体的相对位置（位置误差向量）以及相对速度（针对二阶智能体）。需要注意的是，由于局部参考系与全局参考系方向相同，在各参考系中测得的相对位置向量均相同。




(a) 二维初始队形 (b) 二维队形生成过程

(c) 三维初始队形 (d) 三维队形生成过程

图5.2：基于绝对位置的队形控制算法仿真。

- 交互图：智能体之间的测量交互由无向图 $G$给出，并假设 $G = (V, E)$是一个连通图。队形由与 $G$相对应的智能体之间的一组期望位置偏差向量给出。

### 5.3.1 智能体为一阶积分环节的情况

考虑由 $n$ 个智能体组成的系统，其中编队中的每个智能体模型均为一阶积分环节：

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{u}_i,\ i = 1, \ldots, n. \tag{5.8}$$

这里，$\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d$ 和 $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^d$ 分别表示智能体 $i$ 在全局参考系 ${}^g\Sigma$下的位置和控制信号。

根据上述测量假设，每个智能体 $i$ 都可以测量$\mathbf{z}_{ij} = \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i$，$\forall j \in N_i$。可通过集合 $\Gamma = \{\mathbf{z}^*_{ij}\}_{(i,j)\in E}$来设定编队，而每个智能体的目标是形成满足所有期望位置误差向量的编队，即

$$\mathbf{z}_{ij} = \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i = \mathbf{z}^*_{ij},\ (i,j) \in E.$$

集合 $\Gamma = \{\mathbf{z}^*_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ 称为可行，当且仅当集合

$$\mathcal{E}_{\mathbf{p}^*} \triangleq \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{dn} |\ \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i = \mathbf{z}^*_{ij}, \forall (i,j) \in E\}, \tag{5.9}$$

非空。反之，若 $\mathcal{E}_{\mathbf{p}^*} = \emptyset$，则称 $\Gamma$ 为不可行。

本小节中，假设 $\Gamma$ 可行，并考虑 $\mathbf{p}^* = [(\mathbf{p}^*_1)^\top$，.....，$(\mathbf{p}^*_n)^\top]^\top$是 $\mathcal{E}_{\mathbf{p}^*}$中的一个元素。此外，假设每个智能体仅知道一些位置误差向量 $\mathbf{z}^*_{ij} = \mathbf{p}^*_j - \mathbf{p}^*_i$，$\forall j \in N_i$而不知道 $\mathbf{p}^*_i$ 和 $\mathbf{p}^*_j$。问题是为每个智能体设计控制律，使$\mathbf{p}$ 渐近趋于一个与$\mathbf{p}^*$ 仅相差一个平移的编队。换言之，$\mathbf{p}(t)$需要在 $t \to +\infty$时收敛到集合 $\mathcal{E}_{\mathbf{p}^*}$ 中的一个点。

对于这个问题，编队控制律设计如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_i &= k_p \sum_{j\in N_i} a_{ij}(\mathbf{z}_{ij} - \mathbf{z}^*_{ij}) \\ &= k_p \sum_{j\in N_i} a_{ij}(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - (\mathbf{p}^*_j - \mathbf{p}^*_i)),\end{aligned} \tag{5.10}$$

其中 $k_p > 0$。对于 $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{p}^* - \mathbf{p}$，有方程

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = -k_p(\boldsymbol{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{I}_d)\boldsymbol{\delta}. \tag{5.11}$$

根据第3章的一致性系统理论，对于 $G$ 是连通图的情况，$\boldsymbol{\delta}(t) \to \boldsymbol{\delta}^* = \mathbf{1}_n \otimes \bar{\boldsymbol{\delta}}$，其中 $\bar{\boldsymbol{\delta}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (\mathbf{p}^*_i(0) - \mathbf{p}_i(0))$ 是一个常向量。因此，

$$\mathbf{p}^* - \mathbf{p}(t) \to \boldsymbol{\delta}^*,\ t \to +\infty,\ \text{hay}\ \mathbf{p}(t) \to \mathbf{p}^* - \boldsymbol{\delta}^*,\ t \to +\infty, \tag{5.12}$$

也就是说$\mathbf{p}(t)$ 收敛到集合 $\mathcal{E}_{\mathbf{p}^*}$ 中的一个静态构型。

当集合 $\Gamma$ 不可行时的系统分析将在习题 5.1 中讨论。

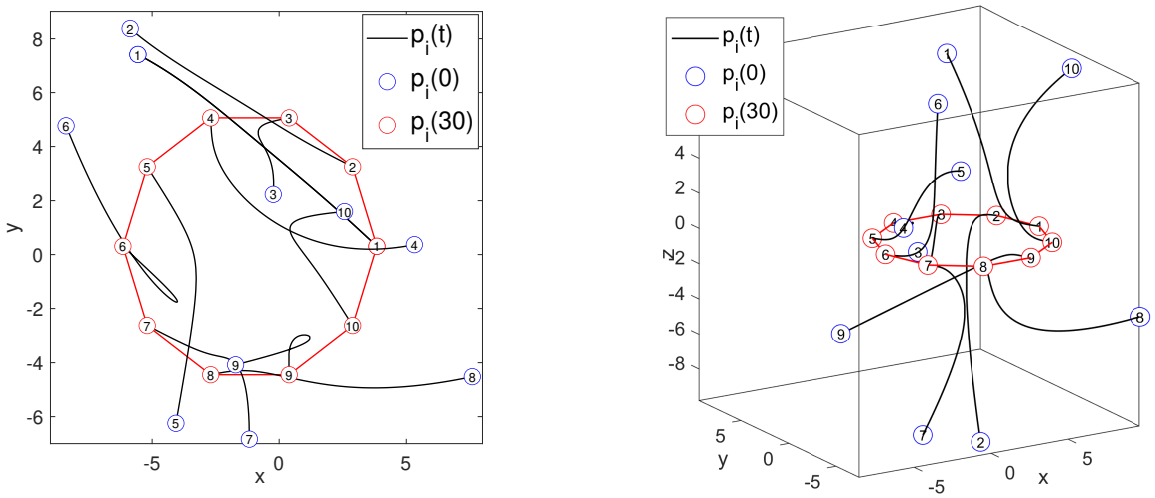
**例 5.2**。 在这个示例中，我们对一个由 10 个智能体组成的系统进行仿真，该系统采用基于相对位置的编队控制律，交互图为环 $C_{10}$，期望编队为一个 10 边正多边形的顶点。仿真结果如图 5.3 所示。当 $t \to +\infty$ 时，智能体逐渐形成期望编队。仿真分别在两种情况下进行：编队定义在二维空间和三维空间中。

## 5.3.2 智能体为二阶积分环节的情况

考虑由 $n$ 个智能体组成的系统，其模型为二阶积分环节：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_i &= \mathbf{v}_i, \\ \dot{\mathbf{v}}_i &= \mathbf{u}_i,\ i = 1, \ldots, n.\end{aligned} \tag{5.13}$$

这里 ，$\mathbf{p}_i$,$\mathbf{v}_i$，和 $\mathbf{u}_i \in \mathrm{R}^d$ 分别是智能体 $i$ 在 ${}^g\Sigma$上表示的位置、速度和控制信号 .




(a) (b)

图 5.3：基于二维和三维相对位置的编队控制算法仿真。

为每个智能体编写的控制律：

$$\mathbf{u}_i = -k_1 \sum_{j\in N_i} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j - (\mathbf{p}_i^* - \mathbf{p}_j^*)) - k_2\mathbf{v}_i,\ i = 1,\ldots,n, \tag{5.14}$$

其中，$k_1$ 和 $k_2$ 是正实系数。

进行变量变换 $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_i^*$，可得方程

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\delta}}_i &= \mathbf{v}_i, \\ \dot{\mathbf{v}}_i &= -k_1 \sum_{j\in N_i} (\boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\delta}_j) - k_2\mathbf{v}_i,\ i = 1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{5.15}$$

与前一小节中二阶积分器智能体的一致性系统设计部分对照可知，系统 (5.15) 收敛至一致性 $\boldsymbol{\delta}_i \to \boldsymbol{\delta}^*$, $\mathbf{v}_i \to \mathbf{0}_d$。这等价于 $\mathbf{p}_i(t) \to \mathbf{p}_i^* + \boldsymbol{\delta}^*, t \to +\infty$。

## 5.4 基于距离的编队控制

在基于距离的编队控制方案（即基于局部坐标系中相对位置的编队控制）中，智能体系统需要满足以下假设：

- 智能体模型：智能体由一阶积分环节建模：

$$\dot{\mathbf{p}}_i^i = \mathbf{u}_i^i,\ i = 1,\ldots,n, \tag{5.16}$$

其中，$\mathbf{p}_i^i \in \mathrm{R}^2$ 和$\mathbf{u}_i^i \in \mathrm{R}^2$ 分别是智能体 $i$ 在局部参考系 ${}^i\Sigma$中表示的位置和控制信号。

- 测量变量：各智能体具有方向不同的局部参考系，且不知道全局参考系的信息。在局部参考系中，智能体可以测量邻居智能体 $j \in N_i$ 的相对位置（位置误差向量）$\mathbf{p}_{ij}^i = \mathbf{p}_j^i - \mathbf{p}_i^i$。

- 交互图：智能体之间的测量交互由无向图 $G$ 给出，假设 $G$ 是刚性图（rigid）。

- 期望编队：由一组期望距离描述 $\Gamma = \{d_{ij}^* = \|\mathbf{p}_j^* - \mathbf{p}_i^*\|\}_{(i,j)\in E}$。

尽管系统中的智能体能够测量其在 $\mathbf{R}^2$，中相对于其他智能体的位置，但由于这些相对位置向量并未表示在同一个公共坐标系中，基于位置偏差的编队控制不可行。因此，此时选择距离作为控制变量。显然，智能体之间的距离可以通过局部偏差向量轻松测得，且完全不依赖于参考系。由于我们只控制相对距离集合，因此需要回答一个问题：应选择多少个距离变量，以及应如何选择这些变量，才能使这些变量满足时，所得编队仅与期望编队相差一个平移和一个旋转？这个问题的解来自距离刚性理论，这是数学的一个研究分支，常用于力学或化学分子结构研究 [312, 14, 104, 56]。本文将分析范围限定在二维编队。

## 5.4.1 距离刚性理论

考虑无向图 $G = (V, E)$，其中 $V = \{1, \ldots, n\}$ 包含 $n$ 个顶点， $E \subset V \times V$ 包含 $m$ 条边。对于每个顶点 $i \in V$，都有一个对应的点 $\mathbf{p}_i \in \mathbf{R}^2$。一个编队（或网络）[2] 定义为 $(G, \mathbf{p})$，其中向量 $\mathbf{p} = [\mathbf{p}_1^\top, \ldots, \mathbf{p}_n^\top]^\top \in \mathbf{R}^{2n}$ 称为 $G$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上的一个构型。注意，所有点 $\mathbf{p}_i$ 均定义在同一个全局参考系中。

考虑一个距离集 $\Gamma = \{d_{ij} > 0 | (i, j) \in E\}$。如果至少存在一个构型 $\mathbf{p}$，使得 $\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\| = d_{ij}, \forall (i, j) \in E$，则称集合 $\Gamma$ 是可行的 。如果不存在满足 $\Gamma$ 中所有距离的构型，则称 $\Gamma$ 不可行。满足 $\Gamma$ 中所有距离约束的构型 $\mathbf{p}$ 称为 $\Gamma$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上的一个实现。反之，每个构型 $\mathbf{p}^*$ 都会给出一个导出距离集 $\Gamma = \{d_{ij}^* = \|\mathbf{p}_j^* - \mathbf{p}_i^*\|\}_{(i,j)\in E}$。

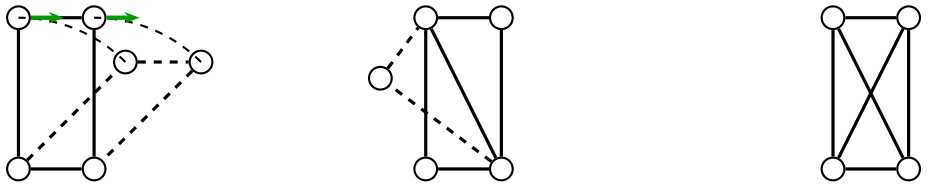
考虑同一图 $G$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上的两个构型 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$。两个构型 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$ 称为距离等价[4]，如果 $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| = \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|, \forall (i, j) \in E$；称为距离全等[5]，如果 $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| = \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|, \forall i, j \in V,\ i \neq j$。

如果存在 $\epsilon > 0$，使得对于 $G$ 的每个构型 $\mathbf{q}$，只要满足 (i) $\in B_\epsilon \triangleq \{\mathbf{q} \in \mathbf{R}^{2n} | \ \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| < \epsilon\}$，且 (ii) $\mathbf{q}$ 与 $\mathbf{p}$ 距离等价，那么 $\mathbf{q}$ 也与 $\mathbf{p}$ 距离全等，则编队 $(G, \mathbf{p})$ 称为距离刚性 [6]。如果不存在这样的 $\epsilon > 0$，则编队 $(G, \mathbf{p})$ 是非刚性编队。

编队（$G$，$\mathbf{p}$）是全局距离刚性[7]，如果每个与 $\mathbf{p}$ 距离等价的构型 $\mathbf{q}$ 也都与 $\mathbf{p}$ 距离全等（参见图5.4(c)中的示例）。

当顶点数 $n$ 较大时，依据定义直接判断一个编队 $(G, \mathbf{p})$ 是否具有距离刚性并不简单。为简化刚性的判定，我们引入距离微分刚性的概念[8] ——这是对 $(G, \mathbf{p})$ 刚性的一级近似。将图的边从 1 编号至 $m$，记作 $e_k \equiv e_{k_{ij}} \equiv (i, j)$，则相应的位置误差向量为 $\mathbf{z}_k \equiv \mathbf{z}^{ij} = \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i$，

[2]编队或网络[3]构型、实现或嵌入[4]距离等价[5]距离全等[6]刚性[7]全局刚性[8]无穷小刚性



(a) 非刚性编队 (b) 刚性编队 (c) 全局刚性编队

图5.4：距离刚性理论的一些示例。

$k = 1$，……，$m$。我们定义距离（平方）函数：

$$\mathbf{f}_G(\mathbf{p}) \triangleq \left[\|\mathbf{z}_1\|^2, \ldots, \|\mathbf{z}_m\|^2\right]^\top = [\ldots, \|\mathbf{z}_{ij}\|^2, \ldots]^\top \in \mathbb{R}^m. \tag{5.17}$$

编队 $(G, \mathbf{p})$ 的距离刚性矩阵（rigidity matrix）定义为：

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{f}_G(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}. \tag{5.18}$$

记号 $\mathbf{z} = [\mathbf{z}_1^\top、……、\mathbf{z}_m^\top]^\top = (\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_d)\mathbf{p} = \bar{}\mathbf{H}\mathbf{p}$ 以及 $\mathbf{D}(\mathbf{z}) = \text{blkdiag}(\mathbf{z}_1、……、\mathbf{z}_m)$，我们可以将$\mathbf{f}_G(\mathbf{p}) = \mathbf{D}(\mathbf{z})^\top\mathbf{D}(\mathbf{z})\mathbf{1}_m = \mathbf{D}(\mathbf{z})^\top\mathbf{z}$改写为：

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}) = \mathbf{D}^\top(\mathbf{z})\bar{\mathbf{H}} \tag{5.19}$$

直观地说，对于构型$\mathbf{p}$和 $\boldsymbol{\delta}\mathbf{p} = [\boldsymbol{\delta}\mathbf{p}_1^\top、……、\boldsymbol{\delta}\mathbf{p}_n^\top]^\top \in \mathrm{R}^{2n}$，若这是一个将$\mathbf{p}$带到构型$\mathbf{q} = \mathbf{p} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{q}$的微分运动（无穷小运动），那么我们有一阶近似

$$\mathbf{f}_G(\mathbf{q}) \approx \mathbf{f}_G(\mathbf{p}) + \frac{\partial \mathbf{f}_G(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}\boldsymbol{\delta}\mathbf{p} = \mathbf{f}_G(\mathbf{p}) + 2\mathbf{R}(\mathbf{p})\boldsymbol{\delta}\mathbf{p}. \tag{5.20}$$

对于微分运动 $\boldsymbol{\delta}\mathbf{p} \in \ker(\mathbf{R}(\mathbf{p}))$，有$\mathbf{f}_G(\mathbf{q}) \approx \mathbf{f}_G(\mathbf{p})$，距离函数保持不变，也就是说这两个构型彼此距离等价。

注意到，我们总有 $\mathrm{R}(\mathrm{p})(\mathbf{1}_n \otimes \mathrm{I}_d) = \mathrm{Z}^\top(\mathrm{H} \otimes \mathrm{I}_2)(\mathbf{1}_n \otimes \mathrm{I}_d) = \mathrm{Z}^\top(\mathrm{H}\mathbf{1}_n \otimes \mathrm{I}_2) = \mathbf{0}_{m\times 2}$ 且 $\mathrm{R}(\mathrm{p})(\mathrm{I}_n \otimes \mathrm{J})\mathrm{p} = \mathrm{D}^\top(\mathrm{z})\ \bar{}\mathrm{H}(\mathrm{I}_n \otimes \mathrm{J})\mathrm{p} = [\ldots, \mathrm{z}_{ij}^\top \mathrm{J}\mathrm{z}^{ij}, \ldots]^\top = \mathbf{0}_m$，其中 $\mathrm{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 因此 $\mathrm{im}([\mathbf{1}_n \otimes \mathrm{I}_d, (\mathrm{I}_n \otimes \mathrm{J})\mathrm{p}]) \subseteq \ker(\mathrm{R}(\mathrm{p}))$ [290]。因此，$\mathrm{rank}(\mathrm{R}(\mathrm{p})) \leq 2n-3$，刚性矩阵至少有 3 个线性无关的特征向量对应于特征值 0（平移运动，以及整个编队绕平面上一点的旋转运动）。与整个编队沿 ${}^g\Sigma$ 的坐标轴进行平移和旋转相对应的微分运动称为平凡无穷小距离保持运动（trivially infinitesimal distance-preserving motions）。。当 $\mathrm{rank}(\mathrm{R}(\mathrm{p})) \leq 2n-3$ 时，编队是无穷小距离刚性的。显然，无穷小距离刚性编队仅具有平凡无穷小距离保持运动；将 $\ker(\mathrm{R}(\mathrm{q}(t)))$ 中的速度赋给无穷小距离刚性编队的各顶点后，我们得到轨迹 $\mathrm{q}(t)$，其中 $\mathrm{q}(0) = \mathrm{p}$，且 $\mathrm{q}(t)$ 在任意时刻都与 p 距离全等 $t \geq 0$。对于非无穷小距离刚性的编队，$\ker(\mathrm{R}(\mathrm{q}(t)))$ 还包含非平凡距离保持运动。将 $\ker(\mathrm{R}(\mathrm{q}(t)))$ 中的速度赋给编队的各顶点后，得到的轨迹 $\mathrm{q}(t)$，其中 $\mathrm{q}(0) = \mathrm{p}$，可能包含仅与 p 等价、但不与 p 距离全等的构型（参见图5.4(a)）。

**示例 5.3.** 图5.4(b) 中图的刚性矩阵如下:

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} (\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)^\top & (\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1)^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ (\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3)^\top & \mathbf{0}^\top & (\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_1)^\top & \mathbf{0}^\top \\ (\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_4)^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & (\mathbf{p}_4-\mathbf{p}_1)^\top \\ \mathbf{0}^\top & (\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3)^\top & (\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_2)^\top & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & (\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4)^\top & (\mathbf{p}_4-\mathbf{p}_3)^\top \end{bmatrix}.$$

可以注意到，刚性矩阵的结构与关联矩阵相当相似。不过，在与边 $(i,\ j)$ 对应的第 $k$ 行中，$(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_j)^\top$ 取代了 $-1$，$(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_j)^\top$ 取代了 $\mathbf{1}$，而 $\mathbf{0}^\top$ 取代了 $0$。

如果对于 $\mathrm{R}^2$ 中 $G$ 的几乎所有构型 $\mathbf{p}$，$(G,\ \mathbf{p})$ 都是 infinitesimally distance rigid，除了 $\mathrm{R}^{2n}$ 中一个维数小于 $2n$ 的子集，那么图 $G$ 在 $\mathrm{R}^2$ 中是普适距离刚性的（generically rigid）。

根据距离刚性矩阵，如果存在 $G$ 的一个构型 $\mathbf{p}$，使得 $\mathrm{rank}(\mathbf{R}(\mathbf{p})) = 2n-3$，那么 $G$ 就是普适距离刚性图。若 $G$ 的构型 $\mathbf{p}$ 满足 $\mathrm{rank}(\mathbf{R}(\mathbf{p})) = 2n-3$，则称其为坐标处于一般位置的构型，简称为一个 一般构型 （generic configuration）。反之，若 $G$ 的构型 $\mathbf{p}$ 满足 $\mathrm{rank}(\mathbf{R}(\mathbf{p})) < 2n-3$，则称其为一个 退化构型 （degenerated configuration）。

如果图 $G$ 是刚性的，且边数恰好等于 $2n-3$，则称其为极小距离刚性。显然，当 $d=2$时，最小刚性图具有 $2n-3$ 条边。此外，在 $d=2$的情况下，所有最小刚性图都是 Laman 图。

**定义 5.2** （Laman 图）。 图 $G=(V,\ E)$ 是 Laman 图，当且仅当:

- $G$ 具有 $2n-3$ 条边,
- 对于 $V$ 的每个包含 $k$ 个顶点的子集，由这 $k$ 个顶点从 $G$ 导出的子图至多有 $2k-3$ 条边。

在二维空间中，所有 Laman 图都是一般刚性图。该陈述的具体证明可参考 Laman 的论文 [138]，本文不再赘述。Henneberg 提出了如下在二维空间中构造 Laman 图的方法：从一个包含两个顶点（1 和 2）及一条边（1，2）的图开始。在每一步中，我们通过以下两个算子之一扩展图:

1. 加顶点：添加一个顶点 $k$，并添加两条边，将 $k$ 与图中已有的两个顶点 $i,\ j$ 连接起来。
2. 细分边：删除图中已有的一条边（$i,\ j$），并添加一个顶点 $k$ 和三条边（$k,\ i$），（$k,\ j$），（$k,\ l$），其中 $l$是当前图中不同于 $i$、 $j$的一个顶点。

通过 Henneberg 构造得到的图是一个 Laman 图。反过来，每个 Laman 图都可以通过 Henneberg扩张构造。

定义 5.2 为我们提供了一种检验边数最少的普适刚性图的方法。然而，这种检验方法需要考察图的所有子集，因此计算量很大。基于 Crapo 定理和 Récski 定理 [59, 23]，还有一些复杂度更低的等价条件可用于检验最小刚性图。Henneberg扩张的意义在于提供一种简单的算法，用于生成二维空间中的普适距离刚性图。

### 5.4.2 基于距离的编队控制律

给定期望编队 $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}^{dn}$ 的距离，我们定义距离误差变量 $\sigma_{ij} = \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|^2 - (d_{ij}^*)^2 = (d_{ij})^2 - (d_{ij}^*)^2, \forall (i, j) \in E$ 和

$$\boldsymbol{\sigma} = [\ldots, \sigma_{ij}, \ldots]^\top = [\sigma_1, \ldots, \sigma_m]^\top = \mathbf{f}_G(\mathbf{p}) - \mathbf{f}_G(\mathbf{p}^*) \in \mathbb{R}^m.$$

选择势函数

$$V(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{4} \sum_{(i,j)\in E} \sigma_{ij}^2 = \frac{1}{4}\|\boldsymbol{\sigma}\|^2 = \frac{1}{4}\|\mathbf{f}_G(\mathbf{p}) - \mathbf{f}_G(\mathbf{p}^*)\|^2, \tag{5.21}$$

是系统中各智能体之间期望距离误差的总和函数[9]，则根据梯度法设计的编队控制律，在智能体 $i$ 的坐标系下可写为:

$$\dot{\mathbf{p}}_i^i = -\nabla_{\mathbf{p}_i^i} V = -\sum_{j\in N_i} \big(d_{ij}^2 - (d_{ij}^*)^2\big)(\mathbf{p}_j^i - \mathbf{p}_i^i),\ \forall i = 1, \ldots, n. \tag{5.22}$$

显然，控制律 (5.22) 是一种分布式控制律，并且该控制律仅使用智能体 $i$ 在 ${}^i\Sigma$中测量得到的变量。

将方程 (5.22) 转换到全局参考系 ${}^g\Sigma$，可得:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = -\sum_{j\in N_i} \big(d_{ij}^2 - (d_{ij}^*)^2\big)(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i),\ \forall i = 1, \ldots, n. \tag{5.23}$$

我们将编队控制律（5.23）改写为如下矩阵形式:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= -\nabla_{\mathbf{p}} V \\ &= -\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \mathbf{f}_G(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}\Big)^\top \big(\mathbf{f}_G(\mathbf{p}) - \mathbf{f}_G(\mathbf{p}^*)\big) \\ &= -\mathbf{R}(\mathbf{p})^\top \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

显然，对于控制律（5.24），有 $(\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_2)^\top \cdot \mathbf{p} = \mathbf{0}$，因此编队质心时不变。结合关系 $\mathbf{p}^\top(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{J}) \cdot \mathbf{p} = \mathbf{0}$，可知系统的角动量 $\mathbf{p}^\top(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{J})\mathbf{p}$ 也不随时间变化 [268]。

为了分析系统的收敛性，我们定义以下集合:

$$\mathcal{Q} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{dn} |\ \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}\}, \tag{5.25}$$

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{dn} |\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}\}, \tag{5.26}$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{Q} \setminus \mathcal{D}, \tag{5.27}$$

其中，$\mathcal{Q}$ 包含（5.24）的平衡点，$\mathcal{D}$ 是期望平衡点的集合（满足所有期望距离 $d_{ij}^*$ 的编队集合），$\mathcal{U}$ 则是非期望平衡点。集合 $\mathcal{U} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{dn} |\ \mathbf{R}(\mathbf{p})^\top \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}_{dn}, \boldsymbol{\sigma} \neq \mathbf{0}_m\}$ 的存在，使得难以考察与任意刚性图相对应的编队的稳定性。

我们考虑（$G$，$\mathbf{p}^*$）是 infinitesimally distance rigid 的情形（$\mathrm{rank}(\mathbf{R}(\mathbf{p}^*)) = 2n - 3 = m$）。

[9]有许多不同的势函数可供选择。每种势函数的选择方式都对应一种基于距离的编队控制律。有兴趣的读者可参阅 [189, 267]。

将方程（5.24）转换为关于 $\boldsymbol{\sigma}$ 的方程形式，注意到 $\mathbf{D(z)}^{\top}\bar{}\mathbf{H} = \mathbf{R(p)}$，我们得到：

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = -2\mathbf{D}(\mathbf{z})^{\top}\bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{H}}^{\top}\mathbf{D}(\mathbf{z})\boldsymbol{\sigma} = -2\mathbf{R}(\mathbf{p})\mathbf{R}(\mathbf{p})^{\top}\boldsymbol{\sigma} \tag{5.28}$$

对于给定的李雅普诺夫函数 $V(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{4}\boldsymbol{\sigma}^{\top}\boldsymbol{\sigma}$，沿着（5.28）的某条轨迹，有：

$$\dot{V} = -\boldsymbol{\sigma}^{\top}\mathbf{R}(\mathbf{p})\mathbf{R}(\mathbf{p})^{\top}\boldsymbol{\sigma} = -\|\mathbf{R}(\mathbf{p})^{\top}\boldsymbol{\sigma}\|^2 \leq 0. \tag{5.29}$$

由不等式（5.29）可推得 $\boldsymbol{\sigma}$ 有界，且存在 $\lim_{t\to+\infty} V$。由于 $\sigma_k = \|\mathbf{z}_k\|^2 - d_k^*$，因此可推出 $\|\mathbf{z}_k\| = \|\mathbf{p}^j - \mathbf{p}_i\|, \forall(i,j) \in E$ 也有界。根据三角不等式，可推出 $\|\mathbf{p}^j - \mathbf{p}_i\|, \forall i,j \in V$ 有界，即 $d_{\max} = \max_{i\neq j}\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|$ 有界。以下不等式始终成立：

$$\begin{aligned} n^2\|\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{p}_i\|^2 &= \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_i + \ldots + \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_i\|^2 \\ &\leq (\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_i\| + \ldots + \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_i\|)^2 \\ &\leq n^2 \max_j \|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|^2. \end{aligned} \tag{5.30}$$

将不等式 (5.30) 对 $i = 1, \ldots, n$ 求和，可得：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\|\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{p}_i\|^2 &\leq \sum_{i=1}^{n}\max_j \|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|^2 \\ \|\mathbf{p} - \mathbf{1}_n \otimes \bar{\mathbf{p}}\|^2 &\leq nd_{\max}^2 \leq nd_{\max}^2(0). \end{aligned} \tag{5.31}$$

不等式 (5.31) 表明 $\|\mathbf{p} - \mathbf{1}_n \otimes \bar{}\mathbf{p}\|$ 有界。由于 $\bar{}\mathbf{p}$ 不变且仅取决于 $\mathbf{p(0)}$，因此可推知 $\mathbf{p}$ 有界。因此，存在 $R = R(\bar{}\mathbf{p}(0))$，使得紧集 $B(\bar{}\mathbf{p}(0)\ R) = \{\mathbf{p} \in \mathrm{R}^{2n} |\ \|\mathbf{p} - \mathbf{1}_n \otimes \bar{}\mathbf{p}\| \leq R\}$ 包含 $\mathbf{p}(t)$ $\forall t \geq 0$。因此，$B(\bar{}\mathbf{p}(0)\ R(\bar{}\mathbf{p}(0)))$ 与集合 $\mathcal{Q}$、$\mathcal{D}$、$\mathcal{Q}$ 的交集也都是有界集。

$V$ 的二阶导数是依赖于$\mathbf{p}$、$\mathbf{z}$和 $\boldsymbol{\sigma}$ 的函数，因此也是有界函数。由此，根据Barbalat引理，可得 $\dot{V} \to 0$，即$\mathbf{R}^{\top}\boldsymbol{\sigma} \to \mathbf{0}_m$。这表明，当 $t \to +\infty$时，$\mathbf{p} \to \mathcal{Q}$。

定义 $\gamma = \min_{\mathbf{p}\in\mathcal{U}} V(\boldsymbol{\sigma}(t)) > 0$。$\mathcal{U}$ 中的构型族数目（不考虑旋转和平移）是有限的，因此 $\gamma$ 得到了完全定义。由此，如果选择的初始编队满足 $V(\boldsymbol{\sigma}(0)) < \gamma$，那么显然，由于 $V$ 不增加，$\mathbf{p}$ 不可能渐近于集合 $\mathcal{U}$。由于$\mathbf{p} \to \mathcal{Q} = \mathcal{D} \cup \mathcal{U}, \mathcal{U} \cap \mathcal{D} = \emptyset,$，因此必有$\mathbf{p} \to \mathcal{D} \cap B(\bar{}\mathbf{p}(0)\ R)$。由此可得 $\boldsymbol{\sigma} \to \mathbf{0}_m$。

注意，集合 $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cap B(\bar{}\mathbf{p}(0)\ R)$ 是一个紧集，其中仅包含有限个满足 $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}_{dm}$ 的互不相同的距离全等构型族。假设这样的构型族有 $N \geq 1$ 个，记为 $\bar{\mathcal{D}}_q \subseteq \bar{\mathcal{D}}$，其中 $q = 1, \ldots\ldots, N$，且 $\{\bar{\mathcal{D}}_q\}_{q=1}^{N}$ 中任意两个集合互不相交，并且 $\bigcup_{q=1}^{N}\bar{\mathcal{D}}_q = \bar{\mathcal{D}}$。于是，每个子集 $\bar{\mathcal{D}}_q$ 都由一个构型 $\mathbf{p}^d \in \bar{\mathcal{D}}_q$ 表征，$\bar{\mathcal{D}}_q$ 包含所有质心与 $\mathbf{p}^d$ 相同，且可由 $\mathbf{p}^d$ 通过旋转或翻转得到的构型。继续将 $\bar{\mathcal{D}}_q$ 划分为互不相交的子集 $\bar{\mathcal{D}}_{qr}$，$r = 1, \ldots\ldots, M_q$，使其满足 $\bigcup_{r=1}^{M_q}\bar{\mathcal{D}}_{qr} = \bar{\mathcal{D}}_q$，则子集 $\mathcal{D}_{qr}$，$r = 1, \ldots\ldots, M_q$ 中的所有构型彼此仅相差绕中心 $\bar{}\mathbf{p}(0)$ 的旋转。

由于$\mathbf{p} \to \mathcal{D}$，令 $d(\mathbf{p}\ \bar{\mathcal{D}}) = \min_{\mathbf{p}^d\in\bar{\mathcal{D}}}\|\mathbf{p} - \mathbf{p}^d\|$ 为从$\mathbf{p}$ 到集合 $\bar{\mathcal{D}}$ 的距离，则对每个足够小的 $\varepsilon > 0$，存在足够大的 $T > 0$，使得 $d(\mathbf{p}(t)\ \bar{\mathcal{D}}) < \varepsilon$，亦即存在构型$\mathbf{p}^d(t) \in \bar{\mathcal{D}}$ 足够接近$\mathbf{p}(t)$。显然$\mathbf{p}^d$ 必须位于这些集合中唯一的一个

$$\bar{\mathcal{D}}_{11}, \ldots, \bar{\mathcal{D}}_{1M_1}, \ldots, \bar{\mathcal{D}}_{N1}, \ldots, \bar{\mathcal{D}}_{NM_N}.$$

因此，若$\mathbf{p}(t)$渐近趋于 $\mathcal{D}$ 中的一个闭合环[10] ，则该闭合环仅包含彼此仅相差绕中心 $\bar{}\mathbf{p}(0)$的一次旋转的构型。但这不可能发生，因为 $\dot{}\mathbf{p} = \mathbf{R}^\top \boldsymbol{\sigma} \perp$ 像$((\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{J})\mathbf{p})$，即$\mathbf{p}(t)$没有绕中心 $\bar{}\mathbf{p}(0)$的旋转运动。因此，存在一个静态构型$\mathbf{p}^d \in \bar{\mathcal{D}}$ ，使得$\lim_{t\to+\infty}\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}^d$。

**基于距离的编队控制问题**

基于距离的编队控制问题是多智能体系统中的一个理论问题，吸引了世界各地许多研究团队的关注。本章中的编队控制问题基于 [191] 提出。该问题受到广泛研究的因素包括：(a) 问题的表述相当简单，只需具备几何知识便能理解其表述；(b) 寻找一种完全分布式的解，以全局稳定由一组距离给定的期望编队，是一个难题；(c) 距离测量可以在独立的参考系中进行，因此对自动驾驶车辆系统具有实际意义；(d) 世界各地许多知名大学的研究团队都对该问题感兴趣。

Magnus Egerstedt 和 Xiaoming Hu 基于距离势函数设计了移动机器人控制律。基于距离的编队控制问题或许最早于 IFAC 2002 上提出，当时 Olfati-Saber 和 Murray 基于一组距离构造势函数，为二阶积分器智能体设计控制律。与此同时，Eren Tolga、Belhumeur、Anderson 和 Morse 提出了在编队控制中运用刚性理论的思路。此后，两组研究人员继续发展了将距离刚性理论用于控制以及改变编队结构的研究；由于其在传感器网络定位中的应用潜力，这一研究方向逐渐受到广泛关注。

从2005年左右开始，Cao [42, 41],Yu [323], 和 Hendrickx [111]开始发展基于有向图的编队控制。Dimarogonas 在 [67] 中证明，通过根据距离误差选择势函数，可以稳定具有树结构的一阶积分器智能体编队。Dörfler [76]和 Krick（2009） [135], 的论文解决了一阶积分器智能体期望编队渐近稳定性的证明问题，其假设是二维期望编队满足无穷小刚性。所采用的工具是中心流形理论，图为三顶点有向环、无向图或领导者-跟随者结构。Oh 和 Ahn 提出了一阶、二阶积分器编队渐近稳定的控制律，并基于 Lojasiewicz 引理分析其局部渐近稳定性 [189]。 [37, 64] 着重研究无穷小刚性编队，并证明当 $\mathbf{R(p)} = 2n-3$ 的秩性质在构型 $\mathbf{p}^d \in \mathcal{D}$ 附近成立时，编队局部渐近稳定。Vu 等人 [305, 306] 基于 Barbalat 引理分析系统稳定性，并确定了编队渐近收敛到期望构型集的充分条件。Sun 证明了期望编队局部指数稳定[267], ，但未指出满足这一性质的邻域。

然而，基于距离控制律的编队无法实现全局或几乎全局稳定，除非在某些特殊情况下。原因在于 $\boldsymbol{\sigma}$ 存在相对平衡点，而这些平衡点可能是稳定的 [291]。如果假设不存在稳定的错误平衡点，那么 [275] 中的控制律将使期望编队渐近稳定。

基于这一观察，已发展出若干研究方向：

i. 证明若干特定编队的几乎全局渐近稳定性：无环领导者-跟随者 [262, 214, 215], $K_4$ 二维 [261, 60] 和 $K_4$ 三维 [202, 205], 环

[10]极限环

有向 [201], $K_4$ 去除一条边 [216]。

ii. 开发理论工具，以确定错误平衡点的数量及其性质 [6, 7], Belabas [22]。然而，这种方法使用了相当复杂的数学工具，且只能对一些规模较小的编队得出具体结论。相关分析需要精确求解度数大于 4 的方程。文献[263], 提出了数值方法，可近似验证非期望稳定平衡点是否存在。目前，对于非期望稳定平衡点仍未有最终结论，因为尚未找到该平衡点的精确解。

iii. 寻找能够避开原始算法局限的方法，从而使期望编队全局稳定。Oh 和 Ahn [190] 引入坐标系偏差，将基于距离的控制问题转化为基于相对位置的控制问题。 [11, 12]假设智能体针对图中的每个团分别求解优化问题，以确定各团控制律所需的方向角，从而使期望编队全局稳定。目前最一般的结果可能见于 [240, 239], ，其中 Sakurama、Shun-ichi Azuma 和 Toshiharu Sugie 证明，若智能体能够在局部参考系中测量相对位置，则可通过求解图中每个团上的优化问题，确定一种使期望编队全局渐近稳定的梯度控制律；

iv. 与 (iii) 相反，一些作者研究了基于较少测量信息的期望编队稳定问题。 [8, 43, 271] 仅使用距离，而没有完整的局部误差向量信息。

许多文献还研究了将先进控制方法应用于该问题，使其更贴近实际条件和要求，例如研究测量误差、期望距离误差的影响，[170, 62, 63], 抗干扰， [305, 288], 时变目标跟踪，Kang [124, 238, 306], 固定时间控制， [206, 269, 160], 实际对象模型，[37, 201, 64], 编队方向联合控制， [270], .....关于基于距离的编队控制的专著包括 [64, 265, 2]。

我们有以下观察：

i. 如果能够确定 $\gamma = \min_{\mathbf{p}\in\mathcal{U}} V(\boldsymbol{\sigma}(t)) > 0$，那么由于 $\sigma_k = \|\mathbf{z}_k\|^2 - \|\mathbf{z}_k^*\|^2$，我们有

$$\sum_{k=1}^{m} \sigma_k = \sum_{k=1}^{m} \|\mathbf{z}_k\|^2 - \sum_{k=1}^{m} \|\mathbf{z}_k^*\|^2 = \|\mathbf{z}\| - \|\mathbf{z}^*\|^2. \tag{5.32}$$

Do

$$\left|\sum_{k=1}^{m} \sigma_k\right|^2 \le m \sum_{i=1}^{m} \sigma_k^2 = 4mV(\boldsymbol{\sigma}(t)), \tag{5.33}$$

由此可推出，$\mathbf{p}$ 渐近趋于 $\mathcal{D}$ 中某个构型的充分条件为

$$\|\mathbf{z}^*\|^2 - 2\sqrt{m\gamma} \le \|\mathbf{z}(0)\|^2 \le \|\mathbf{z}^*\|^2 + 2\sqrt{m\gamma}. \tag{5.34}$$

ii. 请注意，矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\sigma})^\top \mathbf{R}(\boldsymbol{\sigma}) \in \mathrm{R}^{2n\times 2n}$ 具有类似拉普拉斯矩阵的结构（其中分块矩阵 $\mathbf{z}^{ij}\mathbf{z}_{ij}^\top$ 为对称半正定矩阵，取代了标量元素）。

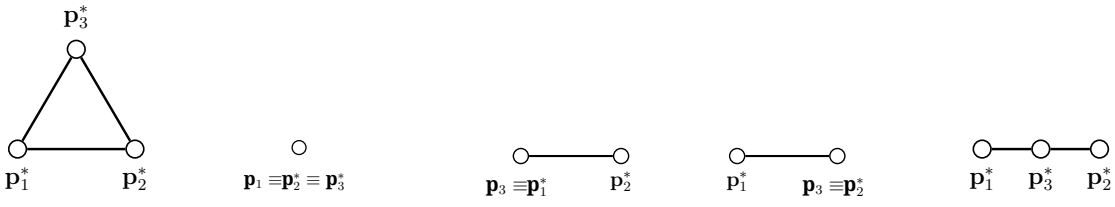



图 5.5：示例 5.4 示意图：（a）期望构型；（b）、（c）、（d）、（e）：属于 $\mathcal{U}^*$ 的四种不同构型。

因此，除了称为刚性矩阵（stiffnessmatrix）外，在一些文献中，$\boldsymbol{\mathcal{R}(\sigma)}$ 也被称为刚性拉普拉斯矩阵。该矩阵的最小正特征值也是用于确定图 [290] 的距离刚性的一项指标。

我们可以将控制律（5.24）变换如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= -\mathbf{R}^\top \boldsymbol{\sigma} \\ &= -\bar{\mathbf{H}}^\top \mathrm{diag}(\mathbf{z}_k)\boldsymbol{\sigma} \\ &= -\bar{\mathbf{H}}^\top (\mathrm{diag}(\boldsymbol{\sigma}) \otimes \mathbf{I}_2)\bar{\mathbf{H}}\mathbf{p} \\ &= -\bar{\mathbf{H}}^\top (\mathrm{diag}(\mathbf{f}_G(\mathbf{p})) \otimes \mathbf{I}_2)\bar{\mathbf{H}}\mathbf{p} + \bar{\mathbf{H}}^\top (\mathrm{diag}(\mathbf{f}_G(\mathbf{p}^*)) \otimes \mathbf{I}_2)\bar{\mathbf{H}}\mathbf{p}. \end{aligned} \tag{5.35}$$

采用这种表示方式，(5.24)具有一致性协议的形式，其权重为 $\sigma_k$，$k$ =1，.....，$m$，并依赖于状态变量$\mathbf{p}$。由于权重 $\sigma_k$，$k = 1$，.....，$m$ 可能为负且依赖于构型，因此无法采用适用于常规一致性系统的分析方法。另一方面，(5.35)描述了一个状态依赖加权一致性系统$\mathbf{p}$，该系统受到一个以状态反馈形式表示的输入信号$\mathbf{u(p)} = \bar{\mathbf{H}}^\top(\mathbf{diag}(\mathbf{f}_G(\mathbf{p}^*)) \otimes \mathbf{I}_2)\bar{\mathbf{H}}\mathbf{p}$的作用。

**示例 5.4**。在本示例中，我们将说明上述证明中的收敛条件 $\gamma$ 的取值（见图 5.5）。考虑由 3 个智能体组成的编队，其中 $G = C_3$，其构型设为边长为 1 的等边三角形。三个智能体对应的方程依次为：

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = -(d_{12}^2 - 1)(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) - (d_{13}^2 - 1)(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) \tag{5.36}$$
$$\dot{\mathbf{p}}_2 = -(d_{21}^2 - 1)(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) - (d_{23}^2 - 1)(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \tag{5.37}$$
$$\dot{\mathbf{p}}_3 = -(d_{31}^2 - 1)(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) - (d_{23}^2 - 1)(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2). \tag{5.38}$$

我们将在 $\mathcal{Q}$ 中确定构型集合。显然，如果 3 个点 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ 不共线，那么满足 $\dot{\mathbf{p}}_1 = \dot{\mathbf{p}}_2 = \dot{\mathbf{p}}_3 = 0$ 的构型族系统必须满足 $d_{12} = d_{13} = d_{31} = 1$。这些构型属于集合 $\mathcal{D}$。

考虑 3 个点 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$重合的情况。此时，$\dot{\mathbf{p}}_1 = \dot{\mathbf{p}}_2 = \dot{\mathbf{p}}_3 = \mathbf{0}$，且 $V(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{4}((d_{12}^2 - (d_{12}^*)^2)^2 + (d_{13}^2 - (d_{13}^*)^2)^2 + (d_{32}^2 - (d_{32}^*)^2)^2) = \frac{1}{4}(1^2 + 1^2 + 1^2) = \frac{3}{4} = \gamma_1$。

考虑三个点中有两个重合的情形。由于对称性，我们只需考察$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 \neq \mathbf{p}_3$。代入智能体1和2的方程，得 $\dot{\mathbf{p}}_1 = -(d_{13}^2 - 1)(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) = \mathbf{0}$，因此可推出 $d_{13} = 1$和 $d_{23} = 1$。代入智能体3的方程后可见，满足 $\dot{\mathbf{p}}_3 = \mathbf{0}$。因此，对于这一类构型，我们有 $V(\sigma) = \frac{1}{4}((1 - 0)^2) = \frac{1}{4} = \gamma_2$。

考虑 3 个点共线且任意两点都不重合的情形。由于对称性，我们只需考虑点 $\mathbf{p}_2$ 位于$\mathbf{p}_1$ 和$\mathbf{p}_3$, 之间，也就是 $d_{12} + d_{23} = d_{13}$。方程 $\dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{0}$ 给出

我们有 $d_{12} = d_{23} = \frac{1}{2}d_{13}$。代入方程 $\mathbf{p}_{-}$ $_1 = -$ $_1 - {}_2$ $_1 - {}_2 = ($ $d_{12}^2 - 1)(\mathbf{pp}) - 2(4d_{12}^2 - 1)(\mathbf{pp})(9d_{12}^2 - 3)(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) = \mathbf{0}$，可得 $d_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}} = d_{23}$（矛盾）。

因此，$\gamma = \min_{\mathbf{p}\in\mathcal{U}} V(\boldsymbol{\sigma}) = \min\{\gamma_1, \gamma_2\} = \frac{1}{4}$。对于 $V(\boldsymbol{\sigma}(0)) < \frac{1}{4}$，则 $\mathbf{p} \to \mathcal{D}$。

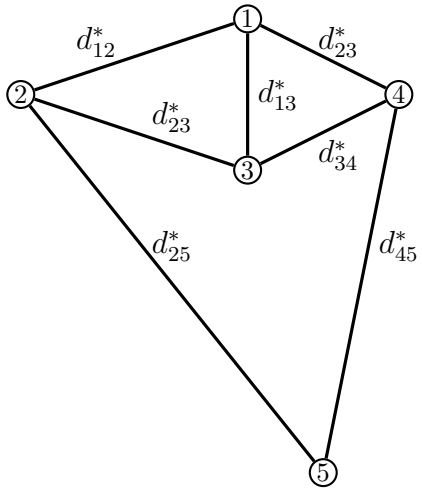



图 5.6：一个满足示例 5.5 中距离约束的构型。

**例5.5**。 为说明期望（稳定）平衡点集 $\mathcal{D}$ 与非期望平衡点集 $\mathcal{U}$ 可以同时存在，我们考察 [203, 291] 中展示的示例：由 5 个智能体构成的编队，其图 $G$ 如图 5.7 所示。期望距离如下：$d_{12}^{*2} = d_{23}^{*2} = 10$、$d_{13}^{*2} = 4$、$d_{14}^{*2} = d_{34}^{*2} = 5$、$d_{25}^* = 41$ 和 $d_{45}^* = 26$。每个智能体均按照基于距离的编队控制律 (5.23) 运动，比例系数为 $k_p = 3$.. 对应于两个不同的初始构型，系统渐近趋于两个完全不同的构型（期望和非期望构型）。

注意，期望平衡点的存在性，目前仅通过仿真[203, 291]得到验证。在 $\mathcal{U}$ 中存在不期望且不稳定的平衡点这一点，已在 [261, 60]中通过一个由4个智能体组成、图为 $K_4$的矩形编队具体展示。

## 5.5 基于方向向量的编队控制

近年来，基于方向向量和吸引角的编队控制方法受到广泛关注。这种关注部分源于带有摄像机的小型无人飞行器的发展，它们能够根据获取的图像确定方向向量。仅使用方向向量或仅使用偏角的控制方案不需要全局参考系，也不使用距离传感器，因此，当智能体在没有GPS的环境中运行，或距离传感器发生故障时，这些方案可作为替代方案。

方向刚性理论（bearing rigidity）提供了理论工具，用于检验和构建可基于方向向量进行控制的编队。方向刚性理论问世时，其研究目的纯粹是数学上的 [312]。将方向刚性理论应用于编队控制问题或传感器网络定位问题，是 T. Eren 及其同事在一些研究成果中提出的 [84, 85, 81]。基于方向向量的编队控制，直到关于 $\mathrm{R}^d$ 中方向刚性理论的研究在论文 [338, 339] 中发表后，才受到广泛关注。请注意，理论

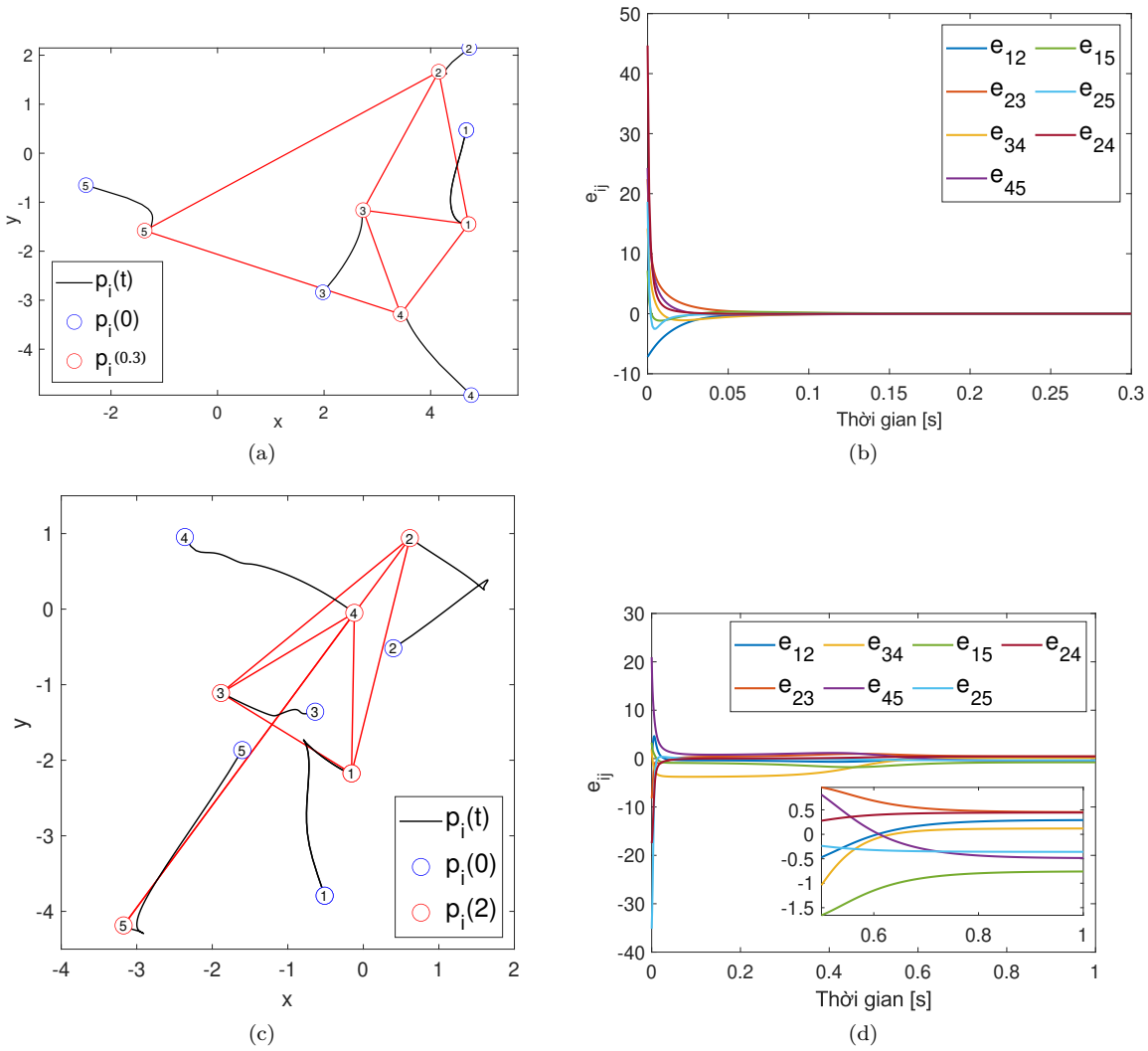



图 5.7：例 5.5 中由 5 个智能体组成的编队。(a) 和 (b)：$\mathbf{p}$ 渐近趋向一个期望构型；(c) 和 (d) $\mathbf{p}$ 渐近趋向一个非期望构型。

方向刚性理论还在文献 [94, 327, 245, 166] 中扩展到了 $\mathrm{R}^d \times S^{d-1}$ 或 $SE(d)$。基于 $SE(d)$ 上方向刚性理论的编队控制，优点是不需要公共参考系的信息，但仍需要智能体之间进行信息交换。

对于基于方向向量的编队控制方案，我们考虑满足以下假设的智能体系统：

- 智能体模型：智能体由一阶积分环节建模：

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{u}_i, \ i = 1, \ldots, n, \tag{5.39}$$

tr其中 $\mathbf{p}_i \in \mathrm{R}^d$ 和 $\mathbf{u}_i \in \mathrm{R}^d$ 分别是以参考系表示的智能体 $i$ 的位置和控制信号

$^{g}\Sigma$。

- 测量变量：智能体具有方向相同但坐标原点不同的局部参考系。为简便起见，我们进一步假设局部参考系与全局参考系的方向相同。在局部参考系中，智能体可以测量邻居智能体 $j \in N_i$的方向向量（bearing vector）$\mathbf{g}^{ij} = {}_{\mathbf{p}}\|{}^{j-}{}_{j-}{}^{i}\mathbf{ppp}_i\|$ 。

- 交互图：智能体之间的测量交互由无向图 $G$表示，假设 $G$ 是一个定向刚性图。

- 期望编队：由一组期望方向向量 $\Gamma = \{\mathbf{g}_{ij}^{*} \in \mathrm{R}^{d}\}_{(i,j)\in E}$描述。

本小节将依次介绍 $\mathrm{R}^d$ 上的方向刚性理论，以及仅使用方向向量进行编队控制的应用。

### 5.5.1 d维欧几里得空间中的方向刚性理论

考虑一个由 $n$ 个点组成的集合，这些点位于 $d$ 维空间（$n \geq 2, d \geq 2$）中，坐标为$\mathrm{p}_i \in \mathrm{R}^d$，其中$\mathrm{p}_i \neq \mathrm{p}_j, \forall i \neq j, i, j \in \{1, \ldots, n\}$。 $d$维空间（$G$, p）中的一个编队由图 $G = (V, E)$和一个构型 p $= [\mathrm{p}_1^{\top}, \ldots, \mathrm{p}_n^{\top}]^{\top}$给出。对于每条边 $e_k = (v_i, v_j) \in E$，从$\mathrm{p}_i$ 指向$\mathrm{p}_j$ 的方向向量定义为

$$\mathbf{g}_{ij} = \frac{\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|} = \frac{\mathbf{z}_{ij}}{\|\mathbf{z}_{ij}\|},$$

其中$\mathbf{z}^{ij} = \mathbf{p}^j - \mathbf{p}_i$ 是误差向量。注意，$\mathbf{g}^{ij}$ 是$\mathrm{R}^d$中的一个单位向量，因为 $\|\mathbf{g}_{ij}\| = 1$。对于每个方向向量$\mathbf{g}^{ij}$，我们定义相应的正交投影矩阵$\mathbf{P}^{\mathbf{g}_{ij}} = \mathbf{I}_d - \mathbf{g}^{ij}\mathbf{g}_{ij}^{\top}$.

两个编队 ($G$, p) 和 ($G$, q) 方向等价[11]，如果 $\mathrm{P}^{\mathbf{g}_{ij}}(\mathrm{q}_i - \mathrm{q}_j) = \mathbf{0}$，$8(v_i, v_j) \in E$。此外，($G$, p) 和 ($G$, q) 方向相似[12]，如果 $\mathrm{P}_{(\mathbf{p}_i - \mathrm{p}_j)}(\mathrm{q}_i - \mathrm{q}_j) = \mathbf{0}$, $\forall i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$。编队 ($G$, p) 是全局方向刚性[13] 的，如果任何一个与 ($G$, p) 方向等价的编队也与 ($G$, p) 方向相似。

设 $\mathbf{g} = \mathrm{vec}(\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_m) = [\ldots, \mathbf{g}_{ij}^{\top}, \ldots]^{\top}$，方向刚性矩阵 定义如下：

$$\mathbf{R}_b = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} = \mathrm{blkdiag}\Big(\frac{\mathbf{P}_{\mathbf{g}_k}}{\|\mathbf{z}_k\|}\Big)\bar{\mathbf{H}} \in \mathbb{R}^{dm \times dn},$$

其中 $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_d$，且 $\mathbf{H}$ 是 $G$ 的关联矩阵。编队在 $\mathrm{R}^d$ 上是微分方向刚性[14] 的，当且仅当 $\mathrm{rank}(\mathbf{R}_b) = dn - d - 1$，或 $\ker(\mathbf{R}_b) = \mathrm{im}([\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_d, \mathbf{p}])$。编队不是微分方向刚性的，当且仅当 $\mathrm{rank}(\mathbf{R}_b) < dn - d - 1$。如图5.8所示，给出了一些微分方向刚性和非微分方向刚性的编队示例。

当空间的维数 $d$ 增加时，编队的方向刚性保持不变。如果 ($G$,p) 在 $\mathrm{R}^d$ 中是微分方向刚性的，那么 ($G$, p) 在 $\mathrm{R}^{d+1}$ 中也具有微分方向刚性。

此外，由改变编队尺度的微分运动所生成的空间，与使编队旋转的无穷小运动空间正交。这一观察的推论是，在

[11]方位等价[12]方位全等[13]全局方位刚性[14]微分方位刚性

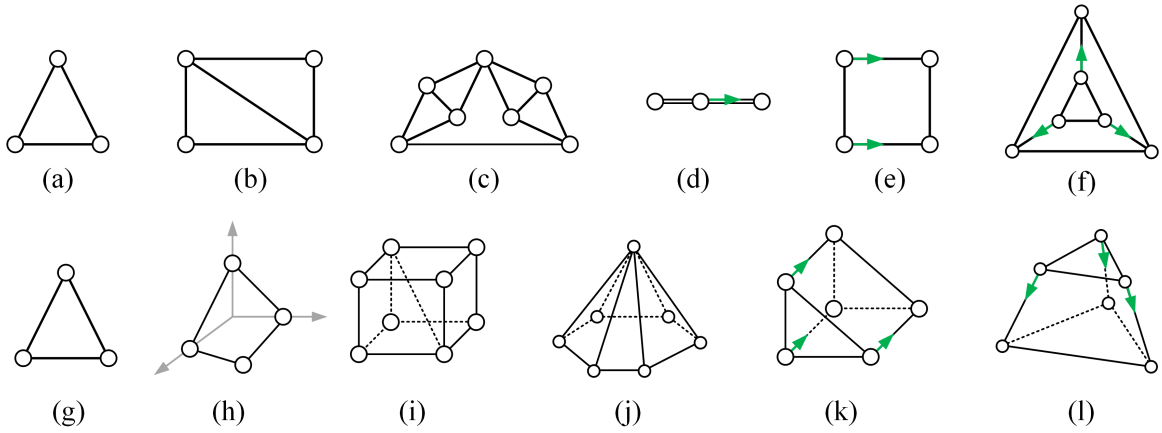



图5.8：微分方向刚性的示例：在 $\mathrm{R}^2$，中，编队 (a)、(b)、(c) 具有微分方向刚性，编队 (d)、(e)、(f) 不具有微分方向刚性。在 $\mathrm{R}^3$，中，编队 (g)、(h)、(i)、(j) 具有微分方向刚性，编队 (k)、(l) 不具有微分方向刚性。

$d=2$ 维空间中，一个编队在 $\mathrm{R}^2$ 中具有微分方向刚性，当且仅当它在 $\mathrm{R}^2$ 中是 infinitesimally distance rigid。

校正定向刚性矩阵的定义为 $\tilde{\mathbf{R}}_b = (\mathrm{diag}(\|\mathbf{z}_k\|) \otimes \mathbf{I}_d)\mathbf{R}_b =$ 分块对角矩阵$(\mathbf{P}_{\mathbf{g}_k})$ $\bar{\mathbf{H}}$，则 $\ker(\mathbf{R}_b) = \ker(\tilde{\mathbf{R}}_b)$。定向拉普拉斯矩阵定义为 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_b = \tilde{\mathbf{R}}_b^\top \tilde{\mathbf{R}}_b$，它是对称的、半正定的，并且 $\ker(\boldsymbol{\mathcal{L}}_b) = \ker(\mathbf{R}_b)$。上述矩阵的块元素给出如下：

$$[\boldsymbol{\mathcal{L}}_b]_{ij} = \begin{cases} -\mathbf{P}_{\mathbf{g}_{ij}}, & (i,j) \in E, \\ \mathbf{0}_{d\times d}, & (i,j) \notin E, \\ \sum_{j\in N_i} \mathbf{P}_{\mathbf{g}_{ij}}, & i=j. \end{cases} \tag{5.40}$$

一个编队若满足微分方向刚性 [338]，则也满足方向刚性。方向刚性是一种普适性质，即它主要由图结构决定，而非由具体构型决定。

**定义 5.3** (普遍定向刚性图)。 [334] 图 $G$ 是普适方向刚性的[15] 在 $\mathrm{R}^d$中，当且仅当至少存在一个构型 $\mathbf{p} \in \mathrm{R}^{dn}$，使得 $(G,\mathbf{p})$ 是微分方向刚性的。

微分方向刚性编队集在 $\mathrm{R}^d$中稠密，也就是说，如果一个编队 $(G,\mathbf{p})$ 是微分方向刚性的，那么在任意邻域 $B_\epsilon = \{\mathbf{p}' \in \mathrm{R}^{dn} | \ \|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\| < \epsilon\}$, 内总能找到一个微分方向刚性编队 $(G,\mathbf{q})$，对任意 $\epsilon > 0$ 均成立。若图 $G$ 不是普适方向刚性图，则称其为非（普适）方向刚性图；换言之，对于 $G$ 在 $\mathrm{R}^d$ 中的任意构型 $\mathbf{p}$，$(G,\mathbf{p})$ 都不是微分方向刚性的。

由于微分方向刚性在空间维数增加时保持不变，因此普适方向刚性在空间维数增加时也保持不变。事实上，循环图 $C_3$ 在 $\mathrm{R}^2$ 中是普适方向刚性的，因此在 $\mathrm{R}^d$ 中也具有普适方向刚性，其中 $d \geq 3$。而图 $C_4$ 在 $\mathrm{R}^2$ 中不是方向刚性的，但在 $\mathrm{R}^3$ 中是普适方向刚性的。因此，$C_4$ 在 $\mathrm{R}^d$ 中也具有普适方向刚性，其中 $d \geq 3$。

[15]一般轴承刚性

**算法 1：** 构造一个包含 $n$ （$n \geq 3$）个顶点的最小普适刚性图 $\mathrm{R}^d$ ($d \geq 2$)

**要求：** $d \geq 2$: 维数, $n \geq 3$: 图中的顶点数

**如果** $n \leq d+1$ **则**
  $G \leftarrow \mathcal{C}_n$;
**否则**
  $k \leftarrow 0$;
  $G[k] \leftarrow \mathcal{C}_{d+1}$;
  $q \leftarrow (n-d-1)$;
  **当** $q \geq d-1$ **时执行**
    $k \leftarrow k+1$;
    $G[k] \leftarrow$ 在 $G$的两个不同顶点之间添加一个包含 $d-1$ 个顶点和 $d$ 条边的开环;
    $q \leftarrow (q-d+1)$;
  **结束 while**
  **如果** $q > 0$ **那么**
    $G \leftarrow$ 向 $G[k]$的两个不同顶点添加一个包含 $q$ 个内部顶点和 $q+1$ 条边的开环;
  **else**
    $G \leftarrow G[k]$;
  **结束 if**
**结束 if**
**返回** $G$;

假设 $G$ 是一个包含 $n$ 个顶点和 $m$ 条边的图。与距离等价刚性理论类似，我们定义最小方向刚性图如下。

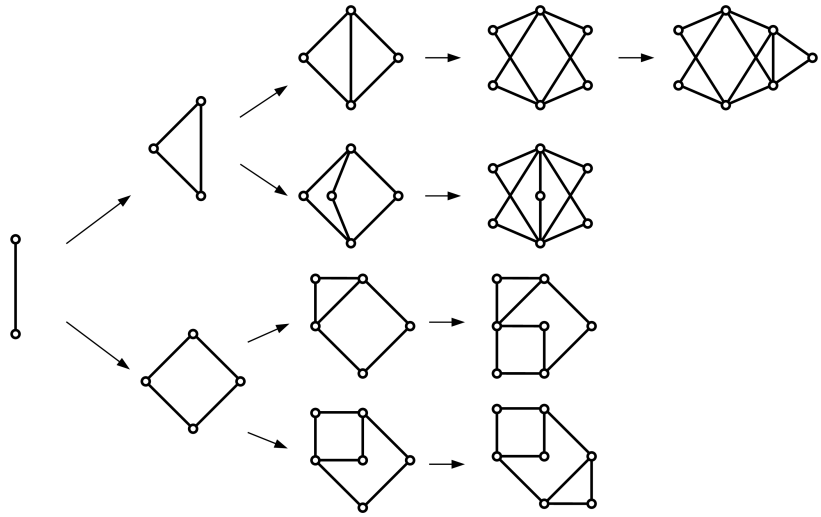
**定义 5.4**（最小方向刚性图）。图 $G$ 在 $\mathrm{R}^d$ 中是最小方向刚性的，当且仅当不存在任何由 $n$ 个顶点组成的图 $\mathcal{H}$，使得 $\mathcal{H}$ 在 $\mathrm{R}^d$ 中具有普适方向刚性，且边数少于$m$。根据此定义，可以证明，图 $C_n$ 在 $\mathrm{R}^d$ 中是最小方向普适刚性图，当且仅当 $n \leq d+1$。

图 $G$ 含有 $m$ 条边，在 $\mathrm{R}^d$ 中是 1-冗余定向刚性，当且仅当 $G$ 的每个含有 $m-1$ 条边的生成子图也是普适刚性图。文献 [292] 介绍了若干构造最小方向刚性图[16] 和 1-冗余定向刚性图的方法。在 $\mathrm{R}^d$ 中构造具有 $n$ 个顶点的最小方向普适刚性图的一般思路源自 Henneberg 构造中的顶点添加算子。在每一步中，向当前的普适方向刚性图的两个不同顶点添加一串顶点和边[17]，其长度不超过$d$。这种构造普适方向刚性图的方法见算法 1。最小边数由函数 $f(n,\ d)$ 给出，如下所示：

$$f(n,d) = \begin{cases} n, & \text{nếu } n \leq d+1, \\ f(n-d+1,d)+d, & \text{nếu } n > d+1. \end{cases} \tag{5.41}$$

**例 5.6**。图 5.9 展示了一个示例：从两个顶点和一条边出发，在 $\mathrm{R}^3$ 中构造若干不同的普适方向刚性图。图 5.10 展示了从一条链 $C_4$ 出发，在 $\mathrm{R}^3$ 中构造一个最小方向普适刚性图的过程。

[16]极小轴承刚性[17]“开放耳”一词用于 [313]



Hi图 5.9：从连接两个顶点的一条边出发，在 $\mathrm{R}^3$ 中构建普适定向刚性图 .

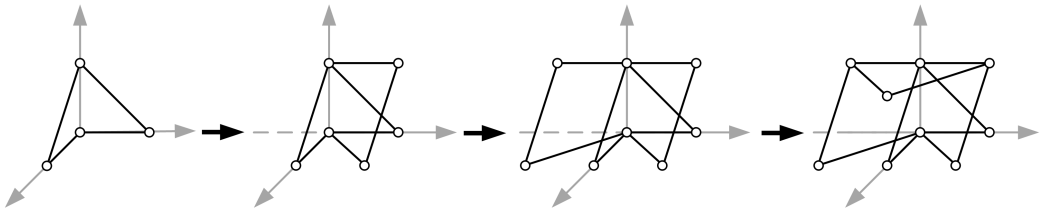


图 5.10：从环 $C_4$ 出发，在 $\mathrm{R}^3$ 中构建普适定向刚性图。

### 5.5.2 使用方向向量的编队控制律

考虑由 $n$ 个一阶积分器智能体 $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{u}_i, i = 1, \ldots, n$ 组成的编队，其中，$\mathbf{p}_i \in \mathrm{R}^d$ 和 $\mathbf{u}_i \in \mathrm{R}^d$ 分别表示第 $i$ 个智能体的位置和控制信号。每个智能体 $i$ 都可以测量方向向量 $\mathbf{g}_{ij}, \forall j \in N_i$，并且已知期望方向向量 $\mathbf{g}^*_{ij}, j \in N_i$。假设期望方向向量集合是可行的，即存在一个构型 $\mathbf{p}^* \in \mathrm{R}^{dn}$，使得对于所有 $\mathbf{g}^*_{ij} \in \Gamma$，都有 $\mathbf{g}^*_{ij} = \mathbf{p}^*_j - \mathbf{p}^*_i \| \mathbf{p}^*_j - \mathbf{p}^*_i \|$。此外，期望编队 $(G, \mathbf{p}^*)$ 是微分方向刚性的，~~且不存~~在两个重合的点。

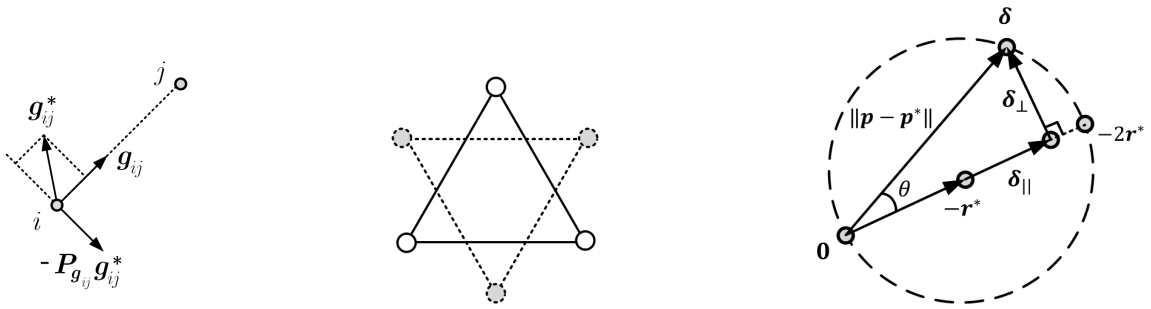
考虑仅使用以下方向向量的控制律 [338]:

$$\mathbf{u}_i = -\sum_{j \in N_i} \mathbf{P}_{\mathbf{g}_{ij}} \mathbf{g}^*_{ij}, \ i = 1, \ldots, n, \tag{5.42}$$

其中 $\mathbf{P}_{\mathbf{g}_{ij}} = \mathbf{I}_d - \mathbf{g}_{ij} \mathbf{g}_{ij}^\top \in \mathrm{R}^{d \times d}$ 是由方向向量 $\mathbf{g}_{ij}$ 计算得到的正交投影矩阵。该算法的几何示意图如图 5.11(a) 所示。对于控制律（5.42），整个系统的方程形式为

$$\dot{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{H}}^\top \mathrm{blkdiag}\left(\mathbf{P}_{\mathbf{g}_k}\right) \mathbf{g}^* = \tilde{\mathbf{R}}_b^\top \mathbf{g}^*, \tag{5.43}$$

其中 $\mathbf{p} = [\mathbf{p}_1^\top, \ldots, \mathbf{p}_n^\top]^\top \in \mathbb{R}^{dn}$ 和 $\mathbf{g}^* = [(\mathbf{g}^*_1)^\top, \ldots, (\mathbf{g}^*_m)^\top]^\top = [\ldots, (\mathbf{g}^*_{ij})^\top, \ldots]^\top \in \mathbb{R}^{dm}$。




(a) (b) (c)

图5.11：仅基于方向向量的编队控制算法的稳定性分析示意图：(a) 仅使用方向向量的控制律；(b) 两个中心对称且具有相同质心的平衡点示例；(c) $\boldsymbol{\delta}$ 始终位于集合 $\mathcal{S}$中。

定义 $\bar{\mathbf{p}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{p}_i = \frac{1}{n}(\mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{I}_d)\mathbf{p}$和 $s = \frac{1}{\sqrt{n}}\|\mathbf{p} - \mathbf{1}_n \otimes \bar{\mathbf{p}}\|$分别为编队的质心和尺度。由于

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{p}}} &= \frac{1}{n}(\mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{I}_d)\bar{\mathbf{H}}^\top \mathrm{blkdiag}\left(\frac{\mathbf{P}_{\mathbf{g}_k}}{\|\mathbf{z}_k\|}\right)\mathbf{g}^* \\ &= \frac{1}{n}(\mathbf{1}_n^\top \mathbf{H}^\top \otimes \mathbf{I}_d)\mathrm{blkdiag}\left(\frac{\mathbf{P}_{\mathbf{g}_k}}{\|\mathbf{z}_k\|}\right)\mathbf{g}^* \\ &= \mathbf{0}_d, \end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\dot{s} = \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{1}_n \otimes \bar{\mathbf{p}})^\top}{\sqrt{n}\|\mathbf{p} - \mathbf{1}_n \otimes \bar{\mathbf{p}}\|}\tilde{\mathbf{R}}_b^\top \mathbf{g}^* = 0, \tag{5.45}$$

编队的质心和尺度不会随时间变化。

系统（5.42）的平衡点满足 $\dot{\bar{\mathbf{p}}} = \mathbf{0}$，即

$$\begin{aligned} 0 = (\mathbf{p}^*)^\top \dot{\mathbf{p}} &= (\mathbf{p}^*)^\top \bar{\mathbf{H}}^\top \mathrm{blkdiag}\left(\mathbf{P}_{\mathbf{g}_k}\right)\mathbf{g}^* = (\mathbf{z}^*)^\top \mathrm{blkdiag}\left(\mathbf{P}_{\mathbf{g}_k}\right)\mathbf{g}^* \\ &= \sum_{i=1}^{m}(\mathbf{z}_k^*)^\top \mathbf{P}_{\mathbf{g}_k}\mathbf{g}_k^* = \sum_{i=1}^{m}\|\mathbf{z}_k^*\|(\mathbf{g}_k^*)^\top \mathbf{P}_{\mathbf{g}_k}\mathbf{g}_k^* \end{aligned}$$

因此，在平衡点处，$\mathbf{P}_{\mathbf{g}_k}\mathbf{g}_k^* = \mathbf{0}, \forall k = 1, \ldots, m$。这表明平衡点与期望编队$\mathbf{p}^*$方向等价。另一方面，根据关于$(G, \mathbf{p}^*)$微分方向刚性的假设，可知所有平衡点都与初始图方向相似。结合质心 $\bar{\mathbf{p}}^* = \bar{\mathbf{p}}(0)$和尺度 $s^* = s(0)$的条件，可知对于一个初始条件，存在两个平衡点：$\mathbf{p}^*$ 对应方向向量$\mathbf{g}_{ij} = \mathbf{g}_{ij}^*, \forall i, j \in V$；$\mathbf{p}'$对应方向向量$\mathbf{g}_{ij} = -\mathbf{g}_{ij}^*, \forall i, j \in V, i \neq j$（见图5.11(b)）。

令 $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{p} - \mathbf{p}^*$ 和 $\mathbf{r} = \mathbf{p} - \mathbf{1}_n \otimes \bar{\mathbf{p}}$。于是，根据质心和尺度守恒的性质，可得$\mathbf{r} - \mathbf{r}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^*$ 以及 $\|\boldsymbol{\delta} + \mathbf{r}^*\| = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{n}s$ 为常数。因此，$\boldsymbol{\delta}$ 始终位于不变集$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{\delta} \in \mathrm{R}^{dn} | \ \|\boldsymbol{\delta} + \mathbf{r}^*\| = \sqrt{n}s(0)\}$ 上，如图5.11(c)所示。

Ta 将证明平衡点 $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$ 是不稳定的。考虑李雅普诺夫函数 $V = \frac{1}{2}\|\mathbf{p} - \mathbf{p}'\|^2$.

$V$ 沿着 (5.43) 的一条轨迹的导数为:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= (\mathbf{p}-\mathbf{p}')^\top \bar{\mathbf{H}}^\top \mathrm{blkdiag}\left(\mathbf{P}_{\mathbf{g}_k}\right)\mathbf{g}^* \\ &= (\mathbf{z}^*)^\top \mathrm{blkdiag}\left(\mathbf{P}_{\mathbf{g}_k}\right)\mathbf{g}^* \\ &= \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{z}_k^*)^\top \mathbf{P}_{\mathbf{g}_k}\mathbf{g}_k^* \\ &= \sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{z}_k^*\|(\mathbf{g}_k^*)^\top \mathbf{P}_{\mathbf{g}_k}\mathbf{g}_k^* \geq 0. \end{aligned} \tag{5.46}$$

由方程 (5.46) 可得 $\dot{V}_1 = 0$ 当且仅当 $\mathbf{p} = \mathbf{p}^*$ 或 $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$。注意，两个平衡点彼此分离，因此考察 $\mathbf{p}'$ 的任意一个不包含 $\mathcal{S}$ 中的 $\mathbf{p}'$ 的邻域时，可得 $V_1 > 0$。根据 Chetaev定理 [126]，平衡点 $\mathbf{p}'$ 不稳定。

接下来，我们证明平衡点 $\mathbf{p} = \mathbf{p}^*$ 是稳定的。考虑李雅普诺夫函数 $V = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\delta}\|^2$。沿着方程 (5.43) 的一条轨迹，有

$$\begin{aligned}\dot{V} &= (\mathbf{p}-\mathbf{p}^*)^\top \bar{\mathbf{H}}^\top \mathrm{blkdiag}\left(\mathbf{P}_{\mathbf{g}_k}\right)\mathbf{g}^* \\ &= (\mathbf{z}^*)^\top \mathrm{blkdiag}\left(\mathbf{P}_{\mathbf{g}_k}\right)\mathbf{g}^* \\ &= -\sum_{i=1}^{m} (\mathbf{z}_k^*)^\top \mathbf{P}_{\mathbf{g}_k}\mathbf{g}_k^* \\ &= -\sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{z}_k^*\|(\mathbf{g}_k^*)^\top \mathbf{P}_{\mathbf{g}_k}\mathbf{g}_k^*. \end{aligned} \tag{5.47}$$

注意，$\mathbf{g}_k^{*\top}\mathbf{P}_{\mathbf{g}_k}\mathbf{g}_k^* = \mathbf{g}_k^{*\top}(\mathbf{I}_d - \mathbf{g}_k\mathbf{g}_k^\top)\mathbf{g}_k^* = 1 - (\mathbf{g}_k^{*\top}\mathbf{g}_k)^2 = \mathbf{g}_k^\top(\mathbf{I}_d - \mathbf{g}_k^*\mathbf{g}_k^{*\top})\mathbf{g}_k$，因此由不等式 (5.47) 可得

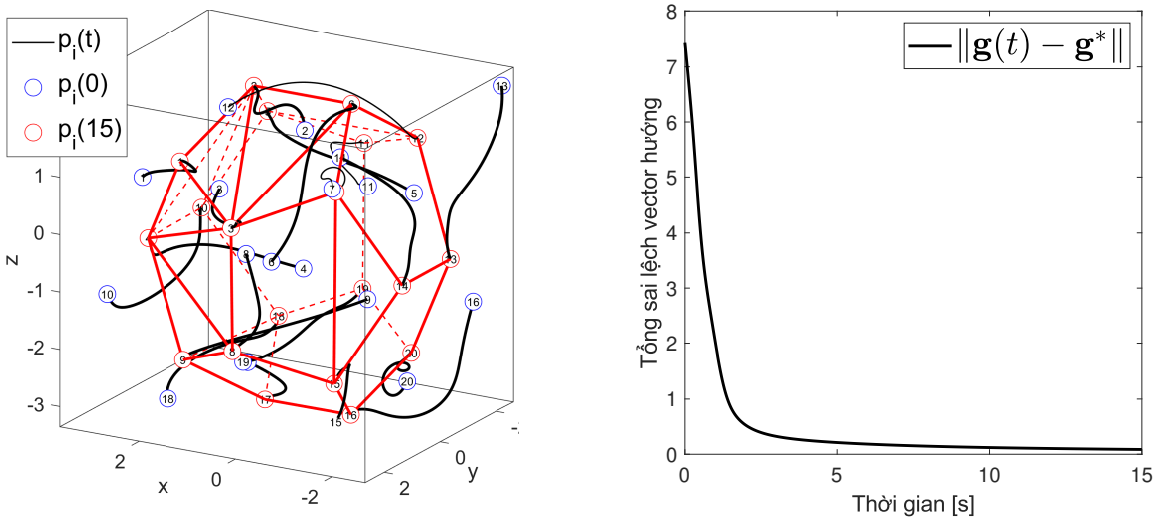
$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{z}_k^*\|\mathbf{g}_k^\top \mathbf{P}_{\mathbf{g}_k^*}\mathbf{g}_k \\ &\leq -\sum_{i=1}^{m} \frac{\|\mathbf{z}_k^*\|}{\|\mathbf{z}_k\|^2}\mathbf{z}_k^\top \mathbf{P}_{\mathbf{g}_k^*}\mathbf{z}_k \\ &\leq -\frac{\min_k \|\mathbf{z}_k^*\|}{\max_k \|\mathbf{z}_k\|^2}\sum_{i=1}^{m} \mathbf{z}_k^\top \mathbf{P}_{\mathbf{g}_k^*}\mathbf{z}_k. \end{aligned} \tag{5.48}$$

对于任意 $i \neq j$，有

$$\begin{aligned}\|\mathbf{z}_{ij}\| = \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| &\leq \|\mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}}\| + \|\mathbf{p}_j - \bar{\mathbf{p}}\| \\ &\leq \|\mathbf{p}_1 - \bar{\mathbf{p}}\| + \ldots + \|\mathbf{p}_n - \bar{\mathbf{p}}\| \\ &\leq \|\mathbf{p} - \mathbf{1}_n \otimes \bar{\mathbf{p}}\| \\ &= \sqrt{n}s, \end{aligned}$$

因此 $\max_k \|\mathbf{z}_k\| \leq \sqrt{n}s$。由此，令 $\zeta = \frac{\min_k \|\mathbf{z}_k^*\|}{ns^2}$ 则

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\zeta\boldsymbol{\delta}^\top \bar{\mathbf{H}}^\top \mathrm{blkdiag}\left(\mathbf{P}_{\mathbf{g}_k^*}\right)\bar{\mathbf{H}}\boldsymbol{\delta} \\ &= -\boldsymbol{\delta}^\top \tilde{\mathbf{R}}_b^\top(\mathbf{p}^*)\tilde{\mathbf{R}}_b(\mathbf{p}^*)\boldsymbol{\delta}. \end{aligned} \tag{5.49}$$




(a) 渐近趋近期望编队的过程 (b) 初始队形

Hình 图5.12：在三维空间中，使用控制律（5.42）的20个智能体编队仿真 .

对于 $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}_{\|} + \boldsymbol{\delta}_{\perp}$，其中 $\boldsymbol{\delta}_{\perp} \perp$ 像$(\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_d,\ \mathbf{p}^*)$ 和 $\boldsymbol{\delta}_{\|} \in$ 像$(\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_d,\ \mathbf{p}^*)$，则 (5.49) 可以改写为

$$\dot{V} \leq -\zeta \|\boldsymbol{\delta}_{\perp}\|^2 = -\zeta (\sin\theta)^2 \|\boldsymbol{\delta}\|^2,$$

其中 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ 是 $\boldsymbol{\delta}$与 $-\mathbf{r}^*$ 之间的角度。由于 $\dot{V} \leq 0$，因此 $\boldsymbol{\delta} \to \mathbf{0}$；当 $t \to +\infty$时，若 $\boldsymbol{\delta}(0) \neq -2\mathbf{r}^*$（对应于 $\mathbf{p}(0) \neq \mathbf{p}'$）。这导致 $\theta(t) \geq \theta(0)$，且 $\sin\theta(t) \geq \sin\theta(0)$。因此，令 $\xi = 2\zeta(\sin\theta(0))^2 > 0$，则 $\dot{V} \leq -\xi V$，也就是说，$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$ 是指数稳定的 [126]。

因此，平衡点 $\mathbf{p} = \mathbf{p}^*$ 是指数渐近稳定的。对于任意初始条件$\mathbf{p}(0) \neq \mathbf{p}'$，当 $t \to +\infty$时，$\mathbf{p}(t) \to \mathbf{p}^*$。

请注意，在稳定性分析中，我们隐含地假设智能体在形成期望编队的过程中不会发生碰撞。为避免碰撞，智能体需要额外的距离信息。在许多关于基于方向向量的控制的文献中，作者会限制智能体相对于期望编队的初始位置，将其作为确保不会发生碰撞的充分条件。

**例5.7**。 为说明仅基于方向向量的编队控制算法，我们仿真了一个由20个智能体组成的编队，如图5.12所示。期望构型是三维空间中一个十二面体的顶点，共有39条边。总体而言，仅使用方向向量的算法收敛时间较长，因为偏差角较小时，控制信号 $\mathbf{u}_i$ 也几乎为0。通过在控制律中增加一个增益系数 $k_p$ （仿真中为 $k_p = 2$），或对控制律进行变换，使系统在有限时间内达到期望构型 [280, 183]（见练习 5.18），可以加快使用方向向量的编队控制律。

## 5.6 注释和参考文献

构造期望编队是编队控制中的一个基本问题。本章中，我们了解了一些基于不同测量变量和控制变量的编队控制方法，同时

介绍了其他已经提出或正在研究的方法。本章根据测量变量对编队控制问题进行的分类，扩展自综述研究 [191]。基于距离的编队控制分析内容采用了 [305, 306] 中的分析方法。对于常规的基于距离的控制律，期望编队是局部渐近稳定的。期望编队的方向刚性理论和几乎全局收敛分析改编自 [338]。请注意，全局稳定编队控制可参考 [296]。

在本文档的范围内，我们仅考虑交互图为无向图的编队控制问题。在实现实际编队时，测量图和通信图通常是不对称的，并且存在领导者智能体。具体而言，无环领导者图结构已得到广泛研究 [40, 111, 322, 262, 206, 214, 289, 298]。研究其他有向编队结构更多具有理论意义，而非实际意义；除采用绝对位置和相对位置的方法外，这些结构通常相当复杂，且尚无完整的解。对于基于距离和方向向量的编队控制，有向编队（无环领导者-跟随者形式除外）能够实现渐近稳定的情况通常仅限于有向循环图 [200, 132]。请注意，已有证明表明，由四个智能体组成的双有向循环编队无法实现全局稳定 [22]。虽然本章未作讨论，但坐标系一致性问题与编队控制密切相关，因为基于相对位置和方向向量的控制律都假设各智能体的局部参考系具有相同的定向[226, 118, 274]。

编队控制研究中的一些拓展问题一直备受关注，包括：

i. 在不确定性和噪声 [170, 305], 或传感器工作范围[86], 、时延和通信故障、测量误差及参考系 [62, 163], 、执行器故障 [340], 等实际约束的影响下保持期望编队，或改善控制性能（收敛时间、超调量、控制信号幅值） [280, 46]ii. 队形控制：将编队从一个初始位置移动到另一个位置，或使编队沿预设轨迹移动 [331, 306, 50, 184]。iii. 基于一般线性模型或更为详细的智能体动力学模型进行编队控制 [72, 37, 73, 144, 151, 116, 145, 112, 276, 258]。iv. 基于分布式优化规划避碰、保持连通性 [325], 并维持刚性 [326], 的轨迹。v. 在不同目标编队之间切换，自主检测并隔离发生故障的智能体 [248], ，在智能体数量变化时进行编队重构等，并结合控制与形式逻辑 [220]。vi. 将博弈论（game theory） [177, 251], 、强化学习（reinforcement learning）[155, 212, 182], 或机器学习和数据科学技术 [117, 264] 应用于编队控制等。

## 5.7 练习

**习题 5.1**。 [69]考虑一个基于相对位置的编队控制问题，其中给定的位置误差向量集合 $\Gamma = \{\mathbf{z}^*_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ 不可行。证明此时，对于编队控制律：

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{j\in N_i} (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{z}^*_{ij}),\ i = 1, \ldots, n, \tag{5.50}$$

智能体的速度将逐渐收敛到由 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i}\mathbf{z}_{ij}^{*}$确定的某个公共值。

**练习 5.2.** [207] 分析具有完全图 $K_4$ 的微分距离刚性编队控制问题，其中 $\mathbb{R}^3$。

**练习 5.3.** 介绍二维刚性图的 Henneberg 扩展方法。应用该方法构造一个包含 8 个顶点的最小刚性图。证明保持编队不变并增加空间维数时，定向刚性仍然保持。

**练习 5.4.** 比较基于距离和基于方向向量的编队控制方法，包括其主要假设、控制律以及优缺点。

**练习 5.5**（正交投影矩阵的性质）。 [159] 对于 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}_d$，定义正交投影矩阵 $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}=\mathbf{I}_d-\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}^{\top}}{\|\mathbf{x}\|^2}$。证明：

i. $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}=\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{\top}\geq 0$。

ii. $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}$ 有 $n-1$ 个特征值为 1，另有一个特征值为 0。

iii. 核$(\mathbf{P}_{\mathbf{x}})=$像$(\mathbf{1}_n)$。

iv. $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}\mathbf{y}=\mathbf{0}_d$ 当且仅当 $\mathbf{y}=k\mathbf{x},\ k\in\mathbb{R}$。

v. 如果 $\mathbf{x}\neq k\mathbf{y}$（不共线），那么 $\mathbf{M}=\mathbf{P}_{\mathbf{x}}+\mathbf{P}_{\mathbf{x}}$ 是一个对称正定矩阵。求 $\mathbf{M}$ 的特征值。

vi. 如果向量 $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m$ 中至少有两个不共线，那么矩阵 $\mathbf{M}=\sum_{i=1}^{m}\mathbf{P}_{\mathbf{x}_i}$ 是对称且正定的。

vii. 对于方向向量 $\mathbf{g}_{ij}=\frac{\mathbf{p}_j-\mathbf{p}_i}{\|\mathbf{p}_j-\mathbf{p}_i\|}$，则 $\frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial \mathbf{p}_i}=-\frac{\mathbf{P}_{\mathbf{g}_{ij}}}{\|\mathbf{p}_j-\mathbf{p}_i\|}$。

**练习 5.6**（两个正交投影矩阵之和）。 给定两个不共线的方向向量 $\mathbf{g}_1$和 $\mathbf{g}_2\in\mathbb{R}^d$, $d\geq 3$。证明矩阵 $\mathbf{M}=\mathbf{P}_{\mathbf{g}_1}+\mathbf{P}_{\mathbf{g}_2}$ 是对称且正定的。求 $\mathbf{M}$ 的特征值及对应的特征向量。（提示：证明 $\mathbf{M}$ 以 $\mathbf{P}_{\mathbf{g}_1}\mathbf{g}_2\pm\mathbf{P}_{\mathbf{g}_2}\mathbf{g}_1$ 为对应特征值 $1\pm\mathbf{g}_1^{\top}\mathbf{g}_2$, 的特征向量，并且以属于特征值 2 的向量$\mathbf{v}_k\perp$ 张成空间$(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2)$, $k=3,\ldots,d$中的特征向量为特征向量。）

**练习 5.7.** 确定图 $G_1$ 和 $G_2$（如图 5.13 所示）的普适距离刚性。找出构造这些图的 Henneberg 构造。

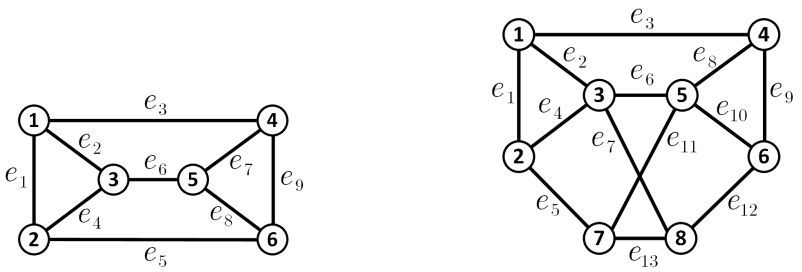
**练习 5.8.** [334] 假设图 $G=(V,E)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上是普适方向刚性的，那么向 $G$ 中添加任意若干条边得到图 $G'$ 后，新图也具有普适方向刚性。

**练习 5.9**（维数扩展时方向刚性的保持）. [338] 假设编队 $(G,\mathbf{p})$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上是方向刚性的，那么编队 $(G,\mathbf{p}')$（其中 $\mathbf{p}'=[\mathbf{p}^{\top},0]^{\top}\in\mathbb{R}^{d+1}$）在 $\mathbb{R}^{d+1}$ 上也是微分方向刚性的。

**练习 5.10.** [292] 假设两个图 $G_1$ 和 $G_2$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上具有普适方向刚性。证明：

i. 当 $d=2$ 时，至少需要添加 3 条边，才能将两个图 $G_1, G_2$ 拼接成一个普适方向刚性图。

ii. 如果 $d\geq 3$，则至少需要添加 2 条边，才能将两个图 $G_1, G_2$ 拼接成一个普适方向刚性图。




(a) (b)

图 5.13：图 $G_1$ 和 $G_2$。

**习题5.11** (微分方向刚性循环图)。 [292] 证明图 $C_n$ 在 $n \leq d+1$下是 $\mathrm{R}^d$ 中的普适方向刚性图。

**习题5.12** （$\mathrm{R}^2$ 中距离刚性与微分方向刚性的等价性）。 [338] 证明，如果编队 $(G,\mathbf{p})$ 在 $\mathrm{R}^2$ 中是无穷小距离刚性的，那么它在 $\mathrm{R}^2$ 中也是微分方向刚性的。

**习题5.13**。 [292] 证明，图 $G=(V,E)$ 若在 $\mathrm{R}^d$ 上是方向刚性的，则至少有 $|V|=n$

$$f(n,d)=1+\left\lfloor\frac{n-2}{d-1}\right\rfloor\times d+\mathrm{mod}(n-2,d-1)+\mathrm{sign}(\mathrm{mod}(n-2,d-1)) \tag{5.51}$$

条边。

**习题5.14** （距离刚性矩阵的核空间）。 请描述 $\mathrm{R}^3$ 中一个无穷小距离刚性编队的距离刚性矩阵的核空间。

**习题5.15** (使用抗扰相对位置进行编队控制)。 考虑在空间 $\mathrm{R}^d$ 中进行编队控制的问题，其中 $G$ 是一个连通无向图。

i. 假设智能体按照以下控制律运动:

$$\dot{\mathbf{p}}_i=-\sum_{j\in N_i}a_{ij}(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_j-\mathbf{p}_{ij}^*)+\mathbf{d}_i,\ i=1,\ldots,n,$$

其中 $\mathbf{p}_{ij}^*$ 是期望编队的相对位置向量，$\mathbf{d}_i\in\mathrm{R}^d$ 是恒定扰动向量。证明，对于上述控制律，若 $(\mathbf{1}_n^\top\otimes\mathbf{I}_d)\mathbf{d}\,\mathbf{p}\to\Omega=\{\mathbf{p}\in\mathrm{R}^{dn}|\,\mathbf{p}_i-\mathbf{p}^j-\mathbf{p}_{ij}^*)=\mathbf{0},\ \forall i\neq j,\quad i,\ j\in V\}$，则当 $t\to+\infty$。

ii. 假设编队中有若干个编号为 1 到 $l\geq 2$ 的智能体以恒定速度$\mathbf{h}\in\mathrm{R}^d$移动，即 $\dot{\mathbf{p}}_i=\mathbf{h}\quad\dot{\mathbf{h}}=\mathbf{0}_d,\ i=1,\ldots,l$。这些智能体（称为领航智能体）初始位置已满足期望方向向量。跟随智能体 $i=l+1,\ldots,n$ 按照以下控制律移动:

$$\dot{\mathbf{p}}_i=-\sum_{j\in N_i}a_{ij}(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_j-\mathbf{p}_{ij}^*)+\boldsymbol{\xi}_i,$$
$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_i=-\sum_{j\in N_i}a_{ij}(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_j-\mathbf{p}_{ij}^*),\ i=l+1,\ldots,n.$$

证明，当 $t \to +\infty$ 个智能体组成的系统满足 $\mathbf{p} \to \Omega$ 且 $\dot{\mathbf{p}}_i \to \mathbf{h}$, $\forall i = l+1, \ldots, n$ 时。

iii. 假设智能体使用如下编队控制律

$$\dot{\mathbf{p}}_i = -\sum_{j \in N_i} (k\mathrm{sgn}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_{ij}^*) + \mathbf{d}_{ij}),\ i = 1, \ldots, n,$$

请分析系统在以下两种情况下的表现：(a) $\|\mathbf{d}_{ij}\|_\infty < k$, $\forall (i,\ j) \in E$, 以及 (b) 存在 $(i,\ j) \in E$, 且 $\|\mathbf{d}_{ij}\|_\infty > k$。

**习题5.16**。 [42] 考虑一个由三个智能体组成的系统，其中智能体1保持静止，智能体2需要与智能体1达到期望距离 $d_{12}^*$，智能体3需要达到两个期望距离 $d_{31}^*$ 和 $d_{32}^*$。假设智能体2和3采用基于距离的编队控制律，即

$$\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{0},\\
&\dot{\mathbf{p}}_2 = -((d_{21})^2 - (d_{21}^*)^2)(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2),\\
&\dot{\mathbf{p}}_3 = -((d_{31})^2 - (d_{31}^*)^2)(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) - ((d_{32})^2 - (d_{32}^*)^2)(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3).
\end{aligned}$$

确定对应于智能体2和智能体3的平衡点集。证明对于上述控制律，在绝大多数情况下，当 $t \to +\infty$ 时，三个智能体将达到期望编队。确定智能体无法达到期望编队的初始条件集合。如果三个智能体都在移动、交互图为有向循环 $C_3$，且期望编队为具有三个尺度 $d_{12}^*$, $d_{23}^*$、和 $d_{31}^*$ 的三角形，结果将如何变化?

**习题5.17**。 [298] 考虑二维空间中的一个由3个智能体组成的编队。智能体1和2保持静止，第三个智能体按照由 $\dot{\mathbf{p}}_3 = -\mathbf{P}_{\mathbf{g}_{31}}\mathbf{g}_{31}^* - \mathbf{P}_{\mathbf{g}_{32}}\mathbf{g}_{32}^*$ 给出的基于方向向量的控制律运动，其中$\mathbf{g}_{31}^*$ 和$\mathbf{g}_{32}^*$ 是给定的两个期望方向向量。

1. 求$\mathbf{p}_1$ 和$\mathbf{p}_2$ 的条件，使得存在同时满足两个给定方向向量的平衡点$\mathbf{p}_3^*$。在此条件下，确定根据$\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{g}_{31}^*$ 和$\mathbf{g}_{32}^*$求$\mathbf{p}_3^*$ 的公式。2. 证明在第1问所得条件下，系统的平衡点（ $\dot{\mathbf{p}}_3 = \mathbf{0}$的解）是唯一的，并且为$\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_3^*$。利用李雅普诺夫函数 $V = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_3^*\|^2$ 证明$\mathbf{p}_3(t) \to \mathbf{p}_3^*$当 $t \to +\infty$时成立。3. 对于相同的控制方案，将其应用于由Henneberg构造得到的图。基于ISS稳定性理论，证明由 $n$ 个智能体组成的编队的渐近稳定性[126]。

**练习 5.18** （仅使用方向向量的有限时间编队控制 [280]）。 考虑基于方向向量的编队控制问题，其中 $G$ 是一张具有普适方向刚性的无向图，其控制律为:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = -\sum_{j \in N_i} \mathbf{P}_{\mathbf{g}_{ij}} \left(\mathrm{sig}\left(\mathbf{P}_{\mathbf{g}_{ij}}\mathbf{g}_{ij}^*\right)\right)^\alpha,\ i = 1, \ldots, n,$$

其中，sig(·) 函数定义如下：对于 $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_d]^\top \in \mathbf{R}^d$，有

$$\mathrm{sig}(\mathbf{x})^\alpha = [\mathrm{sign}(x_1)|x_1|^\alpha, \ldots, \mathrm{sign}(x_d)|x_d|^\alpha]^\top,$$

其中 sign(·) 是符号函数，定义为 sign($x_k$) $= 1$ 若 $x_k > 0$, sign($x_k$) $= -1$, 若 $x_k < 0$，且 sign($x_k$) $= 0$若 $x_k = 0$.

**习题 5.19** （基于方向向量的队形控制 [336]）。考虑编队控制问题，其中 $G$ 是 $\mathrm{R}^d$ 中的无向微分方向刚性图。

i. 假设智能体按照以下控制律移动:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = -\sum_{j\in N_i} \mathbf{P}_{\mathbf{g}_{ij}^*}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j),\ i = 1,\ldots,n,$$

其中$\mathbf{g}_{ij}^*$ 为期望方向向量。证明对于上述控制律，当 $t \to +\infty$时，$\mathbf{p} \to \Omega = \{\mathbf{p} \in \mathrm{R}^{dn} | \mathbf{P}^{\mathbf{g}_{ij}^*}\mathbf{g}_{ij} = \mathbf{0}, \forall i \neq j,\ i,j \in V\}$。

ii. 假设编队中有若干编号从1到 $l \geq 2$ 的智能体以恒定速度$\mathbf{h} \in \mathrm{R}^d$移动，即 $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{h}$ $\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{0}_d$, $i = 1,\ldots,l$。这些智能体（称为领航智能体）起初位于满足期望方向向量的位置。其余智能体按照以下控制律移动:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_i &= -\sum_{j\in N_i} \mathbf{P}_{\mathbf{g}_{ij}^*}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) + \boldsymbol{\xi}_i,\\ \dot{\boldsymbol{\xi}}_i &= -\sum_{j\in N_i} \mathbf{P}_{\mathbf{g}_{ij}^*}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j),\ i = l+1,\ldots,n.\end{aligned}$$

证明当 $t \to +\infty$ 系统中的 $n$ 智能体逐渐达到$\mathbf{g}_{ij} \to \mathbf{g}_{ij}^*, \forall i,j \in V, i \neq j$和$\dot{\mathbf{p}}_i \to \mathbf{h}$, $\forall i = l+1,\ldots,n$ 时。

**习题 5.20** （仅使用方向向量 [331] 的队形控制）。考虑编队控制问题，其中 $G$ 是 $\mathrm{R}^d$ 中无向且微分方向刚性的图。

i. 假设智能体遵循以下控制律移动:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{j\in N_i} (\mathbf{g}_{ij} - \mathbf{g}_{ij}^*),\ i = 1,\ldots,n,$$

其中$\mathbf{g}_{ij}^*$ 是期望方向向量。将系统改写为矩阵形式，并证明对于上述控制律，$\mathbf{p} \to \Omega = \{\mathbf{p} \in \mathrm{R}^{dn} | \mathbf{P}^{\mathbf{g}_{ij}^*}\mathbf{g}_{ij} = \mathbf{0}, \forall i \neq j,\ i,j \in V\}$，当 $t \to +\infty$时。

ii. 假设编队中有若干个编号从 **1** 到 $l \geq 2$ 的智能体以恒定速度$\mathbf{h} \in \mathrm{R}^d$移动，即 $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{h}$ $\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{0}_d$, $i = 1,\ldots,l$。这些智能体（称为领航智能体）初始位置已满足期望方向向量的要求。其余智能体按照以下控制律移动:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_i &= \sum_{j\in N_i} (\mathbf{g}_{ij} - \mathbf{g}_{ij}^*) + \boldsymbol{\xi}_i,\\ \dot{\boldsymbol{\xi}}_i &= \sum_{j\in N_i} (\mathbf{g}_{ij} - \mathbf{g}_{ij}^*),\ i = l+1,\ldots,n.\end{aligned}$$

证明当 $t \to +\infty$ 时，由 $n$ 智能体组成的系统逐渐达到 $\mathbf{g}_{ij} \to \mathbf{g}_{ij}^*, \forall i,j \in V, i \neq j$和$\dot{\mathbf{p}}_i \to \mathbf{h}$, $\forall i = l+1,\ldots,n$。

# 第 6 章

# 传感器网络定位

## 6.1 传感器网络定位问题

本章研究的对象是具备测量、计算和通信能力的无线传感器网络。根据文献 [15], ，传感器网络定位是指智能体（此处为网络节点）依据通过测量和与其他网络节点交换而获取的信息，确定自身在空间中的位置的过程。本文采用的方法是利用网络定位问题与编队控制问题之间的对偶性来解决网络定位问题。此外，对于测量变量为距离的情况，还将介绍构建满足全局刚性且可定位的网络的方法。

一个网络[1] 定义为 $(G,\ \mathbf{p})$，其中 $G=(V,\ E)$ 是一个无向图，而 $\mathbf{p}=\mathrm{vec}(\mathbf{p}_1,\ \ldots,\ \mathbf{p}_n)\in\mathrm{R}^{dn}$ 是网络节点的绝对位置向量，也称为一个构型。如果网络节点掌握自身的绝对位置信息（例如通过外部设置获得，或通过 GPS 获取），那么网络定位问题就变得微不足道。因此，本章假设所有智能体都不知道自己的绝对位置，或者只有网络中的少数智能体（称为参考节点，编号从 1 到 $l$ ($0\leq l<n$)）掌握自身的绝对位置信息。网络中的其他智能体，编号从 $l+1$ 到 $n$，将估计位置变量 $\hat{\mathbf{p}}_i\in\mathrm{R}^d$ 存储起来，并依据测量变量更新该变量。图 6.1 展示了一个由三个参考节点和八个普通节点组成的传感器网络。[2] 与编队控制问题类似，网络定位问题可以根据每个网络节点上的测量变量进行分类。本章将介绍基于相对位置、基于距离和基于方向向量的网络定位方法。

[1]network[2]在一些文献中，参考节点也称为锚节点/信标节点（信标）。这一称呼源于这样的观察：当没有参考位置时，可定位构型会与真实构型存在差异，而且没有任何方法能够找到这一真实构型。这种现象可以在本章后续部分介绍的网络定位方法中观察到，称为漂移现象。网络中存在参考节点，有助于各节点定位其在空间中的真实位置，从而消除漂移现象。因此，可以将参考节点视为用于固定网络估计构型的信标节点/锚节点（信标）。

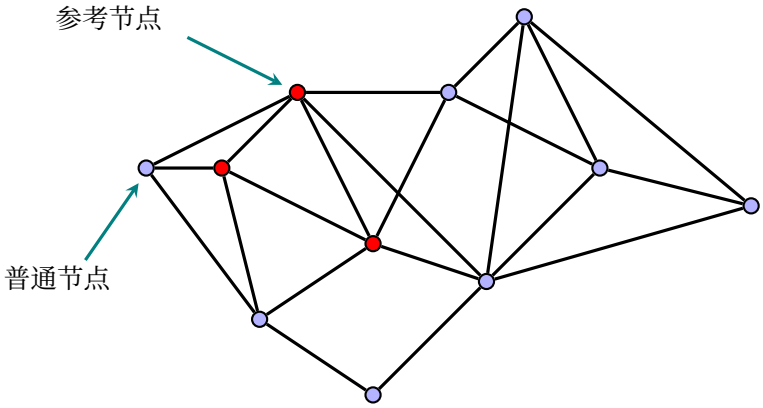



图 6.1：带有参考节点和普通节点的传感器网络示意图。

## 6.2 基于相对位置的网络定位

### 6.2.1 网络中没有参考节点的情况

假设描述网络的图 $G$ 是一个具有出根的图。由于没有网络节点掌握自己的绝对位置信息，每个智能体 $i \in V$ 都将自己的估计位置存储在变量 $\hat{\mathbf{p}}_i \in \mathbb{R}^d$中。每条边 $(j, i) \in E$ 表示节点 $i$ 可以测量 $\mathbf{z}^{ij}$，并从智能体 $j$ 接收 $\hat{\mathbf{p}}^j$。智能体 $i$ 依据网络定位律 $\hat{\mathbf{p}}_i = \mathbf{u}_i$ 更新变量 $\dot{\hat{\mathbf{p}}}_i$。

对于设计为如下形式的网络定位律：

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_i &= -\sum_{j\in N_i}\big((\hat{\mathbf{p}}_i - \hat{\mathbf{p}}_j) - (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)\big)\\ &= \sum_{j\in N_i}\big(\hat{\mathbf{z}}_{ij} - \mathbf{z}_{ij}\big),\ i = 1,\ldots,n,\end{aligned} \tag{6.1}$$

其中，$\mathbf{z}^{ij}$ 由测量获得，$\hat{\mathbf{p}}^j$ 由智能体 $j$获得，而$\hat{\mathbf{z}}^{ij} = \hat{\mathbf{p}}^j - \hat{\mathbf{p}}_i$，对于含有 $n$ 个网络节点的系统，方程可写为：

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}} = -\big(\boldsymbol{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{I}_d\big)(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}), \tag{6.2}$$

其中，$\mathbf{p} = \mathrm{vec}(\hat{\mathbf{p}}^1,\ldots,\hat{\mathbf{p}}^n) \in \mathbb{R}^{dn}$ 是时刻 $t \geq 0$的估计构型。

令 $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}$，则可将系统（6.2）改写为

$$\dot{\mathbf{r}} = -\big(\boldsymbol{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{I}_d\big)\mathbf{r}, \tag{6.3}$$

是关于变量 $\mathbf{r}$的一致性系统。根据一致性系统理论，有

$$\mathbf{r}(t) \to \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{r}^* \in \mathrm{im}(\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_d), \tag{6.4}$$

换句话说，$\mathbf{r}_i(t) \to \mathbf{r}^*$，$\forall i = 1, \ldots, n$，其中 $\mathbf{r}^*$ 是一致性值。这等价于，$\hat{\mathbf{p}}_i(t) \to \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_i^*$，$\forall i = 1, \ldots, n$ 当 $t \to +\infty$时。因此，经过网络定位后，网络节点确定了一个构型 $\hat{\mathbf{p}}(\infty)$，它与实际构型相差一个平移（平移向量为 $\mathbf{r}^*$）。

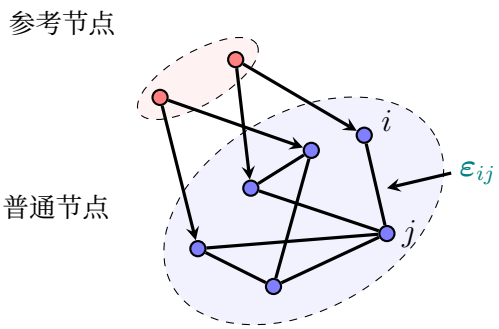



图 6.2：展示包含参考节点和普通网络节点的传感器网络。图中的每条边都表示网络节点之间的信息流（测量或通信）。噪声 $\varepsilon_{ij}$ 可能出现在图的每条边上。

**Wei Ren与多智能体系统控制**

WeiRen是加利福尼亚大学河滨分校电气与计算机科学系的教授。Ren的研究几乎全部集中于多智能体系统控制，他对本教材所涉及的大多数主题都有贡献。Ren后续的研究涉及在不同通信假设和对象模型下的一致性算法，并将其应用于同步、编队控制和分布式优化等领域。

Ren是施普林格出版的三部多智能体系统控制专著的作者 [230, 232, 47]，其中第一部专著的内容 [230] 基于Ren在犹他州普罗沃的Bringham Young University攻读博士学位期间（2004年）对多智能体系统的研究。这也是最早的多智能体系统控制专著之一。

### 6.2.2 网络中存在参考节点的情况

假设节点 $1,\ldots,l$ 知道自己在空间中的绝对位置。此时，这些网络节点称为参考节点，它们无需更新自己的估计变量 $\hat{\mathbf{p}}_i$，只需将自己的绝对位置信息发送给网络中的其他节点。换言之，为节点 $i=1,\ldots,l$ 写出的网络定位方程为：

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}_i = \mathbf{0},\ \hat{\mathbf{p}}_i(0) = \mathbf{p}_i,\ i = 1,\ldots,l. \tag{6.5}$$

为网络节点 $l+1,\ldots,n$ 写出的网络定位律也与方程 (6.1) 中的相同（见图 6.2）。令 $\mathbf{p}^l = [\mathbf{p}_1^\top,\ldots,\mathbf{p}_l^\top]^\top$, $\mathbf{p}^f = [\mathbf{p}_{l+1}^\top,\ldots,\mathbf{p}_n^\top]^\top$, $\hat{\mathbf{p}}^l = [\hat{\mathbf{p}}_1^\top,\ldots,\mathbf{p}_l^\top]^\top$，以及 $\hat{\mathbf{p}}^f = [\mathbf{p}_{l+1}^\top,\ldots,\mathbf{p}_n^\top]^\top$。我们将智能体 $i=l+1,\ldots,n$ 的方程改写为

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}^f = \big(\mathrm{blkdiag}(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}\mathbf{1}_l)\otimes\mathbf{I}_d\big)(\hat{\mathbf{p}}^f - \mathbf{p}^f) - (\boldsymbol{\mathcal{L}}(G')\otimes\mathbf{I}_d)(\hat{\mathbf{p}}^f - \mathbf{p}^f) \tag{6.6}$$

其中，$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}\in\mathrm{R}^{df\times dl}$、$\boldsymbol{\mathcal{L}}(G')$ 分别是图 $G$ 的拉普拉斯矩阵的分块矩阵，而$G'$ 是图 $G'$ 删除参考节点后得到的拉普拉斯矩阵。注意， $G$ 的拉普拉斯矩阵可写为

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(G) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{l\times l} & \mathbf{0}_{l\times f} \\ \boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl} & \boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff} \end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}\in\mathrm{R}^{df\times df}$，当 $l=1$ 时也称为接地拉普拉斯矩阵。对于 $G$ 无向且连通的图，矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}$ 具有以下性质（参见练习 6.2）：

- 对称、正定
- $\mathcal{L}_{ff} = \mathcal{L}(G') - \text{diag}(\mathcal{L}_{fl}(\mathbf{1}_l))$，其中 $G'$ 是删除参考节点后得到的图。

由方程 (6.6)，可得

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}^f = -(\mathcal{L}_{ff} \otimes \mathbf{I}_d)(\hat{\mathbf{p}}^f - \mathbf{p}^f). \tag{6.7}$$

由于 $\mathcal{L}_{ff}$ 是正定矩阵，系统 (6.7) 只有一个平衡点 $\hat{\mathbf{p}}^f = \mathbf{p}^f$，且该平衡点指数渐近稳定。这等价于当 $t \to +\infty$ 时，各估计值将收敛到节点的真实位置。

如果进一步考虑常值噪声 $\boldsymbol{\epsilon}_{ij} = -\boldsymbol{\epsilon}_{ij}$ 对每条边 $(j,i)$ 的影响，其中 $j \notin \{1,\ldots,l\}$，则

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}_i = -\sum_{j=1}^{l} a_{ij}(\hat{\mathbf{p}}_i - \mathbf{p}_j - (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)) - \sum_{j=l+1}^{n} a_{ij}(\hat{\mathbf{p}}_i - \hat{\mathbf{p}}_j - (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) + \boldsymbol{\epsilon}_{ij})$$

此时，网络定位方程相应地表示为

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}^f = -(\mathcal{L}_{ff} \otimes \mathbf{I}_d)(\hat{\mathbf{p}}^f - \mathbf{p}^f) + \mathbf{d}, \tag{6.8}$$

其中 $\mathbf{d} = (\mathrm{H}(G')^\top \otimes \mathrm{I}_d)\boldsymbol{\epsilon}$ 和 $\boldsymbol{\epsilon} = \text{vec}(\ldots, \boldsymbol{\epsilon}_{ij}, \ldots) = \text{vec}(\boldsymbol{\epsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_m) \in \mathrm{R}^{dm}$。系统 (6.8) 的平衡点满足 $\mathbf{0} = -(\mathrm{L}_{ff} \otimes \mathrm{I}_d)(\hat{\mathbf{p}}^{f*} - \mathbf{p}^f) + \mathbf{d}$，即 $\hat{\mathbf{p}}^{f*} = \mathbf{p}^f + (\mathrm{L}_{ff}^{-1} \otimes \mathrm{I}_d)\mathbf{d}$。通过变量变换 $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{p}}^f - \hat{\mathbf{p}}^{f*}$，可得系统

$$\dot{\mathbf{r}} = -(\mathcal{L}_{ff} \otimes \mathbf{I}_d)(\hat{\mathbf{p}}^f - \mathbf{p}^f - (\mathcal{L}_{ff}^{-1} \otimes \mathbf{I}_d)\mathbf{d}) = -(\mathcal{L}_{ff} \otimes \mathbf{I}_d)\mathbf{r}.$$

由此可知，$\mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$ 指数渐近稳定，或者 $\hat{\mathbf{p}}^f(t) \to \hat{\mathbf{p}}^{f*}$，当 $t \to +\infty$。因此，常值噪声会使网络定位结果相对于真实位置产生误差，该误差的界为 $\|(\mathcal{L}_{ff}^{-1} \otimes \mathbf{I}_d)\mathbf{d}\| \le \|\mathcal{L}_{ff}^{-1} \otimes \mathbf{I}_d\|\|\mathbf{d}\| \le \sigma(\mathcal{L}_{ff}^{-1})\|\mathbf{d}\|$，其中 $\sigma(\mathcal{L}_{ff}^{-1}) = \lambda_{\min}(\mathcal{L}_{ff})^{-1}$ 是对称正定矩阵 $\mathcal{L}_{ff}^{-1}$ 的最大奇异值。

## 6.2.3 基于方向向量的方法

考虑由 $n$ 个节点 $(G,\mathbf{p})$ 构成的、在 $\mathrm{R}^d$ 中微分方向刚性的网络，并假设每个网络节点都可以测量方向向量 $\mathbf{g}_{ij}$，并从若干网络节点 $j \in N_i$ 接收/发送关于 $\hat{\mathbf{p}}^j$ 的信息。与小节 6.1 类似，我们考虑两种情况：网络具有参考节点，以及网络为无参考节点网络。

### 6.2.3.1 无参考节点网络的情况

这种情况下的网络定位律如下：

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}_i = -\sum_{j \in N_i} \mathbf{P}_{\mathbf{g}_{ij}}(\hat{\mathbf{p}}_i - \hat{\mathbf{p}}_j),\ \forall i = 1,\ldots,n, \tag{6.9}$$

其中 $\mathbf{P}_{\mathbf{g}_{ij}}$ 可由方向向量 $\mathbf{g}_{ij}$ 计算得到，是一个正交投影矩阵。利用有向刚性拉普拉斯矩阵 $\mathcal{L}_b = \tilde{\mathbf{R}}_b^\top \tilde{\mathbf{R}}_b$，方程（6.9）可改写为

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}} = -\mathcal{L}_b\hat{\mathbf{p}}. \tag{6.10}$$

根据网络微分刚性的假设，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\mathcal{L}}_b) = dn - d - 1$，$\ker(\boldsymbol{\mathcal{L}}_b) = \mathrm{im}(\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_d, \mathbf{p})$，且$\boldsymbol{\mathcal{L}}_b$ 的非零特征值均为正数。容易看出，质心 $\bar{\hat{\mathbf{p}}}(t)$不随时间变化。根据线性系统理论，（6.10）收敛到

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{p}}(\infty) &= \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\mathcal{L}}_b t}\hat{\mathbf{p}}(0)\\ &= \left[\tfrac{\mathbf{1}_n\otimes\mathbf{I}_d}{\sqrt{n}}, \tfrac{\mathbf{p}-\mathbf{1}_n\otimes\bar{\mathbf{p}}}{\|\mathbf{p}-\mathbf{1}_n\otimes\bar{\mathbf{p}}\|}\right]\left[\tfrac{\mathbf{1}_n\otimes\mathbf{I}_d}{\sqrt{n}}, \tfrac{\mathbf{p}-\mathbf{1}_n\otimes\bar{\mathbf{p}}}{\|\mathbf{p}-\mathbf{1}_n\otimes\bar{\mathbf{p}}\|}\right]^\top \hat{\mathbf{p}}(0)\\ &= \mathbf{1}_n\otimes\bar{\hat{\mathbf{p}}}(0) + \frac{\mathbf{p}-\mathbf{1}_n\otimes\bar{\mathbf{p}}}{\|\mathbf{p}-\mathbf{1}_n\otimes\bar{\mathbf{p}}\|^2}(\mathbf{p}-\mathbf{1}_n\otimes\bar{\mathbf{p}})^\top\hat{\mathbf{p}}(0)\end{aligned} \tag{6.11}$$

当 $t\to+\infty$ 时，它是 $\ker(\boldsymbol{\mathcal{L}}_b)$ 中的一个点。

因此，估计网络构型将收敛到一个与实际网络构型 $\mathbf{p}$ 方向相似的构型。由于不存在参考节点，智能体可能会收敛到一个与原始构型关于坐标原点对称的构型，其方向向量满足 $\hat{\mathbf{g}}^{ij} = -\mathbf{g}^{ij}, \forall i, j \in V, i \neq j$。网络节点可以检查与最终构型对应的方向向量，并据此重新初始化自身的 $\hat{\mathbf{p}}(0)$ 值，以重新进行网络定位。然而，这种方法无法保证重新定位后的最终构型满足 $\hat{\mathbf{g}}^{ij} = \mathbf{g}^{ij}, \forall i, j \in V, i \neq j$。

#### 6.2.3.2 网络存在参考节点的情形

假设网络中存在参考节点 $1,\ldots,l$，其中 $l \geq 2$。网络节点的位置需要满足条件

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_b\mathbf{p} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{bll} & \boldsymbol{\mathcal{L}}_{blf}\\ \boldsymbol{\mathcal{L}}_{bfl} & \boldsymbol{\mathcal{L}}_{bff}\end{bmatrix}\mathbf{p} = \mathbf{0},$$

其中 $\mathrm{L}_{bll} \in \mathrm{R}^{dl\times dl}$，$\mathrm{L}^{blf} = \mathrm{L}_{bfl}^\top \in \mathrm{R}^{dl\times df}$，且 $\mathrm{L}_{bff} \in \mathrm{R}^{df\times df}$。由此，记 $\mathrm{p}^l = [\mathrm{p}_1^\top、\ldots、\mathrm{p}_l^\top]^\top$，$\mathrm{p}^f = [\mathrm{p}_{l+1}^\top、\ldots、\mathrm{p}_n^\top]^\top$，则 $\mathrm{L}^{bfl}\mathrm{p}^l + \mathrm{L}^{bff}\mathrm{p}^f = \mathbf{0}$。如果 $l \geq 2$，且 $(G, \mathrm{p})$ 是微分方向刚性的，那么矩阵 $\mathrm{L}^{bff}$是对称正定的，同时 $\mathrm{L}^{bff} = \mathrm{L}_b(G', \mathrm{p}^f)$ $-$分块对角矩阵$(\mathrm{L}^{blf}(\mathbf{1}_l \otimes \mathrm{I}_d))$，其中 $G'$ 是从 $G$ 中去掉参考节点后得到的图，$\mathrm{L}_b(G', \mathrm{p}^f)$ 是网络 $(G', \mathrm{p}^f)$ 对应的方向刚性矩阵。由此可推得，其余节点的位置可由 $\mathrm{p}^f = -\mathrm{L}_{bff}^{-1}\mathrm{L}^{bfl}\mathrm{p}^l$唯一确定。

由于参考节点掌握自身的绝对位置信息，因此无需更新估计值，只需将这些值传递给其他网络节点。针对节点 $l+1,\ldots,n$ 编写的网络定位律与 (6.9) 形式相同，可统一表示如下 [339]:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{p}}}^f &= -\boldsymbol{\mathcal{L}}_{bfl}\mathbf{p}^l - \boldsymbol{\mathcal{L}}_{bff}\hat{\mathbf{p}}^f\\ &= -\boldsymbol{\mathcal{L}}_{bff}(\hat{\mathbf{p}}^f - \mathbf{p}^f).\end{aligned} \tag{6.12}$$

根据$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{bff}$的对称性和正定性，容易看出 $\hat{\mathbf{p}}^f(t) \to \mathbf{p}^f$当 $t\to+\infty$。换言之，网络节点的估计位置将逐渐趋近于该节点在空间中的绝对位置。此时，常值噪声对网络定位律的影响也可以按照使用相对位置的网络定位方法进行类似分析。

网络定位律（6.10）的含义是：由于问题的目标是定位网络节点，使最终构型与真实构型方向相似，$\hat{\mathbf{p}}^f$ 可以视为该优化问题的解

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & \frac{1}{2}\|\mathbf{P}_{\mathbf{g}_{ij}}\bar{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{p}}-\mathbf{p})\|^2\\ \text{s.t.} & \hat{\mathbf{p}}^l = \mathbf{p}^l\end{array} \tag{6.13}$$

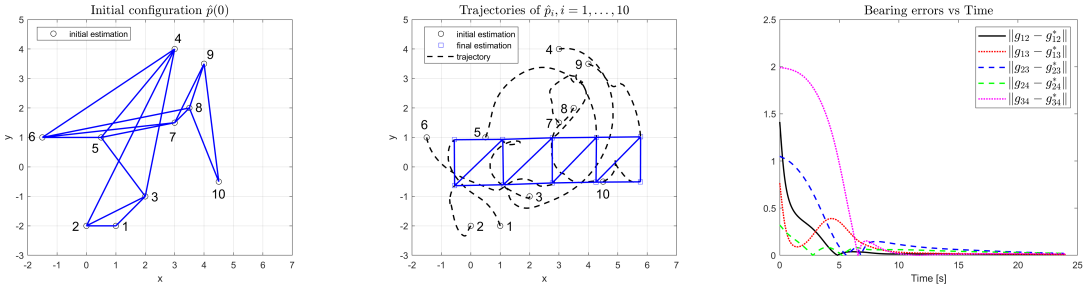



图 6.3：采用网络定位律（6.9）的传感器网络定位示意图，该网络包含10个节点

因此，网络定位律将为节点 $i = l+1, \ldots, n$ 设计与目标函数 $V = \frac{1}{2}\|\mathbf{P}_{\mathbf{g}_{ij}}\bar{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p})\|^2$的梯度方向相反的方向，即 $\hat{\mathbf{p}}^f = -\bar{\nabla}_{\hat{\mathbf{p}}^f} V$。请注意，定位律只能使系统趋于与真实构型方向等价的构型。我们还需要增加关于网络微分方向刚性的条件，以确保最终获得的构型与初始构型方向相似。

**示例 6.1.** 基于方向向量的网络定位示例：考虑一个由10个传感器组成的系统，这些传感器分布在二维空间中，并采用基于方向向量的网络定位律。节点初始位置的估计值如图 6.3（左）所示。使用网络定位律后，位置估计值的轨迹如图 6.3（中）所示。可以看出，它们形成了与真实构型方向相似的构型。方向向量偏差 $\|\mathbf{g}^{ij} - \mathbf{g}_{ij}^*\|$ 如图 6.3（右）所示。显然 $\|\mathbf{g}^{ij} - \mathbf{g}_{ij}^*\| \to 0$，也就是说，智能体逐渐定位到与测得的方向向量相符的位置。

### 6.2.4 基于距离的方法

考虑二维空间中基于距离的传感器网络定位问题。要根据距离唯一确定二维空间中的位置$\mathbf{p}_4$，需要知道空间中三个参考节点$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$的位置以及三个距离 $d_{4i} = \|\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_i\|, i = 1, 2, 3$。节点4的位置是三个圆$(\mathbf{p}_1, d_{41})$、$(\mathbf{p}_2, d_{42})$和$(\mathbf{p}_3, d_{43})$的交点。

我们将构建一个公式，利用已获取的信息（三个距离测量变量和从参考节点1, 2, 3获得的三个位置变量）求出$\mathbf{p}_4$。记$\mathbf{p}_i = [x_i, y_i]^\top \in \mathbf{R}^2$，可得方程

$$d_{4i}^2 = (x_4 - x_i)^2 + (y_4 - y_i)^2, \; i = 1, 2, 3 \tag{6.14}$$

将含有 $d_{42}^2$ 和 $d_{43}^2$ 的各个方程两边分别减去 $d_{41}^2$，得到

$$d_{4i}^2 - d_{41}^2 = (x_i^2 + y_i^2 - x_1^2 - y_1^2) - 2(x_i - x_1)x_4 - 2(y_i - y_1)y_4, \; i = 2, 3 \tag{6.15}$$

因此，我们得到方程

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_4 = \mathbf{b}, \tag{6.16}$$

其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) \\ 2(x_3 - x_1) & 2(y_3 - y_1) \end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 - d_{42}^2 + d_{41}^2 \\ x_3^2 + y_3^2 - x_1^2 - y_1^2 - d_{43}^2 + d_{41}^2 \end{bmatrix}$。如果参考节点不共线，矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆，则可确定解，即节点 4 的精确位置，公式为 $\mathbf{p} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$。

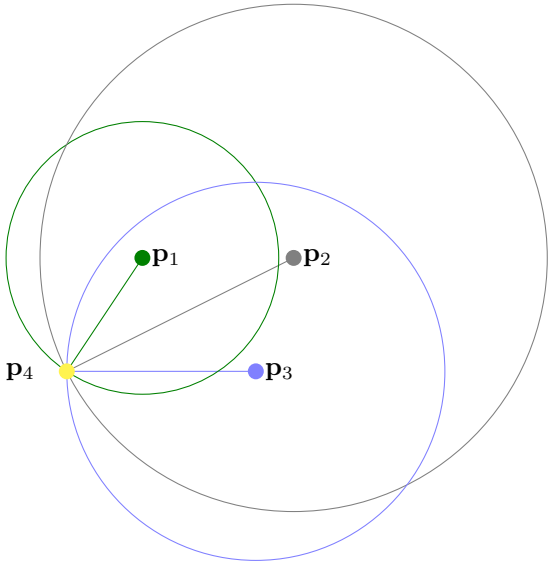



图6.4：利用3个参考节点和3个距离测量变量定位节点4

上述公式可扩展到网络定位的情况：当需要根据 $N \geq 3$ 个参考节点 [242] 对$\mathbf{p}_{N+1} = [x_{N+1}, y_{N+1}]^\top$ 处的网络节点进行定位时，执行与上述相同的步骤，节点 $(N+1)$ 的位置满足方程 (6.16)，其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) \\ \vdots & \\ 2(x_3 - x_1) & 2(y_3 - y_1) \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 - d_{N+1,2}^2 + d_{N+1,1}^2 \\ \vdots \\ x_N^2 + y_N^2 - x_1^2 - y_1^2 - d_{N+1,N}^2 + d_{N+1,1}^2 \end{bmatrix}.$$

如果至少存在3个不共线的参考节点，则矩阵 $\mathbf{A}$ 列满秩，因此可以根据方程确定节点 $N+1$ 的位置

$$\mathbf{p}_{N+1} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{b}. \tag{6.17}$$

根据上述单节点定位情形的结果，我们将构造一个能够通过距离实现定位的图。

如果从图中任意删除 $k$ 条边后，所得图仍然连通，则该图称为 $k$-边连通图。类似地，如果从图 $G$ 中任意删除 $k$ 条边后，仍能得到一个普适距离刚性图，则图 $G$ 称为 $k-$ 超刚性图。$\mathrm{R}^2$ 中距离 1-超刚性的一个例子是由4个顶点 $K_4$ 构成的完全图。图6.5给出了一个3-连通但并非距离1-超刚性的图。

一个有 $G$ $n \geq 4$ 个顶点的图在 $\mathrm{R}^2$ 中是普适全局刚性的，当且仅当它在 $\mathrm{R}^2$ [15] 中连通且超刚。

一种构造可通过距离定位的普适全局刚性图的方法（在 $\mathrm{R}^d$ 中）：

- 从一个包含 $d+1$ 个顶点的完全图开始， $K_{d+1}$ 这些顶点对应于 $d+1$ 个参考节点。
- 在每一步 $k = d+2, \ldots, n$，我们都会添加一个新顶点，并添加与图中现有顶点相连的 $d+1$ 边。

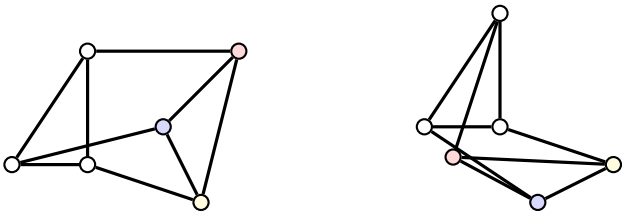


图6.5：一个距离 3-连通刚性图的示例，它在二维中有两种实际实现。该图不是 1-超刚性距离图。

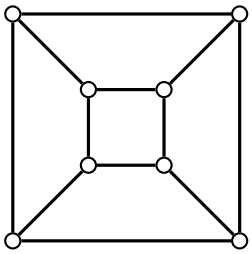


图 6.6：练习 6.1 中的图。

此时，所得图满足普遍方向刚性，并且当 $d+1$ 节点 1，……，$d+1$ 是网络中的参考节点时，可以根据距离进行定位。每个节点 $k=d+2$，……，$n$根据 $\{d_{ij},\ \mathbf{p}_j\}_{j\in N_i\cap\{1,\dots,k-1\}}$ 确定自身的位置，然后将定位得到的位置发送给节点$j\in N_i\cap\{k+1,\ \dots\dots,\ n\}$。

## 6.3 练习

**练习 6.1.** 考虑一个传感器网络，其图 $G$ 如图6.6所示。任选网络中的一个节点作为参考节点，写出该网络对应的接地拉普拉斯矩阵。

**练习 6.2**。 考虑一个传感器网络，其图 $G$ 为无向、连通图，并设 $l\geq 1$ 为网络中的参考节点数。假设矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 相应地划分为

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ll} & \boldsymbol{\mathcal{L}}_{lf}\\ \boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl} & \boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}\in\mathbb{R}^{(n-l)\times(n-l)}$ 为接地拉普拉斯矩阵。证明：

i. $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}=\boldsymbol{\mathcal{L}}(G')-\mathrm{diag}(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}\mathbf{1}_l)$，其中 $G'$ 为删除参考节点后得到的图。

ii. $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}$ 为对称正定矩阵。

**练习 6.3**。 说明如何在二维空间中构造一个包含 10 个顶点的距离 3-冗余刚性图，用于基于距离的网络定位。

**练习 6.4.** 考虑图 6.7 所示的传感器网络 $(G,\ \mathbf{p})$，其中每个坐标轴的单位长度为 1。写出方向刚性矩阵，并检验该网络是否具有微分方向刚性。选择节点 1 和 2 作为参考节点，写出该网络对应的矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{bff}$。

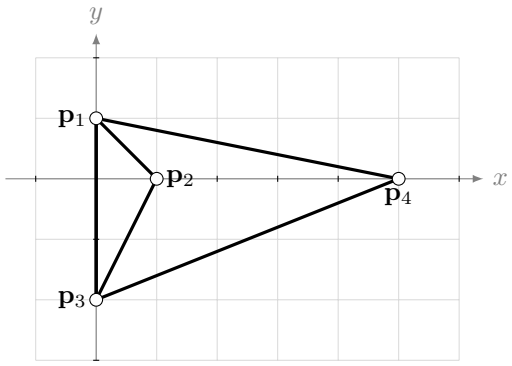



图 6.7：练习 6.4 中的传感器网络 $(G, \mathbf{p})$

**练习 6.5.** 考虑基于方向向量的传感器网络定位问题，其中 $(G,\mathbf{p})$ 是微分方向刚性的，$\mathbf{p} = \mathrm{vec}(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n)$ 是网络节点的绝对位置，$\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d$。假设网络中有 $l \geq 2$ 个参考节点，同时矩阵 $\mathcal{L}_b$ 按如下形式进行相应划分

$$\mathcal{L}_b = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{bll} & \mathcal{L}_{blf} \\ \mathcal{L}_{bfl} & \mathcal{L}_{bff} \end{bmatrix}$$

其中 $\mathcal{L}_{bff} \in \mathbb{R}^{d(n-l)\times d(n-l)}$。证明：

i. $\mathcal{L}_{bff} = \mathcal{L}_b(G')$ –分块对角矩阵$(\mathcal{L}_{fl}(\mathbf{1}_l \otimes \mathbf{I}_d))$，其中 $G'$ 是删除参考节点后得到的图。

ii. $\mathcal{L}_{ff}$ 是对称且正定的。

**练习 6.6.** [35] 设 $\mathcal{L}$ 是一个具有权重、含有 $n$ 个节点的连通无向图的拉普拉斯矩阵。定义矩阵 $\mathbf{X} = \mathcal{L} + \frac{k}{n}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^\top$，其中 $k \in \mathbb{R}$。证明：

i. $\mathbf{X}$ 是正定的，当且仅当 $k > 0$。
ii. $\mathbf{X}^{-1} = \left(\mathcal{L} + \frac{k}{n}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^\top\right)^{-1} = \mathcal{L}^+ + \frac{1}{kn}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^\top$，其中 $\mathcal{L}^+$ 是$\mathcal{L}$的伪逆矩阵，满足 (i) $\mathcal{L}\mathcal{L}^+\mathcal{L} = \mathcal{L}$，(ii) $\mathcal{L}^+\mathcal{L}\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}^+$，以及 (iii) $\mathcal{L}\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}^+\mathcal{L} = \mathbf{I}_n - \frac{1}{n}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^\top$。

**练习 6.7**（Kron约化 [75]）。设 $\mathcal{L}$ 是由 $n$ 个节点组成的无向连通加权图的拉普拉斯矩阵。考虑方程 $\mathbf{y} = \mathcal{L}\mathbf{x}$，其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 是未知变量向量，$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$是一个向量。

i. 假设图中的第 $n$ 个节点被选为参考节点。从方程 $[\mathbf{y}]_n = [\mathcal{L}\mathbf{x}]_n$ 中约化 $x_n$，并代入关于 $\mathbf{y}_{[1:n-1]} = [y_1,\ldots,y_{n-1}]^\top$ 和 $\mathbf{x}^{[1:n-1]} = [x_1,\ldots,x_{n-1}]^\top$的方程，得到如下形式的方程：

$$\mathbf{y}_{[1:n-1]} + \mathbf{b}y_n = \mathcal{L}_{\mathrm{red}}\mathbf{x}_{[1:n-1]}. \tag{6.18}$$

证明：（i）$G$ 对应 $n$节点的Kron约化矩阵元素$\mathcal{L}_{red}$由 $l_{ij} - l_{in}l_{jn}/l_{nn}$给出；（ii）矩阵$\mathcal{L}_{red}$是一个连通无向图的拉普拉斯矩阵；（iii）求星图$\mathcal{L}_{red}$ 在 $S_4$（变换 $\Delta - Y$）情况下各值的计算公式。

ii. 将上述结果推广到网络中选取 $2 \leq l \leq n-1$ 个节点作为参考节点的情况。

**练习 6.8**（存在时延时的网络定位）。 [195, 211] 假设传感器网络由一个 $G$无向连通图描述，该图包含 $n$ 个网络节点。系统中的每个智能体都根据基于位置偏差的网络定位律更新自己的位置估计变量。

i. 假设每个节点需要 $\tau > 0$ 的时间来处理收到的信息并计算更新律，则节点 $i$ 的位置估计更新方程为：

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}_i = \sum_{j \in N_i} \big((\hat{\mathbf{p}}_i(t-\tau) - \hat{\mathbf{p}}_j(t-\tau)) - (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)\big),\ i = 1, \ldots, n. \tag{6.19}$$

证明，如果$\tau < \frac{\pi}{2\lambda_n(\mathcal{L})}$，那么各节点将逐渐定位到自己的真实位置。对图 6.7 所示的图进行仿真。

ii. 假设网络中存在通信延迟 $\tau > 0$，节点$i$ 的位置估计更新方程为 [247]:

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}_i = \sum_{j \in N_i} \big((\hat{\mathbf{p}}_i(t) - \hat{\mathbf{p}}_j(t-\tau)) - (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)\big),\ i = 1, \ldots, n. \tag{6.20}$$

分析该情况下网络的稳定性。

当智能体基于方向向量进行网络定位时，执行上述要求。

**练习 6.9**。 [339] 假设传感器网络由一个 $G$ 无向、连通的图描述，该图包含 $n$ 个网络节点。系统中的每个智能体根据基于位置偏差的网络定位律更新其位置估计变量。

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}_i = \sum_{j \in N_i} \big((\hat{\mathbf{p}}_i - \hat{\mathbf{p}}_j) - (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)\big),\ i = 1, \ldots, n. \tag{6.21}$$

证明网络定位律（6.21）给出了以下优化问题的解：

$$\underset{\hat{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^{dn}}{\text{minimize}} \quad \frac{1}{2}\|\bar{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{H}}\mathbf{p}\|^2 \tag{6.22}$$

其中 $\bar{\mathbf{H}}$ 是 $G$ 的关联矩阵，且 $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_d$。

**练习 6.10**（基于网络定位的编队控制）。 [188, 146] 考虑一个由 $n$ 个智能体组成的编队，位于 $d$ 维空间中，各智能体的位置由向量 $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \ldots, n$给出。假设描述编队中各智能体之间测量交互、控制和信息交换的图 $G$ 是出根图。每个智能体 $i$通过期望相对位移向量 $\mathbf{p}^*$与$\mathbf{p}_i^* - \mathbf{p}_j^*$、 $(i,j) \in E$获得有关期望编队$\mathbf{p}^*$的信息。假设每个智能体 $i$ 除测量相对位置$\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j$, $j \in N_i$ 外，还能够与编队中的其他智能体交换信息。编队中的每个智能体 $i$ 都进行位置估计 $\hat{\mathbf{p}}_i \in \mathbb{R}^d$，并将该估计变量与智能体 $j \in N_i$交换。基于估计变量，各智能体执行如下编队控制律

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}_i = -\sum_{j \in N_i} (\hat{\mathbf{p}}_i - \hat{\mathbf{p}}_j - (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) + (\mathbf{p}_i^* - \mathbf{p}_j^*)) + \mathbf{u}_i, \tag{6.23a}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{u}_i, \tag{6.23b}$$

$$\mathbf{u}_i = -k\hat{\mathbf{p}}_i, \tag{6.23c}$$

其中 $k > 0$。请完成以下要求：

i. 将系统 (6.23a)–(6.23c) 表示成矩阵形式。ii. 令 $\mathbf{e}$ $= \quad - \quad + \quad ^{*} \qquad \to \mathbf{1}_n \otimes {}^{-}0 \qquad {}^{-}0 \;=\; \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \;{}_i\, 0 \quad \boldsymbol{\gamma} = \hat{}\mathbf{p}$ $[\gamma_1, \ldots, \gamma_n]^\top$ $G$

$\mathbf{p}\,\mathbf{p}$，证明 $\mathbf{e}\,\mathbf{e}(\,)$，其中 $\mathbf{e}(\,)\,\mathbf{e}(\,)$，是系统 的拉普拉斯矩阵对应的归一化左特征向量。iii. 证明 $\mathbf{p}$ 最终会逐渐形成一个仅与期望编队相差一个平移的编队。

**习题6.11** （基于刚性方向理论和网络定位的编队控制）。 [277] 考虑由 $n$ 个智能体组成的编队，位于 $d$ 维空间中，智能体的位置由向量$\mathbf{p}_i \in \mathrm{R}^d$,$i = 1,\ldots,n$给出。图 $G$ 描述了编队中智能体之间的测量交互、控制和信息交换。每个智能体 $i$ 通过期望相对位移向量$\mathbf{p}^*$ 了解期望编队$\mathbf{p}_i^* - \mathbf{p}_j^*$, $(i,j)$ $\in E$。期望编队$(G,\mathbf{p}^*)$具有微分方向刚性。假设每个智能体 $i$ 除了测量相对位置$\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j$, $j \in N_i$ 之外，还可以与编队中的其他智能体交换信息。编队中的每个智能体 $i$ 都执行位置估计$\hat{}\mathbf{p}_i \in \mathrm{R}^d$ ，并与其他智能体$j \in N_i$交换该估计变量。基于估计变量，智能体执行如下编队控制律

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}_i = -\sum_{j \in N_i} \mathbf{P}_{\mathbf{g}_{ij}^*}(\hat{\mathbf{p}}_i - \hat{\mathbf{p}}_j - (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)) + \mathbf{u}_i, \tag{6.24a}$$

$$\hat{}\mathbf{p}_i = \mathbf{u}_i, \tag{6.24b}$$

$$\mathbf{u}_i = -k\hat{}\mathbf{p}_i, \tag{6.24c}$$

其中 $k > 0$ 为一个正系数，且 $i = 1,\ldots,n$。请完成以下要求：

i. 将系统(6.24a)–(6.24c)表示为矩阵形式。ii. 令$\mathbf{e} = \hat{}\mathbf{p} - \mathbf{p} + \mathbf{p}^*$，证明$\mathcal{L}_b\mathbf{e} \to \mathbf{0}_n$ 当 $t \to +\infty$时。iii. 证明$\mathbf{p}$ 逐渐达到一个与编队đặ方向相似的最终编队

t.

**习题6.12** （基于方向向量的网络定位）. [296] 考虑由 $n$ 个智能体组成的 $d$ 维空间网络，各智能体的位置由向量$\mathbf{p}_i \in \mathrm{R}^d$， $i = 1,\ldots,n$给出。假设网络（$G,\mathbf{p}$）所描述的编队中各智能体之间的测量交互与信息交换是普适方向刚性的。网络（$G$,$\mathbf{p}^*$）是微分方向刚性的。假设每个智能体 $i$ 除测量方向向量$\mathbf{g}^{ij}$, $j \in N_i$外，还可以与编队中的其他智能体交换信息。编队中的每个智能体 $i$ 进行位置估计$\hat{}\mathbf{p}_i \in \mathrm{R}^d$ ，并将该估计变量与智能体 $j \in N_i$交换。各智能体按照网络定位律更新估计变量：

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}_i = -\sum_{j \in N_i} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{g}}_{ij}} \mathbf{g}_{ij}^*, \tag{6.25}$$

其中 $k > 0$，$\hat{}\mathbf{g}^{ij} = \hat{}\mathbf{p}\|\overset{j-\;\;i}{\overline{\;\;j-\;\;\;\;}}\hat{}\mathbf{p}\hat{}\mathbf{p}_i\|$，以及 $\mathbf{P}^{\hat{\mathbf{g}}_{ij}} = \mathbf{I}_d - \hat{}\mathbf{g}^{ij}\hat{}\mathbf{g}_{ij}^\top$均根据交换变量计算得出。请完成以下要求：

i. 设 $\hat{}\mathbf{p} = [\mathbf{p}_1^\top,\ldots,\mathbf{p}_n^\top]^\top \in \mathrm{R}^{dn}$，请将具有网络定位算法 (6.25) 的 $n$ 节点网络表示为矩阵形式。ii. 证明 ${}^{-}\hat{}\mathbf{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{}\mathbf{p}_i$ 与 $\hat{s} = \|\hat{}\mathbf{p} - \mathbf{1}_n \otimes {}^{-}\hat{}\mathbf{p}\|$ 是时不变的。由此证明平衡点 $\mathbf{p}^*$ （属于 (6.25)）与真实构型 $\mathbf{p}$ 方向相似的存在性。iii. 证明 $\hat{}\mathbf{p}$ 渐近趋于 $\mathbf{p}^*$ ，对大多数初始条件 $\hat{}\mathbf{p}(0)$ 成立。

iv. 假设网络中有若干参考节点 $i=1,\ldots,l$，且 $l\geq 2$。参考节点拥有参考系中的绝对位置信息，不更新状态变量 $\hat{\mathbf{p}}_i=\mathbf{p}_i\forall t\geq 0$，并且仅将自身状态变量的信息发送给其余网络节点（跟随者）。跟随者网络节点按照方程 (6.25) 更新位置估计。证明 $\hat{\mathbf{p}}$ 渐近趋于$\mathbf{p}$。

**习题 6.13**（基于方向向量且不依赖初始条件的有限时间网络定位）。 [287] 考虑一个由 $n$ 个智能体组成的 $d$ 维空间网络，智能体的位置由向量$\mathbf{p}_i\in\mathrm{R}^d, i=1,..,n$给出。假设网络中有 $3\leq l\leq n-1$ 个参考节点，这些参考节点拥有全局参考系中的位置信息。普通节点 $i=l+1,\ldots,n$ 没有位置信息，需要通过方向向量测量$\mathbf{g}^{ij}$ 并与邻居节点交换估计值$\hat{\mathbf{p}}_i\in\mathrm{R}^d$ 来估计$\mathbf{p}_i$ 。测量图 $G$ 是一个无环的领导者-跟随者有向图，按照以下方式逐步添加网络节点构建：

- 节点 $l+1$ 有 $3\leq|N_{l+1}|\leq l$ 条边（$l+1,j$），$j\in\{1,..,l\}$,
- 节点 $l+2$ 有 $3\leq|N_{l+2}|\leq l+1$ 条边（$l+2,j$），$j\in\{1,..,l+1\}$,
- ...
- 节点 $n$ 有 $3\leq|N_n|\leq n-1$ 条边（$n,j$），$j\in\{1,..,n-1\}$。

假设普通网络节点根据以下方程更新估计变量

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}_i=\sum_{j\in N_i}\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{g}}^{ij}}\left(\left(\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{g}}^{ij}}(\hat{\mathbf{p}}_j-\hat{\mathbf{p}}_i)\right)^{\alpha}+\left(\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{g}}^{ij}}(\hat{\mathbf{p}}_j-\hat{\mathbf{p}}_i)\right)^{\beta}\right),\tag{6.26}$$

其中 $i=l+1,\ldots,n$, $\mathbf{P}_{\mathbf{g}^{ij}}=\mathbf{I}_d-\mathbf{g}^{ij}\mathbf{g}_{ij}^{\top}$, $\alpha=1-\frac{1}{2\mu}$, $\beta=1+\frac{1}{2\mu}$ 满足 $\mu>1$，并且

$$\mathrm{sig}^{\alpha}(\mathbf{x})=[\mathrm{sig}^{\alpha}(x_1),\ldots,\mathrm{sig}^{\alpha}(x_d)]^{\top}=[\mathrm{sgn}(x_1)|x_1|^{\alpha},\ldots,\mathrm{sgn}(x_1)|x_1|^{\alpha}]^{\top}.$$

请完成以下要求：

i. 证明，对于 $i=l+1$，(6.26) 有唯一的平衡点 $\hat{\mathbf{p}}_{l+1}=\mathbf{p}^{l+1}$。ii. 证明唯一的平衡点 $\hat{\mathbf{p}}_{l+1}=\mathbf{p}^{l+1}$ 是有限时间稳定的，且该有限时间不依赖于 $\hat{\mathbf{p}}^{l+1}(0)$。iii. 使用数学归纳法，证明网络节点将在有限时间内实现全局定位。

（提示：要证明一个平衡点是有限时间稳定的，可使用以下结果：“考虑系统 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0,$，其中 $\mathbf{x}\in\mathrm{R}^d$ 是状态变量向量，$\mathbf{f}:\mathrm{R}^d\to\mathrm{R}^d$ 是一个非线性函数，且 $\mathbf{x}=\mathbf{0}_d$ 是系统的一个平衡点。若存在 $V:\mathbf{x}\mapsto\mathrm{R}_+\cup\{0\}$ 是一个连续函数，满足：(i) $V(\mathbf{x})=0$ 当且仅当 $\mathbf{x}=\mathbf{0}_d$，且 (ii) $\dot{V}\leq-\kappa_1V^p(\mathbf{x})-\kappa_2V^q(\mathbf{x})$，其中 $\kappa_1,\kappa_2>0, p=1-(2\mu)^{-1}, q=1+(2\mu)^{-1}, \mu>1$，则 $\mathbf{x}=\mathbf{0}_d$ 是全局有限时间稳定的，其收敛时间上界为 $T_{\max}=\frac{\pi\mu}{\sqrt{\kappa_1\kappa_2}}$，$\forall\mathbf{x}_0\in\mathrm{R}^d$。”）

**习题 6.14** (基于方向向量的有向循环网络定位)。 [132] 考虑一个由 $n$个智能体组成的网络，它们位于 $n-1$ 维空间中，智能体的位置由向量$\mathbf{p}_i\in\mathrm{R}^d, i=1,..,n$给出。测量图 $G$ 是一个有向循环，并且 $(H,\mathbf{p})$具有微分方向刚性，其中 $H$ 是与 $G$对应的无向图。

假设网络节点根据方程更新估计变量

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}_i = \mathbf{P}_{\mathbf{g}_{i,i+1}}(\hat{\mathbf{p}}_i - \hat{\mathbf{p}}_{i+1}), \tag{6.27}$$

其中 $i = 1$, ....., $n$, $\mathbf{P}_{\mathbf{g}_{ij}} = \mathbf{I}_d - \mathbf{g}_{ij}\mathbf{g}_{ij}^\top$ 可由智能体 $i$ 到智能体 $i+1$ 的方向向量测量 $\mathbf{g}_{i,\,i+1}$ 计算得到，而 $\hat{\mathbf{p}}_{i+1}$ 向智能体 $i$ 发送位置信息。请完成以下要求：

i. 证明 (6.27) 存在唯一平衡点 $\mathbf{p}^*$，其取值仅取决于 $\hat{\mathbf{p}}_i(0)$。 ii. 证明唯一平衡点 $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^*$ 是渐近稳定的。

**练习 6.15** （Cayley–Menger 行列式）。 [31] 设 $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$, ....., $\mathbf{p}_n$ 是 $\mathrm{R}^d$ 上的 $n+1$ 个点，其中 $d \geq n$。这些点在 $n$ 维空间中构成一个单纯形： $n = 1$ 对应线段， $n = 2$ 对应三角形， $n = 3$ 对应四面体，.....记 $d_{ij} = \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|$ 和

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) = \begin{bmatrix} 0 & d_{01}^2 & d_{02}^2 & \ldots & d_{0n}^2 & 1 \\ d_{01}^2 & 0 & d_{12}^2 & \ldots & d_{1n}^2 & 1 \\ d_{02}^2 & d_{12}^2 & 0 & \ldots & d_{2n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{0n}^2 & d_{1n}^2 & d_{2n}^2 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.28}$$

Cayley–Menger 行列式定义为 $D(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \triangleq \det(\mathbf{M}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n))$.

i. 证明当 $n = 1$ 时， $D(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) = 2d_{01}^2$;

ii. 证明当 $n = 2$ 时， $D(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = -16S^2$，其中 $S$ 是由 $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 构成的三角形面积;

iii. 证明 $\mathbf{M}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) = \mathbf{P}^\top \mathbf{Q} \mathbf{P}$，其中

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_1 & \cdots & \mathbf{p}_n & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \\ \|\mathbf{p}_0\| & \|\mathbf{p}_1\|^2 & \cdots & \|\mathbf{p}_n\|^2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -2\mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{n\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times n} & \mathbf{T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

iv. 已知由 $n+1$ 个点 $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ 构成的单纯形的体积计算公式为

$$V_n = \frac{1}{n!} \left| \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_1 & \cdots & \mathbf{p}_n \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \right|. \tag{6.29}$$

证明 $D(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) = \det(\mathbf{P}^\top \mathbf{Q} \mathbf{P}) = (-1)^{n+1} 2^n (n!)^2 V_n^2$。

v. 利用行列式的性质，证明：

$$\begin{aligned} V_n^2 &= \frac{1}{(n!)^2 2^n} \det \left( \begin{bmatrix} 2d_{01}^2 & d_{01}^2 + d_{02}^2 - d_{12}^2 & \ldots & d_{01}^2 + d_{02}^2 - d_{1n}^2 \\ d_{01}^2 + d_{02}^2 - d_{12}^2 & 2d_{02}^2 & \ldots & d_{02}^2 + d_{0n}^2 - d_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{01}^2 + d_{0n}^2 - d_{1n}^2 & d_{02}^2 + d_{0n}^2 - d_{2n}^2 & \ldots & 2d_{0n}^2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2 2^n} D(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n). \end{aligned}$$

**习题6.16.** [31] 证明：对于任意 4 个点 $\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3\in\mathrm{R}^2$，秩$(\mathbf{M}(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2))$ $\leq$3 且 $D(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3)=0$。

**习题6.17**。 [39] 考虑一个传感器网络，其中有3个参考节点，分别位于$\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3\in\mathrm{R}^2$且不共线¯，还有一个网络节点$\mathbf{p}_0$位于未知位置。假设节点0测得三个距离 $d_{0i}$、 $i=1$,2、3存在误差，并且已知距离 $d_{ij}$与 $i,j=1$、2、3的精确值。假设 $\bar{d}_{0i}^2=d_{0i}^2-\varepsilon_i$与 $\varepsilon_i$为测量误差。

i. 设

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & 1\\ d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & 1\\ d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}^{-1},$$

证明道歉购彩平台

$$\begin{bmatrix}d_{01}^2 & d_{02}^2 & d_{03}^2 & 1\end{bmatrix}\mathbf{E}\begin{bmatrix}d_{01}^2 & d_{02}^2 & d_{03}^2 & 1\end{bmatrix}^\top=0. \tag{6.30}$$

ii. 给定 $\boldsymbol{\varepsilon}=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]^\top$，求$\mathbf{A}_3\in\mathrm{R}^{3\times3}$、$\mathbf{b}_3\in\mathrm{R}^3$， $c_3\in\mathrm{R}$，使其满足

$$f_3(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=\boldsymbol{\varepsilon}^\top\mathbf{A}_3\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}^\top\mathbf{b}_3+c_3=0. \tag{6.31}$$

约束 (6.31) 称为四个点 $\mathbf{p}_0,\ldots,\mathbf{p}_3$ 的共面约束。

iii. 假设网络有 $n\geq3$ 个参考节点，且网络节点 0 可以测量到各参考节点的距离（测量值受噪声影响） $\bar{d}_{0i}^2=d_{0i}^2-\varepsilon_i$。误差会导致约束 (6.31) 彼此不一致。为确定到各参考节点的准确距离，我们对误差平方和函数 $J=\sum_{i=1}^n\varepsilon_i^2$进行最小化，并满足共面约束：$f(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_i)=0$，其中 $i=3,\ldots,\ n$。求该问题的最优值 $\varepsilon_1^*,\ \ldots,\ \varepsilon_n^*$。

# 第7章

# 分布式优化

## 7.1 多智能体系统中的优化问题

优化问题通常表示为

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad & f(\mathbf{x}) && \text{(7.1a)}\\ \text{subject to} \quad & g_k(\mathbf{x})\le 0,\ k=1,\dots,p, && \text{(7.1b)}\\ & h_r(\mathbf{x})=0,\ r=1,\dots,q, && \text{(7.1c)} \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{x}\in\mathrm{R}^n$ 是优化变量， $f:\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}$ 是目标函数， $g_k(\mathbf{x})\le 0$, $h_r(\mathbf{x})=0$ 分别是不等式约束和等式约束，问题的解必须满足这些约束。如果问题（7.1）不包含约束 $g_k(\mathbf{x})\le 0$, $h_r(\mathbf{x})=0$，我们就得到一个无约束优化问题。

考虑优化问题（7.1），其中可行集 $D\subseteq\mathrm{R}^n$ 由下式定义

$$D=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\mid g_k(\mathbf{x})\le 0,\ k=1,\dots,p,\ h_r(\mathbf{x})=0,\ r=1,\dots,q\} \tag{7.2}$$

满足 $D\neq\emptyset$。此时，如果存在 $\mathbf{x}^*\in D$ ，使得 $f(\mathbf{x}^*)\le f(\mathbf{x})\forall\mathbf{x}\in D$，那么问题（7.1）就有最优解。根据目标函数和约束集合的假设，优化问题可以分成更小的类别。本文中，我们只考虑目标函数 $f$ 是凸函数，且由约束定义的集合 $D$ 是凸集[176, 154]的情形。

根据上述定义，第6章中的传感器网络定位问题是一个无约束优化问题，其目标函数为测量变量与估计变量之间的偏差平方和。在多智能体系统的应用中，问题(7.1)的求解需要以分布式方式进行。更具体地说，每个智能体仅拥有关于自身状态变量$\mathbf{x}_i$、局部目标函数 $f_i(\mathbf{x}_i)$、局部约束 $g_i(\mathbf{x}_i)$ $h_i(\mathbf{x}_i)$，以及通过通信网络或与邻居智能体 $j\in N_i$进行测量所获得的若干相对状态变量$\mathbf{x}_i-\mathbf{x}j$的信息。通过对局部目标函数和约束进行合理设计，优化问题(7.1)的求解可通过求解系统中每个智能体复杂度更低的局部优化问题来实现。

## 7.2 等式约束下的分布式优化

考虑一个由 $n$ 个智能体组成的系统，其信息交换图为 $G=(V,E)$，是无向连通图，其拉普拉斯矩阵为 $\boldsymbol{\mathcal{L}}\in\mathrm{R}^{n\times n}$。每个智能体 $i\in V$ 都有局部目标函数 $f_i:\mathrm{R}^d\to\mathrm{R}$，其中 $f_i$ 被假设为

凸函数且连续可微。系统的目标是求解优化问题

$$\underset{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^d}{\text{minimize}} \quad f(\mathbf{z})=\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{z}) \tag{7.3a}$$

以分布式方式进行，并假设局部目标函数的信息不与系统中的其他智能体共享。

每个智能体使用状态变量 $\mathbf{x}_i(t)$ 来估计（7.3）的最优解。变量 $\mathbf{x}_i(t)$ 的更新基于对局部目标函数的优化，以及与邻居智能体交换更新变量的信息。由于 $f$ 是连续可微凸函数之和，因此 $f$ 也是连续可微凸函数。设 $\mathbf{x}=[\mathbf{x}_1^\top,\ldots,\mathbf{x}_n^\top]^\top\in\mathrm{R}^{dn}$, $\tilde{f}(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}_i)$，则由于 $\tilde{f}(\mathbf{1}_n\otimes\mathbf{z}^*)=f(\mathbf{z}^*)$，（7.3）的解当且仅当 $\mathbf{x}_1=\ldots=\mathbf{x}_n=\mathbf{z}^*$ 时在点 $\mathbf{z}^*\in\mathrm{R}^d$ 处取得。因此，问题（7.3）等价于问题

$$\underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{dn}}{\text{minimize}} \quad \tilde{f}(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}_i) \tag{7.4a}$$

$$\text{subject to} \quad \bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{x}=\mathbf{0}_{dn} \tag{7.4b}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}=\boldsymbol{\mathcal{L}}\otimes\mathbf{I}_d\in\mathrm{R}^{dn\times dn}$。

为求解问题 (7.4)，我们定义增广拉格朗日函数（augmented Lagrangian）

$$L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})=\tilde{f}(\mathbf{x})+\boldsymbol{\lambda}^\top\bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top\bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{x}, \tag{7.5}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}=[\boldsymbol{\lambda}_1^\top,\ldots,\boldsymbol{\lambda}_n^\top]^\top\in\mathrm{R}^{dn}$ 是拉格朗日乘子，而分量 $\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top\bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{x}$ 是用于惩罚系统中各智能体估计变量之间不一致程度的增广函数。

问题 (7.4) 的对偶问题为

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}}\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{dn}} L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) \tag{7.6}$$

点 $(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)\in\mathrm{R}^{dn}\times\mathrm{R}^{dn}$ 是 $L$ 的局部鞍点，如果存在一个开邻域$B_{\mathbf{x}^*}\subset\mathrm{R}^{dn}$ 以及 $B_{\boldsymbol{\lambda}^*}\subset\mathrm{R}^{dn}$，使得对于 $\mathbf{x}^*$ 和 $\boldsymbol{\lambda}^*$，满足

$$L(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda})\le L(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)\le L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}^*),\ \forall\mathbf{x}\in B_{\mathbf{x}^*},\forall\boldsymbol{\lambda}^*\in B_{\boldsymbol{\lambda}^*}. \tag{7.7}$$

当 $B_{\mathbf{x}^*}=\mathrm{R}^{dn}$ 且 $B_{\boldsymbol{\lambda}^*}=\mathrm{R}^{dn}$ 时，$(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)$ 是 $L$ 的全局鞍点。

如果 $(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)$ 是 $L$ 的一个鞍点，则有 $L(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*+\mathbf{1}_n\otimes\mathbf{a})=L(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)$。因此，$(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*+\mathbf{1}_n\otimes\mathbf{a})$ 也是 $L$ 的一个鞍点。

拉格朗日函数 $L$ 的临界点 $(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)$ 满足

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial\mathbf{x}}=\frac{\partial\tilde{f}(\mathbf{x}^*)}{\partial\mathbf{x}}+(\boldsymbol{\lambda}^*)^\top\bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}+(\mathbf{x}^*)^\top\bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}=\mathbf{0}_{dn}^\top, \tag{7.8a}$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial\boldsymbol{\lambda}}=(\mathbf{x}^*)^\top\bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}=\mathbf{0}_{dn}^\top. \tag{7.8b}$$

由方程 (7.8b)，可得 $\mathbf{x}^*\in$ 属于核($\bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}$)，因此 $\mathbf{x}^*=\mathbf{1}_n\otimes\mathbf{a}$，其中 $\mathbf{a}\in\mathrm{R}^d$。代入 (7.8a)，可得

$$\frac{\partial\tilde{f}(\mathbf{x}^*)}{\partial\mathbf{x}}=\frac{\partial\tilde{f}(\mathbf{1}_n\otimes\mathbf{a})}{\partial\mathbf{x}}=-(\boldsymbol{\lambda}^*)^\top\bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}} \tag{7.9a}$$

$$\frac{\partial\tilde{f}(\mathbf{1}_n\otimes\mathbf{a})}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{1}_n\otimes\mathbf{I}_d)=\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial\mathbf{z}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(\mathbf{a})}{\partial\mathbf{z}}=-(\boldsymbol{\lambda}^*)^\top\bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}(\mathbf{1}_n\otimes\mathbf{I}_d)=\mathbf{0}_d^\top. \tag{7.9b}$$

因此，$\mathbf{x}^* = \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{a}$ 是问题 (7.4) 的解。同时，方程 (7.9a) 表明存在 $\boldsymbol{\lambda}^*$ 满足 $\bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\boldsymbol{\lambda}^* = -\left(\frac{\partial \tilde{f}(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}}\right)^\top = -\nabla_{\mathbf{x}} \tilde{f}(\mathbf{x}^*)$。注意，$L\colon \mathbb{R}^{dn} \times \mathbb{R}^{dn} \to \mathbb{R}$ 关于变量 $\mathbf{x}$ 是凸函数，关于变量 $\boldsymbol{\lambda}$ 是仿射函数（因此也是凹函数），所以临界点 $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ 也是 $L$ 的鞍点。

求解优化问题 (7.4) 可归结为寻找 $L$ 的一个鞍点。因此，优化算法同时执行两个过程：对 $\mathbf{x}$ 求极小值，并对 $\boldsymbol{\lambda}$ 求极大值。考虑以下分布式优化算法：

$$\dot{\mathbf{x}}_i = -\sum_{j\in N_i}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) - \sum_{j\in N_i}(\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_j) - \nabla f_i(\mathbf{x}_i), \tag{7.10a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_i = \sum_{j\in N_i}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j), \tag{7.10b}$$

其中 $i = 1, \ldots, n$。因此，除了极小值估计变量 $\mathbf{x}_i$ 外，每个智能体还维护变量 $\boldsymbol{\lambda}_i \in \mathbb{R}^d$。变量 $\mathbf{x}_i$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 都会与邻居智能体交换，以确定算法 (7.10)。在方程 (7.10) 中，$\boldsymbol{\lambda}_i$ 具有对状态变量误差和 $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ 进行积分的环节形式。算法 (7.10) 可改写为如下矩阵形式：

$$\dot{\mathbf{x}} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}\right)^\top = -\bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{x} - \bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\boldsymbol{\lambda} - \nabla \tilde{f}(\mathbf{x}), \tag{7.11a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^\top = \bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{x}, \tag{7.11b}$$

其中 $\nabla \tilde{f}(\mathbf{x}) = [\nabla f_1(\mathbf{x}_1)^\top, \ldots\ldots, \nabla f_n(\mathbf{x}_n)^\top]^\top$。用矩阵表示时，$\dot{\mathbf{x}}$ 沿着 $L$ 关于 $\mathbf{x}$ 的梯度反方向，而 $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ 沿着 $L$ 关于 $\boldsymbol{\lambda}$ 的梯度方向。(7.11) 的平衡点也正是拉格朗日函数 $L$ 的鞍点。

设 $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ 是拉格朗日函数的一个鞍点，$V = \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*\|^2$ 对应的李雅普诺夫函数为 $\mathbf{x}\mathbf{x}$，则有

$$\dot{V} = -(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^\top \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) + (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*)^\top \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}). \tag{7.12}$$

由于 $L$ 关于 $\mathbf{x}$ 是凸函数，且关于 $\boldsymbol{\lambda}$ 是仿射函数，因此

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) - L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}) \le \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) = (\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}))^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \tag{7.13a}$$

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) - L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*) = \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*) = (\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}))^\top (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*). \tag{7.13b}$$

将方程 (7.13) 代入 $\dot{V}$ (方程 (7.12)，可得

$$\dot{V} \le [L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}) - L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)] - [L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*) - L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)] \le 0, \tag{7.14}$$

根据 鞍点的性质。因此，(7.11) 的解 $(\mathbf{x}(t)\ \boldsymbol{\lambda}(t))$ 是有界的。此外，由于

$$(\mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{I}_d)\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}_d,$$

因此 $\sum_{i=1}^n \boldsymbol{\lambda}_i(t) = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\lambda}_i(0)\ \ \forall t \ge 0$。

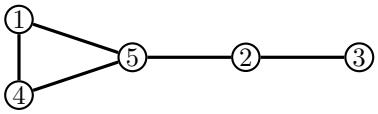



图 7.1：示例 7.1 中描述五个智能体交互的图。

根据LaSalle不变性原理，所有从 $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$ 出发的轨迹都渐近于 $\{(\mathbf{x}\ \boldsymbol{\lambda}) \in \mathrm{R}^{dn} \times \mathrm{R}^{dn} |\ \dot{V} \equiv 0, \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\lambda}_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\lambda}_i(0)\}$ 中的最大不变集。$\dot{V} \equiv 0$ 的条件是

$$L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}) - L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = (\mathbf{x}^*)^\top \bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*) \equiv 0, \tag{7.15a}$$

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*) - L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \equiv 0. \tag{7.15b}$$

由于$\mathbf{x}^*$ 属于 $L$的鞍点集合，条件 (7.15a) 总是成立。条件 (7.15b) 等价于

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) - \tilde{f}(\mathbf{x}^*) + (\boldsymbol{\lambda}^*)^\top \bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{x} \equiv 0. \tag{7.16}$$

根据凸函数的性质和鞍点性质 (7.9a)，

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) - \tilde{f}(\mathbf{x}^*) \geq (\nabla \tilde{f}(\mathbf{x}))^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) = -(\boldsymbol{\lambda}^*)^\top \bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{x} \tag{7.17}$$

因此，要使 (7.16) 成立，$_{1\,2}\mathbf{x}^\top\, \bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{x} \equiv 0$，或者 $\mathbf{x} \equiv \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{b}(t)$，其中$\mathbf{b}(t) \in \mathrm{R}^d$ 满足 (7.17)，即

$$f(\mathbf{b}) = \tilde{f}(\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{b}(t)) = \tilde{f}(\mathbf{x}^*),\ \forall t \geq 0. \tag{7.18}$$

代入方程 (7.11a)，可得

$$\mathbf{1}_n \otimes \dot{\mathbf{b}} \equiv -\bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\boldsymbol{\lambda}^* - \nabla \tilde{f}(\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{b}) \tag{7.19}$$

$$n\dot{\mathbf{b}} \equiv -(\mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{I}_d)\bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\boldsymbol{\lambda}^* - (\mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{I}_d)\nabla \tilde{f}(\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{b}(t)) = -\sum_{i=1}^{n} \nabla f_i(\mathbf{b}) = -\nabla f(\mathbf{b}), \tag{7.20}$$

系统 $\dot{\mathbf{b}} = -\frac{1}{n}\nabla f(\mathbf{b})$ 是一个梯度系统，其势函数为 $f(\mathbf{z})$，平衡点集是 $f(\mathbf{z})$ 的极小点。由（7.18）可知，$\mathbf{b}(0)$ 属于 $f(\mathbf{z})$ 的极小值集合。若存在最小时刻 $t_1 > 0$，使得 $\mathbf{b}(t_1) \neq \mathbf{b}(0)$，则必有 $\dot{f}(\mathbf{b}(t_1)) = -\|\nabla f(\mathbf{b}_1)\|^2 < 0$。然而，由于 $\mathbf{b}(t)$ 属于 $f$ 的极小点集合，$\forall t \geq 0$，因此 $\nabla f(\mathbf{b}_1) = \mathbf{0}_d$，这就产生了矛盾。由此可得 $\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0}_d$。代入（7.19）后，等式 $\bar{\mathrm{L}}\boldsymbol{\lambda}^* = -\nabla \tilde{f}(\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{b})$ 成立，因此（$\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{b}\ \boldsymbol{\lambda}^*$）是 $L$ 的一个鞍点，其中$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\lambda}_i^* = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\lambda}_i(0)$。

因此，对于算法 (7.11)，$(\mathbf{x}(t)\ \boldsymbol{\lambda}(t))$ 渐近趋于 $L$ 的一个鞍点。如果 $f(\mathbf{z})$ 具有有限个极小点，则 $\mathbf{x}(t)$ 渐近趋于 (7.4) 的一个解。

**示例 7.1**。考虑一个由五个智能体组成的系统，其交互图如图 7.1 所示。每个智能体的目标函数是严格凸函数，分别选取为：

$$f_i(z) = z^2 + b_i z + c_i, i = 1, \ldots, 4,\ \text{và}\ f_5(z) = \mathrm{e}^{0.25z},$$

对于 $b_1 = -1$，$b_2 = -9$，$b_3 = -9$，$b_4 = -8$和 $c_1 = 5$，$c_2 = 1$，$c_3 = 3$，$c_4 = 5$。图 $f_i(z)$ $i = 1$，....., 5 以及 $f(z) = \sum_{i=1}^{5} f_i(z)$ 在区间 $[-5, 5]$ 内的图像如图 7.2 (a) 所示。$f(z)$ 的全局最小值点近似为 $(z^*,\ f(z^*)) = (3.3036,\ -29.2582)$。

在时间区间 $0 \le t \le 60$ (s) 内，对系统进行分布式优化算法 (7.10) 仿真，得到图 7.2 (b)–(d) 所示的结果。可以看出，变量 $x_i$ 渐近趋于一个一致性值，而 $\lambda_i(t)$ 渐近趋于常数值。在 $t = 60$,

$$\mathbf{x}(t = 60) = [3.3028, 3.3041, 3.3048, 3.3028, 3.3031]^\top,$$
$$\boldsymbol{\lambda}(t = 60) = [-4.2782, 3.7753, 6.1653, -1.9449, -1.0062]^\top,$$

并且 $\tilde{f}(\mathbf{x}) = -29.2658$，根据计算结果，它相对接近 $f(z)$ 的全局最小值。

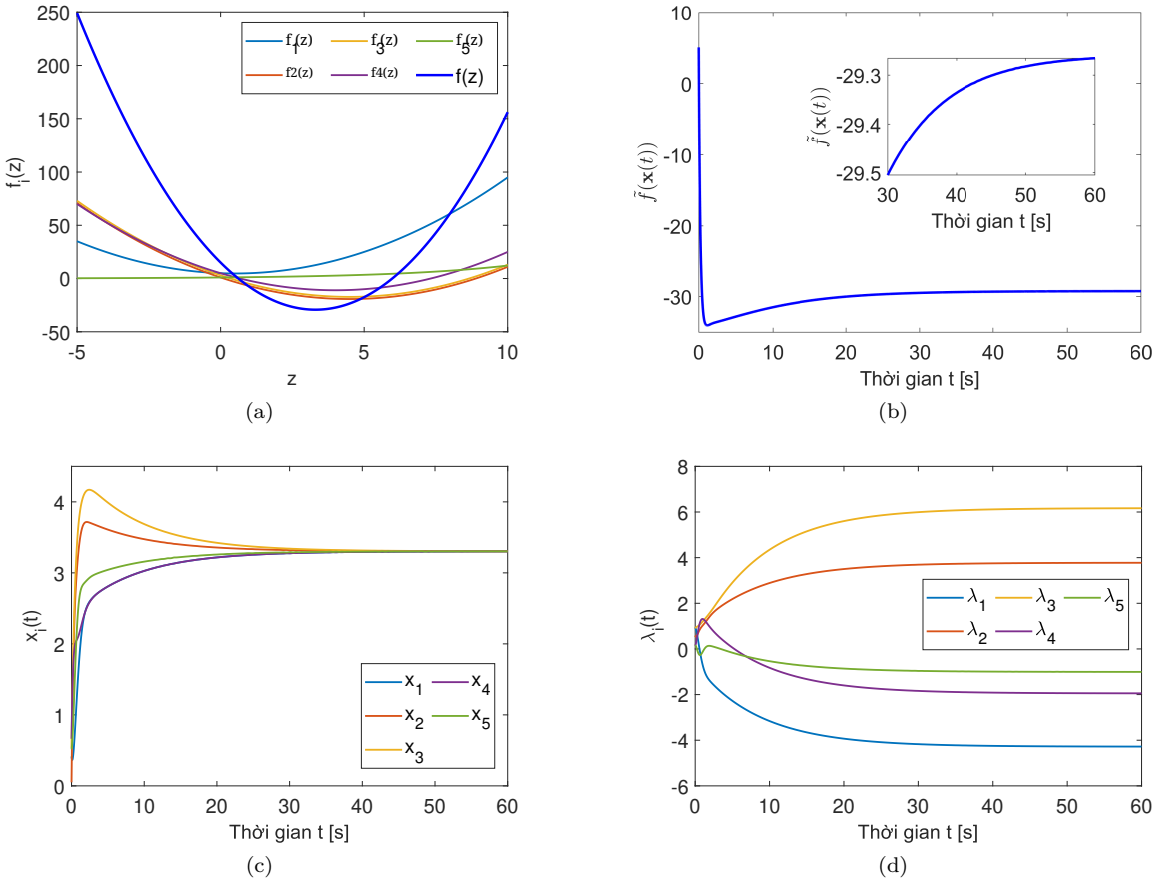



图 7.2：示例 7.1 中 5 智能体系统的仿真。(a) 目标函数 $f_i(z)$ 和 $f(z)$ 的值；(b)：目标函数 $\tilde{f}(\mathbf{x}(t))$ 的值；(c) 估计状态变量 $x_i(t)$；以及 (d) 变量 $\lambda_i(t)$。

Tiếp接下来，我们考虑一个使用带等式约束的分布式优化来求解线性方程组的示例。

**示例 7.2**（线性方程组的分布式求解）。考虑具有 $n$ 个智能体的系统，每个智能体具有局部目标函数$f_i(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{A}_i\mathbf{z} - \mathbf{b}_i\|^2$，其中$\mathbf{z} \in \mathrm{R}^d$，$\mathbf{A}_i \in \mathrm{R}^{d_i \times d}$，$\mathbf{b}_i \in \mathrm{R}^{d_i}$。问题的最优解$\mathbf{z}^* \in \mathrm{R}^d$ 为

$$\underset{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{dn}}{\text{minimize}} \quad f(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{A}_i\mathbf{z} - \mathbf{b}_i\|^2 \tag{7.21a}$$

同时满足 $n$ 个方程$\mathbf{A}_i\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i, i = 1, \ldots, n,$的解，前提是 $n$ 个方程具有公共解。当 $n$ 个方程没有公共解时，所得解将使 $n$ 个约束的偏差平方和最小化。

为分布式求解（7.21），我们将优化问题写成（7.4）的形式，相应的分布式优化算法为：

$$\dot{\mathbf{x}}_i = -\sum_{j\in N_i}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) - \sum_{j\in N_i}(\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_j) - \mathbf{A}_i^\top(\mathbf{A}_i\mathbf{x}_i - \mathbf{b}_i), \tag{7.22a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_i = \sum_{j\in N_i}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j), \tag{7.22b}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \ldots, n$。

## 7.3 带不等式约束的分布式优化

本小节中，我们研究附加不等式约束的分布式优化问题：

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{dn}}{\text{minimize}} \quad & \tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}_i) && (7.23a)\\ \text{subject to} \quad & \bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{x} = \mathbf{0}_{dn}, && (7.23b)\\ & \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i) \le \mathbf{0}_{m_i},\ i = 1, \ldots, n && (7.23c) \end{aligned}$$

其中 $f_i: \mathrm{R}^d \to \mathrm{R}$ $i = 1$, ....., $n$是二阶连续可微凸函数，$\mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i) = [g_{i1}(\mathbf{x}_i)$.....，$\mathbf{g}^{im_i}(\mathbf{x}_i)]^\top$具有分量函数 $g_{ik}$，这些函数均为连续可微凸函数。此外，函数$f(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{z})$是严格凸函数。因此，除了通过一致性分布式最小化函数 $f$之外，每个智能体的状态变量都受到（7.23c）中不等式定义的凸集约束。

根据对目标函数和约束函数的假设，定义增广拉格朗日函数

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = \tilde{f}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^\top\bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{x} + \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\nu}_i^\top\mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i) + \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top\bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{x}, \tag{7.24}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\lambda}_1^\top, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_n^\top]^\top \in \mathrm{R}^{dn}$ 和 $\boldsymbol{\nu} = [\boldsymbol{\nu}_1^\top, \ldots, \boldsymbol{\nu}_n^\top]^\top \in \mathrm{R}^M$, $M = m_1 + \ldots + m_n$ 为拉格朗日乘子。拉格朗日函数 $L(\mathbf{x}\ \boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\nu})$ 关于 $\mathbf{x}$ 是凸函数，并且关于 $(\boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\nu})$ 是仿射函数（因此是凹函数）。

(7.4) 的对偶问题为

$$\max_{(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu})\in\mathbb{R}^{dn+M}} \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{dn}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) \tag{7.25}$$

假设存在点$\mathbf{x}^* = \mathbf{1}\otimes\mathbf{a} \in \ker(\mathbf{L})$，使得$\mathbf{g}_{ik}(\mathbf{a}) < 0,\ \forall i = 1, \ldots, n, \forall k = 1, \ldots, m_i$则斯莱特条件成立，原问题和对偶问题的最优值相同。问题（7.23）的解（$\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\nu}^*$）也是 $L$的一个鞍点。此外，（$\mathbf{x}^*$, $\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\nu}^*$）必须满足Karush-Kuhn-Tucker条件

$$\nabla\tilde{f}(\mathbf{x}^*) + \bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\boldsymbol{\lambda}^* + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\nu_{ik}^*\nabla g_{ik}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}_{dn}, \tag{7.26a}$$

$$\bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{x}^* = \mathbf{0}_{dn}, \tag{7.26b}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \le \mathbf{0}_M,\ \boldsymbol{\nu}^* \ge \mathbf{0}_M, (\boldsymbol{\nu}^*)^\top\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0. \tag{7.26c}$$

在函数 $f$ 为严格凸函数的条件下，存在唯一的最优值$\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^{dn}$。

利用拉格朗日函数 $L$，求解优化问题（7.23）的算法如下所示：

$$\dot{\mathbf{x}} = -\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = -\bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{x} - \bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\boldsymbol{\lambda} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i} \nu_{ik}\nabla g_{ik}(\mathbf{x}) - \nabla \tilde{f}(\mathbf{x}), \tag{7.27a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = \bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{x}, \tag{7.27b}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = [\nabla_{\boldsymbol{\nu}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu})]_{\boldsymbol{\nu}}^{+} = [\mathbf{g}(\mathbf{x})]_{\boldsymbol{\nu}}^{+}. \tag{7.27c}$$

在算法（7.27）中，为了将每个智能体的状态变量更新限制在可行域内，我们使用定义如下的投影函数：对于 $a$，$b \in \mathbb{R}$，

$$[a]_b^+ = \begin{cases} a, & b > 0, \\ \max\{0, a\}, & b = 0. \end{cases} \tag{7.28}$$

对于两个向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$，我们记作 $[\mathbf{a}]_{\mathbf{b}}^+$，表示其元素为 $[a_i]_{b_i}^+$、$\forall i = 1$、……、$p$ 的向量。注意，投影函数是不连续的（例如系统从状态 $a < 0$、$b > 0$ 转移到 $b = 0$ 和 $a < 0$ 时）。因此，系统（7.27）的导数不连续。对于具有不连续导数的系统 [58]，我们将不深入讨论其细节，并承认：对于每个初始条件（$\mathbf{x}$、$\boldsymbol{\lambda}$、$\boldsymbol{\nu}$）$\in \mathbb{R}^{dn} \times \mathbb{R}_+^{dn} \times \mathbb{R}_+^{M}$，（7.27）的解存在且唯一，并且解轨迹关于每个状态变量都是连续的。

智能体 $i$ 的算法 (7.27) 如下：

$$\dot{\mathbf{x}}_i = -\sum_{j\in N_i}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) - \sum_{j\in N_i}(\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_j) - \sum_{k=1}^{m_i}\nu_{ik}\nabla g_{ik}(\mathbf{x}_i) - \nabla f_i(\mathbf{x}_i), \tag{7.29a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_i = \sum_{j\in N_i}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j), \tag{7.29b}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}_i = [\mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i)]_{\boldsymbol{\nu}_i}^+, \tag{7.29c}$$

其中 $i = 1, \ldots, n$。显然，算法 (7.29) 是分布式的，因为它仅使用 $i$ 处的状态变量、目标函数、约束函数信息，以及从邻居智能体接收到的状态变量 $(\mathbf{x}j, \boldsymbol{\lambda}_j$，其中 $j \in N_i)$。

与无不等式约束的情形类似，为了分析系统 (7.27) 的稳定性，考虑李雅普诺夫函数 $V(\mathbf{x}\ \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*\|^2 + \|\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}^*\|^2)$，其中 $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\nu}^*)$ 是最优解集中的一个点。由于解轨迹不光滑，$V$ 对时间的导数是广义导数，其值为

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= -(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^\top \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^* \\ \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}^* \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) \\ [\nabla_{\boldsymbol{\nu}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu})]_{\boldsymbol{\nu}}^+ \end{bmatrix} \\
&= -(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^\top \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^* \\ \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}^* \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) \\ \nabla_{\boldsymbol{\nu}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) \end{bmatrix} \\
&\quad + (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}^*)^\top \left( [\nabla_{\boldsymbol{\nu}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu})]_{\boldsymbol{\nu}}^+ - \nabla_{\boldsymbol{\nu}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) \right).
\end{aligned}$$

利用拉格朗日函数的性质，$L$ 它关于$\mathbf{x}$ 是凸的，并关于（$\boldsymbol{\lambda}$，$\boldsymbol{\nu}$）是凹的，因此我们有

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) - L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) &\le (\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}))^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \\
L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) - L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\nu}^*) &\ge \begin{bmatrix} \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) \\ \nabla_{\boldsymbol{\nu}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^* \\ \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}^* \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

利用这些不等式，我们有

$$\begin{aligned}\dot{V} &\le -[L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu}) - L(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu})] + [L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu}) - L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\nu}^*)] \\ &\quad + (\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\nu}^*)^\top \left([\nabla_{\boldsymbol{\nu}} L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu})]_{\boldsymbol{\nu}}^+ - \nabla_{\boldsymbol{\nu}} L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu})\right) \\ &\le [L(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu}) - L(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu}^*)] + [L(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu}^*) - L(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\nu}^*)] \\ &\quad + [L(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\nu}^*) - L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\nu}^*)] + (\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\nu}^*)^\top \left([\nabla_{\boldsymbol{\nu}} L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu})]_{\boldsymbol{\nu}}^+ - \nabla_{\boldsymbol{\nu}} L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu})\right) \\ &\le M_1 + M_2 + M_3 + M_4, \end{aligned} \tag{7.30}$$

对于 $M_1 \le 0$、$M_2 \le 0$、$M_3 \le 0$。将 $M_4$ 表示为

$$\begin{aligned} M_4 &= (\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\nu}^*)^\top \left([\nabla_{\boldsymbol{\nu}} L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu})]_{\boldsymbol{\nu}}^+ - \nabla_{\boldsymbol{\nu}} L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{d_i} (\nu_{ik} - \nu_{ik}^*)([g_{ik}(\mathbf{x}_i)]_{\nu_{ik}}^+ - g_{ik}(\mathbf{x}_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{d_i} M_4(i,k), \end{aligned}$$

于是，对于每个 $M_4(i,\ k)$，我们有两种情况：

- 如果 $\nu_{ik} > 0$，则有 $[g_{ik}(\mathbf{x}_i)]_{\nu_{ik}}^+ = g_{ik}(\mathbf{x}_i)$，因此 $M_4(i,\ k) = 0$，
- 如果 $\nu_{ik} = 0$，则有 $[g_{ik}(\mathbf{x}_i)]_{\nu_{ik}}^+ \ge g_{ik}(\mathbf{x}_i)$，且 $\nu_{ik} - \nu_{ik}^* \le 0$，因此 $M_4(i,\ k) \le 0$。

因此，$M_4(i,\ k) \le 0$，从而 $M_4 \le 0$。由此可得

$$\dot{V} \le 0, \tag{7.31}$$

系统的轨迹在 $V^{-1}(V(\mathbf{x}(0)\ \boldsymbol{\lambda}(0)\ \boldsymbol{\nu}(0))) \subset S = \mathbf{R}^{dn} \times \mathbf{R}_+^{dn} \times \mathbf{R}_+^M$ 中有界且有界。利用具有不连续导数且局部 Lipschitz 的系统的 LaSalle定理[250]，系统从 $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\nu}_0)$ 出发的每个解 $\in S$渐近趋于 $\{(\mathbf{x}\ \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) \in V^{-1}(V(0))|\ \dot{V} = 0\}$ 中的最大不变集。

由于 $\mathbf{x}^*$ 是唯一极小值，为了 $M_3 \equiv 0$，必须有 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$。为了进一步得到 $M_1 = M_2 = 0$，必须有 $(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*)^\top \boldsymbol{\mathcal{L}} \mathbf{x} = 0$，以及 $(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}^*)^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$。由于 $\nu_{ik}^* g_{ik}(\mathbf{x}_i^*) = 0$，因此有 $\boldsymbol{\nu}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$。

因此，为了使 $(\mathbf{x}\ \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu})$ 不离开不变集 $M = \{(\mathbf{x}\ \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) | \mathbf{x} = \mathbf{x}^*, \boldsymbol{\nu}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0\}$，必须满足 $\dot{\mathbf{x}}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = \mathbf{0}_{dn}$。由于 $\mathbf{L}\mathbf{x}^* = \mathbf{0}_{dn}$、$\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \le \mathbf{0}_M$, $\boldsymbol{\lambda} \ge \mathbf{0}_M$，且 $\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$，因此 $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) \in M$ 满足 KKT条件。因此，$M$ 是 $L$ 的鞍点集合的子集。

因此，所有从 $S$ 中某一点出发的轨迹都渐近于 $L$ 的鞍点集合。更具体地说，每条轨迹都渐近于 $L$ 的一个鞍点，该鞍点满足 $(\mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{I}_d)\boldsymbol{\lambda}^* = (\mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{I}_d)\boldsymbol{\lambda}(0)$。

**例7.3** (严格凸条件)。 [91] 对于问题 (7.23)，如果仅有条件 $f(\mathbf{x})$ 是凸函数，那么这些分析便不再成立。考虑线性规划问题

$$\underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad \tilde{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \tag{7.32a}$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{G}\mathbf{x} - \mathbf{h} \le \mathbf{0}_m, \tag{7.32b}$$

其中，“≤”表示左侧向量的各元素按坐标逐一不大于右侧向量的对应元素。构造拉格朗日函数 $L(\mathbf{x}\ \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^\top (\mathbf{G}\mathbf{x} - \mathbf{h})$，相应的求解 $L$ 鞍点的算法为：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{c} + \mathbf{G}^\top \boldsymbol{\lambda}, \tag{7.33a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = [\mathbf{G}\mathbf{x} - \mathbf{h}]_{\boldsymbol{\lambda}}^+. \tag{7.33b}$$

在鞍点 $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ 的邻域内对系统进行线性化，其中 $\boldsymbol{\lambda}^* > 0$，则 (7.33) 可表示为线性系统

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{G}^\top \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix}, \tag{7.34}$$

对于 $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$, $\tilde{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*$。由于矩阵 $\mathbf{A}$ 具有共轭虚特征值对，因此平衡点不是渐近稳定的。

**Angelia Nedic 与分布式优化算法**

Angelia Nedich 于 1994 年获得俄罗斯莫斯科莫斯科国立大学计算数学博士学位，并于 2002 年获得美国剑桥麻省理工学院电气工程与计算机科学学位。Nedich 目前是美国亚利桑那州立大学电气、计算机与能源工程学院的教授。Nedich 的研究涉及多智能体系统的优化、分布式优化和随机逼近。

在实际优化应用中，离散优化算法比连续算法更受关注。她的分布式次梯度优化算法 [174] 是最早研究多智能体系统优化主题的成果之一。

## 7.4 能源生产与分配系统中的应用

考虑一个由 $n$ 个智能体组成的电力系统，每个智能体都连接到各自的电力生产源和用电负荷，同时通过电能传输网络（物理连接层）和通信网络（信息连接层）与其他智能体相连。电能生产分配系统是信息物理系统（cyber-physical system）的一个示例，其中发电机的控制和运行决策，以及智能体之间的电能传输量，都是根据各智能体的负荷需求和智能体间交换的信息计算得出的。

假设电力传输网络可由图 $G = (V, E)$ 描述，该图包含 $n$ 个顶点和 $m$ 条边，其中每个顶点代表一个智能体，每条边 $(i, j)$ 表示电能可以在智能体 $i$ 和 $j$ 之间传输。记 $x_i$ 为节点 $i$（智能体 $i$）的发电量，$y_k$ 为第 $k$ 条母线上的传输电力，$x_i^d > 0$ 为节点 $i$ 处负荷的能源需求。能源生产与消费协调问题可以表示为一个分布式优化问题，并满足以下等式约束和不等式约束 [319]:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m}{\text{minimize}} \quad & \tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) && \text{(7.35a)} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{x} + \mathbf{H}^\top \mathbf{y} = \mathbf{x}^d, && \text{(7.35b)} \\ & \underline{x}_i \le x_i \le \overline{x}_i, \, \forall i = 1, \ldots, n, && \text{(7.35c)} \\ & \underline{y}_k \le y_k \le \overline{y}_k, \, \forall k = 1, \ldots, m, && \text{(7.35d)} \end{aligned}$$

其中，$f_i$ 是在节点 $i$处需要优化的局部目标函数，$\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^\top$、$\mathbf{y} = [\ldots, y_{ij}, \ldots]^\top = [y_1, \ldots, y_m]^\top$、$\mathbf{x}^d = [x_1^d, \ldots, x_n^d]^\top$，$\mathbf{H}$ 是图 $G$ 的关联矩阵，$x_i, x_i$ 是发电机运行的下界和

上界，节点 $i$处的发电机，以及 $\underline{y}_i, \overline{y}_i$ 是第 $k$ 条母线上传输电力的下界和上界。

假设目标函数和物理约束是每个智能体都不会交换的信息。尽管$\mathbf{y}$ 不会直接出现在目标函数中，但$\mathbf{y}$ 的存在对于满足约束并运行系统是必要的。

假设边 $e_k = (i, j) \in E$连接两个节点 $i, j \in V$。对于每条边 $(i, j)$，我们定义两个变量 $y_k^i$，$y_k^j$，分别表示节点 $i$和节点 $j$的第 $k$ 条母线上的最优传输电力估计值。这两个变量需要满足约束条件 $\mathbf{E}\begin{bmatrix} y_k^i \\ y_k^j \end{bmatrix} = \mathbf{0}_2$，其中 $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$。对于辅助变量，我们考虑以下优化问题：

$$
\begin{aligned}
\underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, \mathbf{y}\in\mathbb{R}^m}{\text{minimize}} \quad & \tilde{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) + \frac{1}{2}\sum_{e_k=(i,j)\in E} \begin{bmatrix} y_k^i & y_k^j \end{bmatrix}^\top \mathbf{E}\begin{bmatrix} y_k^i \\ y_k^j \end{bmatrix} && \text{(7.36a)} \\
\text{subject to} \quad & x_i + \sum_{e_k\sim i} y_k^i - x_i^d = 0,\ i = 1,\dots,n, && \text{(7.36b)} \\
& \underline{x}_i \le x_i \le \overline{x}_i,\ \forall i = 1,\dots,n, && \text{(7.36c)} \\
& \underline{y}_k \le y_k^i \le \overline{y}_k,\ \forall i = 1,\dots,n, \forall e_k \sim i, && \text{(7.36d)} \\
& \mathbf{E}\begin{bmatrix} y_k^i \\ y_k^j \end{bmatrix} = \mathbf{0}_2,\ \forall e_k \in E,\ i, j \sim e_k, && \text{(7.36e)}
\end{aligned}
$$

因此，节点 $i$ 处的优化变量包括 $x_i$ 和 $\{y_k^i\}_{e_k\sim i}$ （$1 + |N_i|$ 个变量），整个系统共有 $|V| + 2|E|$ 个优化变量。额外定义变量 $y_k^i$，$y_k^j$ 有助于分布式求解问题（7.35）。此外，由于约束（7.36e），（7.36）的最优解满足 $y_k^{i*} = y_k^{j*} = y_k^* \ \forall e_k \in E,\ i, j \sim e_k$，因此问题（7.35）和（7.36）的最优解（$x_i^*$，$y_k^*$）相同。

问题（7.36）对应的拉格朗日函数形式为

$$
\begin{aligned}
& L\left(\{x_i\}_{i\in V}, \{\theta_i\}_{i\in V}, \{y_k^i\}_{\substack{e_k\in E \\ e_k\sim i}}, \{\underline{\lambda}_i, \overline{\lambda}_i\}_{i\in V}, \{\underline{\mu}_k^i, \overline{\mu}_k^i\}_{\substack{i\in V, \\ e_k\in E \\ e_k\sim i}}, \{\nu_k^i, \nu_k^j\}_{e_k=(i,j)\in E}\right) \\
\triangleq & L(x_i, y_k^i, \theta_i, \underline{\lambda}_i, \overline{\lambda}_i, \underline{\mu}_k^i, \overline{\mu}_k^i, \nu_k^i, \nu_k^j) \\
= & \sum_{i=1}^{n}\left(f_i(x_i) + \underline{\lambda}_i(\underline{x}_i - x_i) + \overline{\lambda}_i(x_i - \overline{x}_i) + \sum_{e_k\sim i}(\underline{\mu}_k^i(\underline{y}_k - y_k^i) + \overline{\mu}_k^i(y_k^i - \overline{y}_k))\right. \\
& \left. + \theta_i\left(x_i + \sum_{e_k\sim i} h_{ki} y_k^i - x_i^d\right)\right) + \sum_{e_k=(i,j)\in E}\left(\frac{1}{2}\left[y_k^i,\ y_k^j\right]^\top \mathbf{E}\begin{bmatrix} y_k^i \\ y_k^j \end{bmatrix} + \left[\nu_k^i,\ \nu_k^j\right]^\top \mathbf{E}\begin{bmatrix} y_k^i \\ y_k^j \end{bmatrix}\right). \qquad \text{(7.37)}
\end{aligned}
$$

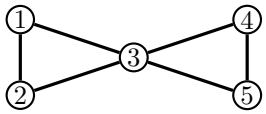



图 7.3：示例 7.4 中由 5 个智能体组成的电网示意图。

寻找拉格朗日函数（7.37）鞍点的分布式优化算法如下：

$$\dot{x}_i = -\nabla_{x_i} L = -\nabla f_i(x_i) - \theta_i + \underline{\lambda}_i - \overline{\lambda}_i,\ \forall i \in V, \tag{7.38a}$$

$$\dot{y}_k^i = -\nabla_{y_k^i} L = -(y_k^i - y_k^j) - (\nu_k^i - \nu_k^j) - h_{ki}\theta_i + \underline{\mu}_i^k - \overline{\mu}_i^k,\ \forall i \in V,\ \forall e_k \sim i, \tag{7.38b}$$

$$\dot{\theta}_i = \nabla_{\theta_i} L = x_i + \sum_{e_k \sim i} h_{ki} y_k^i - x_i^d,\ \forall i \in V, \tag{7.38c}$$

$$\dot{\nu}_k^i = \nabla_{\nu_k^i} L = y_k^i - y_k^j,\ \forall e_k = (i,j) \in E, \tag{7.38d}$$

$$\dot{\underline{\lambda}}_i = [\nabla_{\underline{\lambda}_i} L]^+_{\underline{\lambda}_i} = [\underline{x}_i - x_i]^+_{\underline{\lambda}_i},\ \forall i \in V, \tag{7.38e}$$

$$\dot{\overline{\lambda}}_i = [\nabla_{\overline{\lambda}_i} L]^+_{\overline{\lambda}_i} = [x_i - \overline{x}_i]^+_{\overline{\lambda}_i},\ \forall i \in V, \tag{7.38f}$$

$$\dot{\underline{\mu}}_k^i = [\nabla_{\underline{\mu}_k^i} L]^+_{\underline{\mu}_k^i} = [\underline{y}_k - y_k^i]^+_{\underline{\mu}_k^i},\ \forall e_k \in E,\ e_k \sim i, \tag{7.38g}$$

$$\dot{\overline{\mu}}_k^i = [\nabla_{\overline{\mu}_k^i} L]^+_{\overline{\mu}_k^i} = [y_k^i - \overline{y}_k]^+_{\overline{\mu}_k^i},\ \forall e_k \in E,\ e_k \sim i. \tag{7.38h}$$

智能体 $i$ 需要从邻居智能体接收的状态变量包括与邻接顶点 $i \in V$ 的边 $e_k$ 相关的变量 $\{y_k^j,\ \nu_k^j\}_{\forall j \in N_i}$。为执行算法（7.38），每个智能体需要 $4 + 4|N_i|$个状态变量。由 $n$ 个智能体组成的系统共有 $4|V| + 8|E|$个状态变量。

**例7.4** （由5个智能体组成的电能生产分配系统）。考虑一个由5个智能体组成的电力网，其图如图7.3所示。各智能体的局部目标函数形式为 $f_i(x_i) = x^2 + c_i$，其中$c_1 = 3$，$c_2 = 4$，$c_3 = 1$，$c_4 = 2$，$c_5 = 1$。各智能体生产能量的边界值如表7.1所示。对于编号并定向为 $e_1 = (1, 2)$、$e_2 = (1, 3)$、$e_3 = (2, 3)$、$e_4 = (3, 4)$、$e_5 = (3, 5)$、$e_6 = (4, 5)$ 的边，可通过这些边传输的电能额定值见表7.2。

表7.1：$x_i$的边界值

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\underline{x}_i$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\overline{x}_i$ | 9 | 3 | 6 | 4 | 5 |

表7.2：边界值 $y_k$

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\underline{y}_k$ | $-6$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-4$ | $-4$ |
| $\overline{y}_k$ | 6 | 4 | 3 | 2 | 4 | 4 |

在 $0 \le t \le 100$ (s) 时间内，每个智能体的设定负载为 $\mathbf{x}^d = [5, 2, 5, 3, 4]^\top$。负载值均处于 5 个智能体的发电量范围内。在此时间段内进行的仿真表明，各智能体的发电量渐近于 $\mathbf{x}^* = [4, 3, 4, 4, 4]^\top$，且相应母线上的交换电能满足 $y_k^i \to y_k^j$，并渐近于以下数值：

$$-0.6297, -0.3704, 0.4705, -0.3648, -0.6345, 0.6350.$$

图7.4(c)显示，每个节点的总功率（包括自主发电量和从邻居智能体接收的电能）逐渐与设定负载平衡。

在 $t > 100$ (s) 时，设定负载发生变化 $\mathbf{x}^d = [7, 4, 5, 3, 5]^\top$。若独立运行，智能体2无法满足新的负荷需求，因为 $x_2 = 3 < x_2^d(t > 100) = 4$ (标幺值)。得益于智能体之间的协同运行，电能缺额逐渐由系统中的其他智能体补足（图7.4(c)）。图7.4(a)–(b)显示 $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}^* = [6, 3, 6, 4, 5]^\top$，这部分补偿电能主要由智能体3和4生产。

最后，$\sum_{i=1}^{5} x_i(t)$ 和目标函数随时间的变化分别如图7.4(d)所示。

## 7.5 注释和参考文献

第7.2节分布式优化算法的稳定性分析部分基于文献 [102]。请注意，在 [102], 中，连续可微条件可以替换为局部 Lipschitz 条件，同时图 $G$ 可以是强连通且平衡的。第（7.3）节中关于约束优化问题的假设与 [109, 71], 类似，不过分析方法由 [53] 转换而来。该算法的指数稳定性证明可参见 [70]。关于其他一些基于无源系统或混杂系统 LaSalle定理的稳定性分析方法，请参见 [310, 109, 91, 71]。

本章内容需要具备一些关于凸优化和鞍点动力学的知识。类似内容可参见 [74]。带不等式约束的优化算法基于不连续对偶变量更新函数。关于连续对偶变量更新算法及其应用，可参见 [77, 113]。分布式优化在电能生产与分配问题中的应用基于文献 [320] 进行介绍。基于动态一致性算法的时变负载生产-分配算法见 [52] 。关于目标函数随时间变化的分布式优化算法，读者可参见 [223]。

关于利用控制理论和连续算法解决分布式优化问题的思想，已在 [310, 153, 307]中进行了介绍。离散系统中的分布式优化已应用于通信、传感器网络和电力系统 [152, 222, 316, 157], ，之后又基于控制理论[174]进行了更深入的研究。关于控制领域中分布式优化算法及其应用的综述，可参阅 [173]。与分布式优化相关的一些问题包括极值搜索（extremum seeking）、博弈论（寻找纳什均衡点）[177], 任务分配 [278],、区室系统中的优化（compartmental systems），例如供水网络 [179],、建筑物中的热控制系统 [129], 以及交通网络 [128, 213], .....

## 7.6 练习

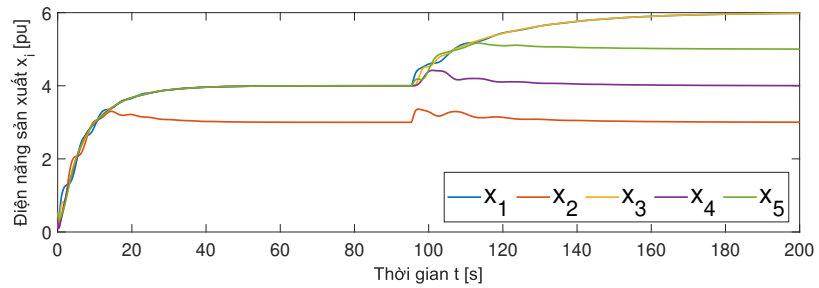
**练习 7.1** （舒尔补）。考虑分块矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}.$$

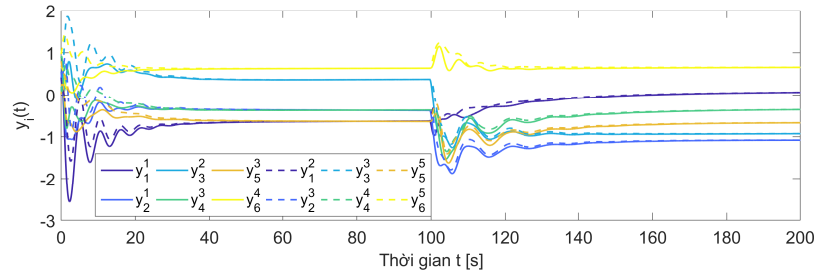
i. 假设$\mathbf{A}$ 可逆。证明$\mathbf{M}$ 可以表示为:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

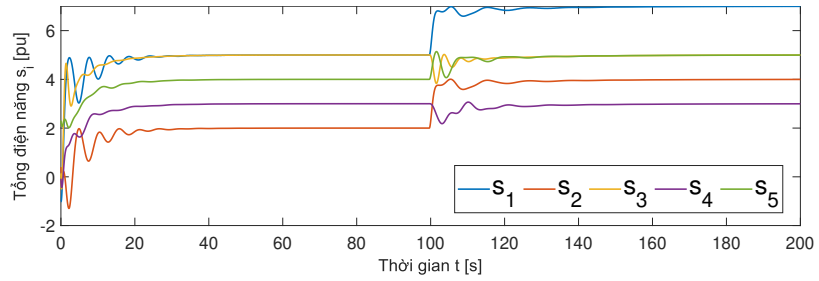
此外，$\mathbf{M}$ 可逆，当且仅当$\mathbf{D}$ –加利福尼亚州$^{-1}\mathbf{B}$ 的舒尔补$\mathbf{A}$ 可逆。



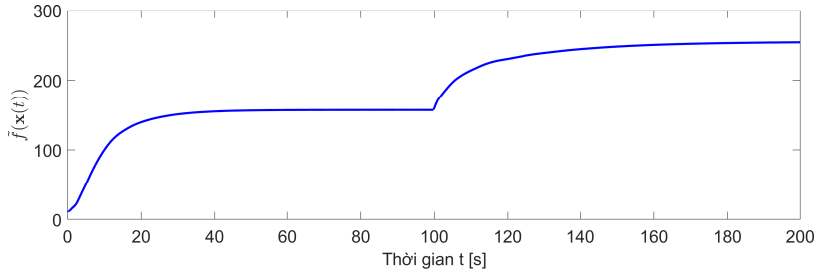

(a)




(b)




(c)




(d)

图7.4：例7.4中 5 智能体系统的仿真。(a)：发电量 $x_i(t)$（标幺值），$i = 1, \ldots, 6$；(b) 线路 $y_k^i(t)$ $y_k^j(t)$ 上传输电力的估计值（标幺值），其中 $k = 1, \ldots, 6$；以及 (c) 各节点的总功率 $s_i = x_i - \sum_{e_k \sim i} h_{ki} y_k^i$（标幺值），$i = 1, \ldots, 6$。(d) 目标函数 $\tilde{f}(\mathbf{x}(t))$ 的值。

ii. 假设 $\mathbf{C}=\mathbf{B}^\top$，证明 $\mathbf{M}$ 是对称正定矩阵，当且仅当$\mathbf{D}$ 和$\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}^\top$ 对称且正定。

iii. 假设$\mathbf{C}\ =\ \mathbf{B}^\top$，证明若$\mathbf{D}$ 是对称正定矩阵，则$\mathbf{M}$ 和$\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}^\top$ 对称且半正定。

**习题7.2**（伪逆矩阵）。考虑方阵$\mathbf{M}\in\mathrm{R}^{n\times n}$，满足秩$(\mathbf{M})=r$。

i. 证明矩阵$\mathbf{M}^\top\mathbf{M}$和矩阵$\mathbf{M}\mathbf{M}^\top$具有相同的特征值集合，即 $\sigma_1\geq\ldots\geq\sigma_r>0$。求 $\sigma_i$ 与$\mathbf{M}$的特征值之间的关系。

ii. $\mathbf{M}$ 有奇异值分解（SVD）：

$$\mathbf{M}=\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\top,$$

其中$\mathbf{U},\mathbf{V}$是正交矩阵，且 $\mathbf{\Sigma}=\mathrm{diag}(\sigma_1,\ldots,\sigma_r,0,\ldots,0)$。定义$M$ 的**伪逆矩阵**为$\mathbf{M}^\dagger=\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^\dagger\mathbf{V}^\top$，其中 $\mathbf{\Sigma}=\mathrm{diag}(\sigma_1^{-1},\ldots,\sigma_r^{-1},0,\ldots,0)$。证明：

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^\dagger\mathbf{M}=\mathbf{M}, \tag{7.39a}$$

$$\mathbf{M}^\dagger\mathbf{M}\mathbf{M}^\dagger=\mathbf{M}^\dagger, \tag{7.39b}$$

$$\ker(\mathbf{M})=\ker(\mathbf{M}^\dagger)=\ker(\mathbf{M}\mathbf{M}^\dagger)=\ker(\mathbf{M}^\dagger\mathbf{M}) \tag{7.39c}$$

**习题7.3**（二次型 I）. [101]考虑函数 $f(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top\mathbf{P}\mathbf{x}+\mathbf{x}^\top\mathbf{b}$。

i. 证明：若$\mathbf{P}$ 可逆，则当且仅当$\mathbf{P}$ 对称正定时，$f(\mathbf{x})$有极小值。求此情形下 $f(\mathbf{x})$ 的最小值和极小点。ii. 证明：若$\mathbf{P}$ 对称，则当且仅当$\mathbf{P}$ 半正定且$\mathbf{b}\in$ 属于 $\mathrm{im}(\mathbf{P})$ 时，$f(\mathbf{x})$有极小值。求此情形下 $f(\mathbf{x})$ 的最小值和极小点集合。

**练习 7.5**（二次型 II）。 [101] 考虑二元函数

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y})=\begin{bmatrix}\mathbf{x}^\top & \mathbf{y}^\top\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{B}^\top & \mathbf{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}^\top & \mathbf{y}^\top\end{bmatrix}\mathbf{M}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix},$$

其中 $\mathbf{M}^\top=\mathbf{M}$。证明 $f(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ 有极小值，当且仅当以下条件之一成立：

i. $\mathbf{M}$ 是半正定的；

ii. $\mathbf{A}$ 是半正定的，$(\mathbf{I}-\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger)\mathbf{B}=\mathbf{0}$，且$\mathbf{C}\ -\mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}$ 是半正定的；iii. $\mathbf{C}$ 是半正定的，$(\mathbf{I}-\mathbf{C}\mathbf{C}^\dagger)\mathbf{B}^\top=\mathbf{0}$，且$\mathbf{A}\ -\mathbf{B}\mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^\top$ 是半正定的；

**练习 7.5**（将线性方程组分解为更小的方程组求解）。[38]考虑通过连通无向图 $G$ 进行交互的智能体系统 $n$。假设该系统需要解决求解线性方程组的问题，该方程组的形式为

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{A}_i\mathbf{x}_i=\mathbf{b}_0, \tag{7.40}$$

其中$\mathbf{x}_i\ \in\ \mathrm{R}^{d_i}$ 和$\mathbf{A}_i\ \in\ \mathrm{R}^{N\times d_i}$ 是第 $i$个智能体的状态变量和约束矩阵，$\mathbf{A}\ =[\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_n]\in\mathrm{R}^{N\times q}$, $\mathbf{x}\ =[\mathbf{x}_1^\top,\ldots,\mathbf{x}_n^\top]^\top\in\mathrm{R}^q$, $\mathbf{b}_0\in\mathrm{R}^N$, $q=\sum_{i=1}^n d_i$。进一步假设，关于向量 $\mathbf{b}_i$ 的信息为智能体 $i$所知，且这些向量满足 $\sum_{i=1}^n\mathbf{b}_i=\mathbf{b}_0$。

i. 令 $\bar{\mathbf{A}} = \text{分块对角矩阵}(\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_n) \in \mathbb{R}^{Nn\times q}$。证明$\mathbf{x}^*$是(7.40)的解，当且仅当存在$\mathbf{z}^* \in \mathbb{R}^{Nn}$和$\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^N, i = 1,\ldots,n$，使得

$$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}^* - \mathbf{b} - \bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{z}^* = \mathbf{0}_{Nn}, \tag{7.41}$$

其中 $\mathbf{b} = [\mathbf{b}_1^\top,\ldots,\mathbf{b}_n^\top]^\top$ 和 $\bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}} = \boldsymbol{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{I}_N$。

ii. 为了求解（7.40），我们求满足（7.41）的 $\mathbf{x}^*$ 和 $\mathbf{z}^*$。这可以通过求解以下优化问题来实现

$$\underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^q,\mathbf{y}\in\mathbb{R}^{Nn},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^{Nn}}{\text{minimize}} \quad \|\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}^* - \mathbf{b} - \bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{z}^*\|^2 \tag{7.42a}$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{y} + \bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{z} = \mathbf{0}_{Nn} \tag{7.42b}$$

其中 $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^N, i = 1,\ldots,n$ 是辅助状态变量，$\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1^\top,\ldots,\mathbf{y}_n^\top]^\top \in \mathbb{R}^{Nn}$。定义增广拉格朗日函数

$$L(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\boldsymbol{\lambda}) = \|\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}^* - \mathbf{b} - \bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{z}^*\|^2 + \boldsymbol{\lambda}^\top(\mathbf{y} + \bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{z}), \tag{7.43}$$

请编写分布式优化算法，求解（7.42）。

iii. 求出采用第（ii）问中编写的算法时系统的平衡点集合。分析系统在$t \to \infty$时的稳定性。

**练习 7.6**（使用缩放矩阵寻找鞍点的算法）。 [53] 考虑采用梯度算法的 $n$ 智能体系统

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}_1\nabla_{\mathbf{x}}L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu}), \tag{7.44a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{K}_2\nabla_{\boldsymbol{\lambda}}L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu}), \tag{7.44b}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{K}_3[\nabla_{\boldsymbol{\nu}}L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu})]_{\boldsymbol{\nu}}^+. \tag{7.44c}$$

其中 $\mathbf{K}_1,\mathbf{K}_2 \in \mathbb{R}^{dn\times dn}$ 和 $\mathbf{K}_3 \in \mathbb{R}^{M\times M}$ 是对角、对称且正定的矩阵 g.

i. 写出每个智能体的算法（7.44）方程。

ii. 求该系统的平衡点集。

iii. 证明从某一点 $(\mathbf{x}\ \boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu}) \in \mathbb{R}^{dn}\times\mathbb{R}^{dn}\times\mathbb{R}_+^M$出发的每条轨迹都渐近趋于 $L$的鞍点集中的一点。

**练习7.7**（基于共识的有限时间收敛分布式优化算法）。 [255] 考虑由 $n$ 个智能体组成的系统，它们通过连通无向图进行交互，目标函数为 $\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}_i)$，其中 $f_i\colon \mathbb{R}^d \to \mathbf{R}$ $i = 1,$ ....., $n$ 是二阶连续可微的严格凸函数，并满足以下条件:

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d,\ \exists\theta > 0:\ \nabla^2 f_i(\mathbf{x}_i) \geq \theta\mathbf{I}_d. \tag{7.45}$$

考虑分布式优化算法

$$\dot{\mathbf{x}}_i = -\gamma\left(\nabla^2 f_i(\mathbf{x}_i)\right)^{-1}\sum_{j\in N_i}\text{sig}^\alpha(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), \tag{7.46a}$$

$$\mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_i^*,\ i =,\ldots,n. \tag{7.46b}$$

其中 $\mathbf{x}_i^*$ 是局部目标函数 $f_i(\mathbf{x}_i)$ 的极小点。

i. 请将系统 (7.46) 改写为矩阵形式。

ii. 证明 $\sum_{i=1}^{n} \nabla f_i(\mathbf{x}_i)$是时不变的。

iii. 证明对于算法 (7.46)，$\mathbf{x} \to \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{x}^*$，其中$\mathbf{x}^*$ 是函数 $f(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{z})$的极小点，可在有限时间内收敛。请估算收敛时间的上界。（提示：使用李雅普诺夫函数 $V(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) - \tilde{f}(\mathbf{x}) - (\nabla f(\mathbf{x}))^\top (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{x}^* - \mathbf{x})$，并参考习题5.11中有关证明有限时间收敛的结果）

**习题7.8**（有限时间收敛的鞍点算法）。 [252] 考虑以下带约束优化问题：

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad & f(\mathbf{x}) && \text{(7.47a)} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, && \text{(7.47b)} \\ & \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} && \text{(7.47c)} \end{aligned}$$

其中 $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ 是严格凸、二阶连续可微的目标函数，$\mathbf{h} : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ 是凸、二阶连续可微的函数，$\mathbf{A} \in \mathrm{R}^{m \times n}$ 且 $\mathbf{b} \in \mathrm{R}^m$。

i. 构造与 (7.47) 对应的增广拉格朗日函数，并写出用于求解相应鞍点的动力学算法。

ii. 考虑求解鞍点的算法

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= -\operatorname{sign}\left(\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu})\right), && \text{(7.48a)} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= \operatorname{sign}\left(\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu})\right), && \text{(7.48b)} \\ \dot{\boldsymbol{\nu}} &= \operatorname{sign}\left([\nabla_{\boldsymbol{\nu}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu})]_{\boldsymbol{\nu}}^{+}\right). && \text{(7.48c)} \end{aligned}$$

求出 (7.44) 的平衡点集合 $S^* = \{\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{x}\ \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) |\ \dot{\mathbf{x}} = 0, \dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0, \dot{\boldsymbol{\nu}} = 0\}$。

假设对于每个点 $\boldsymbol{\xi}(t) \notin S^*$，以下条件均成立：

a. $\nabla_{\mathbf{x}} L(\boldsymbol{\xi}) \perp \ker(\nabla_{\mathbf{xx}} L(\boldsymbol{\xi}))$ b. $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in \operatorname{im}(\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})$ c. 存在正常数 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$，使得

$$\begin{aligned} \delta_1 \leq \lambda_2(\nabla_{\mathbf{xx}} L(\boldsymbol{\xi})) \leq \lambda_n(\nabla_{\mathbf{xx}} L(\boldsymbol{\xi})) \leq \delta_2, \\ \lambda_2(\mathbf{M}(\mathbf{x})\mathbf{M}(\mathbf{x})^\top) \geq \delta_3, \text{ với } \mathbf{M}(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{A}^\top, \nabla^\top \mathbf{h}(\mathbf{x})\right]^\top, \end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 在有限时间内收敛至 $S^*$。

iii. 将第 (ii) 小题中的算法应用于分布式优化问题

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N}{\text{minimize}} \quad & \tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}_i) && \text{(7.49a)} \\ \text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{b}_i = \mathbf{b} && \text{(7.49b)} \end{aligned}$$

其中 $f_i : \mathrm{R}^{d_i} \to \mathrm{R}$ 是局部目标函数（严格凸、二阶连续可微），而 $\mathbf{A}_i$，$\mathbf{b}_i$ 是仅智能体 $i$，$N = \sum_{i=1}^{n} d_i$ 知道的矩阵。

**练习 7.9**。 考虑分布式优化问题

$$\underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{dn}}{\text{minimize}} \quad \tilde{f}(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}_i) \tag{7.50a}$$

$$\text{subject to} \quad \bar{\boldsymbol{\mathcal{L}}}\mathbf{x}=\mathbf{0}_{dn} \tag{7.50b}$$

以及算法（7.10）。使用势函数 $V(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})=\frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}}\|^2+\frac{1}{2}\|\dot{\boldsymbol{\lambda}}\|^2$，请证明 $\dot{V}\leq 0$。

**练习 7.10**（网络拥塞控制问题（互联网拥塞控制））. [91]考虑一个由 $n$ 个信息源组成的网络，这些信息源属于集合 $S$，通过集合 $L$中的 $m$ 条链路传输信息。每个信息源都有一个效用函数 $U_j(x_j)$，它是关于网络所传输信息流量 $x_j$ 的递增凹函数。带宽拥塞控制的任务是优化网络的效用函数：

$$\begin{aligned}\underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{dn}}{\text{maximize}} \quad & \tilde{U}(\mathbf{x})=\sum_{j\in S}^{n} U_j(\mathbf{x}_j)\\ \text{subject to} \quad & y_i=\sum_{j\in S(i)} x_j\leq c_i i\in L\end{aligned}$$

其中 $S(i)\subset S$ 是共同使用链路 $i$的所有信息源的集合，该链路的带宽为 $y_i$

**练习 7.11**（无线网络中的拥塞控制与交叉带宽争用）. [91]考虑一个由一组源节点组成的无线网络，该网络使用随机多址接入控制协议。每个节点 $k$ 以概率 $P_k$被选中传输数据；传输时，节点 $k$ 会以概率 $p_i$从 $L_{\text{out}}(n)$ 中选择一个传输信道。因此，每个节点都满足以下约束：

$$p_i\geq 0,\quad \sum_{i\in L_{\text{out}}(k)} p_i=P_k,\quad P^k\leq 1. \tag{7.51}$$

如果传输信道 $i$ 的接收节点位于另一个传输信道 $j$ 的传输区域内，则信道 $i$ 上的传输会受到信道 $j$ 的影响。信道冲突会导致传输丢包。因此，每个信道 $i$的容量是一个函数，取决于在不存在冲突时信道 $i$ 被选中的概率：

$$C_i(p)=c_i p_i \prod_{k\in N_I(i)}(1-P_k), \tag{7.52}$$

其中， $N_I(i)$ 是可能影响传输信道 $i$ 的节点集合。问题是寻找带宽分配和传输概率，以优化网络性能：

$$\underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n}}{\text{maximize}} \quad \tilde{U}(\mathbf{x})=\sum_{j\in S}^{n} U_j(x_j) \tag{7.53a}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j\in S(i)} x_j\leq C_i(p),\forall j \tag{7.53b}$$

i. 请进行变量变换 $\tilde{x}_j\triangleq\log x_j$，将（7.53）中的不等式约束转换为凸约束。

ii. 在假设 $\nabla U_j(x_j)=x_j^{-\alpha}$ 和 $\alpha>1$的条件下求解问题 (7.53)。

**练习 7.12.** [125] 考虑一个分布式生产问题，其中每台发电机的目标函数是二次三项式 $f_i(x_i) = a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i$，其中 $a_i$、$b_i$、$c_i$ 为实数，$a_i > 0$、$x_i$ 是发电机 $i$的发电量。与该优化问题相对应的最优发电量为：

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{dn}}{\text{minimize}} \quad & \tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) && \text{(7.54a)} \\ \text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^l = x^*, && \text{(7.54b)} \\ & 0 \le x_i \le \bar{x}_i. && \text{(7.54c)} \end{aligned}$$

其中，$x_i^l$ 是节点 $i$处负荷的耗电量，$x^*$ 是电网中的总耗电量，$\bar{x}_i > 0$ 是发电机 $i$的发电量上限。

i. 若发电机没有上界（$\bar{x}_i = \infty$），请建立问题 (7.54) 对应的拉格朗日函数。用解析法求相应的最优解 $x_i^*$，$\lambda^*$。

ii. 考虑约束时，记 $\Omega_{\bar{a}}$、$\Omega_{\underline{a}}$ 为处于上界和下界的发电机集合。证明 (7.54) 的解满足：

$$\lambda^* = 2a_i x^* + b_i, \quad n \notin \Omega_{\bar{a}}, \tag{7.55a}$$

$$x_i^* = \begin{cases} \frac{\lambda^* - b_i}{2a_i}, & i \notin \Omega_{\bar{a}} \cup \Omega_{\underline{a}} \\ \bar{x}_i, & i \in \Omega_{\bar{a}} \\ 0, & i \in \Omega_{\underline{a}} \end{cases} \tag{7.55b}$$

iii. 接着（ii），证明 $\lambda^*$ 与 $x^*$ 和 $\bar{x}_i$之间的关系表达式：

$$\lambda^* = \left( \sum_{i \notin \Omega_{\bar{a}} \cup \Omega_{\underline{a}}} \frac{1}{2a_i} \right)^{-1} \left( x^* - \sum_{i \in \Omega_{\bar{a}}} \bar{x}_i + \sum_{i \notin \Omega_{\bar{a}} \cup \Omega_{\underline{a}}} \frac{b_i}{2a_i} \right). \tag{7.56}$$

# 第 8 章

# 意见动力学模型

对社会现象的研究催生了与图和一致性系统相关的数学模型。近年来，经典的意见/观点动力学模型在控制理论的视角下被重新审视，同时，一些社会学家与控制学家合作提出了若干新模型 [122, 209, 219, 217]。

## 8.1 French-Degroot 模型

考虑一个由 $n$ 个智能体组成的系统，每个智能体都有一个由 $x_i[k]$、$i=1$、.....、$n$表示的独立观点/意见，而 $k=0$、1、2、..... 是表示交互时刻（离散）的索引。社交网络展现了智能体之间的交互，由一个包含自环（边的形式为 $(i$、$i)$）的图 $G=(V$、$E)$ 描述。$G$ 中每条边 $(j$、$i)$ 上的权重 $\omega_{ji}$ 体现了智能体 $j$ 在智能体 $i$形成观点时所产生的社会影响。在每个时刻 $k\geq 0$，每个智能体都综合自身及系统中其他智能体的意见，并根据方程 [65]更新自己的意见：

$$x_i[k+1]=\sum_{j\in M_i} a_{ij}x_i[k],\ i=1,\ldots,n, \tag{8.1}$$

其中 $M_i=N_i\cup\{i\}$ 以及权重满足：$a_{ij}=\omega_{ji}>0$ 当 $j\in N_i$ 时，$a_{ij}=0$ 当 $j\notin M_i$ 时以及 $\sum_{j\in M_i}a_{ij}=1$。权重 $a_{ii}$ 表示智能体$i$接纳外部意见的开放程度。如果 $a_{ii}=0$，则 $i$ 的观点完全取决于邻居智能体。反之，如果$a_{ii}=1$，智能体 $i$ 是不接纳外部意见的保守型智能体（$x_i[k]=x_i[0]$, $\forall k\geq 0$）。模型（8.1）满足 $a_{ij}=\frac{1}{|M_i|}$，$\forall j\in M_i$，由 French 提出，用于研究社会权力 [96]。Degroot 独立于 French 提出模型（8.1），用于研究一群人在若干次会面和意见交流后的观点变化。可以看出，French-Degroot 模型本质上是一个离散一致性模型。将方程（8.1）改写为矩阵形式

$$\mathbf{x}[k+1]=\mathbf{A}\mathbf{x}[k],\ k=0,1,2,\ldots \tag{8.2}$$

其中 $\mathbf{x}[k]=[x_1[k],\ldots,x_n[k]]^\top$ 和 $\mathbf{A}$ 是一个非负元素的矩阵（$a_{ij}\geq 0$，$\forall i$，$j=1$，.....，$n$），行随机（$\mathbf{A}\mathbf{1}_n=\mathbf{1}_n$）。如果存在极限 $\mathbf{x}^\infty=\lim_{k\to+\infty}\mathbf{x}[k]=\lim_{k\to+\infty}\mathbf{A}^k\mathbf{x}[0]$，则系统 (8.2) 收敛。此外，当 $\mathbf{x}^\infty=\bar{x}\mathbf{1}_n$ 对于 $\bar{x}=\boldsymbol{\gamma}^\top\mathbf{x}[0]=\sum_{j=1}^n\gamma_i x_i[0]$，或 $\lim_{k\to+\infty}\mathbf{A}^k=\mathbf{1}_n\boldsymbol{\gamma}^\top$ 时，系统 (8.2) 趋于一致性。对于附加假设下的系统 (8.2)，我们有以下一些结论：

• 如果图 $G$ 是强连通的，那么在模型 (8.2) 中，$\mathbf{x}[k]$ 渐近趋于一致性集合中的一个点，当且仅当 $G$ 无环。反之，对于几乎所有初始条件 $\mathbf{x}(0)$，(8.2) 发散。

• 系统 (8.2) 渐近收敛到一个平衡点，当且仅当 $G$ 的每个极大强连通分量都是非周期的。系统 (8.2) 渐近收敛到一致性集合中的一个不动点，当且仅当 $G$ 存在出根，且包含出根的强连通分量是非周期的。

• 如果 $a_{ii} > 0$ 满足 $\forall i = 1,\ldots,n$，则图无周期假设成立，(8.2) 渐近收敛到一个特定点。如果进一步假设 $G$ 存在出根，则 (8.2) 的平衡点属于一致性集合。

• 假设系统 (8.2) 渐近收敛到一致性集合中的一个点。此时，$\boldsymbol{\gamma}$ 是 $\mathbf{A}$ 对应于特征值 1 的唯一左特征向量，并且满足 $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{1}_n = 1, \gamma_i \geq 0, \forall i = 1,\ldots,n$。每个元素 $\gamma_i$ 表示智能体 $i$ 对共识意见的影响程度，也称为社交网络 [96]中第 $i$ 个智能体的中心性指标或影响力指标。

## 8.2 Friendkin-Johnsen模型

Friendkin和Johnsen [97, 98] 通过进一步考虑偏见对智能体观点变化的影响，提出了 French-Degroot 模型的一种扩展。Friedkin-Johnsen（F-J）模型由以下方程描述：

$$x_i[k+1] = \theta_{ii} \sum_{j \in M_i} a_{ij} x_j[k] + (1 - \theta_{ii}) u_i, \tag{8.3}$$

或者表示为矩阵形式：

$$\mathbf{x}(k+1) = \boldsymbol{\Theta}\mathbf{A}\mathbf{x}[k] + (\mathbf{I}_n - \boldsymbol{\Theta})\mathbf{u}, \tag{8.4}$$

其中，矩阵$\mathbf{A}$的定义与 French-Degroot 模型相同，$\boldsymbol{\Theta} = \text{diag}(\theta_{11},\ldots,\theta_{nn})$，$\theta_{ii} \in [0,1]$ 描述外部影响对第 $i$ 个智能体观点的影响程度，而$\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ 称为智能体的偏见向量，通常选为$\mathbf{u} = \mathbf{x}[0]$。显然，当 $\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{I}_n$时，Friendkin-Johnsen 模型（8.4）就变成了 French-Degroot 模型。

考虑情形 $\boldsymbol{\Theta} \neq \mathbf{I}_n$。如果 $\theta_i < 1$，则智能体 $i$ 是具有偏见的。如果 $i$ 是具有偏见的智能体，或者 $i$ 受到具有偏见的智能体影响，换言之，如果存在一条从具有偏见的智能体 $j$ 到 $i$的路径，则智能体 $i$ 受到偏见影响。未受到偏见影响的智能体 $i$ 称为独立主体。按照这种划分，图 $G$ 可以重新编号，使受偏见影响的智能体编号为 1、.....、$r$，独立智能体编号为 $r+1$、.....、$n$，其中 $r \geq 1$。这两组智能体的意见分别由向量 $\mathbf{x}_1 \in \mathbf{R}^r$ 和 $\mathbf{x}_2 \in \mathbf{R}^r$表示，并按照以下方程变化：

$$\mathbf{x}_1[k+1] = \boldsymbol{\Theta}^{11}[\mathbf{A}^{11}\mathbf{x}_1[k] + \mathbf{A}^{11}\mathbf{x}_2[k]] + (\mathbf{I}_r - \boldsymbol{\Theta}^{11})\mathbf{u}_1 \tag{8.5}$$

$$\mathbf{x}_2[k+1] = \mathbf{A}^{22}\mathbf{x}_2[k], \tag{8.6}$$

其中 $\mathbf{A}^{22}$ 是一个行随机矩阵（因此子系统 (8.6)）具有 French-Degroot 模型的形式。关于 (8.2) 收敛性的一些结果可概括如下 [218]:

- 子系统 (8.5) 渐近稳定，当矩阵 $\mathbf{\Theta}^{11}\mathbf{A}^{11}$ 是 Schur 稳定的（即矩阵的谱半径 $\rho(\mathbf{\Theta}^{11}\mathbf{A}^{11}) < 1$）。系统 (8.5) 渐近趋于：

$$\mathbf{x}^{1\infty} = \mathbf{V}\begin{bmatrix}\mathbf{u}^1\\ \mathbf{x}^{2\infty}\end{bmatrix}, \text{ với } \mathbf{V} = (\mathbf{I}_r - \mathbf{\Theta}^{11}\mathbf{A}^{11})^{-1}[\mathbf{I}_r - \mathbf{\Theta}^{11}\ \mathbf{\Theta}^{11}\mathbf{A}^{11}] \tag{8.7}$$

  当且仅当 $r = n$ 或矩阵 $\mathbf{A}^{22}$ 收敛（$\lim_{k\to\infty}(\mathbf{A}^{22})^k = \mathbf{0}$）。

- 系统 (8.4) 渐近稳定，当且仅当所有智能体都受到偏见的影响。当且仅当 $\mathbf{\Theta} < \mathbf{I}_n$ 或 $\mathbf{\Theta} < \mathbf{I}_n$ 且 $G$ 强连通时，这一条件成立。此时，$\mathbf{x}^\infty = \mathbf{V}\mathbf{u}$，其中$\mathbf{V} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{\Theta}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I}_n - \mathbf{\Theta})$。

**意见动力学模型与控制理论**

近期关于多维 Friendkin-Johnsen 意见动力学模型的研究，是社会学家（Noah Friedkin——加利福尼亚大学圣塔芭芭拉分校，美国）与控制学家（A. Proskunikov——都灵理工大学，意大利；R. Tempo——都灵理工大学，意大利；S. Parsegov——莫斯科物理技术学院，俄罗斯）之间学术合作的一个相当成功的范例。

意见动力学模型的研究从数学角度解释社会结构与个人观点形成和变化之间的关系。然而，要使理论数学模型获得《科学》等科学期刊的认可， [99], 模型必须建立在经过行为心理学和实验社会学实证研究验证的前提之上。弗兰德金-约翰森意见动力学模型合理性的一些重要假设包括：

- 对某个社会议题的研究可以从个人这一最小单位入手。
- 每个人对某个对象（社会议题、事件或其他个人）的意见、观点或态度，可以用标量或向量量化。量化能够评估个人对该对象的主观信任程度（当观点值归一化到区间 $[0, 1]$, 时），或评估其对该对象的态度（当观点值可取正值和负值时）。
- 个人观点的形成是通过与其他个体的多次交互实现的，个人意见是一个动态过程，而这些交互是随机过程。由于社交网络包含大量个体，模型中静态系数的选择基于对各种可能性的平均，或基于经过归一化的实验数据。
- 交互并不具有相同的价值，一个个体受到其他不同个体的影响取决于多种因素。这解释了权重归一化，以及根据来自不同来源的意见进行凸组合来更新新意见。

在形成之初，多智能体控制就已经是一个跨学科的研究方向。意见动力学、流行病传播模型等主题，是近期体现当前科学研究跨学科性的示例。

**Ví d第 8.1 图** (Friendkin - Johnsen 模型). 考虑一个由 4 个智能体组成的系统，其初始意见值随机取 y

自区间 $[0,1]$。首先，考虑其交互图由矩阵描述的系统

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.220 & 0.120 & 0.360 & 0.300 \\ 0.147 & 0.215 & 0.344 & 0.294 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.090 & 0.178 & 0.446 & 0.286 \end{bmatrix}.$$

对于这个邻接矩阵，智能体 3 完全不会更新自己的观点，因为 $\lambda_{33} = 1 - a_{33} = 0$。该系统的仿真结果如图 8.1a 所示。由于偏见的影响，智能体未能达成一致性。当邻接矩阵选为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.220 & 0.120 & 0.360 & 0.300 \\ 0.147 & 0.215 & 0.344 & 0.294 \\ 0.000 & 0.400 & 0.600 & 0.000 \\ 0.090 & 0.178 & 0.446 & 0.286 \end{bmatrix}.$$

所有智能体都会更新意见，但如图 8.1b 所示，一致性值仍未达成。

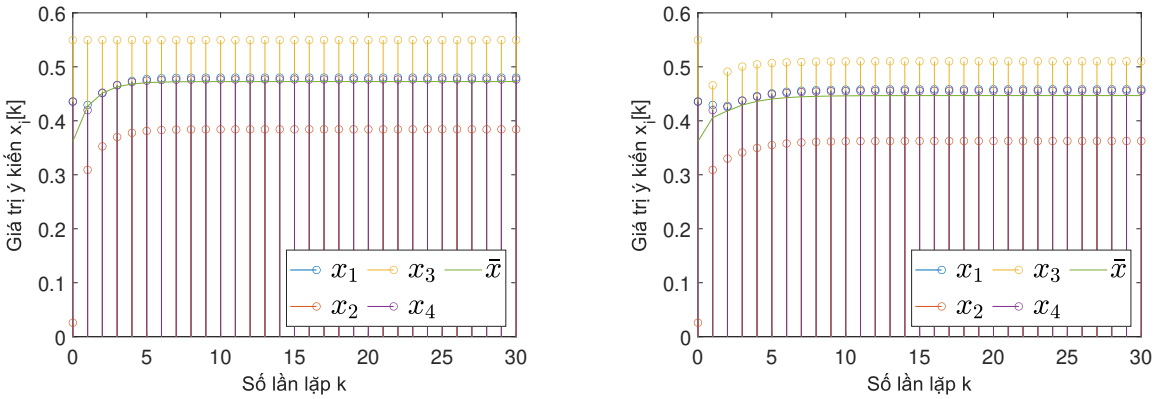



图 8.1：采用 F-J 模型的 4 智能体系统在交互图的两种不同情况下的仿真。

## 8.3 Abelson模型和Taylor模型

French-Degroot 模型和 Friedkin-Johnsen 模型的连续形式是 Abelson 模型 [1] 和 Taylor 模型 [272]。Abelson [1] 提出了一个模型，以连续线性共识系统方程的形式解释“个体的观点在讨论过程中趋于彼此接近”这一现象：

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_j - x_i),\ i = 1, \ldots, n. \tag{8.8}$$

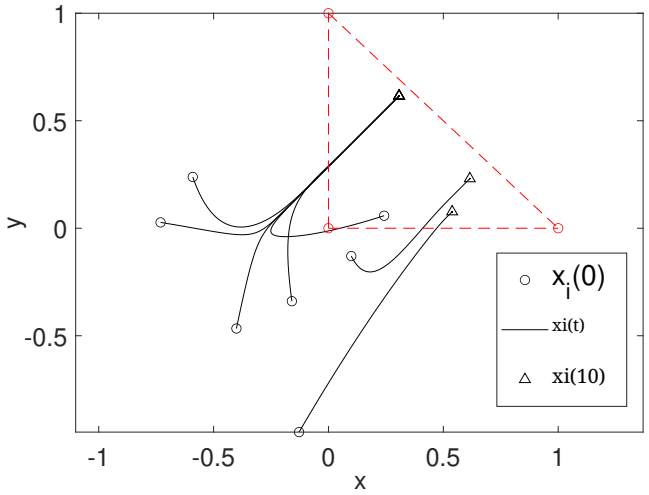



图8.2：采用扩展泰勒模型的10个智能体系统仿真

Abelson 模型可视为 DeGroot 模型的连续形式。所有智能体收敛到一致性值的条件是图 G 具有出根。扩展泰勒模型扩展了 Abelson 模型，用于解释外部信息源的影响所导致的观点分化：

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j\in N_i} a_{ij}(x_j - x_i) + \sum_{r=1}^{l} b_{ir}(s_r - x_i),\ i = 1, \ldots, n. \tag{8.9}$$

其中 $s_1,\ldots, s_l$ 是描述外部影响的常数， $b_{ir} \geq 0$ 表示第 $k$ 个信息源对智能体 $i$的影响。当 $G$ 具有出根时，Taylor 模型渐近稳定，并收敛到由图 $G$ 和数值 $s_1, \ldots, s_l$ [272, 229]唯一确定的平衡点。注意，Taylor 模型（8.9）在 [229] 中以多智能体系统包络控制[1]之名进行研究，其中跟随智能体需要收敛到由领导者（leader）的位置集合定义的凸包。

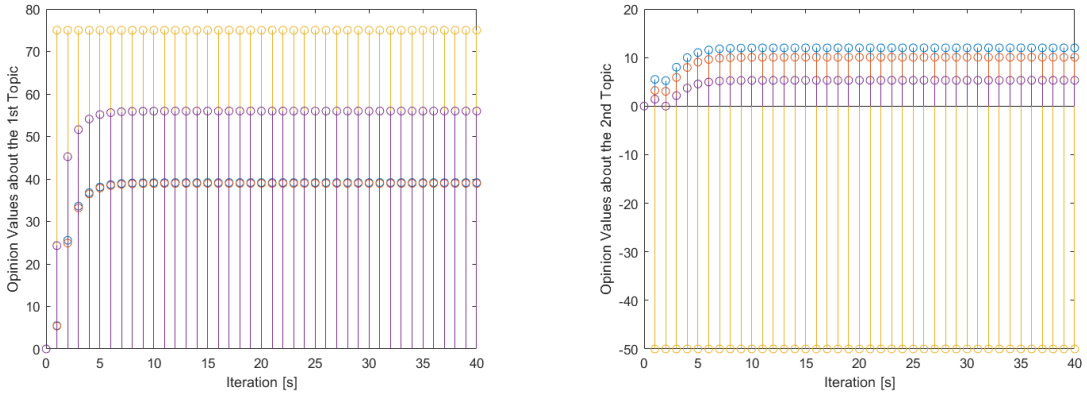
**示例 8.2** （Taylor 模型）。 考虑一个包含 3 个领导者的系统示例，其位置为 $\mathbf{x}_1 = [0, 0]^\top$、$\mathbf{x}_2 = [1, 0]^\top$ 和$\mathbf{x}_3 = [0, 1]^\top$，以及 7 个普通智能体；普通智能体的初始位置在 $-3$ 到 3 的区间内随机选取。领导者的初始位置用红色小自环表示，其他智能体则用黑色表示。

仿真显示，约 10 秒后，智能体 $i = 4$、.....、10 收敛到一个三角形区域，其三个顶点为$\mathbf{x}_i$、 $i = 1$、2、3，如图 8.2 所示。注意，领导者智能体的位置不会发生变化（不会根据普通智能体更新意见）。

## 8.4 Friendkin-Johnsen模型的多维形式及其若干扩展

F-J 模型的一种自然扩展，是考虑智能体对多个不同议题持有观点的情形。 [99, 218] 的作者提出在 F-J 模型中加入一个逻辑关联矩阵，以体现讨论过程中涉及多个议题时智能体的推理过程。假设每个智能体 $i$ 都有一个观点向量 $\mathbf{x}_i[k] \in \mathrm{R}^d$，则多维 F-J 模型表示为

[1]包容控制




(a) (b)

图 8.3：采用矩阵$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.3 & 0.7\end{bmatrix}$的 F-J 模型仿真。

如下：

$$\mathbf{x}_i[k+1]=\theta_{ii}\mathbf{C}\sum_{j\in M_i}a_{ij}\mathbf{x}_j[k]+(1-\theta_{ii})\mathbf{u}_i,\ i=1,\ldots,n. \tag{8.10}$$

在$\mathbf{C}=\mathbf{I}_n$的情况下，模型 (8.10) 就成为标准 F-J 模型。定义$\mathbf{x}=[\mathbf{x}_1^\top,\ldots,\mathbf{x}_n^\top]^\top$，我们将模型 (8.10) 改写为如下矩阵形式：

$$\mathbf{x}[k+1]=[(\mathbf{\Theta A})\otimes\mathbf{C}]\mathbf{x}[k]+[(\mathbf{I}_n-\mathbf{\Theta})\otimes\mathbf{I}_d]\mathbf{u}. \tag{8.11}$$

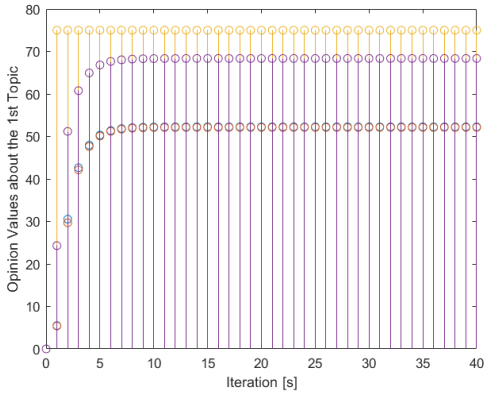
模型 (8.11) 表明，每个智能体的观点形成过程是外部影响（矩阵$\mathbf{A}$）、初始偏见（矩阵 $\mathbf{\Theta}$）以及每个智能体的信念系统（矩阵$\mathbf{C}$）之间的交互。一些关于模型 (8.11) 的结果总结如下：

- (8.11) 模型稳定，当且仅当 $\rho(\mathbf{\Theta A})\rho(\mathbf{C})<1$。此时，$\mathbf{x}^\infty=\lim_{k\to+\infty}\mathbf{x}[k]=(\mathbf{I}_{dn}-\mathbf{\Theta A}\otimes\mathbf{C})^{-1}[(\mathbf{I}_n-\mathbf{\Theta})\otimes\mathbf{I}_d]\mathbf{u}$。
- 当系统中存在若干独立主体时，我们按照通常的 F-J 模型为智能体编号。(8.11) 模型收敛，当且仅当极限 $\mathbf{C}_*=\lim_{k\to+\infty}\mathbf{C}^k$ 存在，且 $\mathbf{C}_*=\mathbf{0}$ 成立，或者 $\mathbf{A}_*^{22}=\lim_{k\to+\infty}\mathbf{A}^{22}$存在。此时，

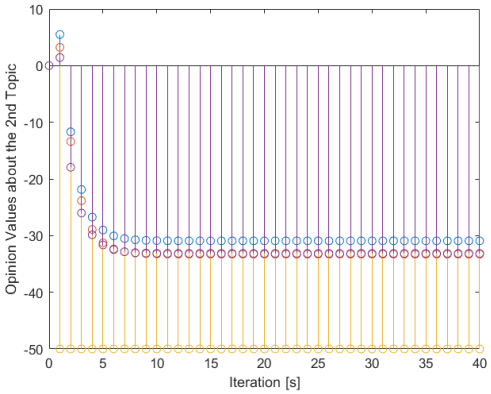
$$\lim_{k\to+\infty}\mathbf{x}[k]\to\begin{bmatrix}(\mathbf{I}_r-\mathbf{\Theta}^{11}\mathbf{A}^{11}\otimes\mathbf{C})^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-r}\end{bmatrix}\cdot \cdot\begin{bmatrix}(\mathbf{I}_r-\mathbf{\Theta}^{11})\otimes\mathbf{I}_d & (\mathbf{\Theta}^{11}\mathbf{A}^{12}\mathbf{A}_*^{22})\otimes\mathbf{C}\mathbf{C}_*\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_*^{22}\otimes\mathbf{C}_*\end{bmatrix}\mathbf{u}, \tag{8.12}$$

约定当 $\mathbf{C}_*=\mathbf{0}$ 成立，但 $\lim_{k\to+\infty}\mathbf{A}^{22}$ 不存在时，令 $\mathbf{A}_*^{22}=\mathbf{0}$。

**例 8.3**（多维 Friedkin-Johnsen 模型）。 [218] 考虑一个由 $n=4$ 个智能体组成的社交网络，其中个人之间的关系由例 8.1 中的邻接矩阵给出。智能体




(a)




(b)

图 8.4：矩阵 $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$ 下 F-J 模型的仿真。

讨论两个主题（a）和（b）。这两个主题彼此相关，但相互对立。例如，智能体讨论他们对素食饮食和纯肉饮食的看法。智能体意见的初始值由 $\mathbf{x}[0] = [25, 25, 25, 15, 75, -50, 35, 5]^\top$ 给出。

当逻辑矩阵选为 $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$，时，我们有

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{x}(t) = [39.160,\ 12.001,\ 38.948,\ 10.071,\ 75,\ -50,\ 55.977,\ 5.314]^\top.$$

可以看出，除智能体 3 的观点没有变化外，智能体们对素食和食肉的观点都趋于更加积极（有所提升）。由于这两个主题彼此对立，这似乎自相矛盾（素食者通常不会倾向于积极评价纯肉饮食）。

接下来，在初始值 $\mathbf{x}[0]$ 相同、但逻辑矩阵 $\mathbf{C}$ 替换为 $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$,的情况下，我们有

$$\lim_{k \to +\infty} \mathbf{x}[k] = [52.27,\ -30.92,\ 52.13,\ -33.27,\ 75,\ -50,\ 68.35,\ -33.15]^\top.$$

在这种情况下，收敛值 $\mathbf{x}^\infty$ 体现了智能体观点的一致性（支持素食饮食，反对纯肉饮食）。

两个仿真实例进一步证实，逻辑矩阵 $\mathbf{C}$ 的选择会影响模型的合理性。目前的一些研究尝试通过分析实际数据来估计逻辑矩阵的值。

Ye 在 [317] 中提出的多维 F-J 模型的两个对应连续模型如下：

- 模型1：

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij} \mathbf{C}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) + (\mathbf{C} - \mathbf{I}_d)\mathbf{x}_i + b_i(\mathbf{x}_i(0) - \mathbf{x}_i),\ i = 1, \ldots, n, \tag{8.13a}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = -\left((\boldsymbol{\mathcal{L}} - \mathbf{I}_n) \otimes \mathbf{C} + (\mathbf{B} + \mathbf{I}_n) \otimes \mathbf{I}_d\right)\mathbf{x} + (\mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_d)\mathbf{x}(0). \tag{8.13b}$$

- 模型2:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j\in N_i} a_{ij}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) + (\mathbf{C} - \mathbf{I}_d)\mathbf{x}_i + b_i(\mathbf{x}_i(0) - \mathbf{x}_i),\ i = 1, \ldots, n, \tag{8.14a}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = -((\boldsymbol{\mathcal{L}} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{I}_d - \mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{C} - \mathbf{I}_d))\mathbf{x} + (\mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_d)\mathbf{x}(0). \tag{8.14b}$$

考虑 $\mathbf{B} = \text{diag}(b_i) \otimes \mathbf{I}_d = \mathbf{0}$（智能体没有偏见）的情况，并假设矩阵 $\mathbf{C}$ 有 $p$ 个特征值等于 1，其 $p$ 左右特征向量正交归一，分别为 $\boldsymbol{\zeta}_r$ 和 $\boldsymbol{\xi}_r^\top$, $r = 1, \ldots, p$，且其他特征值的实部均为负。假设图 $G$ 有出根，当满足矩阵 $\mathbf{C}$ 与拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 之间的某些条件时，两个连续时间动力学模型收敛到相同的一致性值 $\mathbf{x}_i(t) \to (\sum_{r=1}^{p} \boldsymbol{\zeta}_r \boldsymbol{\xi}_r^\top) \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \mathbf{x}_j(0)\ \forall i = 1, \ldots, n$。

从另一个角度来看，可以认为矩阵 $\mathbf{C}$ 充当一个同质矩阵权重，影响每个智能体 [286]的一致性过程。

**例8.4**（Ye 模型）。 [317] 考虑一个具有 8 个智能体的系统，其智能体间交互图的拉普拉斯矩阵为

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8 & 1 & -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 & 1 & 0 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0 & -0.8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -0.3 & -0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

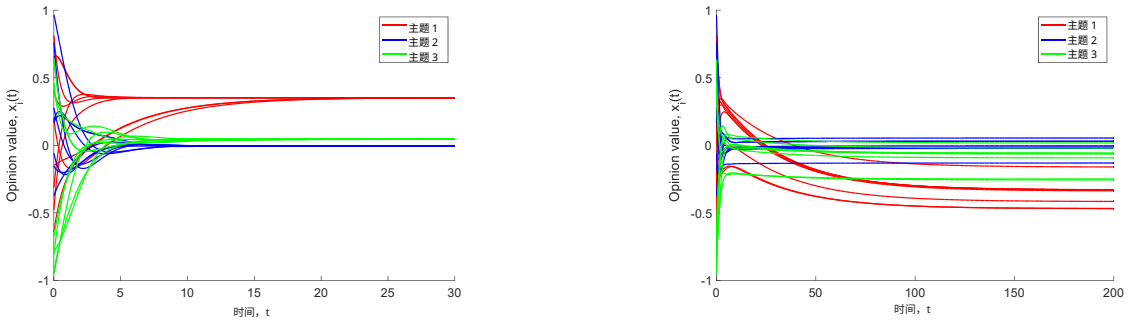
表示三个主题之间逻辑依赖关系的矩阵为

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.1 & -0.8 & 0.1 \end{bmatrix}. \tag{8.15}$$

矩阵 $\mathbf{C}$ 可以描述如下 3 个主题:

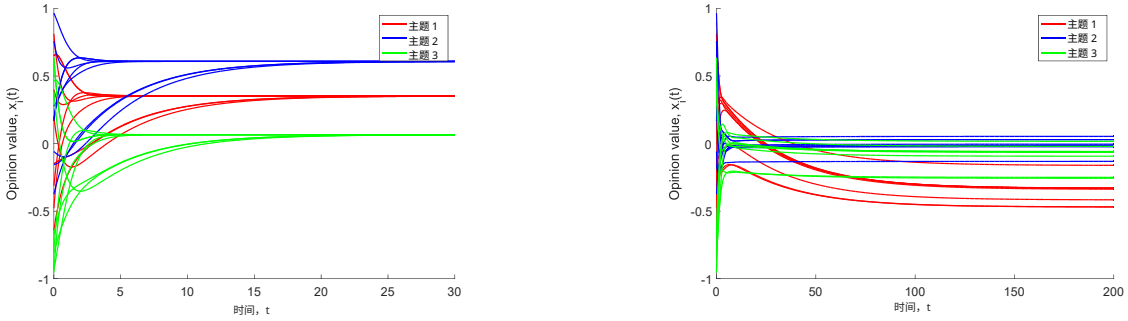
- 主题1: 朝鲜拥有能够攻击美国的核武器。
- 主题2: 由于中国是朝鲜的盟友，因此朝鲜遭到攻击时，中国会保护朝鲜。
- 主题3: 美国将使用核武器攻击朝鲜。

将初始观点随机取值于 -1 到 1 的范围内，我们对 Ye 模型的若干情况进行了仿真。首先，考虑 $b_i = 0,\ \forall i = 1, \ldots, 8$。两种 Ye 模型的仿真结果表明，智能体在全部 3 个主题上都渐近达到一致性，而且两种模型的一致点相同（图 8.5）。接下来，我们在模型中加入偏见向量 $\mathbf{b} = [0, 0.1, 0, 0.05, 0, 0.4, 0, 0.3]^\top$。此时，智能体在全部三个主题上都无法达成一致（图 8.6）。最后，将 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 替换为 $3\boldsymbol{\mathcal{L}}$，以增强智能体间的交互，仿真结果如图 8.7 所示。此时，模型 1 发散；而交互程度的提高则加快了模型 2 达成一致的过程。因此，模型 2 无法描述智能体间的信息过载过程。




(a)

图 8.5：系统存在和不存在偏见时的 Ye 模型 1。




(a) (b)

图 8.6：系统存在和不存在偏见时的 Ye 模型 2。

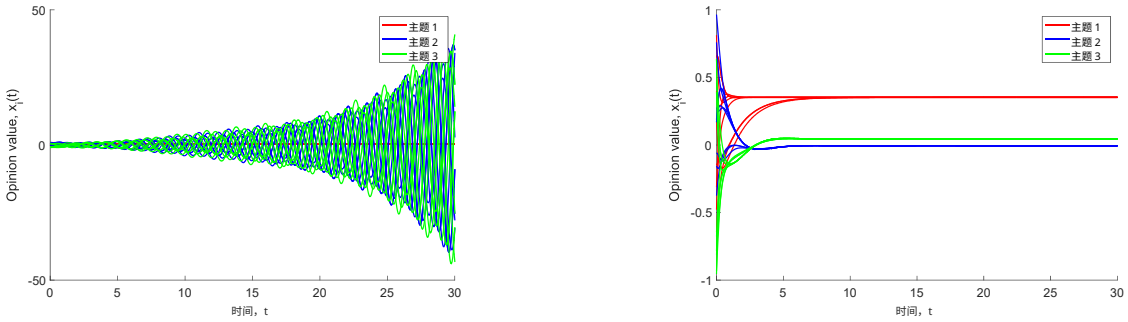



图 8.7：增加智能体之间的连接程度会使 Ye 模型 1 失去稳定性，同时会加快一致性过程，但不会改变 Ye 模型 2 的一致点。

Ahn 多维共识模型 [3] 采用依赖于状态变量的矩阵权重，表示如下:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j \in N_i} \mathbf{A}^{i,j}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i),\ i = 1, \ldots, n, \tag{8.16}$$

其中 $\mathbf{A}^{i,\ j} = [a_{p,q}^{i,j}(\mathbf{x}j\ {}^{-}\mathbf{x}_i)] \in \mathrm{R}^{d\times d}$ 是一个依赖于系统中两个智能体 $i$ 和 $j$ 之间相对状态的权重矩阵，视情况定义为:

- 负反馈关系（观点差异越大，权重越大）：

$$a_{p,q}^{i,j} = k_{p,q}^{i,j} \cdot \mathrm{sign}(x_{j,p} - x_{i,p}) \cdot \mathrm{sign}(x_{j,q} - x_{i,q}), \tag{8.17}$$

- 正反馈关系（观点越接近，权重越大）：

$$a_{p,q}^{i,j} = \frac{k_{p,q}^{i,j} \cdot \mathrm{sign}(x_{j,p} - x_{i,p}) \cdot \mathrm{sign}(x_{j,q} - x_{i,q})}{(c_1\|x_{j,p} - x_{i,p}\| + c_0)(c_1\|x_{j,q} - x_{i,q}\| + c_0))}, \tag{8.18}$$

其中 $k^{i,\ p^{j,\ q}} = k^{i,\ q^{j,\ p}} > 0$，$k^{i,\ p^{j,\ q}} = k^{j,\ p^{i,\ q}} > 0$，以及 $c_1$，$c_0 > 0$ 均为正常数。

在一般情形下，模型 (8.16) 不会渐近趋于一致性值。分析表明，意见渐近趋于各个簇的现象取决于图 $G$ 以及矩阵 $\mathbf{A}^{i,j}$ 的结构。

**示例 8.5** （Ahn模型）。 [3]。考虑一个由 5 个智能体组成的系统，其图如图 8.8 所示。观点

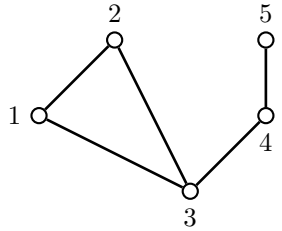



图 8.8: 示例 8.5 中描述智能体的图。

智能体的初始观点表示为 $\mathbf{x}_1 = [1, 2, 3]^\top$、$\mathbf{x}_2 = [2, 4, 4]^\top$、$\mathbf{x}_3 = [3, 1, 5]^\top$、$\mathbf{x}_4 = [4, 3, 2]^\top$、$\mathbf{x}_5 = [5, 6, 1]^\top$。可以看出，智能体对三个主题的初始观点各不相同。智能体之间的矩阵权重为

$$\mathbf{A}^{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{A}^{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{A}^{2,3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{A}^{3,4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{A}^{4,5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

均为对称半正定矩阵。对于上述权重矩阵，我们可以预测智能体将在所有主题上达成一致性。图 8.9 展示了各主题的仿真结果。

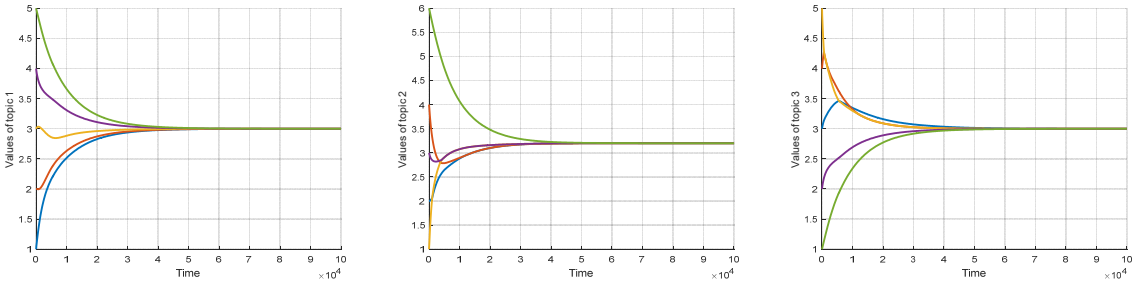



图 8.9：Ahn模型中基于拉普拉斯矩阵的一致性：左—主题1 ($x_{i,\ 1}$，　$i = 1$，……，5)。中—主题2 ($x_{i,\ 2}$，$i = 1$，……，5)。右—主题3 ($x_{i,\ 3}$，　$i = 1$，……，5)。

## 8.5 Hegselmann-Krause模型

在实际中，一个智能体通常只考虑那些观点与自身意见接近的智能体的意见。这一观察为提出有限信任域模型奠定了基础；在这类模型中，每个智能体完全不关心给定区域之外的意见。Hegselmann-Krause[110] 将智能体 $i$ 的信任域定义为 $[x_i - d, x_i + d] \subset \mathbf{R}$，其中 $d > 0$ 是信任阈值。每个智能体 $i$ 只与一个可信智能体集合 $I_i(\mathbf{x}) = \{j| \ |x_j - x_i| \leq d\}$ 进行交互，具体遵循 Hegselmann-Krause（H-K）模型：

$$x_i[k+1] = C_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{|I_i(\mathbf{x}[k])|} \sum_{j \in I_i(\mathbf{x}[k])} x_j[k], \ i = 1, \ldots, n, \tag{8.19}$$

其中 $|I_i(\mathbf{x}[k])|$ 表示集合 $I_i(\mathbf{x}[k])$ 中的元素个数。H-K模型是一个非线性模型，也可以视为权重矩阵随状态变量变化的 French-Degroot 模型：

$$\mathbf{A} = [a_{ij}(\mathbf{x})], \ a_{ij} = \frac{1}{|I_i(\mathbf{x})|}, \text{ khi } j \in I_i(\mathbf{x}), \text{ và } a_{ij}(\mathbf{x}) = 0 \text{ ngược lại.} \tag{8.20}$$

对于 H-K模型，模型的收敛完全取决于初始条件和距离$d$。假设 $2R$ 指出，对于在区间 $[0, 1]$ 和 $d = R < 1/2$ 内按照均匀分布随机选取的初始条件，智能体的意见将收敛到 $1/2R$ 个簇，各簇之间以约为 $2R$的距离分隔。

- 对于系统（8.19）的任意初始条件 $\mathbf{x}[0]$，，状态在有限 $k$ 步后停止变化，$\mathbf{x}[k] = \bar{\mathbf{x}} \ \forall k \geq k_*$，其中 $\bar{\mathbf{x}}$，停止时间取决于$\mathbf{x}[0]$ 和 $d$。在稳态下，任意两个智能体要么达成一致性 $\bar{x}_i = \bar{x}_j$，要么互不信任 $|\bar{x}_i - \bar{x}_j| > d$。
- 系统 (8.19) 保持元素 $x_1, \ldots, x_n$ 随时间的顺序，也就是说，如果按照顺序$j_1, \ldots, j_n$，有 $x_{j_1} \leq \ldots \leq x_{j_n}$，那么 $C_{j_1}(\mathbf{x}) \leq \ldots \leq C_{j_n}$(x</style)。
- 如果两个智能体 $i$ 和 $j$ 最初分别位于图 $G(\mathbf{x}(k_0))$ 的不同连通分量中，那么它们将永远不会同时位于图 $G(\mathbf{x}[k])$ $k \geq k_0$的同一个连通分量中。当 $k$ 增大时，$G(\mathbf{x}[k])$ 的强连通分量会分裂成更小的分量，但无法重新合并。

**示例 8.6**（Hegselmann-Krause模型）。考虑一个由 10 个智能体组成的系统，其初始意见值$\mathbf{x}[0]$ 在 -2.5 到 2.5 之间随机取值。对于相同的初始值向量以及不同的信任阈值 $d = 0.2$，0.4，.....，1.2，可得到如图8.10所示的仿真结果。仿真表明，随着信任区域扩大，仿真结束时的簇数[2] 逐渐减少。对于 $d = 0.2$，最终结果包含 8 个簇。随着 $d = 0.2$ 逐渐增大至 $d = 1$)，簇数逐渐减少。当 $d = 1.2$时，我们可以看到，10 个智能体经过 4 个迭代步后达成一致性。

## 8.6 Altafini模型

与上文所述各模型不同，Altafini模型研究具有两种交互可能的社交网络：合作与竞争，由一个符号图 （signed graph）加以描述。

一个符号图由 $G = (V, E, W)$给出，其中$(V, E)$描述一个加权图，且$\omega_{ji} \in W$ 对应于边$(j, i)$，$\in E$ 可取正值（合作）、零（中立）以及竞争（负）。该图被假定为符号对称，$\omega_{ij}\omega_{ji} \geq 0$，即两个智能体之间的交互（合作、中立与竞争）是相同的。

定义邻接矩阵$\mathbf{A} = [a_{ij}]$，其元素为 $a_{ij} = \omega_{ji}$，度矩阵$\mathbf{D} = \text{diag}(d_i)$，其中$d_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$，以及拉普拉斯矩阵$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$。一个符号图 $G$ 是结构平衡的，如果可以将其顶点集划分为两个互不相交的集合 $V = V_1 \cup V_2$，使得对每一对 $i, j \in V, i \neq j$，若$(j, i) \in (V_1 \times V_1) \cup (V_2 \times V_2)$，则有$a_{ij} \geq 0$；若$(j, i) \in (V_1 \times V_2) \cup (V_2 \times V_1)$，则有 $a_{ij} \leq 0$。

定义无向符号图$\hat{}G = (V, \hat{}E, \hat{}W)$，约定若存在$(i, j) \in E$，则也存在边$(i, j)$、$(j, i) \in \hat{}E$，且权重相同 $\omega_{ij}$。当且仅当符号图 $G$ 是符号结构平衡时，该图是符号对称的，且$\hat{}G$ 中的每个环都是正的（即每个环中各边的权值乘积均为正数）[107]。

假设 $G$ 是一个强连通符号图，那么 $\lambda = 0$ 是$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的一个特征值，当且仅当 $G$符号结构平衡。当 $G$ 强连通但不满足符号结构平衡时，矩阵$-\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 是一个赫尔维茨矩阵。

Giả 假设符号图的每个顶点都表示一个意见为 $x_i(t) \in$R的智能体。Altafini模型[5] 提出导出鱼 c 个智能体根据以下方程更新观点：

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|(x_j \text{sign}(a_{ij}) - x_i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}x_j - |a_{ij}|x_i),\ i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{8.21}$$

模型 (8.21) 对任意初始值 $\mathbf{x}(0)$ 总是收敛。假设符号图 $G$ 结构平衡，顶点集被划分为 $V = V_1 \cup V_2,$，我们可以定义规范变换：

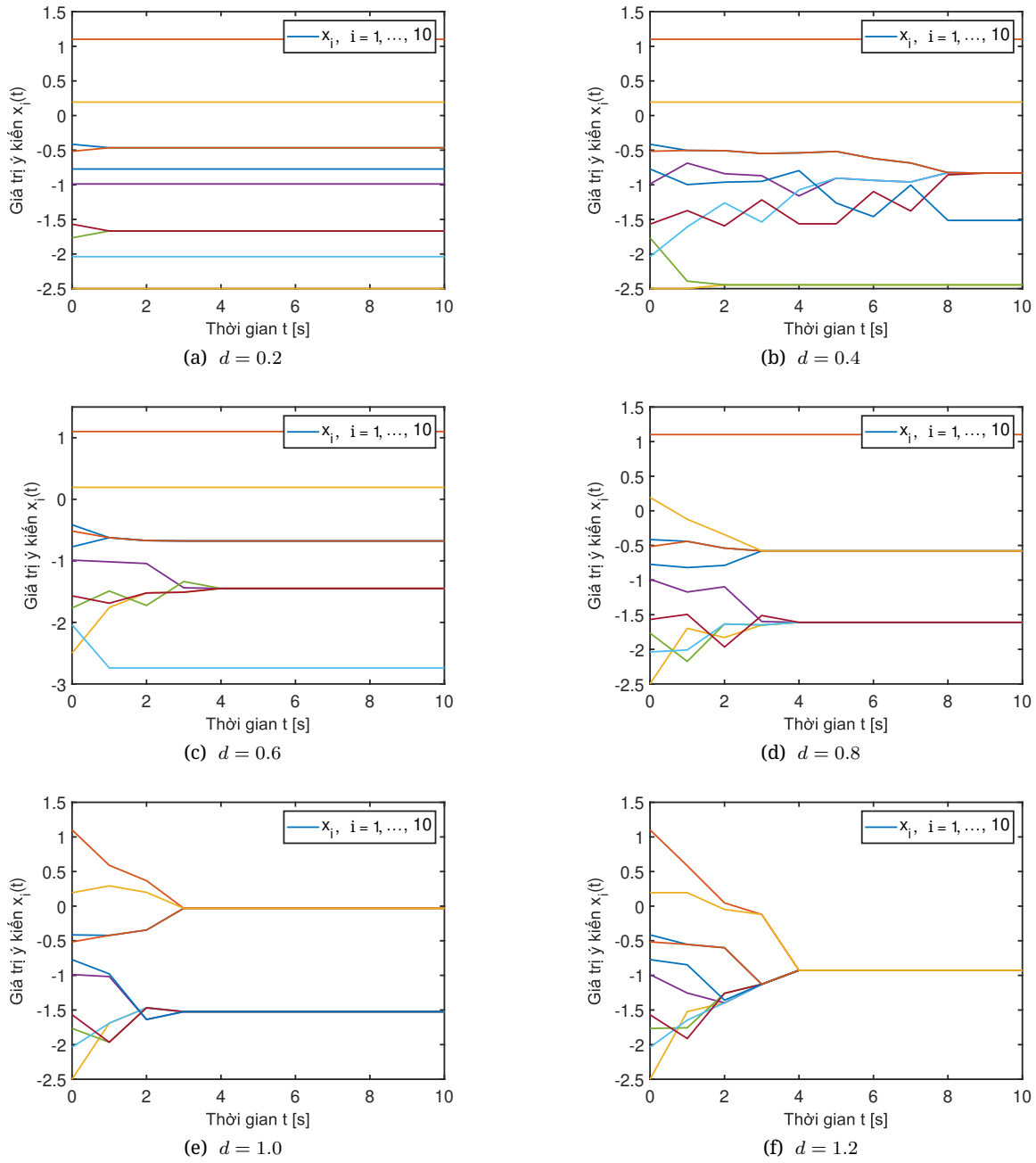
$$x_i \mapsto y_i = \delta_i x_i,\ \delta_i = +1 \text{ nếu } i \in V_1, \text{ và } \delta_i = -1, \text{ nếu } i \in V_2, \tag{8.22}$$

并将模型 (8.21) 转换为具有非负权重的 Abelson模型：

$$\dot{y}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|(y_j(t) - y_i(t)), \forall i = 1, \ldots, n. \tag{8.23}$$

因此，当 $G$ 是符号结构平衡时：

[2]集群




(a) $d = 0.2$ (b) $d = 0.4$

(c) $d = 0.6$ (d) $d = 0.8$

(e) $d = 1.0$ (f) $d = 1.2$

图8.10：采用 $d = 0.2, 0.4, \ldots, 1.2$对Hegselmann-Krause模型进行仿真。

• 若 $G$有出根，则有 $y_i(t) \to \boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{y}(0)\ \forall i = 1, \ldots, n$，其中 $\boldsymbol{\gamma}^\top$ 是拉普拉斯矩阵 $\mathcal{L}(G)$ 的特征值 0 对应的唯一归一化左特征向量，其中 $G = (V, E, W)$ 是权重为 $w_{ij} = |\omega_{ij}|$ 的图。由此可知，每个值 $x_i$ 都收敛到两个值之一




图 8.11：（a）结构平衡的符号图；（b）结构不平衡的符号图。

绝对值相等但符号相反。

- 如果 $G$ 是一个没有出根的图，智能体会收敛到不同的簇，具体取决于 $G$中的连通性。

相反，当 $G$ 符号结构不平衡但强连通时，矩阵 $-\mathcal{L}$ 是赫尔维茨矩阵，因此 $x_i(t) \to 0,\ \forall i = 1, \ldots, n$。

**示例 8.7** （Altafini模型）。 图 8.11 展示了两个符号图，其中黑色边表示合作关系，蓝色边表示竞争关系。图 8.11(a) 是满足结构平衡性质的符号图，其对应的拉普拉斯矩阵为

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3.7 & -1 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0 & -1 & 1.7 & 0 & 0.3 & -0.4 \\ 1 & 0.5 & 0 & 2.5 & -1 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.3 & -1 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

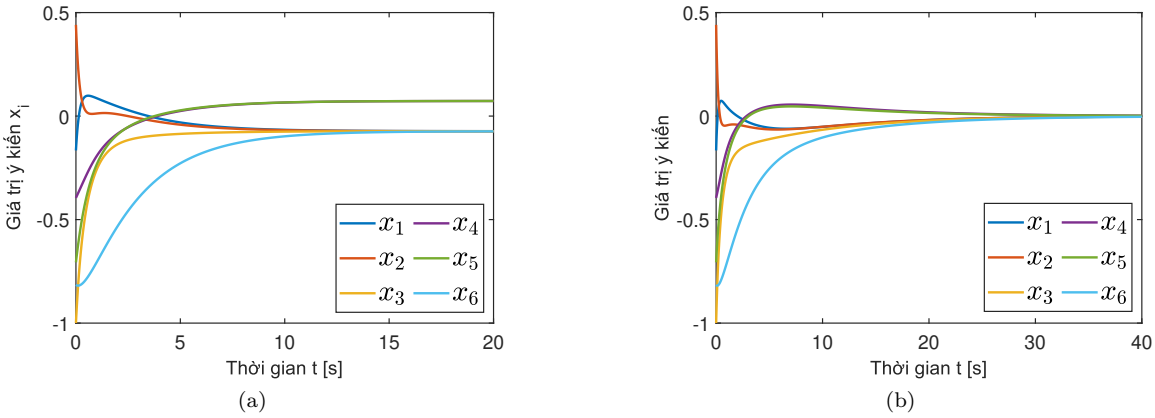



图 8.12：示例 8.7 中各图对应的 Altafini 模型仿真。

使用图 8.11(a)对一致性算法（8.21）进行仿真，可得到如图 8.12(a)所示的结果。不难看出，智能体达成了二方一致性，其最终值彼此相反。

接下来，对于图 8.11(b)，有

$$\mathcal{L}=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3.7 & -1 & 0.5 & -0.2 & 0 \\ 0 & -1 & 1.7 & 0 & 0.3 & -0.4 \\ 1 & 0.5 & 0 & 2.5 & -1 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.3 & -1 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

此时的符号图不满足结构平衡条件。此时该图对应系统的仿真结果如图 8.12(b) 所示。可以看出，$x_i(t) \to 0$，$\forall i=1$，.....，6 与理论结果相似。

## 8.7 注释和参考文献

本章中，我们回顾了社交网络研究中的一些意见动力学模型。需要注意的是，社交网络的研究范围很广，涵盖多种不同的研究方法（哲学、数学模型、数据分析）。与多智能体控制相关的社交网络研究涉及意见动力学模型 [219, 217, 110, 5], 疾病传播 [162, 199],经济学 [45, 283], PageRank算法 [120]。

## 8.8 练习

**练习 8.1** （DeGroot模型）. 考虑DeGroot模型:

$$\mathbf{x}[k+1]=\mathbf{A}\mathbf{x}[k],\ k=0,1,2,\dots \tag{8.24}$$

其中 $\mathbf{x}[k]=[x_1[k],\dots,x_n[k]]^\top$ 且 $\mathbf{A}$ 是一个具有非负元素的矩阵（记为 $\mathbf{A}\geq 0$），行随机（$\mathbf{A}\mathbf{1}_n=\mathbf{1}_n$）。

i. 证明矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值均位于以坐标原点为圆心、半径为 1 的圆盘上。

ii. 证明若矩阵 $\mathbf{A}$ 是正矩阵，即 $a_{ij}>0, \forall i,j=1,\dots,n$，则 $\mathbf{A}$ 对应于正值 1 的左特征向量 $\boldsymbol{\gamma}=[\gamma_1,\dots,\gamma_n]^\top\in\mathbf{R}^n$ 的所有元素均为正。

iii. 证明：若矩阵 $\mathbf{A}$ 是本原矩阵，即存在整数 $k\geq 1$使得矩阵 $\mathbf{A}^k$ 为正矩阵，则 $\mathbf{A}$对应于正值 1 的左特征向量 $\boldsymbol{\gamma}=[\gamma_1,\dots,\gamma_n]^\top\in\mathbf{R}^n$ 的所有元素均为正，且满足 $\sum_{i=1}^n\gamma_i=1$。

iv. 证明：若再假设 $\mathbf{A}$ 是对应于强连通图的矩阵，且没有周期 $G$，则存在 $\lim_{k\to+\infty}\mathbf{A}^k=\mathbf{1}_n\boldsymbol{\gamma}^\top$，其中 $\boldsymbol{\gamma}\in\mathbf{R}^n$ 是$\mathbf{A}$ 对应于正值 1 的左特征向量，其所有元素均为正，且满足 $\boldsymbol{\gamma}^\top\mathbf{1}_n=1$。

v. 在第 (iv) 项的假设下，请证明 $\lim_{k\to+\infty}\mathbf{x}[k]=x^*\mathbf{1}_n$，其中 $x^*=\boldsymbol{\gamma}^\top\mathbf{x}[0]$。

**习题 8.2.** [35]考虑由差分方程描述的系统

$$\mathbf{x}[k+1]=\mathbf{A}\mathbf{x}[k]+\mathbf{b}, \tag{8.25}$$

中 该矩阵 $\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是 收敛 （也就是说 $\lim_{k\to+\infty}\mathbf{A}^k=\mathbf{0}_{n\times n}$）。此时，请证明 g

i. 矩阵 $\mathbf{I}_n - \mathbf{A}$ 是可逆的；

ii. 系统有唯一的平衡点 $\mathbf{x}^* = (\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$，且 $\lim_{k\to+\infty}\mathbf{x}[k] = \mathbf{x}^*$。

**练习 8.3** （Friedkin-Johnsen 模型的特殊情况）。 考虑 Friedkin-Johnse 模型 n（F-J）（8.2）：

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{\Theta}\mathbf{A}\mathbf{x}[k] + (\mathbf{I}_n - \mathbf{\Theta})\mathbf{x}[0], \tag{8.26}$$

其中 $\mathbf{\Theta} = \mathrm{diag}(\theta_{11}, \ldots\ldots, \theta_{nn})$，其中 $\theta_{ii} \in [0,1]$ 描述外部影响对观点的影响程度的智能体个智能体，且 $\mathbf{x}[0] \in \mathbb{R}^n$ 是智能体的偏见向量。

i. 当智能体没有偏见且图 $G$ 是强连通、无周期时，分析系统中意见的渐近过程。ii. 当所有智能体都有偏见$0 < \lambda_{ii} < 1$ 且图 $G$ 是强连通、无周期时，分析系统中意见的渐近过程。

iii. 对情况 (i) 和 (ii) 进行仿真。

**习题 8.4.** 考虑矩阵 [243]

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1+(n-1)\nu & 1-\nu^{-}\nu & \ldots & -\nu & \\ -1+(n-1)\nu & 1-\nu^{-}\nu & \ddots & -\nu & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\nu \\ -1+(n-1)\nu & 1-\nu^{-}\nu & \ldots & -\nu & \end{bmatrix} \tag{8.27}$$

其中 $\nu = \frac{n-\sqrt{n}}{n\ n-1}$ ()。证明 $\mathbf{Q}\mathbf{1}_n = \mathbf{0}_n$，$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top = \mathbf{I}_{n-1}$ 和

$$\mathbf{Q}^\top\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n - \frac{1}{n}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^\top. \tag{8.28}$$

假设图 $G$ 是强连通的。使用变换 $\mathbf{y} = \mathbf{Q}\mathbf{x}$，按变量 $\mathbf{y}$分析 8.3 中 Abelson模型和 Taylor 模型的渐近过程，由此推导按变量 $\mathbf{x}$的渐近过程。

**习题 8.5**。 [35] 设 $G$ 是一个可能含有自环的连通无向图，其邻接矩阵为 $\mathbf{A}$。考虑矩阵 $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}$，其中 $\mathbf{D}$ 是对角矩阵，且 $d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$。

i. 证明矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$ 是行随机且不可约的。

ii. 求$\mathbf{A}$ 对应特征值 1 的主左特征向量。

iii. 分析一致性算法$\mathbf{x}[k+1] = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}[k]$，并额外假设图中至少存在一个带自环的顶点 $v_i \in V$（$a_{ii} > 0$）。iv. 求 $G$ 的条件，使系统在任意初始条件$\mathbf{x}[0] \in \mathbb{R}^n$ 下都一致于算术平均值。

**习题 8.6** （互联网网络模型）**.** [120] 假设互联网由相互连接的网页和超链接组成，并可由有向图 $G =$ （$V, E$）描述。在每个顶点 $v_i \in V$（对应于一个网页）处，假设有 $d_i$ 条指向不同网页的超链接（可以是顶点 $v_i$ 本身，或某个邻接顶点），用户可以以相同的概率（$\frac{1}{d_i}$）从当前网页选择转移到其他网页之一。

i. 设$\mathbf{A}$ 为图 $G$ 的邻接矩阵，且$\mathbf{D} = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$。证明 $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}$ 是非负矩阵且为列随机矩阵，即 $\bar{\mathbf{A}}^\top \mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n$ 。ii. 假设 $G$ 是强连通图。请证明 $\bar{\mathbf{A}}$ 具有右特征向量 $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$，其元素为正，且满足 $\bar{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}$。iii. 假设 $G$ 是强连通图且无周期，证明$\lim_{k\to+\infty} \bar{\mathbf{A}}^k = \boldsymbol{\gamma}\mathbf{1}_n^\top$，其中 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 $\bar{\mathbf{A}}$对应于特征值1（唯一）的右特征向量，且已规范化（$\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{1}_n = 1$）。各值 $\gamma_i > 0$ 表示互联网中某一网页的重要程度。因此可按 $\gamma_i$的递减顺序对网页排序，且 $\boldsymbol{\gamma}$ 称为PageRank特征向量。

**习题 8.7** (PageRank算法)。 [120] Google 的 PageRank算法是一种形式如下的迭代算法

$$\mathbf{x}[k+1] = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}[k], \tag{8.29}$$

其中 $\mathbf{x}[0] \in \mathbb{R}^n$ 的选取满足 $\mathbf{1}_n^\top \mathbf{x}[0] = 1$。

i. 证明，在习题 8.6 第 (iii) 小题的假设下，PageRank特征向量可以按照迭代算法 (8.29) 确定，即 $\lim_{k\to+\infty}\mathbf{x}[k] = \boldsymbol{\gamma}$。

ii. 实际的互联网通常有悬挂节点（没有通向其他节点的路径，例如共享文件），或者包含多个不同的强连通分量。因此，原始算法 (8.29) 被改写为

$$\mathbf{x}[k+1] = \left(\alpha\bar{\mathbf{A}} + \frac{1-\alpha}{n}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^\top\right)\mathbf{x}[k] = \mathbf{M}\mathbf{x}[k], \tag{8.30}$$

其中 $\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^\top$ 用于在网站之间建立虚拟连接，以确保网络强连通； $\alpha > 0$是一个足够小的正常数，不会对 PageRank特征向量的值造成太大影响。证明$\mathbf{M}$ 有一个特征值 1，且$\mathbf{M}$ 的其他特征值都小于 1。

iii. 分析算法 (8.30) 的渐近过程，并求当 $\mathbf{x}[0]$ 被选取为满足 $\mathbf{1}_n^\top\mathbf{x}[0] = 1$ 时的 $\lim_{k\to+\infty}\mathbf{x}[k]$ 。

**练习 8.8**。 考虑多维弗兰德金-约翰森模型：

$$\mathbf{x}[k+1] = [(\boldsymbol{\Theta}\mathbf{A}) \otimes \mathbf{C}]\mathbf{x}[k] + [(\mathbf{I}_n - \boldsymbol{\Theta}) \otimes \mathbf{I}_d]\mathbf{x}[0]. \tag{8.31}$$

证明，当 $\rho(\boldsymbol{\Theta}\mathbf{A})\rho(\mathbf{C}) < 1$ 时，$\mathbf{x}^\infty = \lim_{k\to+\infty}\mathbf{x}[k] = (\mathbf{I}_{dn} - \boldsymbol{\Theta}\mathbf{A}\otimes\mathbf{C})^{-1}[(\mathbf{I}_n - \boldsymbol{\Theta})\otimes\mathbf{I}_d]\mathbf{x}[0]$。**练习 8.9**（Ahn模型）。 [3] 请分析 Ahn模型的渐近过程：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{i,1}\\ \vdots \\ \dot{x}_{i,d}\end{bmatrix} = \sum_{j\in N_i}\begin{bmatrix}a_{1,1}^{i,j} & \cdots & a_{1,d}^{i,j}\\ a_{2,1}^{i,j} & \cdots & a_{2,d}^{i,j}\\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{d,1}^{i,j} & \cdots & a_{d,d}^{i,j}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{j,1} - x_{i,1}\\ \vdots \\ x_{j,d} - x_{i,d}\end{bmatrix} = \sum_{j\in N_i}\mathbf{A}_{ij}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), \tag{8.32}$$

与 $i = 1, \ldots, n$ 以及权重满足

- 对角权重：$a^{i,p^j,p} = k^{i,p^j,p}$，其中 $k^{i,p^j,p} = k^{j,p^i,p} > 0$ 是一个常数，并且
- 非对角权重满足：$a^{i,\ p^j,\ q} = k^{i,\ p^j,\ q} \cdot \text{sgn}(x_{j,\ p} - x_{i,\ p}) \cdot \text{sgn}(x_{j,\ q} - x_{i,\ q})$。

**习题 8.10**（Ye 模型）。 [317] 考虑 Y 的第一个多维意见动力学模型 e:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j\in N_i} a_{ij}\mathbf{C}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) + (\mathbf{C} - \mathbf{I}_d)\mathbf{x}_i + b_i(\mathbf{x}_i(0) - \mathbf{x}_i),\ i = 1,\ldots,n, \tag{8.33}$$

其中，智能体通过具有 $G$ 出根的图进行交互。

i. 对于$\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, \ldots\ldots, b_n)$，将模型（8.33）表示为矩阵形式。

ii. 假设矩阵$\mathbf{C} \in \mathrm{R}^{d\times d}$ 具有半单特征值 1，重数为 $p \geq 1$，其对应的右、左特征向量分别为 $\boldsymbol{\eta}_r$ 和 $\boldsymbol{\xi} \in \mathrm{R}^{d\times d}$，满足归一化条件 $\boldsymbol{\xi}^\top\boldsymbol{\eta} = 1$对任意 $r = 1, \ldots\ldots, p$均成立。$\mathbf{C}$的其他特征值满足 $\text{Re}(\mu_k(\mathbf{C})) < 1, \forall k > p$，以及$c_{ii} \geq 0, \ \forall i = 1, \ldots\ldots, p$。如果 $b_i = 0 \forall i = 1, \ldots\ldots, n$，证明系统渐近达到一致性，当且仅当

$$\text{Re}((1 - \lambda_i)\mu_k) < 1,\ \forall i = 2,\ldots,n,\ \forall k = 1,\ldots,p,$$

其中 $\lambda_i$ 表示拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的特征值。

iii. 求当 $t \to \infty$ 时 $\mathbf{x}_i(t)$ 关于 $\mathbf{x}_i(0)$ 的渐近值。

**习题 8.11 (Ye 模型).** 考虑 Ye 的第二类多维意见动力学模型 [317] :

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j\in N_i} a_{ij}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) + (\mathbf{C} - \mathbf{I}_d)\mathbf{x}_i + b_i(\mathbf{x}_i(0) - \mathbf{x}_i),\ i = 1,\ldots,n, \tag{8.34}$$

其中各智能体通过具有出根的图 $G$ 进行交互。

i. 设 $\mathbf{B} = \text{diag}(b_1,\ldots,b_n)$，请将模型 (8.34) 表示为矩阵形式。

ii. 假设矩阵 $\mathbf{C} \in \mathrm{R}^{d\times d}$ 具有重数为 $p \geq 1$ 的半单特征值 1，对应于右特征向量和左特征向量 $\boldsymbol{\eta}_r$ 与 $\boldsymbol{\xi} \in \mathrm{R}^{d\times d}$，且对所有 $r = 1,\ldots,p$ 满足归一化条件 $\boldsymbol{\xi}^\top\boldsymbol{\eta} = 1$。$\mathbf{C}$的其他特征值满足 $\text{Re}(\mu_k(\mathbf{C})) < 1$, $\forall k > p$，以及$c_{ii} \geq 0, \forall i = 1,\ldots,p$。若 $b_i = 0, \ \forall i = 1,\ldots,n$，证明该系统渐近趋于一致性。

iii. 求 $\mathbf{x}_i(t)$ 在 $t \to \infty$ 趋于$\mathbf{x}_i(0)$ 时的渐近值。

**习题 8.12**。 假设符号图 $(V, E)$ 是结构平衡符号图。定义矩阵$\mathbf{A} = [a_{ij}]$、$\mathbf{D} = \text{diag}(d_1,\ldots,d_n)$，其中 $d_i = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$，以及$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$。证明 $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{x} = \sum_{(i,j)\in E} |a_{ij}|(x_i - \text{sgn}(a_{ij})x_j)^2$。

**习题 8.13**（结构平衡符号图）。 [108] 证明：无向、连通的符号图 $G$ 是结构平衡符号图，当以下等价条件之一成立时：

i. $G$ 的所有环 $C = v_{i_1}\ldots v_{i_l}$ 均满足：

$$\text{sgn}(C) = \prod_{i=1}^{l} a_{i_k i_{k+1}} > 0,$$

按照约定 $a_{i_l i_{l+1}} = a_{i_l i_1}$。

ii. 存在对角矩阵 $\mathbf{G}$，使得$\mathbf{GAG}$ 的所有元素均为非负元素。

iii. $G$ 的拉普拉斯矩阵有一个特征值为0。

**习题 8.14**（非符号结构平衡图）. [108] 证明：若满足下列等价条件之一，则无向连通符号图 $G$ 不具有符号结构平衡:

i. $G$ 至少存在一个带负号的环。

ii. 不存在对角矩阵$\mathbf{G}$，使得$\mathbf{GAG}$ 的所有元素均为非负
. iii. $G$ 的拉普拉斯矩阵的所有特征值均为正。

**习题 8.15** (Altafini模型)。 [5] 考虑一个描述由 $n$个智能体组成的系统的连通无向符号图 $G$。假设智能体根据 Altafini 模型更新状态变量 $x_i$：

$$\dot{x}_i = -\sum_{j\in N_i} |a_{ij}|(x_i - \mathrm{sgn}(a_{ij})x_j),\ i = 1,\dots,n. \tag{8.35}$$

i. 证明：如果图 $G$ 是符号结构平衡的，则有

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbf{x}(t) = \frac{1}{n}(\mathbf{1}_n^\top \mathbf{G}\mathbf{x}(0))\mathbf{G}\mathbf{1}_n,$$

其中，$\mathbf{G}$ 是一个对角矩阵，使得 $\mathbf{GAG}$ 的所有元素均为非负（参见习题 8.13）。

ii. 证明：如果图 $G$ 不是符号结构平衡的，则有

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}_n,\ \forall \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n.$$

# 第9章

# 矩阵权重一致性系统

本章将介绍对常规一致性算法的一种自然扩展。常规一致性模型描述系统中智能体之间的二元连接关系（即彼此有交互 $a_{ij} > 0$ 或没有交互 $a_{ij} = 0$）。实际上，如果只考虑合作系统，智能体之间可能全部连接、部分连接，也可能互不连接[281]。为了描述网络中的不同交互，我们可以使用矩阵权重 $\mathbf{A}_{ij}$，代替常规一致性算法中的标量权重。相应地，这种算法称为矩阵加权一致性算法。

矩阵权重一致性系统 [286]是在对已有若干独立研究进行推广的基础上提出的：循环追踪问题中的旋转矩阵权重 [224], 、投影系统一致性[273, 140], 、网络定位问题中的对称正定矩阵权重 [20], 、多维耦合振荡网络同步中的对称半正定矩阵权重 [301, 300],，以及带方向向量约束的编队控制和网络定位 [336, 339]。

基于矩阵加权图模型 [286] 的一些扩展结果包括多维意见动力学模型 [3, 317], 、具有对抗性交互的矩阵加权图模型 [196], 、结合刚性矩阵的模型 [87], 以及随机矩阵加权图 [139]。

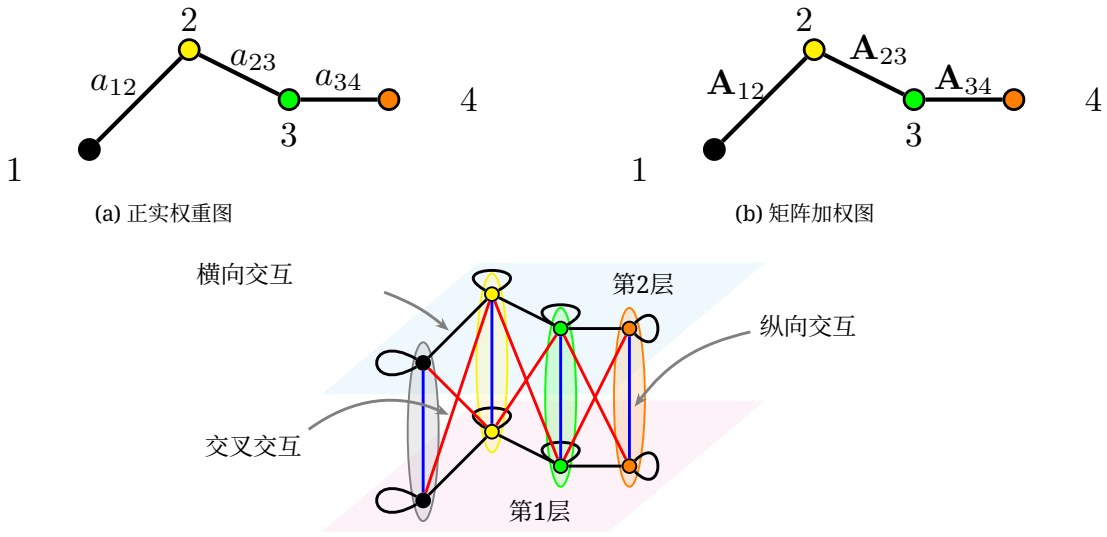
## 9.1 矩阵加权图

考虑具有矩阵权重的无向图 $G$，表示为 $(V, E, W)$，其中 $V = \{v_1, ....., v_n\}$表示包含 $n = |V|$ 个顶点的集合，$E = \{(i, j)| v_i, v_j \in V, i \neq j\}$ 是包含 $|E| = m$ 条边的集合，而$W = \{\mathbf{A}_{ij} \in \mathbf{R}^{d\times d} | (i, j) \in E, \mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{ij}^{\top} = \mathbf{A}_{ji}\}$ 是尺度为 $d \times d, d \geq 1$ 的矩阵权重集合。当 $d = 1$ 时，我们便得到第3章所讨论的一致性系统中的正实数加权图。

基于矩阵权重，我们约定两个智能体（$i$, $j$）之间的交互如下：

- $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{0}_{d\times d}$: $i$ 和 $j$ 之间没有交互，
- $\mathbf{A}_{ij}$ 是正定的：$(i, j)$是一条正定边，对应完全交互，
- $\mathbf{A}_{ij}$ 是半正定的，且 $\mathrm{rank}(\mathbf{A}_{ij}) < d$：$(i, j)$是一条半正定边，对应部分交互。

**示例 9.1** （矩阵加权图的多层性）。 考虑一个包含 4 个顶点的矩阵加权图。每个顶点表示一个具有二维状态变量向量 $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \end{bmatrix}$ 的智能体，该向量由两个圆形节点表示




(a) 正实权重图

(b) 矩阵加权图

(c) 矩阵加权图中的交互

图 9.1：(a) 表示传统图关联关系的图与 (b) 表示矩阵加权图关联关系的图相同。然而，当具体表示与矩阵权重相对应的各项交互时，该图展示了包含横向、纵向和交叉交互的分层关系 (c)。

的小圆点。节点 $\{x_i^1, i = 1, \ldots, 4\}$ 和 $\{x_i^2, i = 1, \ldots, 4\}$ 属于图的两个不同层。交互矩阵 $\mathbf{A}^{ij} = \mathbf{A}_{ji} = \begin{bmatrix} a_{ij}^{11} & a_{ij}^{12} \\ a_{ij}^{21} & a_{ij}^{22} \end{bmatrix}$ 的尺度为 $2 \times 2,$，其中矩阵的每个元素$a_{ij}^{pq}$ 由一条连接 $x_i^p$ 和 $x_j^q$ 的边表示，分别对应于更新算法（矩阵加权一致性形式）[283]:

$$x_{ip}[k+1] = \underbrace{\sum_{q=1}^{d} w_{ii} a^{p}_{\ i}{}^{q}_{\ i} x_{iq}[k]}_{\text{纵向交互}} + \underbrace{\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} w_{ij} a^{p}_{\ i}{}^{p}_{\ j} x_{jp}[k]}_{\text{横向交互}} + \underbrace{\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} \sum_{\substack{q=1,\\ q\neq p}}^{d} w_{ij} a^{p}_{\ i}{}^{q}_{\ j} x_{jq}[k]}_{\text{交叉交互}}, \tag{9.1}$$

对于 $i = 1, \ldots, n$, $p = 1, \ldots, d$ 和 $k = 0, 1, 2, \ldots$，我们得到图 9.1 (c) 所示的描述。横向交互是同层交互，纵向交互连接同一智能体中的节点，而交叉交互连接不同层、不同智能体中的节点。

$P$中的一条路径是由边 $(i_1, i_2) \ldots, (i_{l-1}, i_l)$ 组成的序列，其中每条边 $(i_k, i_{k+1})$ 都是正定或半正定的。如果 $P$ 的所有边都是正定边，则称 $P$ 是 $G$ 的一条正定路径。

称 $\bar{G}$ 为 $G$ 对应的无向图，其定义为 $G = (V, \bar{E})$，其中当且仅当 $(i, j)$ 的权重矩阵 $\mathbf{A}^{ij}$ 为半正定或正定时，才存在边 $(i, j)$。若 $\bar{T}$ 是 $\bar{G}$ 中的一棵树，那么 $G$ 中对应顶点构成的图 $T$ 也是 $G$ 中的一棵树。若 $T$ 的所有边均为正定边，则称 $T$ 为正定树。若树 $T$ 包含 $G$ 的所有顶点，且其所有边均为正定边，则称树 $T$ 为 $G$ 的正定生成树。

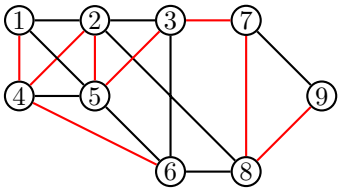



图 9.2：矩阵加权图示例，其中红色边表示正定边，黑色边表示正定边或半正定边。由红色边构成的图是 $G$ 的正定生成树。

矩阵加权邻接矩阵定义为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{d\times d} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \cdots & \mathbf{A}_{1n}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0}_{d\times d} & \mathbf{A}_{23} & \cdots & \mathbf{A}_{2n}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{A}_{n-1,1} & \cdots & \mathbf{A}_{n-1,n-2} & \mathbf{0}_{d\times d} & \mathbf{A}_{n-1,n}\\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \cdots & \mathbf{A}_{n,n-1} & \mathbf{0}_{d\times d}\end{bmatrix}. \tag{9.2}$$

对于每个顶点 $i\in V$，我们将顶点 $i$ 的度定义为 $\mathbf{D}_i=\sum_{j=1}^{n}\mathbf{A}^{ij}$。图的度矩阵为 $\mathbf{D}$ =分块对角矩阵$(\mathbf{D}_1,..,\mathbf{D}_n)$ =分块对角矩阵$(\mathbf{A}(\mathbf{1}_n\otimes\mathbf{I}_d))$。矩阵加权拉普拉斯矩阵相应定义为

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}=\mathbf{D}-\mathbf{A}.$$

显然，矩阵加权拉普拉斯矩阵是对称的、半正定的，并且

$$\mathrm{im}(\mathbf{1}_n\otimes\mathbf{I}_d)\subseteq\ker(\boldsymbol{\mathcal{L}}). \tag{9.3}$$

此外，我们可以表示为

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}=(\mathbf{H}^\top\otimes\mathbf{I}_d)\mathrm{blkdiag}(\mathbf{A}_k)(\mathbf{H}\otimes\mathbf{I}_d)=\bar{\mathbf{H}}^\top\mathrm{blkdiag}(\mathbf{A}_k)\bar{\mathbf{H}}, \tag{9.4}$$

其中，$\mathbf{H}$ 是 $G$的关联矩阵，$\mathbf{A}_k=\mathbf{A}^{ij}$ 若 $e_k=(i,j)$。

# 9.2 矩阵加权一致性算法

## 9.2.1 一致性条件

矩阵加权一致性算法的形式如下：

$$\dot{\mathbf{x}}_i=-\sum_{i=1}^{n}\mathbf{A}_{ij}(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j),\ \forall i=1,\ldots,n, \tag{9.5}$$

其中 $\mathbf{x}_i\in\mathbf{R}^d$ 是智能体 $i$ 的状态变量。利用矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$，上述算法可以重新表示为如下矩阵形式：

$$\dot{\mathbf{x}}=-\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{x},\ \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0, \tag{9.6}$$

其中 $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^\top, \ldots, \mathbf{x}_n^\top]^\top \in \mathbb{R}^{dn}$。基于矩阵 $\mathcal{L}$ 的性质，我们有

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{-\mathcal{L}t}\mathbf{x}(0). \tag{9.7}$$

请注意，由 $\bar{\mathbf{x}}(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i(t) = \frac{1}{n}(\mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{I}_d)\mathbf{x}$定义的系统重心是时不变的，因为

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \frac{1}{n}(\mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{I}_d)\dot{\mathbf{x}} = -\frac{1}{n}(\mathbf{1}_n^\top \otimes \mathbf{I}_d)\mathcal{L}\mathbf{x} = \mathbf{0}_d. \tag{9.8}$$

**定理 9.1**（矩阵加权一致性条件）。对于任意初始值 $\mathbf{x}(0)$，系统在重心 $\bar{\mathbf{x}}$ 处达到一致性的充分必要条件是 $\mathrm{im}(\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_d) = \ker(\mathcal{L})$。

证明。（必要条件）假设 $\mathrm{im}(\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_d) = \ker(\mathcal{L})$。我们可以将拉普拉斯矩阵分解为 $\mathcal{L} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^\top$，其中

$$\mathbf{P} = \left[\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_d), \mathbf{p}_{d+1}, \ldots, \mathbf{p}_{dn}\right] \tag{9.9}$$

是一个正交归一矩阵，即 $\mathbf{P}\mathbf{P}^\top = \mathbf{I}_{dn}$，且 $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{dn})$，其中 $0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_d < \lambda_{d+1} \leq \ldots \leq \lambda_{dn}$ 是矩阵 $\mathcal{L}$的特征值。由此可得：

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathrm{e}^{-\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(0) \to \frac{1}{n}(\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_d)(\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_d)^\top\mathbf{x}(0) = \mathbf{1}_n \otimes \bar{\mathbf{x}}, \tag{9.10}$$

或 $\mathbf{x}_i$ 渐近趋向系统的质心，其中 $i = 1, \ldots, n$。

（充分条件）我们将用反证法证明。假设 $\mathrm{im}(\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_d) \neq \ker(\mathcal{L})$，则根据（9.3），存在向量 $\mathbf{0}_{dn} \neq \mathbf{v} \notin \mathrm{im}(\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_d)$，使得 $\mathcal{L}\mathbf{v} = \mathbf{0}_{dn}$。因此，取 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}$，则 $\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{0}_{dn}$，$\forall t \geq 0$。显然，在这种情况下，系统不可能在质心处实现一致性。 □

检查秩条件并不能为我们提供构造矩阵加权图的方法，以确保系统渐近趋于一致性。使系统在质心处实现一致性的一个充分条件如下：

**系统 qu 啊 9.2.** 如果 $G$ 包含一棵正定生成树，系统 (9.6) 将渐近趋于质心处的一致性值
生成树 x 正定。

证明。我们可以对图 $G$ 的边进行排序，使得边 $e_1, \ldots, e_{n-1}$ 对应于 $G$的正定生成树 $T$ 的边。令$\mathbf{H}$ 为 $G$的关联矩阵。按此方式划分后，我们可以将$\mathbf{H}$ 重写为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{E(T)} \\ \mathbf{H}_{E(G)\setminus E(T)} \end{bmatrix}. \tag{9.11}$$

对于$\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1^\top, \ldots, \mathbf{v}_n^\top]^\top \in \mathbb{R}^{dn}$，若其为 $\ker(\mathcal{L})$ 中的任意向量，则必须满足：

$$\mathbf{v}^\top\mathcal{L}\mathbf{v} = \mathbf{v}^\top\bar{\mathbf{H}}^\top\mathrm{blkdiag}(\mathbf{A}_k)\bar{\mathbf{H}}\mathbf{v} = \|\mathrm{blkdiag}(\mathbf{A}_k^{\frac{1}{2}})\bar{\mathbf{H}}\mathbf{v}\|^2 = 0 \tag{9.12}$$

该方程等价于

$$\mathrm{blkdiag}(\mathbf{A}_k^{\frac{1}{2}})\bar{\mathbf{H}}\mathbf{v} = \mathrm{blkdiag}(\mathbf{A}_k^{\frac{1}{2}})\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}_{E(T)}\mathbf{v} \\ \bar{\mathbf{H}}_{E(G)\setminus E(T)}\mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{dn} \tag{9.13}$$

由于边 $e_i$，$i = 1, \ldots, n-1$ 是正定的，矩阵 $\mathbf{A}_k$，$k = 1, \ldots, n-1$ 是1 1 _正定矩阵。因此，方程 $\mathrm{blkdiag}(\mathrm{A}\ 21, \ldots, \mathrm{A}_{n-1}^{\ 2})\mathrm{H}_{E(T)}\mathrm{v} = \mathbf{0}_{d(n-1)}$等价于 $\bar{\mathrm{H}}_{E(T)}\mathrm{v} = \mathbf{0}_{d(n-1)}$。而 $\ker(\bar{\mathrm{H}}_{E(T)}) = \mathrm{im}(\mathbf{1}_n \otimes \mathrm{I}_d)$，因为 $T$是图的一棵生成树，由此可推出 $\mathrm{v}\ 2\ \mathrm{im}(\mathbf{1}_n \otimes \mathrm{I}_d)$。由于 v 是 ker(L) 中任意选取的向量，因此可推出 $\ker(\mathrm{L}) \subseteq \mathrm{im}(\mathbf{1}_n \otimes \mathrm{I}_d)$。结合 (9.3) 可得 $\ker(\mathrm{L}) = \mathrm{im}(\mathbf{1}_n \otimes \mathrm{I}_d)$，由此得证。 □

### 9.2.2 聚类现象

本小节给出若干充分条件，用于检验矩阵加权图在执行矩阵加权一致性算法 (9.6) 时是否达到一致性或形成聚类。

将顶点集 $V$划分为若干簇 $\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_l(1\leq l\leq n)$，满足：(i) $\mathcal{C}_i\bigcap\mathcal{C}_j=\emptyset$，对于 $i\neq j$，以及 (ii) $\bigcup_{k=1}^{l}\mathcal{C}_k=V$。正向动力系统 (9.6) 将达到聚类状态，若存在划分 $\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_l$，使得属于同一簇的每个智能体都达到一致性，而属于不同簇的两个智能体 $i$和 $j$则有 $\mathbf{x}_i\neq\mathbf{x}j$。每个 $\mathcal{C}_i,i=1,\ldots,l$称为系统的一个簇。

**引理 9.3.** 对于一致性协议 (9.6)，$\mathbf{x}(t)$ →ker($\mathcal{L}$) 当 $t\to+\infty$。

证明。 考虑李雅普诺夫函数 $V=\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top\mathcal{L}\mathbf{x}\geq 0$ 则

$$\dot{V}=\mathbf{x}^\top\mathcal{L}\dot{\mathbf{x}}=-\mathbf{x}^\top\mathcal{L}\mathcal{L}\mathbf{x}=-\|\mathcal{L}\mathbf{x}\|^2\leq 0. \tag{9.14}$$

由于 $\mathcal{L}^{1/2}\mathbf{x}\perp$ 核($\mathcal{L}$)，假设 dim(核($\mathcal{L}$)) $=r=$dim(核($\mathcal{L}^{1/2}$)) $\geq d$ 则有

$$2\lambda_{dn}(\mathcal{L})V=\lambda_{dn}(\mathcal{L})\mathbf{x}^\top\mathcal{L}\mathbf{x}\geq\mathbf{x}^\top\mathcal{L}^{1/2}\mathcal{L}\mathcal{L}^{1/2}\mathbf{x}\geq\lambda_r(\mathcal{L})\mathbf{x}^\top\mathcal{L}\mathbf{x}=2\lambda_{r+1}(\mathcal{L})V.$$

由此可得 $\dot{V}\leq-2\lambda_{r+1}(\mathcal{L})V$，即 $V\to 0$ 以指数速率 [126]。由于 $V(\mathbf{x})=0$ 当且仅当 $\mathbf{x}\in$ 核($\mathcal{L}$)，因此有 $\mathbf{x}$ →核($\mathcal{L}$)。 □

**引理 9.4**。 假设 $T\subset G$ 是一棵由 $l$ 个顶点组成的正定树，对于一致性算法 (9.6)，$\mathbf{x}_i(t)\to\mathbf{x}j(t)$，$\forall i,\ j\in T$，当 $t\to+\infty$时。

证明。将 $\mathbf{x}$ 表示为 $=[\mathbf{x}_T^\top,\ \mathbf{x}_{V\setminus V(T)}^\top]^\top$ 以及 $\mathbf{H}=\begin{bmatrix}\mathbf{H}_1 & \mathbf{0}\,\mathbf{H}_2 & \mathbf{0}\,\mathbf{H}_3\,\mathbf{H}_4\end{bmatrix}$，其中 $[\mathbf{H}_1\ \mathbf{0}]\in$ $\mathrm{R}^{(l-1)\times n}$对应于 $T$中的边，$[\mathbf{H}_2\ \mathbf{0}]$对应于连接属于 $V(T)$ 的顶点但不包含树 $T$ 的边，而 $[\mathbf{H}_3\ \mathbf{H}_4]$ 对应于 $E(G)$ 中的其余边。注意，$\mathbf{H}_2$ 线性相关于 $\mathbf{H}_1$，因为 $\mathbf{H}_2=$T$\mathbf{H}_1$。任意一个 (9.6) 的平衡点都必须满足 $\bar{\mathbf{H}}\mathbf{x}^*=\mathbf{0}$，即

$$\mathrm{blkdiag}(\mathbf{A}_1^{1/2},\ldots,\mathbf{A}_{l-1}^{1/2})\bar{\mathbf{H}}_1\mathbf{x}_T^*=\mathbf{0}. \tag{9.15}$$

由于 $T$ 是一棵正定树，$\bar{\mathbf{H}}_1\mathbf{x}_T^*=\mathbf{0}$。由此可知，(9.6) 的每个平衡点 $\mathbf{x}^*$ 都必须满足 $\mathbf{x}_T^*\in$ker($\bar{\mathbf{H}}_1$) $=$im($\mathbf{1}_l\otimes\mathbf{I}_d$)，也就是说，$l$ 正定树 $T$ 中的所有智能体的状态变量都必须相等。另一方面，由于 $\mathbf{x}(t)$ →$\mathbf{x}^*\in$ ker($\mathcal{L}$)，因此 $T$ 中的智能体将逐渐达成一致。 □

***Hyo-Sung Ahn*** 与分布式控制

Hyo-Sung Ahn 于韩国延世大学获得天文学学士学位（1998年）和硕士学位（2000年），在北达科他大学获得硕士学位，并于犹他州立大学（美国犹他州）获得电气与计算机科学博士学位（2006年）。目前，他是韩国光州科学技术院（GIST）机械工程与机器人学系的教授。Hyo-Sung Ahn 的博士研究课题为迭代控制，相关成果由施普林格出版。自2007年至今，Ahn 在 GIST 创立了分布式控制与自主系统实验室 `https://dcas.gist.ac.kr/dcas/`，主要研究方向为多智能体系统控制，应用包括编队控制和分布式优化。Ahn 著有专著《编队控制：分布式智能体方法》（2020年）和《矩阵加权图：理论与

应用》（2026年），并编写了教材《多智能体系统控制：理论与 Python 仿真》（2024年）。

以下结果给出了一个充分条件，用于判断两个顶点是否属于一致性协议(9.6)下的同一个簇。

**定理9.5**。 设 $T$ 是一棵正定树，记 $\mathcal{C}(T)$ 为包含以下内容的簇：
(i) $T$ 中的所有顶点；(ii) 顶点 $i \notin T$: $\mathcal{S}_i = \{P_k = \{v_1^k \dots v_{|P_k|}^k\} |\ v_1^k = i, \quad v_{|P_k|}^k \in T, \text{ 以及 } \forall j = 1, \dots, \ |P_k| - 1, \quad v_j^k \notin T\}$，满足

(a) 对于每条路径 $P_k$，定义 $\ker(P_k) = \bigcup_{j=1}^{|P_k|-1} \ker(\mathbf{A}^{v_j^k v_{j+1}^k})$，则有

$$\dim\left(\bigcap\nolimits_{k=1}^{|\mathcal{S}_i|} \ker(P_k)\right) = 0. \tag{9.16}$$

(b) 每个 $P_k \in \mathcal{S}_i$ 都不包含环，即 $v_l \neq v_m, \quad \forall v_l, \quad v_m \in P_k$。

此时，集合 $\mathcal{S}_i$ 是有限的。对于一致性协议 (9.6)， $\mathcal{C}(T)$ 中的所有智能体都将渐近收敛到同一个值。

证明。 根据引理 9.4，所有 $\mathbf{x}^j (j \in V(T))$ 都收敛到一个公共向量值 $\mathbf{x}_T^*$。考虑满足条件 (ii) 的顶点$i \notin V(T)$，且 $\mathbf{x}_i^*$是智能体 $i$的平衡点处的值。此时，根据 $\ker(P_k)$ 的定义，

$$\mathbf{x}_i^* - \mathbf{x}_T^* \in \ker(P_k), \ \forall P_k \in \mathcal{S}_i. \tag{9.17}$$

由方程 (9.16) 可知，(9.17) 的唯一解为 $\mathbf{x}_i^* - \mathbf{x}_T^* = \mathbf{0}$，即 $\mathbf{x}_i^* = \mathbf{x}_T^*$。因此，属于簇 $\mathcal{C}(T)$ 的智能体达成了一致性。

假设 $P_1$ 和 $P_2$ 是两条不同的路径，而 $P_2$ 是通过向 $P_1$ 添加一个环得到的。此时，$\ker(P_1) \subseteq \ker(P_2)$。由此可推出 $\ker(P_1) \cap \ker(P_2) = \ker(P_1)$，也就是说，我们无需考虑方程 (9.16) 中包含环的路径。这意味着需要考察的集合 $\mathcal{S}_i$的元素个数是有限的。最后，考虑一个不满足条件 (i) 和 (ii) 的顶点 $i$ 。令 $\mathcal{S}_i$为从 $i$ 到 $T$的路径集合，使得 $\dim(\bigcap_{k=1}^{|\mathcal{S}_i|} \ker(P_k)) \geq 1$。此时，存在满足 (9.17) 的解 $\mathbf{x}_i^* - \mathbf{x}_T^* \neq 0$。 □

由定理（9.5），可得以下推论：

**推论 9.6.** 设正定树 $T$和一个顶点 $v_i \notin T$。从顶点 $v_i$ 到 $v_j \in T$，如果至少存在两条路径使得方程（9.16）成立，那么顶点 $v_i$ 属于簇 $\mathcal{C}(T)$。

类似地，考虑两棵正定树 $T_1$， $T_2$ 通过边集 $\mathcal{S} = \{(i, \ j) \in E | \ i \in T_1, \ j \in T_2\}$连接。如果 $\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} \mathbf{A}^{ij}$ 是正定的，那么 $T_1$ 和 $T_2$ 属于同一个簇。

以下两个示例说明了本小节中介绍的结果。

**例9.2.** 为说明定理9.5，考虑一个由4个智能体组成的系统，位于 $\mathrm{R}^3$ 中，如图9.4所示。图的矩阵权重为

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ và } \mathbf{A}_{14} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

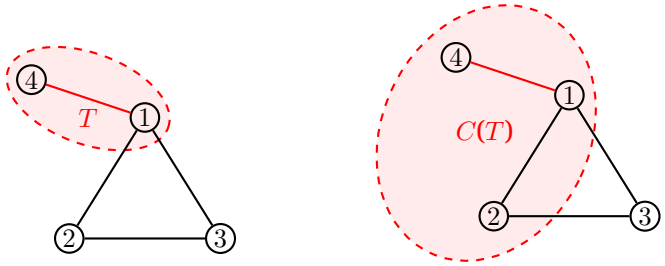
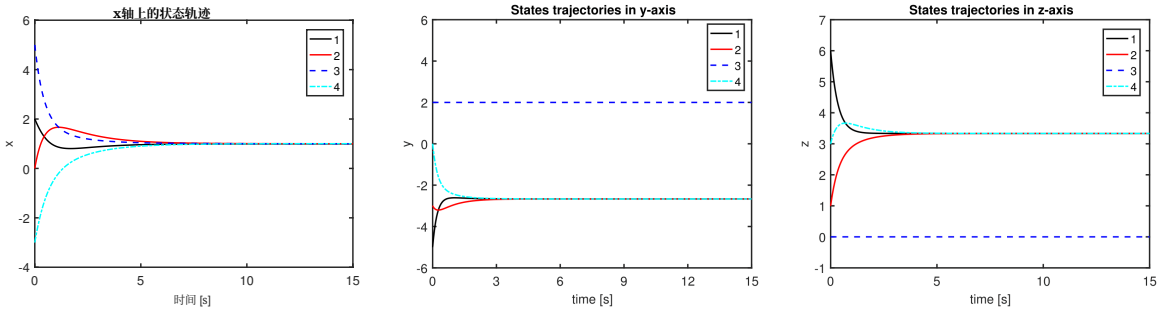



图9.3：示例9.2中四智能体系统的示意图。




(a) 随 $x$轴变化。 (b) 沿 $y$轴的变化。 (c) 沿 $z$轴的变化。

图9.4：示例9.2中采用一致性协议(9.6)时，系统状态变量随时间变化的仿真。

显然$\mathbf{A}_{14}$ 是正定矩阵，而其他矩阵均为半正定。由此，我们可以确定一棵正定树 $T$，它包含图的顶点 $v_1$ 和 $v_4$。此外，$\ker(\mathbf{A}_{12})$ =张成空间$\{[1,0,0]^\top\}$，$\ker(\mathbf{A}_{13})$ =张成空间$\{[0,1,0]^\top,\ [0,0,1]^\top\}$，且 $\ker(\mathbf{A}_{23})$ =张成空间$\{[0,1,0]^\top\}$。

从 $v_2$ 到 $v_1$ （也就是到树 $T$）存在两条路径，分别是 $P_1 = v_2v_1$ 和 $P_2 = v_2v_3v_1$。根据定义，我们有：

$$\ker(P_1) = \ker(\mathbf{A}_{12}) = \text{span}\{[1,0,0]^\top\},$$
$$\ker(P_2) = \ker(\mathbf{A}_{13}) \bigcap \ker(\mathbf{A}_{23}) = \text{span}\{[0,1,0]^\top, [0,0,1]^\top\}.$$

因此，$\ker(P_1) \bigcap \ker(P_2) = \{\mathbf{0}\}$，也就是说，根据定理9.5 (ii)，两个智能体属于同一个簇 $\mathcal{C}(T)$。对于顶点 $v_3$，从顶点3到 $\mathcal{C} = \{v_1,\ v_2,\ v_4\}$ 存在两条边（路径），分别是 $P_3 = v_3v_1$ 和 $P_4 = v_3v_2$。由于$\ker(P_3) \bigcap \ker(P_4) = \ker(\mathbf{A}_{23})$ =张成空间$\{[0,1,0]^\top\}$，顶点 $v_3$ 不属于 $\mathcal{C}$。

一致性协议（9.6）的仿真如图9.4所示。结果表明$\mathbf{x}_1^* = \mathbf{x}_2^* = \mathbf{x}_4^* \neq \mathbf{x}_3^*$，与上文的分析一致。

**例9.3。** 说明一个仅在矩阵加权一致性算法中出现的情形。考虑由五个智能体组成的系统，其位于 $\mathbf{R}^2$ 中，并具有图 9.5 所示的矩阵加权图 $G$。矩阵权重由下式给出

$$\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{13} = \mathbf{A}_{34} = \mathbf{A}_{35} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ và } \mathbf{A}_{25} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

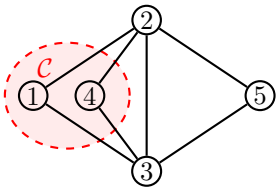
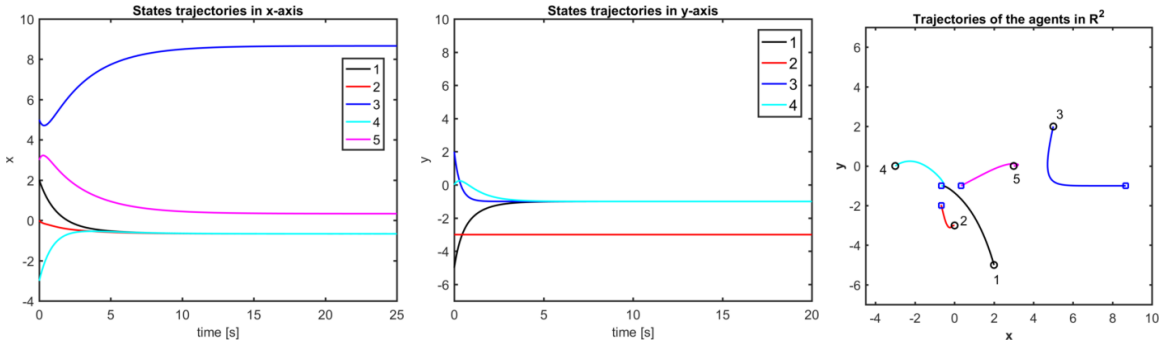



图9.5：例9.3中的5个顶点组成的图。 $v_1$， $v_4$ 尽管被不属于同一簇的顶点 $v_2$， $v_3$隔开，但仍处于同一簇中。




(a) 沿 $x$ 轴的变化 (b) 沿 $y$ 轴的变化 (c) 智能体的轨迹。

图9.6：例9.3：具有一致性协议（9.6）的系统状态变量变化。

由于所有权重都是半正定矩阵，因此在 $G$ 中不存在正定生成树。利用定理9.5，可以计算得出 $\ker(\mathbf{A}_{12}) = \ker(\mathbf{A}_{24}) =$ 张成空间$\{[1,0]^\top\}$、$\ker(\mathbf{A}_{13}) = \ker(\mathbf{A}_{34}) = \ker(\mathbf{A}_{35}) =$ 张成空间$\{[0,1]^\top\}$，以及 $\ker(\mathbf{A}_{25}) =$ 张成空间$\{[1,1]^\top\}$。从 $v_4$ 到 $v_1$ 存在4条路径，如下所示：

- $P_1 = v_4v_2v_1$: $\ker(P_1) = \ker(\mathbf{A}_{24}) \cup \ker(\mathbf{A}_{12}) =$ 张成空间$\{[1,0]^\top\}$。
- $P_2 = v_4v_3v_1$: $\ker(P_2) = \ker(\mathbf{A}_{34}) \cup \ker(\mathbf{A}_{13}) =$ 张成空间$\{[0,1]^\top\}$。
- $P_3 = v_4v_2v_5v_3v_1$: 核$(P_3) =$ 核$(\mathbf{A}_{24}) \cup$核$(\mathbf{A}_{25}) \cup$ 核$(\mathbf{A}_{12}) \cup$ 核$(\mathbf{A}_{35}) = \mathbf{R}^2$.
- $P_4 = v_4v_3v_5v_3v_1$: 核$(P_4) =$ 核$(\mathbf{A}_{34}) \cup$核$(\mathbf{A}_{35}) \cup$ 核$(\mathbf{A}_{25}) \cup$ 核$(\mathbf{A}_{12}) = \mathbf{R}^2$.

因此 $\cap_{k=1}^4 P_k =$张成空间$\{[1,0]^\top\} \cap$张成空间$\{[0,1]^\top\} = \emptyset$，也就是说 $\dim(\cap_{k=1}^4 P_k) = 0$。根据定理 9.5，我们看到 $v_1$和 $v_4$位于同一个簇 $\mathcal{C}_1$中。检查可知 $v_5$不属于这个簇。由此我们得出结论，该图由四个簇组成： $\mathcal{C}_1 = \{v_1, v_4\}$, $\mathcal{C}_2 = \{v_2\}$， $\mathcal{C}_3 = \{v_3\}$，以及 $\mathcal{C}_4 = \{v_5\}$。

在这个示例中，尽管顶点2和3都是顶点1的邻居，但它们与顶点1不属于同一个簇。与此同时，顶点4与顶点1属于同一个簇，尽管它们之间没有直接连接。采用一致性算法（9.6）的五个智能体系统的仿真结果如图9.6所示。

## 9.3 领导者-跟随者系统的矩阵权重一致性 r

### 9.3.1 领导者不更新状态的情况

考虑这样一种情况：系统中有一些特殊智能体不通过一致性协议（9.6）更新信息，而是保持其状态变量不变。我们称这些智能体为系统的领导者，不失一般性，将它们记为 $i=1$、...、$l$，其中 $l\geq 1$。其他智能体则根据（9.6）更新状态变量，并称为跟随者。

假设图 $G$ 描述系统中智能体间的交互，是一个满足 $\ker(\boldsymbol{\mathcal{L}})=\mathrm{im}(\mathbf{1}_n\otimes\mathbf{I}_d)$ 的矩阵加权图。将图中的节点划分为领导者和跟随者后，可将加权拉普拉斯矩阵改写为

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ll} & \boldsymbol{\mathcal{L}}_{lf}\\ \boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl} & \boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}\end{bmatrix}, \tag{9.18}$$

其中 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ll}\in\mathrm{R}^{dl\times dl}$，$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}\in\mathrm{R}^{df\times df}$，$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{lf}=\boldsymbol{\mathcal{L}}_{lf}^{\top}\in\mathrm{R}^{dl\times df}$，且 $f=n-d$。

假设 $G'$ 是描述跟随者智能体之间交互的矩阵加权图，并将 $G'$ 的拉普拉斯矩阵记为 $\boldsymbol{\mathcal{L}}'$，则有：

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}=\boldsymbol{\mathcal{L}}'+\mathrm{blkdiag}(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}(\mathbf{1}_l\otimes\mathbf{I}_d)) \tag{9.19}$$

假设 $\ker(\boldsymbol{\mathcal{L}}')=\mathrm{im}(\mathbf{1}_f\otimes\mathbf{I}_d)$。我们证明，$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}$ 是对称正定的，当且仅当矩阵 $(\mathbf{1}_f\otimes\mathbf{I}_d)^{\top}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}(\mathbf{1}_l\otimes\mathbf{I}_d)$ 是对称正定的。

（充分条件）假设 $(\mathbf{1}_f\otimes\mathbf{I}_d)^{\top}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}(\mathbf{1}_l\otimes\mathbf{I}_d)$ 是对称正定的，则由于 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}=\boldsymbol{\mathcal{L}}'+\mathrm{blkdiag}(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}(\mathbf{1}_l\otimes\mathbf{I}_d))$，对于任意向量 $\mathbf{w}\in\mathrm{R}^{df}$，有

$$\mathbf{w}^{\top}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}\mathbf{w}=\mathbf{w}^{\top}\boldsymbol{\mathcal{L}}'\mathbf{w}+\mathbf{w}^{\top}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}\mathrm{blkdiag}(\mathbf{1}_l\otimes\mathbf{I}_d)\mathbf{w} \tag{9.20}$$

假设$\mathbf{w}\in\ker(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff})$，则由于$\boldsymbol{\mathcal{L}}'$和 $\mathrm{blkdiag}(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}(\mathbf{1}_l\otimes\mathbf{I}_d))$ 都是对称半正定矩阵，因此

$$\mathbf{w}\in\ker(\boldsymbol{\mathcal{L}}')\bigcap\ker(\mathrm{blkdiag}(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}(\mathbf{1}_l\otimes\mathbf{I}_d))).$$

由此可推出$\mathbf{w}\in\mathrm{im}(\mathbf{1}_f\otimes\mathbf{I}_d)$，即$\mathbf{w}=\mathbf{1}_f\otimes\boldsymbol{\omega}=(\mathbf{1}_f\otimes\mathbf{I}_d)\boldsymbol{\omega}$，其中 $\boldsymbol{\omega}\neq\mathbf{0}_d$ 是 $\mathrm{R}^d$中的一个向量。由此可推出

$$\begin{aligned}0&=\mathbf{w}^{\top}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}\mathrm{blkdiag}(\mathbf{1}_l\otimes\mathbf{I}_d)\mathbf{w}\\&=\boldsymbol{\omega}^{\top}(\mathbf{1}_f\otimes\mathbf{I}_d)^{\top}\mathrm{blkdiag}(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}(\mathbf{1}_l\otimes\mathbf{I}_d))(\mathbf{1}_f\otimes\mathbf{I}_d)\boldsymbol{\omega}\\&=\boldsymbol{\omega}^{\top}(\mathbf{1}_f\otimes\mathbf{I}_d)^{\top}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}(\mathbf{1}_l\otimes\mathbf{I}_d)\boldsymbol{\omega}\\&=\boldsymbol{\omega}^{\top}\Big(\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=l+1}^{n}\mathbf{A}_{ij}\Big)\boldsymbol{\omega}.\end{aligned}$$

由于 $(\mathbf{1}_f\otimes\mathbf{I}_d)^{\top}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}(\mathbf{1}_l\otimes\mathbf{I}_d)=\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=l+1}^{n}\mathbf{A}^{ij}$ 是对称正定的，因此满足条件的唯一解为 $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}_d$。这等价于 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}$ 是对称正定的。

（必要条件）假设 $(\mathbf{1}_f\otimes\mathbf{I}_d)^{\top}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}(\mathbf{1}_l\otimes\mathbf{I}_d)$ 不是对称正定的。在方程（9.20）中，取 $\mathbf{w}=\mathbf{1}_f\otimes\boldsymbol{\omega}$，其中 $\boldsymbol{\omega}$ 满足 $(\mathbf{1}_f\otimes\mathbf{I}_d)^{\top}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}(\mathbf{1}_l\otimes\mathbf{I}_d)\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}_d$，则 $\mathbf{w}\neq\mathbf{0}_d$ 是 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}$ 对应于特征值 0 的特征向量。这表明 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}$ 不是正定的。

领导者-跟随者一致性系统可以表示为:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{0}_d,\ i = 1, \ldots, l, \tag{9.21}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_i = -\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j),\ i = l+1, \ldots, n. \tag{9.22}$$

令 $\mathbf{x} = [mx_1^\top, \ldots, \mathbf{x}_n^\top]^\top$, $\mathbf{x}_L = [\mathbf{x}_1^\top, \ldots, \mathbf{x}_{\mathrm{F}}^\top]^\top$, $\mathbf{x}_{\mathrm{F}} = [\mathbf{x}_{l+1}^\top, \ldots, \mathbf{x}_n^\top]^\top$, 我们将系统表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_L \\ \dot{\mathbf{x}}_F \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{dl\times dl} & \mathbf{0}_{dl\times df} \\ \boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl} & \boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_L \\ \mathbf{x}_F \end{bmatrix}. \tag{9.23}$$

显然, 系统的平衡点必须满足

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_L^* &= \mathbf{x}_L(0), \\ \boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}\mathbf{x}_L^* + \boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}\mathbf{x}_F^* &= \mathbf{0}_{df}. \end{aligned} \tag{9.24}$$

在条件 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}$ 为对称正定矩阵时,

$$\mathbf{x}_F^* = -\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}\mathbf{x}_L(0). \tag{9.25}$$

我们将证明, 智能体将逐渐渐近于唯一的平衡点 $\mathbf{x}^* = [\mathbf{x}_L^\top(0)\ -\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}\mathbf{x}_L^\top(0)]^\top$。事实上, 通过变量变换 $\tilde{\mathbf{x}}_F = \mathbf{x}_F - \mathbf{x}_F^*$, 由方程 (9.23) 可得:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_F &= -\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}\mathbf{x}_L - \boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}\mathbf{x}_F \\ &= \boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}\mathbf{x}_F^* - \boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}\mathbf{x}_F \\ &= -\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}\tilde{\mathbf{x}}_F. \end{aligned} \tag{9.26}$$

由于矩阵 $-\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}$ 是对称负定的, 因此我们可以推断 $\tilde{\mathbf{x}}_F = \mathbf{0}_{df}$ 是指数稳定的。因此, 当 $t \to +\infty$ 时, $\mathbf{x}_F(t) \to \mathbf{x}_F^*$。

考虑一种特殊情况: 各领导者具有相同的初始条件 $\mathbf{x}_1(0) = \ldots = \mathbf{x}_l(0) = \mathbf{x}^*$。此时, 我们将 $\mathbf{x}_L = \mathbf{1}_l \otimes \mathbf{x}_1(0)$ 改写。另一方面, 由于 $\mathrm{L}_{ff}(\mathbf{1}_f \otimes \mathbf{x}_l) = \mathrm{L}'(\mathbf{1}_f \otimes \mathbf{x}_l)$+分块对角矩阵$(\mathrm{L}_{fl}(\mathbf{1}_l \otimes \mathrm{I}_d))(\mathbf{1}_f \otimes \mathbf{x}_l) = \mathrm{L}_{fl}(\mathbf{1}_l \otimes \mathbf{x}_l)$, 因此 $\mathbf{x}_F^* = -\mathrm{L}_{ff}^{-1}\mathrm{L}_{fl}(\mathbf{1}_l \otimes \mathbf{x}_l) = \mathbf{1}_f \otimes \mathbf{x}_l$。因此, 在这种情况下, 跟随者将逐渐与领导者达成一致。

注意到 $\mathbf{1}_f \otimes \mathbf{I}_d = -\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}(\mathbf{1}_l \otimes \mathbf{I}_d)$, 因此矩阵 $\mathbf{R} = -\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl} \in \mathrm{R}^{df\times dl}$的各行之和均等于单位矩阵 $\mathbf{I}_d$。因此, 在一般情形下

$$\mathbf{x}_i^* = \sum_{j=1}^{l} \mathbf{R}_{ij}\mathbf{x}_j(0), \tag{9.27}$$

对于 $\sum_{j=1}^{l} \mathbf{R}_{ij} = \mathbf{I}_d$。如果图是带有常权重的无向图, 那么矩阵 $-\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}$ 是一个所有元素均为非负的矩阵。智能体将收敛到点$\mathbf{x}_1(0) \ldots, \mathbf{x}_l(0)$的凸包。在矩阵权重的情况下, 跟随智能体的平衡点可能位于领导者智能体位置的凸包内部或外部。

### 9.3.2 领导者移动的情形

我们考虑领导者以恒定速度运动的情况，$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_L,\ i = 1, \ldots, l$ 以及 $\dot{\mathbf{v}}_L = \mathbf{0}_d$。此时，一致性协议 (9.23) 无法使系统达到一致状态。取代 (9.23)，跟随者采用如下 PI一致性协议：

$$\dot{\mathbf{x}}_i = -\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + \boldsymbol{\eta}_i, \tag{9.28}$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_i = -\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j),\ i = l+1, \ldots, n. \tag{9.29}$$

将系统改写为状态变量 $\mathbf{r}_i = [\tilde{\mathbf{x}}_i^\top, \boldsymbol{\eta}_i^\top]^\top \in \mathrm{R}^{2d}$ 和 $\mathbf{r} = [\mathbf{r}_{l+1}^\top, \ldots, \mathbf{r}_n^\top]^\top \in \mathrm{R}^{df}$，其中 $\tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^*$，以及

$$\mathbf{x}_F^*(t) = -\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}\mathbf{x}_L(t), \tag{9.30}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_F^*(t) = -\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}\dot{\mathbf{x}}_L(t) = -\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{fl}(\mathbf{1}_l \otimes \mathbf{v}_L) = \mathbf{1}_f \otimes \mathbf{v}_L, \tag{9.31}$$

thì

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff} & \mathbf{I}_{df} \\ -\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff} & \mathbf{0}_{df\times df} \end{bmatrix} \mathbf{r} = \mathbf{M}\mathbf{r}. \tag{9.32}$$

矩阵 $\mathbf{M}$ 的特征值为

$$\begin{aligned} \det\big(s\mathbf{I}_{2df} - \mathbf{M}\big) &= \det\big(s(s\mathbf{I}_{df} + \boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}) + \boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}\big) \\ &= \prod_{k=1}^{df}(s^2 + \mu_k s + \mu_k) = 0, \end{aligned} \tag{9.33}$$

其中 $\mu_k > 0,\ \forall k = l+1, \ldots, df$ 是矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ff}$的特征值。显然，(9.33) 的所有解都必须具有负实部，这证明矩阵 $\mathbf{M}$ 是赫尔维茨矩阵。因此可得，$\mathbf{x}_i(t) \to \mathbf{x}_i^*(t)$ 且 $\mathbf{v}_i(t) \to \mathbf{v}_L(t)$，当 $t \to +\infty$。

当领导者的速度随时间变化时，PI控制律无法使系统达到一致性。设计基于滑模控制的一致性协议可以采用的方法之一是 [181]，这将是习题9.11的内容。

## 9.4 注释和参考文献

本章介绍的结果大部分源自 [295, 286]。近期的一些理论发展主要集中于矩阵加权系统的控制方面：可控性和可观性[197], 二阶矩阵加权一致性 [165, 180], 不连续矩阵加权一致性 [279], 时变图 [198], 或存在时延 [210]。具有给定质量的正定矩阵加权图的综合问题在 [61, 93]中进行了研究。然而，目前关于图论和矩阵加权图上的算法的结果仍然不多。

## 9.5 练习

**习题9.1**。 请为图9.7中的图写出矩阵加权邻接矩阵、矩阵加权度矩阵和矩阵加权拉普拉斯矩阵，其中

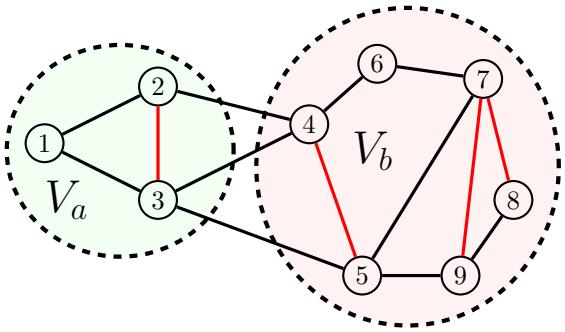



图9.7：习题9.1和9.2中的矩阵加权图

$$\mathbf{A}_{12}=\mathbf{A}_{67}=\begin{bmatrix}1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_{13}=\mathbf{A}_{24}=\mathbf{A}_{34}=\mathbf{A}_{59}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$
$$\mathbf{A}_{23}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_{35}=\mathbf{A}_{57}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_{45}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix},$$
$$\mathbf{A}_{78}=\mathbf{A}_{79}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_{46}=\mathbf{A}_{89}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

该图是否具有生成树？请确定相应矩阵加权拉普拉斯矩阵的秩。

**习题9.2**。 假设习题9.1中的矩阵加权图的顶点按图9.7所示分为两个集合 $V_1$（领导者）和 $V_2$（跟随者）。求矩阵 $\mathcal{L}_{ll}$、$\mathcal{L}_{fl}$、$\mathcal{L}_{ff}$。矩阵 $\mathcal{L}_{ff}$ 是否正定？

**习题9.3**。 证明公式

$$\mathcal{L}=(\mathbf{H}^\top\otimes\mathbf{I}_d)\mathrm{blkdiag}(\mathbf{A}_k)(\mathbf{H}\otimes\mathbf{I}_d)=\bar{\mathbf{H}}^\top\mathrm{blkdiag}(\mathbf{A}_k)\bar{\mathbf{H}} \tag{9.34}$$

对于无向矩阵加权图，其中 $\mathbf{H}$ 表示关联矩阵。

**习题9.4**。 假设矩阵加权拉普拉斯矩阵的秩 $\mathrm{rank}(\mathcal{L})=dn-r$，其中 $r>d$。求点 $\mathbf{x}^*\in\ker(\mathcal{L})$，该点在矩阵加权一致性算法（9.6）下趋近于 $\mathbf{x}(t)$。

**习题9.5**。 举例证明定理9.5中的条件只是充分条件。

**习题9.6**。 假设加权拉普拉斯矩阵的秩 $\mathrm{rank}(\mathcal{L})=dn-d$。

i. 证明加权度矩阵 $\mathbf{D}$ 是对称正定的。

ii. 证明矩阵 $\mathbf{D}^{-1/2}\mathcal{L}\mathbf{D}^{-1/2}$ 的特征值非负。

iii. [279] 确定 $\alpha$ 的取值范围，使得 $\mathbf{I}_{dn}-\alpha\mathbf{D}^{-1/2}\mathcal{L}\mathbf{D}^{1/2}$ 是特征值位于单位圆内的矩阵。

**练习 9.7.** 设矩阵 $\mathbf{X}=\mathbf{X}^\top\in\mathrm{R}^{d\times d}$ 属于集合 $\mathcal{S}$，该集合由对称正定/负定矩阵、对称半正定/负定矩阵以及零矩阵组成。矩阵符号函数定义如下：

$$\operatorname{sign}(\mathbf{X})=\begin{cases}1, & \mathbf{X}\text{ là xác định dương hoặc bán xác định dương},\\ -1, & \mathbf{X}\text{ là xác định âm hoặc bán xác định âm},\\ 0, & \mathbf{X}=\mathbf{0}.\end{cases}$$

记号 $|\mathbf{X}|=\mathbf{sign(X)X}$。如果 $\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n\in\mathcal{S}$ 那么

i. 存在矩阵 $\mathbf{G}$，使得 $\mathbf{G}$分块对角矩阵$(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n)$ 是对称半正定矩阵。i

i. [294] 如果 $\boldsymbol{\mathcal{L}}\in\mathrm{R}^{dn\times dn}$ 是某个矩阵加权图的拉普拉斯矩阵，那么矩阵

$$\mathbf{X}\boldsymbol{\mathcal{L}}(\operatorname{diag}(\operatorname{sign}(\mathbf{X}_1),\ldots,\operatorname{sign}(\mathbf{X}_n))\otimes\mathbf{I}_d)$$

具有非负特征值。

**练习 9.8.** [196] 考虑符号矩阵加权图（signed matrix-weighted Laplacian），其中矩阵 $\mathbf{A}_{ij}=\mathbf{A}_{ij}^\top\in\mathrm{R}^{d\times d}$ 可以是对称正定/负定矩阵、对称半正定/负半定矩阵以及零矩阵。假设无权图 $(V,E)$ 是结构平衡符号图（参见第 8 章中 Altafini 模型的定义）。

i. 定义矩阵 $\mathbf{A}=[\mathbf{A}_{ij}]$，$\mathbf{D}=$分块对角矩阵$(\mathbf{D}_1,\ldots,\mathbf{D}_n)$，其中 $\mathbf{D}_i=\sum_{j=1}^n$ 矩阵符号函数$(\mathbf{A}_{ij})$ $\mathbf{A}_{ij}=\sum_{i=1}^n|\mathbf{A}_{ij}|$，$\boldsymbol{\mathcal{L}}=\mathbf{D}-\mathbf{A}$，其中矩阵符号函数的定义见习题9.6。证明存在矩阵 $\mathbf{G}$，使得 $\boldsymbol{\mathcal{L}}'=\mathbf{G(D}-\mathbf{A)G}^{-1}$是一个对称半正定矩阵。

ii. 假设描述系统的图包含 $n$ 个智能体。假设每个智能体都有状态变量向量$\mathbf{x}_i\in\mathrm{R}^d$，并按以下公式更新状态变量：

$$\dot{\mathbf{x}}_i=-\sum_{i=1}^n|\mathbf{A}_{ij}|(\mathbf{x}_i-\operatorname{sign}(\mathbf{A}_{ij})\mathbf{x}_j),\ i=1,\ldots,n. \tag{9.35}$$

请将系统表示为矩阵形式，其中状态变量$\mathbf{x}=[\mathbf{x}_1^\top,\ldots,\mathbf{x}_n^\top]^\top\in\mathrm{R}^{dn}$。

iii. 进行变量变换$\mathbf{y}=\mathbf{Gx}$，写出用$\mathbf{y}$表示系统的方程。证明若秩$(\boldsymbol{\mathcal{L}})=dn-d$，则$\mathbf{y}$ 渐近趋于一致性空间中的某一点。

iv. 根据$\mathbf{y}$的渐近行为，得出$\mathbf{x}$的渐近行为。

**练习 9.9**（矩阵树定理）。[281] 假设 $G=(V,E,W)$ 是一个包含 $n$ 个顶点的无向矩阵加权图，其加权拉普拉斯矩阵为$\boldsymbol{\mathcal{L}}$。设 $0=\lambda_1=\ldots=\lambda_d\le\lambda_{d+1}\le\ldots\le\lambda_{dn}$ 为$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的特征值，并且$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{[v]}$ 表示从拉普拉斯矩阵中删除与任意顶点 $v\in V$ 对应的 $d$ 行$d$ 列后得到的矩阵。证明：

i. $\operatorname{trace}(\mathbf{L})=\sum_{i=d+1}^{dn}\lambda_i$,

ii. $\det(\mathbf{L}_{[v]})=\frac{1}{n}\prod_{i=d+1}^{dn}\lambda_i$.

**习题 9.10**（有向矩阵加权图，平衡）**.** 设 $G=(V,E,W)$ 是由 $n$ 个顶点组成、矩阵加权拉普拉斯矩阵为 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的矩阵加权图。图 $G$ 称为广义平衡，如果存在正实数 $p_1,\ldots,p_n$ 使得

$$p_i\sum_{j=1}^n\mathbf{A}_{ij}=\sum_{j=1}^n p_j\mathbf{A}_{ji}, \tag{9.36}$$

或者存在向量 $\mathbf{p}=[p_1,\dots,p_n]^\top$，其中 $p_i$ 为正实数，满足

$$(\mathbf{p}^\top\otimes\mathbf{I}_d)\boldsymbol{\mathcal{L}}=\mathbf{0}_{d\times nd}. \tag{9.37}$$

i. 令 $\mathbf{P}=\mathrm{diag}(\mathbf{p})\in\mathrm{R}^{n\times n}$ 且 $\bar{\mathbf{P}}=\mathbf{P}\otimes\mathbf{I}_d$，证明矩阵

$$\mathbf{Q}=\bar{\mathbf{P}}\mathbf{L}+\mathbf{L}^\top\bar{\mathbf{P}}, \tag{9.38}$$

是对称半正定矩阵。

ii. 若 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\mathcal{L}})=dn-d$，则 $\ker(\boldsymbol{\mathcal{L}})=\mathrm{im}(\mathbf{1}_n\otimes\mathbf{I}_d)$，且系统将在该一致性算法下渐近收敛到一致性集合：

$$\dot{\mathbf{x}}_i=-\sum_{j\in N_i}\mathbf{A}_{ij}(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j),\ i=1,\dots,n. \tag{9.39}$$

请根据初始值 $\mathbf{x}(0)$ 求出一致点。

iii. 请使用李雅普诺夫函数 $V=\mathbf{x}^\top\bar{\mathbf{P}}\mathbf{x}$ 证明 (ii)。

**习题9.11.** [165] 假设 $G=(V,E,W)$ 是一个包含 $n$ 个顶点、加权拉普拉斯矩阵为 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的矩阵加权图。假设系统由 $n$ 个二阶积分器智能体组成，其位置变量和速度变量分别为 $\mathbf{p}_i,\mathbf{v}_i\in\mathrm{R}^d$, $i=1,\dots,n$。假设各智能体通过图 $G$ 进行交互，采用的一致性算法为：

$$\dot{\mathbf{p}}_i=\mathbf{v}_i, \tag{9.40a}$$
$$\dot{\mathbf{v}}_i=\mathbf{u}_i=-k_p\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathbf{p}_i-k_v\mathbf{v}_i,\ i=1,\dots,n. \tag{9.40b}$$

i. 求出使智能体的位置渐近趋于一致性集合且速度收敛的条件。

ii. 基于 Lyapunov理论，分析满足第 (i) 项假设的系统。

**习题9.12.** [181] 假设 $G=(V,E,W)$ 是一个包含 $n$ 个顶点、加权拉普拉斯矩阵为 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的矩阵加权图。假设系统由 $n$ 个一阶积分器智能体组成，其状态变量为 $\mathbf{x}_i\in\mathrm{R}^d$, $i=1,\dots,n$。假设各智能体通过图 $G$ 进行交互。

i. 请证明该系统使用以下算法渐近趋于一致性集合：

$$\dot{\mathbf{x}}_i=-\sum_{j=1}^{n}\mathbf{A}_{ij}\mathrm{sign}\left(\mathbf{A}_{ij}(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j)\right),\ i=1,\dots,n,$$

ii. 请证明该系统使用以下算法渐近趋于一致性集合：

$$\dot{\mathbf{x}}_i=-\mathrm{sign}\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{A}_{ij}(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j)\right),\ i=1,\dots,n.$$

**习题 9.13.** [181] 假设 $G=(V,E,W)$ 是一个包含 $n$ 个顶点、加权拉普拉斯矩阵为 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的矩阵加权图。假设系统由 $n$ 个二阶积分器智能体组成，其位置变量和速度为

$\mathbf{p}_i$，$\mathbf{v}_i \in \mathrm{R}^d$, $i = 1$，……，$n$。假设智能体通过图 $G$ 进行交互，其一致性算法为：

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{v}_i, \tag{9.41a}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{u}_i = -k\mathrm{sgn}(\mathbf{s}_i) - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) - \lambda \mathrm{sig}^{\alpha}(\mathbf{e}_i), \tag{9.41b}$$

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i + \sum_{j \in N_i} \mathbf{A}_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j), \tag{9.41c}$$

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{e}_i + \lambda \int_0^t \mathrm{sig}^{\alpha}(\mathbf{e}_i(\tau))d\tau,\ i = 1, \ldots, n, \tag{9.41d}$$

与 $\mathrm{sig}^{\alpha}(x) = \mathrm{sgn}(x)|x|^{\alpha}$。

i. 将系统表示为矩阵形式。

ii. 证明 $\mathbf{s}_i \to \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{e} \to \mathbf{0}$ 在有限时间内，从而推得系统渐近收敛到一致性集合。

**习题9.14**（扰动观测器）。假设 $G = (V, E, W)$ 是一个含有 $n$ 个顶点的矩阵加权图，其加权拉普拉斯矩阵为$\mathcal{L}$。假设该系统由 $n$ 个二阶积分器智能体组成，其位置变量和速度分别为$\mathbf{p}_i$，$\mathbf{v}_i \in \mathrm{R}^d$, $i = 1, \ldots, n$：

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{v}_i + \mathbf{Q}_i(t)\mathbf{d}_i, \tag{9.42}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{w}_i,\ i = 1, \ldots, n, \tag{9.43}$$

其中$\mathbf{Q}_i\mathbf{d}_i$ 是无法由每个智能体的控制信号$\mathbf{w}_i$ 直接补偿的扰动项。关于扰动的信息分为两部分：$\mathbf{Q}_i(t) \in \mathrm{R}^{d \times r}$ 是一个随时间变化的矩阵，并假定其已知（回归矩阵）；而$\mathbf{d}_i \in \mathrm{R}^r$ 是每个智能体的未知参数向量。

i. 假设每个智能体都执行扰动观测器：

$$\dot{\mathbf{z}}_i = -\mathbf{Q}_i^{\top}\left(\mathbf{Q}_i(\mathbf{z}_i + \mathbf{Q}_i^{\top}\mathbf{p}_i) + \mathbf{v}_i\right) - \dot{\mathbf{Q}}_i^{\top}\mathbf{p}_i, \tag{9.44}$$

$$\hat{\mathbf{d}}_i = \mathbf{z}_i + \mathbf{Q}_i^{\top}\mathbf{p}_i,\ i = 1, \ldots, n. \tag{9.45}$$

证明该观测器能够估计扰动。换言之，证明 $\hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{d}_i - \mathbf{d}$ 收敛。

ii. 令 $\mathbf{s}_i = \mathbf{v}_i + \gamma \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) + \mathbf{Q}_i\hat{\mathbf{d}}_i$，其中 $\gamma > 0$ 为正常数。假设各智能体根据结合扰动观测器的一致性协议更新状态变量：

$$\mathbf{w}_i = -\mathbf{s}_i - \gamma \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) - \beta_i(t)\mathrm{sgn}(\mathbf{s}_i), \tag{9.46a}$$

$$\dot{\beta}_i(t) = \gamma_i \|\mathbf{s}_i\|_1,\ i = 1, \ldots, n. \tag{9.46b}$$

其中 $\|\mathbf{s}_i\|_1 = \sum_{k=1}^{d} |s_{ik}|$, $\gamma_i > 0$ 为正常数。证明 $\mathbf{s}_i \to \mathbf{0}$ 和 $\lim_{t \to \infty} \beta_i t$ 存在且有界。

iii. 对于算法（9.46），证明 $\mathbf{x}(t) \to \ker(\mathbf{L})$，其中 $t \to +\infty$。

# 第四部分

# 附录

# 附录 A

# 线性代数

本附录中关于线性代数的结果可参考英文[257, 186]或越南文献。

## A.1 一些定义和基本运算

矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$ 包括 $mn$ 个元素 $a_{ij}(i = 1, ..., m; j = 1, ..., n)$，写成 $m$ 行和 $n$ 列的形式

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

我们也使用符号 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$。由 $n$ 个元素组成的列向量是一个具有 $n$ 行的矩阵，即

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

对于$\mathbf{A}$ 和$\mathbf{B}$ 这两个具有相同尺度的矩阵，我们可以定义矩阵加法、矩阵减法以及数乘。矩阵

$$\mathbf{C} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{B},$$

具有元素 $c_{ij} = k_1a_{ij} + k_2b_{ij}$，而矩阵减法$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$。矩阵加法满足结合律和交换律。

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

尺度为 $m \times n$ 的$\mathbf{A}$ 和尺度为 $n \times p$ 的$\mathbf{B}$ 的矩阵乘法定义为

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB},$$

其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$。矩阵乘法满足结合律，但通常不满足交换性。

矩阵 $\mathbf{B}=(b_{ij})$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的转置矩阵，矩阵 $\mathbf{A}$ 的尺度为 $m\times n$，转置矩阵的尺度为 $n\times m$，其元素为 $b_{ij}=a_{ji}$。我们将 $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{\top}$ 记作。若 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\top}$，则称矩阵 $\mathbf{A}$ 为对称矩阵。若 $\mathbf{A}=-\mathbf{A}^{\top}$，则称矩阵 $\mathbf{A}$ 为反对称矩阵。

定义尺度为 $n\times n$ 的单位矩阵为

$$\mathbf{I}_n=\begin{bmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\ddots&\ddots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&0&1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

对于任意尺度为 $m\times n$ 的矩阵 $\mathbf{A}$ 和尺度为 $n\times m$ 的矩阵 $\mathbf{B}$，有 $\mathbf{人工智能}_n=\mathbf{A}$，且 $\mathbf{I}_n\mathbf{B}=\mathbf{B}$。

所有元素均为 0 的矩阵称为零矩阵。尺度为 $n\times n$ 的零矩阵记作 $\mathbf{0}_n$。

将矩阵 $\mathbf{A}$ 的列记作 $\mathbf{a}_i=[a_{11},\dots,a_{m1}]^{\top}$，则 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n]$。vec算子定义如下：

$$\mathrm{vec}(\mathbf{A})=[\mathbf{a}_1^{\top},\dots,\mathbf{a}_n^{\top}]^{\top}\in\mathbb{C}^{mn}. \tag{A.1}$$

## A.2 行列式与逆矩阵

尺度为 $n\times n,$ 的方阵 $\mathbf{A}$ 的行列式，记作 $\det(\mathbf{A})=|\mathbf{A}|$，可由拉普拉斯公式计算

$$\begin{aligned}|A|=&a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{33}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\\&+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{24}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&a_{34}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n4}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}-\cdots\\=&\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|\mathbf{A}_{ij}|,\end{aligned}$$

其中，$\mathbf{A}_{ij}$ 是矩阵$\mathbf{A}$ 删除第 $i$ 行和第 $j$ 列后得到的矩阵。

尺度为 $n\times n$ 的方阵$\mathbf{A}$是非奇异（奇异）的，当且仅当 $|\mathbf{A}|\neq 0$（分别为 $|\mathbf{A}|=0$）。当 $\mathbf{A}$ 非奇异时，存在唯一的矩阵$\mathbf{B}$（尺度为 $n\times n$）满足$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{I}_n$，称为$\mathbf{A}$的逆矩阵，记作$\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{adj}\det(\mathbf{A})$，其中$\mathbf{A}_{adj}=[|\mathbf{A}_{ij}|]^{\top}$，且 $|\mathbf{A}_{ij}|$ 是$\mathbf{A}_{ij}$的行列式。

## A.3 特征值、特征向量、Cayley-Hamilton 定理

多项式 $|s\mathbf{I}_n-\mathbf{A}|$ 被称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征多项式。该多项式的每个解 $\lambda_i$ 都被称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的一个特征值。对于 $\mathbf{A}$ 的每个特征值，始终至少存在一个

满足方程的特征向量 $\mathbf{x}$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{x}.$$

如果 $\lambda_k$ 是特征多项式的一个单根，则唯一存在一个特征向量 $\mathbf{x}$ 满足 $|\mathbf{x}| = 1$。反之，如果 $\lambda_k$ 是多项式的一个重根，则可能存在多个与该特征值对应的归一化特征向量。对于每个矩阵 $\mathbf{A}$ ，

$$|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

矩阵 $\mathbf{A}$ 满足其自身的特征方程（凯莱 - 哈密顿定理），即如果

$$|s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}| = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_0, \tag{A.2}$$

thì

$$\mathbf{A}^n + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + \alpha_0\mathbf{I}_n = \mathbf{0}_n. \tag{A.3}$$

## A.4 格尔施戈林定理

对于 $\mathbf{A}$ $= [a_{ij}] \in$ C$^{n\times n}$，可以根据格尔施戈林定理估计矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值位置：对于 $\mathbf{A}$的每个特征值 $s_k$，总存在一个指标 $i = 1$， 2，.....， $n$，使得 $s_k$位于圆心为 $a_{ii}$ 、半径为 $R_i = \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}|$的圆内。因此，$\mathbf{A}$ 的所有特征值都位于由格施戈林圆盘 $C_1 \cup C_2 \cup \ldots C_n$, 构成的平面区域内，其中

$$C_i = \{s \in \mathbb{C}|\ |s - a_{ii}| \leq R_i\},\ i = 1, \ldots, n. \tag{A.4}$$

## A.5 矩阵对角化与若尔当形

矩阵 A 2 R$^{m\times n}$ 的像空间记作 im(A)，定义为 im(A) = {Ax 2 R$^m$| x 2 R$^n$}. 。A 的核定义为 ker(A) = {x 2 R$^n$| Ax $= \mathbf{0}_m$}. 。显然，im(A$^\top$) 与 ker(A) 正交，因为对于任意 y 2 im(A$^\top$)、x 2 ker(A)，都有 y $=$ A$^\top$x$_1$ ，且 y$^\top$x $=$ x$_1^\top$ Ax $= 0$。

两个尺寸为 $n \times n$ 的矩阵 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 相似，当且仅当存在一个尺寸为 $n \times n$ 的非奇异矩阵 $\mathbf{P}$ ，使得 $\mathbf{B}$ $= \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$。相似矩阵具有相同的特征值。若存在非奇异矩阵 $\mathbf{P}$ ， 使得

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$$

với $\mathbf{\Lambda}$ 是一个对角矩阵，其主对角线上的元素是$\mathbf{A}$的特征值。对于每一个方阵$\mathbf{A}$ ，总存在矩阵$\mathbf{P}$ ，使得

$$\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{J} = \text{blkdiag}(\mathbf{J}_k),$$

其中，$\mathbf{J}$ 是$\mathbf{A}$ 的若尔当形，blkdiag 表示由$\mathbf{J}_k$ 构成、且这些矩阵位于主对角线上的对角矩阵。矩阵$\mathbf{J}$ 的每个块$\mathbf{J}_k$ 都对应$\mathbf{A}$的一个特征值 $\lambda_k$ 。如果 $\lambda_k$ 是一个单特征值，或者是一个重特征值 $m$ ，且有完整的 $m$ 线性无关特征向量，那么

$$\mathbf{J}_k = \text{diag}(\lambda_k, \ldots, \lambda_k) \in \mathbf{C}^{m\times m}.$$

如果 $\lambda_k$ 是一个重特征值 $m$，且只有一个线性无关特征向量，那么

$$\mathbf{J}_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times m}$$

与特征值 $\lambda_k$ 对应的特征向量和广义特征向量，可分别通过求解以下方程得到：

$$(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \tag{A.5}$$
$$(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1, \tag{A.6}$$
$$\vdots$$
$$(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I})\mathbf{v}_m = \mathbf{v}_{m-1}. \tag{A.7}$$

## A.6 矩阵指数函数

方阵 $\mathbf{A}$ 的矩阵指数定义为

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 + \ldots,$$

其中，级数收敛是指矩阵中的每个元素 $ij$ 都收敛。约定 $\mathrm{e}^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$。由凯莱-哈密顿定理还可推出，$\mathrm{e}^{\mathbf{A}}$ 可表示为矩阵 $\mathbf{I}_n, \mathbf{A} \ldots, \mathbf{A}^{n-1}$的线性组合。当 $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n)$ 时，$\mathrm{e}^{\mathbf{A}} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{x_1}, \ldots, \mathrm{e}^{x_n})$。

若 $\mathbf{A}$ 和$\mathbf{B}$ 是两个可交换的方阵，则

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = \mathrm{e}^{\mathbf{B}} \mathrm{e}^{\mathbf{A}} = \mathrm{e}^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}. \tag{A.8}$$

由此可得 $\mathrm{e}^{\mathbf{A}}\mathrm{e}^{-\mathbf{A}} = \mathbf{I}$，并且对于每个多项式 $p(\mathbf{A})$，都有 $p(\mathbf{A})\mathrm{e}^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}p(\mathbf{A})$。此外，若 $t$ 是时间变量，则：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{A}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t} = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{A} \\ \mathrm{e}^{\mathbf{A}t_1}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t_2} &= \mathrm{e}^{\mathbf{A}(t_1+t_2)} \\ \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathrm{e}^{-\mathbf{A}t} &= \mathrm{e}^{\mathbf{0}t} = \mathbf{I}. \end{aligned} \tag{A.9}$$

## A.7 克罗内克积

两个矩阵 $\mathbf{A} \in \mathrm{C}^{m\times n}$ 和 $\mathbf{B} \in \mathrm{C}^{p\times q}$的克罗内克积，记作 $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$，是一个尺度为$mp \times nq$ 且满足以下条件的矩阵：

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \ldots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \ldots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \ldots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}. \tag{A.10}$$

对于尺度合适的矩阵 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$、$\mathbf{D}$，克罗内克积的一些性质如下：

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\otimes(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= \mathbf{A}\otimes\mathbf{B}+\mathbf{A}\otimes\mathbf{C}\\
(\mathbf{B}+\mathbf{C})\otimes\mathbf{A} &= \mathbf{B}\otimes\mathbf{A}+\mathbf{C}\otimes\mathbf{A}\\
(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})\otimes\mathbf{C} &= \mathbf{A}\otimes(\mathbf{B}\otimes\mathbf{C})\\
k(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}) &= k\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}\\
(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D}) &= (\mathbf{AC})\otimes(\mathbf{BD})\\
(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})^{\top} &= \mathbf{A}^{\top}\otimes\mathbf{B}^{\top}\\
\mathrm{rank}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}) &= \mathrm{rank}(\mathbf{A})\mathrm{rank}(\mathbf{B})
\end{aligned} \tag{A.11}$$

假设方阵$\mathbf{A}\in\mathsf{C}^{m\times m}$ 对应的特征值—特征向量对为 $(\lambda_i,\mathbf{u}_i)$ $i=1,\ldots,n$，且$\mathbf{B}\in\mathsf{C}^{n\times n}$ 对应的特征值—特征向量对为 $(\mu_j,\mathbf{v}_j)$，$j=1,\ldots,n$，那么$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}$ 的特征值—特征向量对为 $(\lambda_i\mu_j,\mathbf{u}_i\otimes\mathbf{v}_j)$，$i=1,\ldots,n$；$j=1,\ldots,m$。我们还有以下性质：

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})^{-1} &= \mathbf{A}^{-1}\otimes\mathbf{B}^{-1}\\
|\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}| &= |\mathbf{A}|^{m}|\mathbf{B}|^{n}\\
\mathrm{trace}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}) &= \mathrm{trace}(\mathbf{A})\mathrm{trace}(\mathbf{B})
\end{aligned} \quad . \tag{A.12}$$

## A.8 正定矩阵与半正定矩阵

对称矩阵$\mathbf{A}\in\mathrm{R}^{n\times n}$ 称为正定，当且仅当对于每个向量$\mathbf{x}\in\mathrm{R}^{n}$，只要$\mathbf{x}\neq\mathbf{0}_n$，其二次型

$$\mathbf{x}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{x}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j>0. \tag{A.13}$$

矩阵 $\mathbf{A}\in\mathrm{R}^{n\times n}$ 对称，当且仅当对于每个向量 $\mathbf{x}\in\mathrm{R}^{n}$，满足 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}_n$，都有 $\mathbf{x}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{x}$ 非负。

## A.9 向量和矩阵的范数

向量 $\mathbf{x}$ 的范数记作 $\|\mathbf{x}\|$，满足 (i) $\|\mathbf{x}\|\geq 0$，(ii) $\|a\mathbf{x}\|=|a|\|\mathbf{x}\|$ 对所有 $a\in\mathrm{R}$ 成立，且 (iii)$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\leq\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$，$\forall\mathbf{x},\mathbf{y}$。对于 $\mathbf{x}=[x_1,\ldots,x_n]^{\top}$，常用的范数为

$$\|\mathbf{x}\|_2=\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)^{1/2},\ \|\mathbf{x}\|_\infty=\max_i|x_i|,\ \text{và}\ \|\mathbf{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$

如果没有明确指定下标符号，我们就将 $\|\mathbf{x}\|$ 理解为向量 $\mathbf{x}$ 的 2 范数。

施瓦茨不等式：$|\mathbf{x}^{\top}\mathbf{y}|\leq\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$，其中等号成立当且仅当 $\mathbf{x}=\lambda\mathbf{y}$，且$\lambda\in\mathsf{C}$。

矩阵 $\mathbf{A}\in\mathrm{R}^{m\times n}$ 的范数通过向量范数定义如下：

$$\|\mathbf{A}\|=\max_{\|\mathbf{x}\|=1}\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|.$$

与上述向量范数相对应的矩阵范数为 $\lambda_{\max}(\mathbf{A}^{\top}\mathbf{A})^{1/2}$、$\max_i(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|)$ 和 $\max_j(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|)$。同时，矩阵范数的一些性质如下：

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|\leq\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|,\ \|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|\leq\|\mathbf{A}\|+\mathbf{B},\ \text{và}\ \|\mathbf{A}\mathbf{B}\|\leq\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|.$$

# A.10 Perron-Frobenius理论

矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $n \geq 2$ $a_{ij} \geq 0$ $a_{ij} > 0, \forall i, j = 1, \cdots, n$，是非负矩阵（正矩阵），当且仅当（相应地）。$\mathbf{A}$ 的谱半径是复平面上以坐标原点为圆心、包含 $\mathbf{A}$ 的所有特征值的最小圆盘的半径，

$$\rho(\mathbf{A}) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ là giá trị riêng của } \mathbf{A}\}. \tag{A.14}$$

矩阵 $\mathbf{A}$ 不可约（irreducible），当且仅当 $\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k$ 是正矩阵；否则，$\mathbf{A}$ 是可约的。如果存在 $k \in \mathbb{N}$，使得 $\mathbf{A}^k$ 是正矩阵，则称 $\mathbf{A}$ 为本原矩阵（primitive）。

当$\mathbf{A}$ 为非负矩阵时：

- 存在一个主导实特征值（或 Perron特征值） $\lambda$，使得对于$\mathbf{A}$ 的每个其他特征值 $\mu$，都有 $\lambda \geq |\mu| \geq 0$。
- 与 $\lambda$ 对应的左右特征向量都可以选为非负向量。

- 如果再增加假设 $\mathbf{A}$ 不可约，则主导特征值是单特征值，并且为 $\lambda > 0$。同时，与特征值 $\lambda$ 对应的右特征向量和左特征向量是唯一的（不计尺度差异）。

- 如果进一步假设$\mathbf{A}$ 是本原矩阵，那么主导特征值满足 $\lambda > |\mu|$ 对任意特征值 $\mu \neq \lambda$。

# 附录 B

# 凸集与凸函数

本章中关于凸集和凸函数的内容取自 [176]。

## B.1 凸集

设 $\mathbf{x}_1$,$\mathbf{x}_2$ 是 $\mathrm{R}^d$ 中的两个点，连接 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 的线段是由以下各点组成的集合

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2, \quad \forall \lambda \in [0,1]. \tag{B.1}$$

集合 $M \subseteq \mathrm{R}^d$ 是凸集，当且仅当 $M$ 包含其中任意两点之间的所有线段。换句话说， $M$ 是凸集，当对于任意 $\mathbf{x}_1$,$\mathbf{x}_2 \in \mathrm{R}^d$，都有

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in M, \quad \forall \lambda \in [0,1]. \tag{B.2}$$

设 $\mathbf{x}_i \in \mathrm{R}^d$, $i = 1, \ldots, n$，这些点 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ 的凸包或凸组合定义为

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d | \ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{x}_i, \ \forall \lambda_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}. \tag{B.3}$$

若在定义 (B.3) 中， $\lambda_i \in (0,1)$，则 $\mathcal{H}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ 是严格凸集。

## B.2 凸函数

定义在凸集 $M \subseteq \mathrm{R}^d$ 上的函数 $f\colon M \to \mathrm{R}$ 称为凸函数，如果

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \leq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2), \ \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^d, \forall \lambda \in [0,1]. \tag{B.4}$$

Nếu

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) < \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2), \ \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in M, \forall \lambda \in (0,1), \tag{B.5}$$

则 $f$ 是严格凸函数。

函数 $f$ 是凹函数（严格凹函数），当且仅当 $-f$ 是凸函数（相应地，严格凸函数）。

设 $f_1, f_2$ 是定义在凸集 $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的两个凸函数，且实数 $\lambda \geq 0, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$，则以下函数为凸函数:

$$(\lambda f_1)(x) \triangleq \lambda f_1(x), \text{ trên tập lồi } X_1, \tag{B.6a}$$

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) \triangleq f_1(x) + f_2(x), \text{ trên tập lồi } x \in X_1 \cap X_2, \tag{B.6b}$$

$$\max\{f_1, f_2\}(x) \triangleq \max\{f_1(x), f_2(x)\}, \text{ trên tập lồi } X_1 \cap X_2. \tag{B.6c}$$

**定理 B.1**（可微凸函数）。设 $f$ 是定义在开凸集 $M \subseteq \mathbb{R}^d$ t 上的可微函数 hì

i. $f$ 在 $M$ 上是凸函数，当且仅当

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)(y - x)\ \forall x, y \in M.$$

ii. $f$ 在 $M$ 上是凹函数，当且仅当

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)(y - x)\ \forall x, y \in M.$$

**Định定理 B.2**（二阶可微凸函数）。设 $f$ 是定义在开凸集 $M \subseteq \mathbb{R}^d$ th 上的二阶可微函数 ì

i. $f$在 $M$上是凸函数，当且仅当海森矩阵 $\bigtriangledown^2 f(x)$ 在 $M$上半正定。

ii. $f$在 $M$上是严格凸函数，当且仅当 $\bigtriangledown^2 f(x)$在 $M$上正定。

**定理 B.3**（凸函数的极值）。若 $f$ 是凸集 $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^d$ 上的凸函数，且 $x^*$ 是 $f$ 的一个局部极值，则:

i. $x^*$ 也是全局最优点。

ii. 如果 $x^*$ 是严格局部最优解，或者 $f$ 是严格凸函数，那么 $x^*$ 是 $f$的唯一全局最优解。

# 附录 C

# 控制理论

关于线性控制理论的一些参考文献包括 [187, 10] 和 [185]。本小节中的一些非线性控制理论结果摘自 [126]。

## C.1 线性系统

考虑由下列方程给出的连续、线性、不变且因果系统:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{C.1}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{C.2}$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^d$ 是状态变量，$\mathbf{u} \in \mathrm{R}^p$ 是输入变量，$\mathbf{y} \in \mathrm{R}^q$ 是输出变量，而$\mathbf{A}\in \mathrm{R}^{d\times d}$,$\mathbf{B}\in \mathrm{R}^{d\times p}$ 和$\mathbf{C} \in \mathrm{R}^{q\times d}$ 是系统的矩阵。

系统 (C.1)–(C.2) 的解，其中 $t \geq 0$，由下式给出

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau, \tag{C.3}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\int_0^t \mathrm{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau, \tag{C.4}$$

其中，$\mathrm{e}^{\mathbf{A}}$ 是方阵 $\mathbf{A}$ 的矩阵指数。

考虑系统 (C.1)–(C.2)，其中 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$，即 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$。设 $\lambda_k, k = 1, \ldots, d$ 为矩阵 A 的特征值，满足特征方程 $\det(s\mathbf{I}_d - \mathbf{A}) = 0$。当 $\mathrm{Re}\{\lambda_k\} < 0, \forall k$ 时，系统是 Hurwitz稳定性。如果 $\mathrm{Re}\{\lambda_k\} \leq 0, \forall k$，且实部为 0 的特征值的代数重数等于几何重数。假设矩阵 A 具有若尔当形 $\mathbf{J} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$，其中 $\mathbf{U}\ 2\ \mathbf{C}^{d\times d}$，则系统的自由响应为 $\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 = \mathbf{U}\mathrm{e}^{\mathbf{J}\mathbf{t}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}_0$。

可控性矩阵的定义

$$\boldsymbol{\mathcal{C}} = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}],$$

以及可观测性矩阵

$$\boldsymbol{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}.$$

如果存在矩阵 $\mathbf{B}\in \mathrm{R}^{p\times d}$，使得矩阵 $(\mathbf{A}-\mathbf{BK})$ 为Hurwitz矩阵（所有特征值均位于虚轴左侧），则系统 (C.1)–(C.2) 被称为可稳定（stabilizable）。系统 (C.1)–(C.2) 完全可控当且仅

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\mathcal{C}}) = n.$$

如果系统完全可控，我们总能找到矩阵 $\mathbf{K}$，使矩阵 $(\mathbf{A}-\mathbf{BK})$ 具有任意预先选定的 $d$ 个特征值。

如果存在矩阵 $\mathbf{L}\in \mathrm{R}^{q\times d}$，使矩阵 $(\mathbf{A}-\mathbf{LC})$ 为赫尔维茨矩阵，则称系统 (C.1)–(C.2) 是可检测的（detectable）。系统 (C.1)–(C.2) 完全可观，当且仅

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\mathcal{O}}) = n.$$

如果系统完全可观，我们总能找到矩阵 $\mathbf{L}$，使矩阵 $(\mathbf{A}-\mathbf{LC})$ 具有任意预先选定的 $d$ 个特征值。

## C.2 李雅普诺夫稳定性理论

本小节回顾李雅普诺夫方法在自治系统稳定性分析中的一些基本结果。关于这些结果的证明和示例，感兴趣的读者可参阅非线性控制理论方面的经典参考书，如 [126, 254]。

考虑由以下方程给出的自治系统：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{C.5}$$

其中 $\mathbf{f}: D \to \mathrm{R}^d$ 是从集合 $D \subseteq \mathrm{R}^d$ 到 $\mathrm{R}^d$的连续函数。不失一般性，假设 $\mathbf{x} = \mathbf{0}_d \in D$ 是系统的一个平衡点，即 $\mathbf{f}(\mathbf{0}_d) = \mathbf{0}_d$。

**定义 C.1.** (C.5) 的平衡点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}_d$ 称为

- 稳定，如果对于每个 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ 使得

  $$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon,\ \forall t \geq 0.$$

  N反之，如果上述条件不满足，$\mathbf{x} = \mathbf{0}_d$ 就是一个不稳定平衡点。
- 渐近稳定，如果它是稳定的，并且 $\delta$ 可以选取得满足

  $$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}_d.$$

我们有以下若干定理，可用于检验系统在$\mathbf{x} = \mathbf{0}_d$处的稳定性

**定理 C.1**（Lyapunov 直接法）。假设存在函数 $V: D \to \mathrm{R}$ 连续可微，且满足：

- $V(\mathbf{x})$ 相对于$\mathbf{x}$正定：$V(\mathbf{0}_d) = 0$ 且 $V(\mathbf{x}) > 0,\ \forall \mathbf{x} \in D \setminus \{\mathbf{0}_d\}$,
- $\dot{V}(\mathbf{x})$ 相对于$\mathbf{x}$是负半定的：$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0,\ \forall \mathbf{x} \in D$。

此时，$\mathbf{x} = \mathbf{0}_d$ 是稳定的。

Nế若还满足条件 $\dot{V}(\mathbf{x})$关于$\mathbf{x}$ 是负定的（即 $\dot{V}(\mathbf{0}_d) = 0$ 且 $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0, \forall \mathbf{x} \in D \backslash \{\mathbf{0}$ $\})$ 则原点 坐标是渐近稳定的。

最后，若上述条件对 $D = \mathrm{R}^d$均成立，且函数 $V$ 满足 $\|\mathbf{x}\| \to \infty \Rightarrow V(\mathbf{x}) \to \infty$，则相应的$\mathbf{x} = \mathbf{0}_d$ 是全局稳定/全局渐近稳定的。

要证明系统的平衡点$\mathbf{x} = \mathbf{0}_d$ 不稳定，可以使用Chetaev定理，表述如下：

**Định C.2 节** （切塔耶夫定理）。 假设存在连续可微泛函 $V$：$D \to$R，满足 ：

- $V(\mathbf{0}_d) = 0$ 且 $V(\mathbf{x}) > 0$ 对于属于坐标原点任意小邻域的$\mathbf{x}$ ，
- 在集合 $B_r = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^d | \| \| \leq r\}$ $r > 0$ $B_r \subset D$ $U = \{$ $\in$ 中，$\mathbf{x}$ 足够小时，使得存在集合$\mathbf{x}$ $B_r | V(\mathbf{x}) > 0\}$ 满足 $V(\mathbf{x}) > 0$，$\forall \mathbf{x} \in U$。

此时，$\mathbf{x} = \mathbf{0}_d$ 是不稳定的。

在Lyapunov定理中，寻找满足 $\dot{V}$ 负定的函数 $V$ 通常会遇到许多困难。LaSalle不变原理提供了一种工具，可在 $\dot{V}$ 为负半定时证明渐近稳定性。

一个集合相对于 (C.5) 是不变的，如果

$$\mathbf{x}(0) \in M \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in M, \ \forall t \geq 0.$$

从 $\mathbf{x}(t)$ 到不变集 $M$ 的距离定义为从 $\mathbf{x}(t)$ 到 $M$ 中任意一点的最小距离：

$$\mathrm{dist}(\mathbf{x}(t), M) = \inf_{\mathbf{y} \in M} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}(t)\|.$$

此时，当 $t$ 趋于无穷时，$\mathbf{x}(t)$ 趋于集合 $M$，如果对每个预先给定的 $\epsilon > 0$，存在 $T > 0$ 使得

$$\mathrm{dist}(\mathbf{x}(t), M) < \epsilon, \ \forall t > T.$$

**定理 C.3** （拉萨尔不变性定理）**.** 设 $\Omega \subset D$ 是一个相对于 (C.5) 不变的紧集。假设存在连续可微函数 $V$：$D \to$ R，使得对所有 $\mathbf{x} \in \Omega$，$\dot{V}(\mathbf{x})$ 为负半定。定义 $E = \{\mathbf{x} \in D | \ \dot{V} = 0\}$，且 $M$ 是 $E$ 中的最大不变集。则 (C.5) 的每一个从 $\Omega$ 出发的解在 $t \to \infty$ 时将趋于 $M$。

假设在 $E$中不存在平衡解，除平凡解$\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}_d$外，则坐标原点渐近稳定。

在定理 C.3 中，若 $D = \mathrm{R}^d$ 且函数 $V$还满足条件 $\|\mathbf{x}\| \to \infty \Rightarrow V(\mathbf{x}) \to \infty$，同时在 $E = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^d | \ \dot{V} = 0\}$中不存在平衡解，除平凡解$\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}_d$外，则坐标原点渐近稳定。

## C.3 Barbalat引理

Barbalat引理是分析动力系统收敛性的工具，通常用于系统具有时变性的情况。

函数 $\mathbf{f} : \mathrm{R}^d \to \mathrm{R}^n$ 是一致连续的，当每个 $\epsilon > 0$ 时，都存在 $\delta > 0$ 使得：

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| < \epsilon, \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d. \tag{C.6}$$

**定理 C.4** (Barbalat引理)。 假设函数 $\mathbf{f}(t)$ 在 $t \to \infty$ 时存在有限极限，并且如果 $\dot{\mathbf{f}}$ 一致连续，或者 $\ddot{\mathbf{f}}$ 有界，则 $\lim_{t\to\infty} \dot{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{0}_n$。

# 附录 D

# MATLABTM 仿真

有关控制方向的 MATLAB/SIMULINK 使用指南文献可参阅
`https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Home`。

## D.1 表示二维和三维编队的函数

```
1 函数 y =PlotFormation (n , d , t , p ,H, o ) 2 % n: 智能体数量 3 % d: 空间维数（或每个智能体的状态变量数） 4 % t: 仿真时间区间 5 % p: 时变构型 6 % H: 关联矩阵 7 % o: 选项 8 set (0 , ' defaultTextInterpreter ' , ' tex ' ) ; 9 10 如果 (( d*n==s i z e (p , 1 ) ) && (n ==length (H( 1 , : ) ) ) ) 11 如果 o==1 % 绘制轨迹、初始构型和最终构型 12 图形 ; 13 保持绘图 14 m =length (H( : , 1 ) ) ; 15 r = 1: n ; 16 t_end =length ( t ) ; 17 如果 d==218 绘图 (p ( 1 , : ) , p ( 2 , : ) , ' Color ' , 'k ' , ' LineWidth ' , 1) ; 19 绘图 (p(1 ,1) , p(2 ,1) , ' o ' , ' MarkerSize ' , 12 , ' MarkerEdgeColor ' , 'b ' , ... ' MarkerFaceColor ' , 'w' ) ; 20 绘图 (p(1 , t_end) , p(2 , t_end) , ' o ' , ' MarkerSize ' , 12 , ' MarkerEdgeColor ' , ' r ' , ... ' MarkerFaceColor ' , 'w' ) ; 21 对于 k=1:m 22 index1 =r (H(k , : ) <0) ; i ndex2 =r (H(k , : ) >0) ; 23 % 如果想绘制初始构型，请删除下一行中的 % 24 % 线条 ( [p( index1*2-1 ,1) , p( index2*2-1 ,1) ] , [p( index1*2 ,1) , p( index2*2 ,1) ] , ... ' Color ' , color1 , ' LineWidth ' , 1 , ' LineStyle ' , ' - - ' ) ; 25 线条 ( [p( index1*2-1 ,t_end) , p( index2*2-1 ,t_end) ] , [p( index1*2 ,t_end) , ... p( index2*2 ,t_end) ] ,' Color ' , ' r ' , ' LineWidth ' , 1 , ' LineStyle ' , ' - ' ) ; 26 结束 27 对于 i =1:n 28 绘图 (p(2*i - 1 , : ) , p(2*i , : ) , ' Color ' , 'k ' , ' LineWidth ' , 1) ;
```

29 绘图 (p(2*i-1,1), p(2*i, 1), 'o', 'MarkerSize', 12, 'MarkerEdgeColor', 'b', ... 'MarkerFaceColor', 'w'); 30 绘图 (p(2*i-1, t_end), p(2*i, t_end), 'o', 'MarkerSize', 12, 'MarkerEdgeColor', ... 'r', 'MarkerFaceColor', 'w'); 31 文本 (p(2*i-1,1), p(2*i, 1), sprintf('%d', i), '字体大小',9, 'Color', 'k', ... '水平对齐', 'center'); 32 文本 (p(2*i-1, t_end), p(2*i, t_end), sprintf('%d', i), '字体大小', 9, 'Color', ... 'k', '水平对齐', 'center'); 33 结束 34 否则 35 如果 d==336 三维绘图 (p(1, 1:t_end), p(2, 1:t_end), p(3, 1:t_end), 'Color', 'k', 'LineWidth', 1); 37 三维绘图 (p(1,1), p(2,1), p(3,1), 'o', 'MarkerSize', 12, 'MarkerEdgeColor', 'b', ... 'MarkerFaceColor', 'w'); 38 三维绘图 (p(1, t_end), p(2, t_end), p(3, t_end), 'o', 'MarkerSize', 12, ... 'MarkerEdgeColor', 'r', 'MarkerFaceColor', 'w'); 39 对于 k=1:m 40 index1 = r(H(k, :) <0); index2 = r(H(k, :) >0); 41 % 如果想绘制初始构型，请删除下一行中的 % 42 % 线条 ([p(index1*3-2,1), p(index2*3-2,1)], [p(index1*3-1,1), p(index2*3-1,1)], ...[p(index1*3,1),p(index2*3,1)], 'Color', color1, 'LineWidth', 1, ... 'LineStyle', '--'); 43 线条 ([p(index1*3-2,t_end), p(index2*3-2,t_end)], [p(index1*3-1,t_end), ... p(index2*3-1,t_end)], [p(index1*3,t_end), p(index2*3,t_end)], 'Color', ... 'r', 'LineWidth', 1, 'LineStyle', '-'); 44 结束 45 对于 i =1:n 46 三维绘图 (p(3*i - 2, 1:t_end), p(3*i - 1, 1:t_end), p(3*i, 1:t_end), 'Color', 'k', ... 'LineWidth', 1); 47 三维绘图 (p(3*i-2,1), p(3*i-1,1), p(3*i, 1), 'o', 'MarkerSize', 12, ... 'MarkerEdgeColor', 'b', 'MarkerFaceColor', 'w'); 48 三维绘图 (p(3*i-2, t_end), p(3*i-1, t_end), p(3*i, t_end), 'o', 'MarkerSize', 12, ... 'MarkerEdgeColor', 'r', 'MarkerFaceColor', 'w'); 49 文本 (p(3*i-2,1), p(3*i-1,1), p(3*i, 1), sprintf('%d', i), '字体大小', 9, ... 'Color', 'k', '水平对齐', 'center'); 50 文本 (p(3*i-2, t_end), p(3*i-1, t_end), p(3*i, t_end), sprintf('%d', i), ... '字体大小', 9, 'Color', 'k', '水平对齐', 'center'); 51 视角 (3); 52 z 标签 z; 53 结束 54 结束 55 结束 56 x轴标签 x; 57 y轴标签 y; 58 坐标轴等比例; 59 边框开启; 60 图例 {1} = 'p_i(t)'; 图例 {2} = 'p_i(0)'; 图例 {3} = sprintf('p_i(%d)', t(t_end)); 61 图例 (图例, 'NumColumns',1, '位置', 'southeast'); 62 63 否则如果 o==2 % 绘制初始构型 64 图形; 65 保持绘图 66 m =length(H(:, 1)); 67 r = 1:n; 68 如果 d==269 绘图 (p(1,1), p(2,1), 'o', 'MarkerSize', 12, 'MarkerEdgeColor', 'b', ... 'MarkerFaceColor', 'w'); 70 对于 k=1:m 71 index1 = r(H(k, :) <0); index2 = r(H(k, :) >0);

```
72 线条 ( [p( index1*2-1 ,1) , p( index2*2-1 ,1) ] , [p( index1*2,1) , p( index2*2,1) ] ,... ' 颜色 ' , 'b ' , ' 线宽 ' , 1 , ' 线型 ' , ' - ' ) ; 73 end 74 f o r i =1:n 75 绘图 (p(2*i -1 ,1) , p(2*i , 1 ) , ' o ' , ' 标记大小 ' , 12 , ' 标记边缘颜色 ' , ' b ' , ... ' 标记填充颜色 ' , 'w' ) ; 76 文本 (p(2*i -1 ,1) , p(2*i , 1 ) , s p r i n t f ( '%d ' , i ) , ' 字体大小 ' ,9 , ' 颜色 ' , 'k ' , ... ' 水平对齐 ' , ' 居中 ' ) ; 77 end 78 e l s e 79 i f d==380 三维绘图 (p(1 ,1) , p(2 ,1) , p(3 ,1) , ' o ' , ' 标记大小 ' , 12 , ' 标记边缘颜色 ' , 'b ' , ... ' 标记填充颜色 ' , 'w' ) ; 81 f o r k=1:m 82 index1 =r (H(k , : ) <0) ; index2 =r (H(k , : ) >0) ; 83 线条 ( [p( index1*3-2 ,1) , p( index2*3-2 ,1) ] , [p( index1*3-1 ,1) , p( index2*3-1 ,1) ] ,...[p( index1*3,1) ,p( index2*3,1) ] ,' 颜色 ' , 'b ' , ' 线宽 ' , 1 , ... ' 线型 ' , ' - ' ) ; 84 end 85 f o r i =1:n 86 三维绘图 (p(3*i -2 ,1) , p(3*i -1 , 1) , p(3*i , 1 ) , ' o ' , ' 标记大小 ' , 12 , ... ' 标记边缘颜色 ' , 'b ' , ' 标记填充颜色 ' , 'w' ) ; 87 文本 (p(3*i -2 ,1) , p(3*i -1 , 1) , p(3*i , 1 ) , s p r i n t f ( '%d ' , i ) , ' 字体大小 ' , 9 , ... ' 颜色 ' , 'k ' , ' 水平对齐 ' , ' 居中 ' ) ; 88 end 89 z轴标签 z ; 视角 (3) 90 end 91 end 92 x轴标签 x 93 y轴标签 y 94 坐标轴等比例 95 边框 on 96 leg {1} =' p_i (0) ' ; 97 图例 ( leg , ' 列数 ' ,1 , ' 位置 ' , ' 东南 ' ) ; 98 e l s e 99 y = 1; 100 end 101 y = 1; 102 e l s e 103 % 打印错误 104 f p r i n t f ( ' 错误！请检查输入数据 \n ' ) 105 y = 0; 106 end 107 end
```

## D.2 编队随时间变化的表示

```
1 %% 按位置偏差进行多智能体编队控制2 全局 p_dL3 % 初始化初始位置
4 n = 9;5 p0 = 20*(rand(2*n,1)-0.5);6 % 拉普拉斯矩阵7 L =n*
eye(n)-ones(n,n);89 % 目标编队
```

```
10 P_d = [0 0; 1 1; 1 -1; 3 0; 0 3; 0 -3; -1 1; -1 -1; -3 0]'; 11 12 p_d =P_d(:); 13 [t, p] =
ode45(@control_law, [0:0.01: 1], p0); 14 p =p'; 15 t_end =length(t); 16 17 figure(1)
18 保持绘图 19 str =sscanf(str(2:end), '%2x%2x%2x', [1 3])/255;
21 for i =1:n 22 三维绘图(t(1,1),p(2*i-1,1),p(2*i,1), 'Color', 'r',"Marker","x"); 23 三维
绘图(t, p(2*i-1, 1:t_end),p(2*i, 1:t_end), 'Color', color, '线宽',... 1,"线型","-"); 24 三维绘
图(t(t_end, 1),p(2*i-1, t_end),p(2*i, t_end), 'ob'); 25 end 26 27 H = [-1 1 0 0 0 0 0 0 0; 28 -
1 0 1 0 0 0 0 0 0; 29 -1 0 0 0 0 0 0 1 0; 30 -1 0 0 0 0 0 1 0 0; 31 0 -1 0 1 0 0 0 0 0; 32 0 -1 0 0 1 0 0 0 0; 33
0 0 -1 1 0 0 0 0 0; 34 0 0 -1 0 0 1 0 0 0; 35 0 0 0 -1 1 0 0 0 0; 36 0 0 0 -1 0 1 0 0 0; 37 0 0 0 0 -1 0 1 0 0; 38
0 0 0 0 -1 0 0 0 1; 39 0 0 0 0 0 -1 0 1 0; 40 0 0 0 0 0 0 -1 0 1; 41 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 1; 42 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 1];
43 44 for i =1:length(H) 45 Px=[]; Py=[]; Px1=[]; Py1=[]; 46 for j =1:9 47 if H(i,j)~=0 48 Px
= [Px, p(2*j-1, t_end)]; 49 Py = [Py, p(2*j, t_end)]; 50 Px1 = [Px1, p(2*j-1,1)]; 51 Py
1 = [Py1, p(2*j, 1)]; 52 end 53 end 54 line([t(t_end, 1), t(t_end, 1)],Px, Py, 'Color', 'b')
; 55 line([t(1,1), t(1,1)],Px1, Py1, 'Color', 'k'); 56 end 57 边框 on 58 x 轴标签 t; y 轴标签 x;
zlabely 59 图例({'Vitridau', 'Qui dao', 'Vitricuoi'}); 60 视角 (3) 61 62 %% 63 function
dpdt =control_law(t, xi) 64 global L p_d 65 dpdt =-kron(L, eye(2))*(xi-p_d); 66 end
```

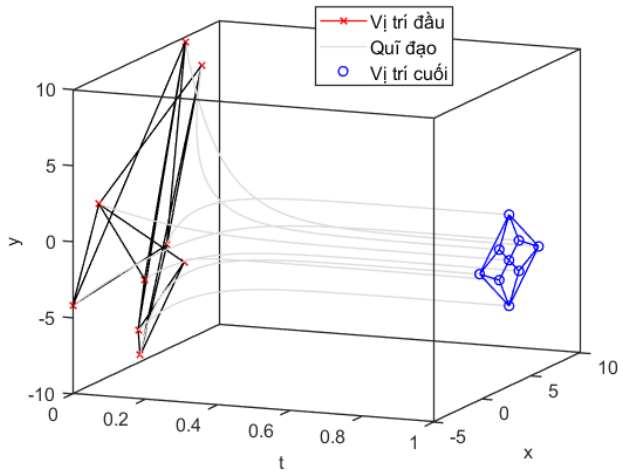



图 D.1：随时间变化的队形

# 索引

1-超刚性，145

会合问题，64 对偶问题，139 谱半径，214 随机游走，49 度，34 最小，35 最大，35 出度，37 入度，38 环，35 单，35 独立，40 保持方向向量的微分运动，126 平凡无穷小距离保持运动，117 度序列，35 点连通度，37 树，36 生成，36 有向生成，38 正定生成，193 正定，193 邻接边，34 退化构型，117 普适方向刚性，126 全局，125 微分，126 方向

微分，126 距离，115 普适，117 全局，116 全局普适，145 微分，116 一致性值，57 Fiedler 特征值，58 连接，48 Perron，214 单特征值，47 出根，38 聚类现象，195 凹函数，215 严格凹，215 凸，215 严格凸，215 不一致函数，85 复杂系统，24 大规模，24 自组织，23 一致性，55 Euler-Lagrange系统，97 系统，23 信息物理空间，24 联网，23 含噪一致性系统，96 矩阵权重，191 网络科学，23

图距离，37 自环，37 循环空间，40 子空间，56 连通，36 强连通，38 弱连通，38 一致性协议，55 信息流，56 边割，37 顶点，37 方向刚性理论，125 $\mathrm{R}^d$上的方向刚性，125 $SE(d)$上的方向刚性，125 图，33 刚性图，110 游走，35 M矩阵，41 度矩阵，39 加权度矩阵，193 入度，45 正交投影，125 方向刚性，125 校准方向刚性，126 距离刚性，117 正，185，214 不可约，214 不可约且非周期，74 非负，47，214 邻接，38，44 加权邻接矩阵，193 拉普拉斯，41，45 边拉普拉斯，90 刚性拉普拉斯，122 方向拉普拉斯，126 接地拉普拉斯，42，141 加权拉普拉斯矩阵，193 关联，39 本原，185，214 行随机，74 Abelson模型，174 Ahn，180 Altafini，182 French-Degroot，171 Friedkin-Johnsen，172 多维 Friendkin-Johnsen模型，175 Hegselmann-Krause，181 Taylor，175 Ye，177 回路，35 导电回路，49 Henneberg扩张，117 参考节点，139 划分，34，38 四元数，102 森林，36 超图，49 群体算法，26 PageRank，186 分布式优化，155 基于距离的网络定位，144 基于位置偏差，140 基于方向向量，142 一致性，55 比例，80 比例矩阵，81 正权重矩阵，100 离散时间共识，74 有限时间共识，97 算术平均共识，59 连通分量，36 包含出根的极大强连通分量，47 一致状态，56 智能体，23 智能体，23 方向等价，125 距离等价，115

方向相似，125 距离等价，115 边集，33 邻居，34 出邻居，38 入邻居，38 顶点，33 可行距离集，115 凸集，215 严格凸集，215 一致性集合，56 状态变量向量，55 方向向量，124，125 带符号路径向量，40 符号结构平衡图，182 凸包控制，175 非协作，26 网络化系统，23 合作，26 分散式，25 分布式，25 集中式，24 仅使用方向向量的编队控制，127 基于距离，114，125 基于方向向量，123 基于相对位置，111 多智能体系统协调，25 不动点，74 临界点，154 鞍点，154 图的直径，37 路径，35 有向，38

正定，192 单，35 邻接顶点，34 Gerschgorin定理，46，211 矩阵-树矩阵加权图，203 矩阵-树，45 传感器网络定位，139 图，33$k$-边连通，145 1-冗余定向刚性，127 补，51 正则，35 强正则，35 子，34 极大强连通，38 导出子，34 平衡，59 最小方向刚性，127 符号，182 Euler，51 有向，37 无环，74 Laman，117 扩展，35 收缩，35 复权重，102 无向，33 已定向，38 完全，35 同构，34 均匀，35 可通过距离定位，145 状态变量同步，66 边一致性，90 偏差，82 自适应，101 路径长度，35 编队，115

# 参考文献

[1] R. P. Abelson. 社会心理学中的数学模型。实验社会心理学进展，3:1–54，1967。[2] H.-S. Ahn. 《编队控制：分布式智能体方法》，第205卷。施普林格，2019年。[3] H.-S. Ahn、Q. V. Tran、M. H. Trinh、M. Ye、J. Liu 和 K. L. Moore. 含交叉耦合主题的意见动力学：建模与分析。*IEEE*计算社会系统汇刊，7(3):632–647，2020年。[4] H.-S. Ahn 和 M. H. Trinh. 有偏对齐下的一致性。*Automatica*，110:108605，2019年。[5] C. Altafini. 存在对抗性交互的网络一致性问题。*IEEE*自动控制汇刊，58(4):935–946，2013年。[6] B. D. O. Anderson. 莫尔斯理论与编队控制。载于第*19*届地中海控制与自动化会议（*MED*）论文集，希腊科孚，第656–661页，2011年。[7] B. D. O. Anderson 和 U. Helmke. 计算线上的临界编队数量。《*SIAM*控制与优化杂志》，52(1):219–242，2014年。[8] B. D. O. Anderson 和 C. Yu. 用于编队形状控制和简化传感器网络定位的仅测距感知。载于中国控制与决策会议（*CCDC*）论文集，第3310–3315页。IEEE，2011年。[9] B. D. O. Anderson、C. Yu、B. Fidan 和 J. M. Hendrickx. 自主编队的刚性图控制架构。控制系统杂志，28(6):48–63，2008。[10] P. J. Antsaklis 和 A. N. Michel. 线性系统。施普林格科学与商业媒体，2006年。[11] M. Aranda、G. López-Nicolás、C. Sagüés 和 M. M. Zavlanos. 基于相对位置测量的无坐标编队稳定。*Automatica*，57:11–20，2015年。[12]M. Aranda、G. López-Nicolás、C. Sagüés 和 M. M. Zavlanos. 在局部坐标中使用相对位置测量的分布式编队稳定。*IEEE*自动控制汇刊，61(12):3925–3935，2016年。[13] M. Arcak. 将无源性用作群体协调的设计工具。*IEEE*自动控制汇刊，52(8):1380–1390，2007年。[14] L. Asimow 和 B. Roth. 图的刚性。美国数学学会汇刊，245:279–289，1978。

[15] J. Aspnes、T. Eren、D. K. Goldenberg、A. S. Morse、W. Whiteley、Y. R. Yang、B. D. O. Anderson 和 P. N. Belhumeur. 网络定位理论。*IEEE*移动计算汇刊，5(12):1663–1678，2006年。[16]K. J. Åström 和 R. M. Murray. 反馈系统：科学家与工程师导论。普林斯顿大学出版社，2008年。[17] H. Bai、R. A. Freeman 和 K. M. Lynch. 时变输入的鲁棒动态平均一致性。载于第*49*届*IEEE*决策与控制会议（*CDC*）论文集，第3104–3109页。IEEE，2010年。[18] J. Baillieul 和 T. Samad. 系统与控制百科全书。施普林格，2015年。[19] A. Barabási.《链接：万物如何彼此相连，以及这对商业、科学和日常生活意味着什么》。Plume 出版书籍。Plume，2003年。[20] P. Barooah 和 J. P. Hespanha. 图有效电阻与分布式控制：谱性质与应用。载于第*45*届*IEEE*决策与控制会议论文集，第3479–3485页。IEEE，2006年。[21] M. Basiri、A. N. Bishop 和 P. Jensfelt. 具有仅角度约束的三角形编队分布式控制。《系统与控制快报》，59(2):147–154，2010年。[22] M. A. Belabbas. 平面编队的全局稳定性。*IEEE*自动控制汇刊，58(8):2148–2153，2013年。[23] S. Bereg. 平面中最小刚性图的认证与构造。载于第*21*届计算几何年度研讨会论文集，第73–80页，2005年。[24] C. Berge. 图与超图。北荷兰数学丛书。北荷兰出版公司，第6卷版，1973年。[25] S. P. Bhat 和 D. S. Bernstein. 连续自治系统的有限时间稳定性。《*SIAM*控制与优化杂志》，38(3):751–766，1998年。[26] N. Biggs. 代数图论。剑桥大学出版社，第二版，1993年。[27] A. N. Bishop. 四个智能体的分布式仅基于方位的编队控制及弱控制律。载于第*9*届*IEEE*控制与自动化国际会议论文集，第30–35页，2011年。[28] A. N. Bishop 和 M. Basiri. 平面和球面上的仅基于方位的三角形编队控制。载于第*18*届地中海控制与自动化会议（*MED*）论文集，摩洛哥，第790–795页，2010年。[29] A. N. Bishop、M. Deghat、B. D. O. Anderson 和 Y. Hong. 具有宽松运动要求的分布式编队控制。《国际鲁棒与非线性控制杂志》，25(17):3210–3230，2015年。[30] A. N. Bishop、I. Shames 和 B. D. O. Anderson. 具有仅方向约束的刚性编队稳定化。载于第*50*届*IEEE*决策与控制会议暨欧洲控制会议论文集，佛罗里达州奥兰多，第746–752页，2011年。

[31] L. M. Blumenthal。《距离几何理论与应用》。牛津大学出版社，1953年。[32] B. Bollobás。《极值图论》。Courier Corporation，2004年。[33]D. Brock、D. J. Montana 和 A. Z. Ceranowicz。多自主车辆的协调与控制。载于《IEEE国际机器人与自动化会议论文集》，第2725–2730页，1992年。[34]I. Buckley 和 M. Egerstedt。利用相对角度测量实现无穷小形状相似运动。载于《2017年IEEE/RSJ智能机器人与系统国际会议论文集（IROS），加拿大不列颠哥伦比亚省温哥华》，第1077–1082页，2017年。[35] F. Bullo。《网络系统讲义》，第1.7卷。Kindle Direct Publishing，加利福尼亚州圣巴巴拉，2024年。[36]M. Bürger、D. Zelazo 和 F. Allgöwer。基于无源性的协同控制中的对偶性与网络理论。《Automatica》，50(8)：2051–2061，2014年。[37] X. Cai 和 M. De Queiroz。具有动力学的多机器人车辆基于自适应刚性的编队控制。《IEEE控制系统技术汇刊》，23(1)：389–396，2014年。[38] K. Cao、X. Zeng 和 Y. Hong。求解线性代数方程的连续时间分布式算法。载于《第36届中国控制会议（CCC）论文集》，第8068–8073页。IEEE，2017年。[39] M. Cao、B. D. Anderson 和 A. S. Morse。具有不精确距离的传感器网络定位。《系统与控制快报》，55(11)：887–893，2006年。[40] M. Cao、B. D. O. Anderson、A. S. Morse 和 C. Yu。移动自主智能体无环编队的控制。载于《第47届IEEE决策与控制会议，墨西哥坎昆论文集》，第1187–1192页，2008年。[41] M. Cao、A. S. Morse、C. Yu、B. D. Anderson 和 S. Dasgupta。保持移动自主智能体的有向三角形编队。《Communications in Information and Systems》，11(1)：1–16，2011年。[42] M. Cao、A. S. Morse、C. Yu、B. D. O. Anderson 和 S. Dasguvta。控制移动自主智能体的三角形编队。载于《第46届IEEE决策与控制会议（CDC）论文集》，第3603–3608页。IEEE，2007年。[43] M. Cao、C. Yu 和 B. D. O. Anderson。利用仅距离测量进行编队控制。《Automatica》，47(4)：776–781，2011年。[44] Y. Cao 和 W. Ren。通过变结构方法以减小交互实现分布式协同跟踪。《IEEE自动控制汇刊》，57(1)：33–48，2011年。[45] V. M. Carvalho 和 A. Tahbaz-Salehi。生产网络：入门介绍。《Annual Review of Economics》，11(1)：635–663，2019年。[46]F. Chen 和 D. V. Dimarogonas。具有预设性能保证的领导者–跟随者编队控制。《IEEE 网络系统控制汇刊》，8(1)：450–461，2020年。

[47] F. Chen 和 W. Ren。《多智能体系统中的分布式平均跟踪》。施普林格，2020年。[48]G. Chen、F. L. Lewis 和 L. Xie。通过二元控制协议实现有限时间分布式一致性。《Automatica》，47(9)：1962–1968，2011年。[49] L. Chen、M. Cao 和 C. Li。角刚性及其在二维多智能体编队稳定中的应用。《IEEE自动控制汇刊》，66(8)：3667–3681，2020年。[50] L. Chen、Z. Lin、H. G. De Marina、Z. Sun 和 M. Feroskhan。具有全局收敛保证的机动角刚性编队。《IEEE/CAA自动化学报》，9(8)：1464–1475，2022年。[51]L. Chen 和 Z. Sun。全局稳定三角角刚性编队。《IEEE自动控制汇刊》，68(2)：1169–1175，2022年。[52] A. Cherukuri 和 J. Cortes。在变化负荷和机组组合条件下用于经济调度的无初始化分布式协调。《Automatica》，74：183–193，2016年。[53] A. Cherukuri、E. Mallada 和 J. Cortés。约束原始-对偶动力学的渐近收敛。《系统与控制快报》，87：10–15，2016年。[54] N. Chopra。强连通图上的输出同步。《IEEE自动控制汇刊》，57(11)：2896–2901，2012年。[55] F. R. K. Chung。《谱图论》，第92卷。美国数学学会，1997年。[56] R. Connelly。泛型全局刚性。《离散与计算几何》，33(4)：549–563，2005年。[57]J. Cortés。用于网络一致性的有限时间收敛梯度流。《Automatica》，42(11)：1993–2000，2006年。[58] J. Cortés。不连续动力系统——关于解、非光滑分析与稳定性的教程。《IEEE控制系统杂志》，28(3)：36–73，2008年。[59] H. Crapo。关于平面框架的泛型刚性。研究报告RR-1278，法国国家信息与自动化研究院，1990年。ICSLA项目。[60]S. Dasgupta、B. D. O. Anderson、C. Yu 和 T. H. Summers。矩形编队控制。载于《澳大利亚控制会议论文集，澳大利亚维多利亚州墨尔本》，第44–49页。IEEE，2011年。[61] M. H. de Badyn 和 M. Mesbahi。$\mathcal{H}_2$ 串并联网络的性能：一种组合视角。《IEEE自动控制汇刊》，66(1)：354–361，2020年。[62] H. G. De Marina、M. Cao 和 B. Jayawardhana。在不一致测量条件下控制移动智能体的刚性编队。《IEEE机器人学汇刊》，31(1)：31–39，2014年。[63] H. G. de Marina、M. Cao 和 B. Jayawardhana。在不一致测量条件下控制移动智能体的刚性编队。《IEEE机器人学汇刊》，31(1)：31–39，2015年。[64] M. De Queiroz、X. Cai 和 M. Feemster。《多智能体系统编队控制：一种图刚性方法》。John Wiley & Sons，2019年。

[65] M. H. DeGroot。《达成共识》。美国统计学会期刊，69(345):118–121，1974年。[66] R. Diestel。《图论》。施普林格，2025年。[67] D. V. Dimarogonas 和 K. H. Johansson。关于基于距离的编队控制的稳定性。载于第*47*届*IEEE*决策与控制会议论文集，第1200–1205页，2008。[68] D. V. Dimarogonas 和 K. H. Johansson。关于基于距离的多机器人编队稳定性的进一步结果。载于美国控制会议（*ACC*）论文集，第2972–2977页。IEEE，2009年。[69] D. V. Dimarogonas 和 K. J. Kyriakopoulos。运动学多智能体系统中的编队不可行性与速度对齐之间的联系。*Automatica*，44(10):2648–2654，2008。[70]D. Ding 和 M. R. Jovanović。基于近端增广拉格朗日函数的原始-对偶梯度流动力学的全局指数稳定性。载于美国控制会议（*ACC*）论文集，费城，加利福尼亚州，美国，第3414–3419页。IEEE，2019年。[71] T. T. Doan 和 C. Y. Tang。连续时间约束分布式凸优化。载于第*50*届*Allerton*通信、控制与计算年会（*Allerton*）论文集，蒙蒂塞洛，伊利诺伊州，美国，第1482–1489页，2012。[72] X. Dong、B. Yu、Z. Shi 和 Y. Zhong。无人机的时变编队控制：理论与应用。*IEEE*控制系统技术汇刊，23(1):340–348，2014年。[73] X. Dong、Y. Zhou、Z. Ren 和 Y. Zhong。受切换拓扑影响的二阶多智能体系统的时变编队跟踪及其在四旋翼编队飞行中的应用。*IEEE*工业电子学汇刊，64(6):5014–5024，2016年。[74] F. Dörfler。基于分布式共识的优化，2017年。《控制前沿专题》2017：分布式系统与控制。[75] F. Dorfler 和 F. Bullo。图的Kron约简及其在电网络中的应用。*IEEE*电路与系统汇刊*I*：常规论文，60(1):150–163，2012。[76] F. Dörfler 和 B. Francis。自主机器人编队问题的几何分析。*IEEE*自动控制汇刊，55(10):2379–2384，2010年。[77] H.-B. Dörr、E. Saka 和 C. Ebenbauer。用于二次规划的光滑向量场。载于第*51*届*IEEE*决策与控制会议（*CDC*）论文集，第2515–2520页，2012。[78] P. G. Doyle 和 J. L. Snell。《随机游走与电网络》，第22卷。美国数学学会，1984年。[79] M. Egerstedt 和 X. Hu。编队约束多智能体控制。*IEEE*机器人与自动化汇刊，17(6):947–951，2001年。[80] W. Ellens。有效电阻：及其他用于网络鲁棒性的图度量。硕士论文，数学研究所，莱顿大学，2011年。[81] T. Eren。基于方位刚性的编队形状控制。《国际控制杂志》，85(9):1361–1379，2012。

[82] T. Eren、P. N. Belhumeur、B. D. O. Anderson 和 A. S. Morse。基于刚性维持编队的框架。*IFAC*会议论文集，35(1):499–504，2002年。[83] T. Eren、P. N. Belhumeur 和 A. Morse。基于刚性的车辆编队收拢。载于第*41*届*IEEE*决策与控制会议论文集，*2002*年。，第3卷，第2959–2964页。IEEE，2002年。[84] T. Eren、W. Whiteley 和 P. N. Belhumeur。在网络定位中使用到达角（方位）信息。载于第*45*届*IEEE*决策与控制会议论文集，圣迭戈，加利福尼亚州，美国，第4676–4681页，2006年。[85]T. Eren、W. Whiteley、A. S. Morse、P. N. Belhumeur 和 B. D. O. Anderson。具有智能体间方向、方位和角度信息的编队传感器与网络拓扑。载于第*42*届*IEEE*决策与控制会议论文集，毛伊岛，夏威夷州，美国，第3卷，第3064–3069页。IEEE，2003年。[86] M. Fabris 和 D. Zelazo。视场约束下的自主通信中继定位。应用高级控制：工程与工业系统，4(2):e103，2022年。[87] X. Fang、L. Xie 和 D. V. Dimarogonas。通过矩阵加权位置约束实现分布式定位与编队跟踪控制的同步进行。*Automatica*，175:112188，2025年。[88] K. Fathian、D. I. Rachinskii、M. W. Spong 和 N. R. Gans。面向基于距离和方位的多智能体编队的全局渐近稳定分布式控制。载于美国控制会议（*ACC*）论文集，波士顿，马萨诸塞州，美国，第4642–4648页。IEEE，2016年。[89] J. A. Fax 和 R. M. Murray。车辆编队的信息流与协同控制。*IFAC*会议论文集，35(1):115–120，2002年。第15届IFAC世界大会。[90] J. A. Fax 和 R. M. Murray。车辆编队的信息流与协同控制。*IEEE*自动控制汇刊，49(9):1465–1476，2004年。[91] D. Feijer 和 F. Paganini。原始–对偶梯度动力学的稳定性及其在网络优化中的应用。*Automatica*，46(12):1974–1981，2010年。[92] M. Fiedler。图的代数连通度。捷克斯洛伐克数学杂志，23(2):298–305，1973年。[93] D. R. Foight、M. H. de Badyn 和 M. Mesbahi。矩阵加权图和时间缩放图上一致性的性能与设计。*IEEE* 网络系统控制汇刊，7(4):1812–1822，2020年。[94] A. Franchi 和 P. R. Giordano。具有方向约束和方位测量的平行刚性编队的分散式控制。载于第*51*届*IEEE*决策与控制会议论文集，毛伊岛，夏威夷州，美国，第5310–5317页，2012。[95] R. A. Freeman、P. Yang 和 K. M. Lynch。动态平均一致性估计器的稳定性与收敛性质。载于第*45*届*IEEE*决策与控制会议论文集，圣迭戈，加利福尼亚州，美国，第338–343页，2006年。[96 ] J. French Jr. 一种形式理论 y 社会 p力。心 $y_{理}$ $g$学评论 ，63: 181–194 ，1956年。

[97] N. Friedkin. 社会权力的形式理论。数学社会学杂志，12(2):103– 126，1986年。[98] N. Friedkin 和 E. Johnsen。社会影响与意见。数学社会学杂志，15(3-4):193–205，1990年。[99] N. Friedkin、A. Proskurnikov、R. Tempo 和 S. Parsegov。逻辑约束下信念系统动力学的网络科学。《科学》，354(6310):321–326，2016年。[100] A. Frieze 和 M. Karoński。随机图导论。剑桥大学出版社，2015年。[101] J. Gallier。关于舒尔补的笔记，2010年。[102] B. Gharesifard 和 J. Cortés。权重平衡有向图上的分布式连续时间凸优化。*IEEE*自动控制汇刊，59(3):781–786，2013年。[103] C. Godsil 和 G. Royle。代数图论。施普林格，2001年。[104] J. E. Graver、B. Servatius 和 H. Servatius。组合刚性。数学研究生教材第2卷。美国数学学会，1993年。[105] T. Hanks、C. F. Nino、J. B. Barcelo、A. Copeland、W. Dixon 和 J. Fairbanks。利用胞腔层进行异构多智能体多目标跟踪。*arXiv*预印本 *arXiv:2512.24886*，2025年。[106] J. Hansen 和 R. Ghrist。迈向胞腔层谱理论。《应用与计算拓扑学杂志》，3(4):315–358，2019年。[107] F. Harary。论符号图平衡性的概念。《密歇根数学杂志》，2(2):143–146，1953/1954年。[108] F. Harary。图论。艾迪生-韦斯利数学丛书。艾迪生-韦斯利，1971年。[109] T. Hatanaka、N. Chopra、T. Ishizaki 和 N. Li。利用PI一致性算法实现含通信时延的基于无源性的分布式优化。*IEEE*自动控制汇刊，63(12):4421–4428，2018年。[110] R. Hegselmann 和 U. Krause。意见动力学与有界信任模型：分析与仿真。人工社会与社会仿真杂志，5(3)，2002年。[111] J. M. Hendrickx、B. D. O. Anderson、J.-C. Delvenne 和 V. D. Blondel。用于分析自主智能体系统中刚性与持久性的有向图。《国际鲁棒与非线性控制杂志》，17:960–981，2007年。[112]S. Heshmati-Alamdari、A. Nikou 和 D. V. Dimarogonas。不确定环境下欠驱动自主水下航行器的鲁棒轨迹跟踪控制。《*IEEE*自动化科学与工程汇刊》，18(3):1288–1301，2020年。[113] P. H. Hoang、C. V. Nguyen、H.-K. Kim 和 H.-S. Ahn。面向网络化系统最优资源分配问题的鞍点动力学分布式控制算法。载于第十一届亚洲控制会议论文集（*ASCC*），第2417–2422页。IEEE，2017年。[114] S. M. Hoang。工业通信网络。科学与技术出版社，2001年。[115] R. Horn 和 C. Johnson。矩阵分析。剑桥大学出版社，1990年。

[116] J. Hu、P. Bhowmick与A. Lanzon。有向图上具有多个领导者的多智能体系统分布式自适应时变群体编队跟踪。*IEEE* 网络系统控制汇刊，7(1):140–150，2019年。[117] S. Hyeon、H. Kim与H. Shim。采用仅距离测量的数据驱动的基于位移的编队控制。*IEEE Access*，2025年。[118] Y. Igarashi、T. Hatanaka、M. Fujita与M. W. Spong。 $se(3)$中基于无源性的姿态同步。*IEEE*控制系统技术汇刊，17(5):1119– 1134，2009年。[119]Y. Igarashi、T. Hatanaka、M. Fujita与M. W. Spong。SE(3)中基于无源性的姿态同步。*IEEE*控制系统技术汇刊，17(5):1119– 1134，2009年。[120] H. Ishii与R. Tempo。PageRank 问题、多智能体一致性与网络聚合：系统与控制视角。《*IEEE*控制系统杂志》，34(3):34–53，2014年。[121] A. Jadbabaie、J. Lin与S. Morse。利用最近邻规则实现移动自主智能体群体协调。*IEEE*自动控制汇刊，48(6):988–1001，2003年。[122] P. Jia、A. MirTabatabaei、N. E. Friedkin与F. Bullo。影响力网络中的意见动力学与社会权力演化。《*SIAM*评论》，57(3):367–397，2015年。[123] G. Jing、G. Zhang、H. W. J. Lee与L. Wang。弱刚性理论及其在多智能体编队稳定中的应用。《*SIAM*控制与优化杂志》，65(3)，2018年。[124] S.-M. Kang与H.-S. Ahn。面向具有移动领导者的多智能体系统的分布式自适应编队控制律设计与实现。《*IEEE*工业电子汇刊》，63(2):1268– 1279，2016年。[125] S. Kar与G. Hug。电力系统中的分布式鲁棒经济调度：一种一致性 +创新方法。载于*IEEE*电力与能源学会大会论文集，第1–8页，2012年。[126] H. K. Khalil。非线性系统。Prentice Hall，第3版，2002年。[127] S. S. Kia、B. Van Scoy、J. Cortes、R. A. Freeman、K. M. Lynch与S. Martinez。动态平均一致性教程：问题、其应用与算法。《*IEEE*控制系统杂志》，39(3):40–72，2019年。[128] B.-Y. Kim与H.-S. Ahn。采用一致性算法的高速公路交通网络分布式协调与控制。《*IEEE*系统杂志》，10(1):162–168，2014年。[129] B.-Y. Kim与H.-S. Ahn。面向楼宇自动化系统的基于一致性的协调与控制。*IEEE*控制系统技术汇刊，23(1):364–371，2015年。[130] M. Kivelä、A. Arenas、M. Barthelemy、J. P. Gleeson、Y. Moreno与M. A. Porter。多层网络。《复杂网络杂志》，2(3):203–271，2014年7月。[131] D. Klein与M. Randic。电阻距离。《数学化学杂志》，12:81–95，1993年。

[132] G. Ko、M. H. Trinh与H.-S. Ahn。有向循环编队的仅基于方位的控制：几乎全局收敛与硬件实现。《国际鲁棒与非线性控制杂志》，30(12):4789–4804，2020年。[133] D. Konig。有限图与无限图理论。AMS Chelsea 出版系列。美国数学学会，2001年。[134] K. Konolige与N. Nilson。多智能体规划系统。载于美国人工智能协会（*AAAI*）第一届年会论文集，斯坦福，加利福尼亚州，美国，第138–142页，1980年。[135] L. Krick、M. E. Broucke与B. A. Francis。多机器人网络无穷小刚性编队的稳定化。《国际控制杂志》，82(3):423–439，2009年。[136] S.-H. Kwon、M. H. Trinh、K.-H. Oh、S. Zhao与H.-S. Ahn。无穷小弱刚性、三个智能体的编队控制及其向三维空间的扩展。载于日本计测自动控制学会（*SICE*）第*57*届年会论文集，2018年。[137] G. Lafferriere、A. Williams、J. Caughman与J. Veerman。车辆编队的分散式控制。《系统与控制快报》，54:899–910，2005年。[138] G. Laman。论平面骨架结构的图与刚性。《工程数学杂志》，4(4):331–340，1970年。[139] N.-M. Le-Phan、M. H. Trinh与P. D. Nguyen。随机矩阵加权一致性。*IEEE* 网络科学与工程汇刊，11(4):3536–3549，2024年。[140] B.-H. Lee与H.-S. Ahn。n维空间中局部参考坐标系未知方向的分布式估计。载于控制、自动化、机器人与视觉（*ICARCV*）*2016*年第*14*届国际会议论文集，第1–6页。IEEE，2016年。[141] B.-H. Lee、S.-M. Kang与H.-S. Ahn。SO(d)中的分布式方向估计及其在编队控制与网络定位中的应用。*IEEE* 网络系统控制汇刊，6(4):1302–1312，2019年。[142] Lesser与Erman。分布式解释：模型与实验。《*IEEE*计算机汇刊》，100(12):1144–1163，1980年。[143] M. A. Lewis与K.-H. Tan。利用虚拟结构实现移动机器人的高精度编队控制。《自主机器人》，4(4):387–403，1997年。[144] X. Li、X. Luo、J. Wang、Y. Zhu与X. Guan。具有参数不确定性的网络化机器人系统基于方位的编队控制。《神经计算》，306:234–245，2018年。[145] X. Li、C. Wen与C. Chen。采用仅方位测量的网络化机器人系统自适应编队控制。*IEEE* 控制论汇刊，51(1):199–209，2020年。[146] Z. Li、Z. Duan、G. Chen与L. Huang。多智能体系统的一致性与复杂网络的同步：统一视角。*IEEE*电路与系统汇刊*I*：常规论文，57(1):213–224，2009年。[147] Z. Li、G. Wen、Z. Duan与W. Ren。面向有向图线性多智能体系统的完全分布式一致性协议设计。*IEEE*自动控制汇刊，60(4):1152–1157，2014年。

[148]Y.-H. Lim 和 H.-S. Ahn。带输出饱和的一致性。*IEEE*自动控制汇刊，62(10):5388–5395，2017年。[149] J. Lin、A. S. Morse 和 B. D. O. Anderson。多智能体会合问题。载于第*42*届*IEEE*决策与控制国际会议论文集，第2卷，第1508–1513页。IEEE，2003年。[150] Z. Lin、L. Wang、Z. Han 和 M. Fu。利用复拉普拉斯矩阵实现多智能体系统的分布式编队控制。*IEEE*自动控制汇刊，59(7):1765–1777，2014年。[151] Y. Liu、J. M. Montenbruck、D. Zelazo、M. Odelga、S. Rajappa、H. H. Bülthoff、F. Allgöwer 和 A. Zell。多旋翼无人机编队平衡与机动的分布式控制方法。《*IEEE*机器人学汇刊》，34(4):870–882，2018。[152]S. H. Low。优化流量控制。I. 基本算法与收敛性。*IEEE/ACM* 网络汇刊，7(6):861–874，1999。[153] J. Lu、P. R. Regier 和 C. Y. Tang。分布式凸优化的控制。载于第*49*届*IEEE*决策与控制会议（*CDC*）论文集，亚特兰大，佐治亚州，美国，第489–495页，2010。[154]D. Luenberger 和 Y. Ye。线性与非线性规划。运筹学与管理科学国际丛书。施普林格美国，2008。[155]N. T. Luy、N. T. Thanh 和 H. M. Tri。基于强化学习的鲁棒自适应跟踪控制，实现多轮移动机器人的最优同步。载于*2013*年*IEEE*信息结构空间中的机器人智能研讨会（*RiiSS*），第74–81页。IEEE，2013年。[156] N. A. Lynch。分布式算法。Morgan Kaufmann 数据管理系统丛书。Morgan Kaufmann，1996。[157] M. Madrigal 和 V. H. Quintana。经济调度问题的解析解。*IEEE* 电力工程评论，20(9):52–55，2002。[158] J. R. Marden 和 J. S. Shamma。博弈论与控制。《控制、机器人与自主系统年度评论》，1(1):105–134，2018。[159] G. Matsaglia 和 G. P H Styan。矩阵秩的等式与不等式。线性与多重线性代数，2(3):269–292，1974。[160] F. Mehdifar、C. P. Bechlioulis、F. Hashemzadeh 和 M. Baradarannia。多智能体系统的预设性能基于距离的编队控制。*Automatica*，119:109086，2020年。[161] J. Mei。有向图下不确定多智能体系统的模型参考自适应一致性。载于*IEEE*决策与控制会议（*CDC*）论文集，第6198–6203页。IEEE，2018。[162] W. Mei、S. Mohagheghi、S. Zampieri 和 F. Bullo。网络上确定性流行病传播的动力学。*arXiv*电子预印本，第arXiv–1701页，2017年。[163] Z. Meng、B. D. O. Anderson 和 S. Hirche。罗盘不匹配情况下的编队控制。*Automatica*，69:232–241，2016。

[164] M. Mesbahi 和 M. Egerstedt。多智能体网络中的图论方法。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2010。[165] S. Miao 和 H. Su。矩阵加权网络中多智能体系统的二阶一致性。《神经计算》，433:1–9，2021年。[166] G. Michieletto、A. Cenedese 和 A. Franchi。SE(3)中的方位刚性理论。载于第*55*届*IEEE*决策与控制会议论文集，拉斯维加斯，美国，第5950–5955页，2016年。[167] D. K. Molzahn、F. Dörfler、H. Sandberg、S. H. Low、S. Chakrabarti、R. Baldick 和 J. Lavaei。电力系统分布式优化与控制算法综述。《*IEEE*智能电网汇刊》，8(6):2941–2962，2017年。[168] E. Montijano、E. Cristofalo、D. Zhou、M. Schwager 和 C. Sagues。无需外部定位系统的基于视觉的分布式编队控制。《*IEEE*机器人学汇刊》，32(2):339–351，2016年。[169] L. Moreau。时变通信链路下多智能体系统的稳定性。*IEEE*自动控制汇刊，50(2):169–182，2005年。[170] S. Mou、M.-A. Belabbas、A. S. Morse、Z. Sun 和 B. D. O. Anderson。无向刚性编队存在问题。*IEEE*自动控制汇刊，61(10):2821–2836，2016年。[171] R. Murray、K. Astrom、S. Boyd、R. Brockett 和 G. Stein。信息丰富的世界中的控制未来方向。《*IEEE*控制系统杂志》，23(2):20–33，2003年。[172] A. Nachmias。随机游走与电网络，第11–31页。施普林格国际出版，查姆，2020年。[173] A. Nedić 和 J. Liu。用于控制的分布式优化。《控制、机器人与自主系统年度评论》，1:77–103，2018年。[174] A. Nedic 和 A. Ozdaglar。多智能体优化的分布式次梯度方法。*IEEE*自动控制汇刊，54(1):48–61，2009年。[175] A. K. Nguyen。数据库系统原理。国家大学出版社，2004年。[176] B. K. T. Nguyen。优化方法：理论与算法。河内理工大学出版社，2023年。[177]C. V. Nguyen 和 H.-S. Ahn。通过微分包含和一致性算法分布式求解精确势博弈。载于*IEEE*决策与控制会议（*CDC*）论文集，第4212–4217页。IEEE，2018年。[178] H. D. Nguyen。通过边动力学设计降阶分布式一致性控制器。*IEEE*自动控制汇刊，62(1):475–480，2016年。[179] H. M. Nguyen、K. L. Moore 和 H.-S. Ahn。水流协调与电力系统优化运行。*IFAC-PapersOnLine*，56(2):2056–2061，2023年。[180] H. M. Nguyen 和 M. H. Trinh。领导者-跟随者矩阵加权一致性：一种滑模控制方法。载于越南控制与自动化会议（*VCCA*）论文集，第1–6页，2021年。

[181] H. M. Nguyen 和 M. H. Trinh. 存在不确定性的无领导者与领导者-跟随者矩阵加权一致性。测量、控制与自动化杂志，3(3):33–41，2022年。[182]K. Nguyen、V. T. Dang、D. D. Pham 和 P. N. Dao. 面向多艘水面航行器群体的强化学习策略编队控制方案。《国际鲁棒与非线性控制杂志》，34(3):2252–2279，2024年。[183] T. T. Nguyen、M. H. Trinh、C. V. Nguyen、N. H. Nguyen 和 D. V. My. 多智能体系统的任意收敛时间协调。*IET* 控制理论与应用，15(6):900–909，2021 年。[184] T. T. Nguyen、D. Van Vu、T. Van Pham 和 M. H. Trinh. 具有扰动抑制功能的单积分器领导者-跟随者编队：自适应变结构方法。*IEEE* 控制论汇刊，2024年。[185] P. D. Nguyễn. 线性控制理论。科学与技术出版社，2009年。第4版。[186] W. K. Nicholson.《线性代数及其应用》。Lyryx with Open Texts，2021年。[187] K. Ogata.《现代控制工程》。Prentice Hall，新泽西州上萨德尔河镇，2009年。[188] K.-K. Oh 和 H.-S. Ahn. 基于分布式位置估计的移动智能体编队控制。*IEEE*自动控制汇刊，58(3):737–742，2012年。[189]K.-K. Oh 和 H.-S. Ahn. N维空间中单积分器和双积分器模型智能体的基于距离的无向编队。《国际鲁棒与非线性控制杂志》，24(12):1809–1820，2014年。[190] K.-K. Oh 和 H.-S. Ahn. 通过方向对齐实现编队控制与网络定位。*IEEE*自动控制汇刊，59(2):540–545，2014年。[191] K.-K. Oh、M.-C. Park 和 H.-S. Ahn. 多智能体编队控制综述。*Automatica*，53:424–440，2015年。[192] R. Olfati-Saber、J. A. Fax 和 R. M. Murray. 网络化多智能体系统中的一致性与协作。《*IEEE*会议录》，95(1):215–233，2007年。[193]R. Olfati-Saber 和 R. M. Murray. 使用结构势函数对多车辆编队进行分布式协同控制。*IFAC*会议论文集，35(1):495–500，2002年。[194] R. Olfati-Saber 和 R. M. Murray. 多车辆系统的图刚性与分布式编队稳定。见第*41*届*IEEE*决策与控制会议，*2002*，第3卷，第2965–2971页。IEEE，2002年。[195] R. Olfati-Saber 和 R. M. Murray. 具有切换拓扑和时滞的智能体网络中的一致性问题。*IEEE*自动控制汇刊，49(9):1520–1533，2004年。[196] L. Pan、H. Shao、M. Mesbahi、Y. Xi 和 D. Li. 矩阵值加权网络上的二部一致性。《*IEEE*电路与系统汇刊*II*：简报》，66(8):1441–1445，2018年。

[197] L. Pan、H. Shao、M. Mesbahi、Y. Xi 和 D. Li. 矩阵加权网络的可控性。*IEEE* 控制系统快报，4(3):572–577，2020年。[198] L. Pan、H. Shao、M. Mesbahi、Y. Xi 和 D. Li. 矩阵加权切换网络上的一致性。*IEEE*自动控制汇刊，2021年。[199] P. E. Paré、C. L. Beck 和 T. Başar. 网络流行病的建模、估计与分析：综述。《控制年度评论》，50:345–360，2020年。[200] M.-C. Park 和 H.-S. Ahn. 有向循环编队的稳定化及其在双轮移动机器人中的应用。*IET* 控制理论与应用，9:1338–1346，2015年。[201] M.-C. Park 和 H.-S. Ahn. 有向循环编队的稳定化及其在双轮移动机器人中的应用。*IET* 控制理论与应用，9(9):1338–1346，2015年。[202] M.-C. Park、K. Jeong 和 H.-S. Ahn. 三维空间中的无向四智能体编队控制。见第*52*届 *IEEE* 决策与控制会议论文集，意大利佛罗伦萨，第1461–1465页。IEEE，2013年。[203] M.-C. Park、S.-M. Kang、J.-G. Lee、G.-H. Ko、K.-H. Oh、Y.-C. Choi、J.-H. Son 和 H.-S. Ahn. 使用自主四旋翼无人机群实现分布式编队飞行及其在视觉表演秀中的应用。见*2016*年 *IEEE* 亚太交通电气化会议暨博览会（*ITEC*）论文集，韩国釜山，第877–882页，2016年。[204] M.-C. Park、H.-K. Kim 和 H.-S. Ahn. 具有额外张角约束的基于距离的编队刚性。见第*17*届国际控制、自动化与系统会议（*ICCAS*）论文集，韩国济州，第111–116页，2017年。[205] M.-C. Park、Z. Sun、B. D. O. Anderson 和 H.-S. Ahn. 四智能体四面体编队的稳定性分析。见第*53*届 *IEEE* 决策与控制会议论文集，美国加利福尼亚州洛杉矶，第631–636页。IEEE，2014年。[206] M.-C. Park、Z. Sun、K.-K. Oh、B. D. O. Anderson 和 H.-S. Ahn. 无环持久编队的有限时间收敛控制。见*IEEE* 智能控制国际研讨会（*ISIC*）论文集，法国儒安莱潘，第1608–1613页，2014年。[207] M.-C. Park、Z. Sun、M. H. Trinh、B. D. O. Anderson 和 H.-S. Ahn. 具有几乎全局收敛性的 k4 编队基于距离的控制。见*2016*年 *IEEE* 第*55*届决策与控制会议（*CDC*）论文集，第904–909页。IEEE，2016年。[208] S. E. Parsegov、A. E. Polyakov 和 P. S. Shcherbakov. 具有积分器动力学的多智能体系统固定时间一致性算法。*IFAC*会议论文集，46(27):110–115，2013年。[209] S. E. Parsegov、A. V. Proskurnikov、R. Tempo 和 N. E. Friedkin. 社交网络中意见动力学的新型多维模型。*IEEE*自动控制汇刊，62(5):2270–2285，2016年。[210] L. T. Pham. 时滞对矩阵加权一致性算法的影响。毕业设计，河内理工大学，2021年7月。[211] L. T. Pham、H. M. Nguyen、T. Van Pham、C. Van Nguyen 和 M. H. Trinh. 具有时滞的领导者-跟随者矩阵加权一致性。见*IEEE*控制技术与应用会议（*CCTA*）论文集，第115–120页。IEEE，2025年。

[212] T. L. Pham, P. N. Dao 等. 基于扰动观测器的自适应强化学习，用于受扰的不确定水面船舶。*ISA Transactions*, 130:277–292, 2022年。[213] V. H. Pham, K. Sakurama, S. Mou 和 H.-S. Ahn. 城市交通网络的分布式控制。*IEEE*智能交通系统汇刊, 23(12):22937–22953, 2022年。[214] V. H. Pham, M. H. Trinh 和 H.-S. Ahn. 利用相对位置测量实现三维无环一般持久编队的有限时间收敛。载于《第*17*届国际控制、自动化与系统会议》（*ICCAS*），韩国济州，第230–235页，2017年。[215] V. H. Pham, M. H. Trinh 和 H.-S. Ahn. 无环一般持久编队的有限时间收敛。载于《美国控制会议》（*ACC*）论文集，第3642–3647页。IEEE，2018年。[216] V. H. Pham, M. H. Trinh 和 H.-S. Ahn. 柔性边刚性图的编队控制。《国际鲁棒与非线性控制杂志》, 28(6):2543–2559, 2018年。[217]A. Proskurnikov 和 R. Tempo. 动态社交网络建模与分析教程：第二部分。《控制年度评论》, 45:166–190, 2018年。[218] A. V. Proskurnikov, A. Matveev 和 M. Cao. 敌对阵营社交网络中的意见动力学：一致与极化。*IEEE*自动控制汇刊, 61(6):1524–1536, 2016年。[219] A. V. Proskurnikov 和 R. Tempo. 动态社交网络建模与分析教程：第一部分。《控制年度评论》, 43:65–79, 2017年。[220] S. Qi, Z. Zhang, S. Haesaert 和 Z. Sun. 根据时序逻辑规范自动综合编队控制。载于*2023*年第*62*届*IEEE*决策与控制会议（*CDC*），第5165–5170页。IEEE，2023年。[221] Z. Qu. 动力系统协同控制：自主车辆应用。施普林格科学与商业媒体，2009年。[222] M. Rabbat 和 R. Nowak. 传感器网络中的分布式优化。载于第三届传感器网络信息处理国际研讨会论文集，第20–27页，2004年。[223] S. Rahili 和 W. Ren. 时变代价函数下的分布式连续时间凸优化。*IEEE*自动控制汇刊, 62(4):1590–1605, 2017年。[224] J. L. Ramirez, M. Pavone, E. Frazzoli 和 D. W. Miller. 通过循环追踪实现航天器编队的分布式控制：理论与实验。载于美国控制会议论文集, 第4811–4817页，2009年。[225] W. Ren. 动态变化交互拓扑下多智能体系统中的共识寻求。*IEEE*自动控制汇刊, 50(5):655–661, 2005年。[226] W. Ren. 航天器编队飞行中的分布式姿态对准。《国际自适应控制与信号处理杂志》, 21(2-3):95–113, 2007年。[227]W. Ren. 多车辆系统协同控制中的高阶与模型参考共识算法。《动态系统、测量与控制杂志》, 129(5):678– 688, 2007年。

[228] W. Ren. 网络化欧拉–拉格朗日系统的分布式无领导共识算法。《国际控制杂志》, 82(11):2137–2149, 2009年。[229] W. Ren 和 E. Atkins. 通过局部信息交换实现分布式多车辆协同控制。《国际鲁棒与非线性控制杂志》, 17(10-11):1002–1033, 2007年。[230] W. Ren 和 R. W. Beard.《多车辆协同控制中的分布式共识：理论与应用》。通信与控制工程。施普林格伦敦, 2008。[231] W. Ren, R. W. Beard 和 E. M. Atkins. 多车辆协同控制中的信息共识。《*IEEE*控制系统杂志》, 27(2):71–82, 2007年。[232] W. Ren 和 Y. Cao. 多智能体网络的分布式协调：涌现问题、模型与议题。通信与控制工程（CCE）。施普林格科学与商业媒体，2010年。[233] C. W. Reynolds. 鸟群、兽群与鱼群：分布式行为模型。《*ACM SIGGRAPH*计算机图形学》, 21(4), 1987年。[234]O.-S. Reza. 多智能体动态系统的群集：算法与理论。*IEEE*自动控制汇刊, 51(3):401–420, 2006年。[235] A. Robertson, G. Inalhan 和 J. How. 分离式航天器干涉仪的编队控制策略。载于《美国控制会议》论文集，第4142–4147页，1999年。[236] K. Rosen.《离散数学及其应用》。麦格劳-希尔，2019年。[237] S. Roy. 尺度共识。*Automatica*, 51:259–262, 2015年。[238] O. Rozenheck, S. Zhao 和 D. Zelazo. 基于距离的编队跟踪比例积分控制器。载于《欧洲控制会议》（*ECC*）论文集，第1693–1698页。IEEE，2015年。[239] K. Sakurama. 基于相对测量的多智能体协调统一表述。*IEEE*自动控制汇刊, 66(9):4101–4116, 2021年。[240] K. Sakurama, S. Azuma 和 T. Sugie. 基于梯度流方法的多智能体协调分布式控制器。*IEEE*自动控制汇刊, 60(6):1471–1485, 2015年。[241] A. Sarlette 和 R. Sepulchre. 流形上的共识优化。《*SIAM*控制与优化杂志》, 48(1):56–76, 2009年。[242] A. H. Sayed, A. Tarighat 和 N. Khajehnouri. 基于网络的无线定位：开发精确无线定位信息技术所面临的挑战。《*IEEE*信号处理杂志》, 22(4):24–40, 2005年。[243] L. Scardovi, M. Arcak 和 E. D. Sontag. 互联系统的同步及其在生化网络中的应用：一种输入输出方法。*IEEE*自动控制汇刊, 55(6):1367–1379, 2010年。[244]L. Scardovi 和 R. Sepulchre. 相同线性系统网络中的同步。*Automatica*, 45(11):2557–2562, 2009年。

[245] F. Schiano、A. Franchi、D. Zelazo 和 P. R. Giordano。基于刚性的分散式方位编队控制器：面向四旋翼无人机群。在 *IEEE/RSJ*智能机器人与系统国际会议论文集，韩国大田，第5099–5106页，2016年。[246] E. Schoof、A. Chapman 和 M. Mesbahi。方位-罗盘编队控制：人群交互视角。在 *2014*年美国控制会议论文集，第3881–3886页，2014年。[247] A. Seuret、D. V. Dimarogonas 和 K. H. Johansson。通信时延下的一致性。在第*47*届*IEEE*决策与控制会议论文集，第4922–4927页，2008。[248] I. Shames、A. M. Teixeira、H. Sandberg 和 K. H. Johansson。互联系统二阶系统的分布式故障检测。*Automatica*，47(12):2757–2764，2011年。[249] J. Shamma。分布式多智能体系统的协同控制。John Wiley & Sons，2008。[250] D. Shevitz 和 B. Paden。非光滑系统的李雅普诺夫稳定性理论。*IEEE*自动控制汇刊，39(9):1910–1914，1994。[251] M. Shi 和 J. M. Hendrickx。仅凭节能无法解释鸟类梯队编队的形成。在第*60*届*IEEE*决策与控制会议（*CDC*）论文集，第6964–6969页。IEEE，2021年。[252] X. Shi、X. Xu、J. Cao 和 X. Yu。有限时间收敛原始-对偶梯度动力学及其在分布式优化中的应用。*IEEE* 控制论汇刊，53(5):3240–3252，2022年。[253] J. W. Simpson-Porco、F. Dörfler 和 F. Bullo。孤岛微电网中下垂控制逆变器的同步与功率分配。*Automatica*，49(9):2603–2611，2013年。[254] J.-J. E. Slotine 和 W. Li。应用非线性控制。Prentice Hall，新泽西州恩格尔伍德克利夫斯，1991。[255] Y. Song 和 W. Chen。网络上的有限时间收敛分布式一致性优化。*IET* 控制理论与应用，10(11):1314–1318，2016年。[256] D. P. Spanos、R. Olfati-Saber 和 R. M. Murray。移动网络上的动态一致性。在*IFAC*世界大会，第1–6页。Citeseer，2005年。[257] G. Strang。线性代数及其应用。Brooks/Cole，Thomson Learning，1988年，第3版。[258] H. Su、S. Zhu、C. Chen、Z. Yang 和 X. Guan。欠驱动自主水下航行器基于方位的鲁棒编队跟踪控制及最优参数整定。*IEEE* 控制论汇刊，54(7):4049–4062，2024年。[259] Y. Su 和 J. Huang。线性多智能体系统的协同输出调节。*IEEE*自动控制汇刊，57(4):1062–1066，2011年。[260] K. Sugihara 和 I. Suzuki。多移动机器人的分布式运动协调。在论文集：第*5*届*IEEE*智能控制国际研讨会（*1990*），第138–143页，第1卷，1990年。

[261] T. H. Summers、C. Yu、B. D. O. Anderson 和 S. Dasgupta。编队形状控制：四智能体编队的全局渐近稳定性。在第*48*届*IEEE*决策与控制会议（*CDC*）与*2009*年第*28*届中国控制会议联合举行论文集，中国上海，第3002–3007页。IEEE，2009年。[262] T. H. Summers、C. Yu、S. Dasgupta 和 B. Anderson。平面上最小持续领导者-远程跟随者编队与共同领导者编队的控制。*IEEE*自动控制汇刊，56:2778–2792，2011年。[263] T. H. Summers、C. Yu、S. Dasgupta 和 B. D. O. Anderson。证明编队形状控制问题中不存在非期望局部稳定平衡点。在*IEEE*智能控制国际研讨会（*ISIC*）论文集，印度海得拉巴，第200–205页，2013年。[264] G. Sun、R. Zhou、Z. Ma、Y. Li、R. Groß、Z. Chen 和 S. Zhao。机器人群形状组装中的均值漂移探索。《自然·通讯》，14(1):3476，2023年。[265] Z. Sun。多智能体系统的协同协调与编队控制。施普林格，2018年。[266] Z. Sun、S. Mou、B. D. O. Anderson 和 M. Cao。广义控制器编队控制系统的指数稳定性：一种统一方法。《系统与控制快报》，93(5):50–57，2016年。[267] Z. Sun、S. Mou、B. D. O. Anderson 和 M. Cao。广义控制器编队控制系统的指数稳定性：一种统一方法。《系统与控制快报》，93:50–57，2016年。[268] Z. Sun、S. Mou、B. D. O. Anderson 和 C. Yu。分布式协调控制系统中的守恒律与衰减律。*Automatica*，87:1–7，2018年。[269] Z. Sun、S. Mou、M. Deghat、B. D. O. Anderson 和 A. S. Morse。基于距离的刚性编队有限时间稳定化与群集。在第*19*届*IFAC*世界大会论文集，第*47*卷，第*3*期，第9138–9189页，2014年。[270] Z. Sun、M.-C. Park、B. D. O. Anderson 和 H.-S. Ahn。具有指定朝向的刚性编队分布式稳定化控制。*Automatica*，78:250–257，2017年。[271] R. Suttner 和 Z. Sun。利用李括号近似基于距离测量的编队形状控制。《*SIAM*控制与优化杂志》，56(6):4405–4433，2018年。[272] M. Taylor。迈向影响力与态度改变的数学理论。《人际关系》，21(2):121–139，1968年。[273] J. Thunberg、W. Song 和 X. Hu。有向拓扑下多智能体系统的分布式姿态同步控制。在第*10*届世界智能控制与自动化大会论文集，中国北京，第958–963页，2012年。[274]J. Thunberg、W. Song、E. Montijano、Y. Hong 和 X. Hu。切换拓扑下多智能体系统的分布式姿态同步控制。*Automatica*，50(3):832–840，2014年。[275] Y.-P. Tian 和 Q. Wang。平面刚性编队的全局稳定化。*Automatica*，49:1436–1441，2013年。

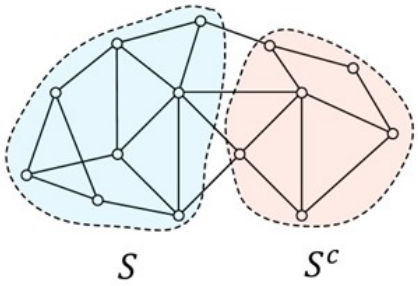
[276] Q. V. Tran、C. Lee、J. Kim 和 H. Q. Nguyen。欠驱动水面船舶的鲁棒基于方位的编队跟踪控制：一种输出调节方法。*IEEE* 网络系统控制汇刊，10(4):2048–2059，2023年。[277] Q. V. Tran、S.-H. Park 和 H.-S. Ahn。基于分布式位置估计的基于方位的编队控制。载于*IEEE* 控制技术与应用会议（*CCTA*）论文集，第658–663页。IEEE，2018年。[278] Q. V. Tran、Z. Sun、B. D. O. Anderson 和 H.-S. Ahn。面向图匹配的分布式优化。*IEEE* 控制论汇刊，53(8):4815–4828，2022年。[279] Q. V. Tran、M. H. Trinh 和 H.-S. Ahn。离散时间矩阵加权一致性。*IEEE* 网络系统控制汇刊，2021年。[280] Q. V. Tran、M. H. Trinh、D. Zelazo、D. Mukherjee 和 H.-S. Ahn。基于分布式全局方向估计的有限时间仅基于方位的编队控制。*IEEE* 网络系统控制汇刊，2(6)，2019年。[281] M. H. Trinh 和 H.-S. Ahn。矩阵加权图：理论与应用。控制与信息科学讲义，第498卷。Springer Nature，2026年。[282] M. H. Trinh 和 K. T. Doan。网络系统讲义。2024年。F. Bullo《网络系统讲义》（Kindle Direct Publishing）的越南语译本。[283] M. H. Trinh、N.-M. Le-Phan 和 H.-S. Ahn。网络化输入输出经济问题。*arXiv* 电子预印本，页码 arXiv–2412，2024年。[284] M. H. Trinh、B.-H. Lee、M. Ye 和 H.-S. Ahn。基于全局方向估计的基于方位的编队控制与网络定位。载于 *IEEE* 控制技术与应用会议论文集，丹麦哥本哈根，2018年。[285]M. H. Trinh、D. Mukherjee、D. Zelazo 和 H.-S. Ahn。基于仅方位测量的有向环编队。《国际鲁棒与非线性控制杂志》，28(3):1074–1096，2018年。[286] M. H. Trinh、C. V. Nguyen、Y.-H. Lim 和 H.-S. Ahn。矩阵加权一致性及其应用。*Automatica*，89:415–419，2018 年。[287] M. H. Trinh 、T. T. Nguyen、N. H. Nguyen 和 H.-S. Ahn。基于方位测量的固定时间网络定位。载于 美国控制会议（*ACC*）论文集，美国科罗拉多州丹佛，第903–908页。IEEE，2020年。[288] M. H. Trinh、T. T. Nguyen 和 Z. Sun。自适应基于距离的编队控制。载于 第*17*届国际控制、自动化、机器人与视觉会议（*ICARCV*）论文集，第746–751页。IEEE，2022年。[289] M. H. Trinh、K.-K. Oh 和 H.-S. Ahn。具有三领导者的有向无环编队的基于角度的控制。载于 *2014*年*IEEE* 国际机电一体化与控制会议（*ICMC*）论文集，中国锦州，第2268–2271页，2014年。[290] M. H. Trinh、M.-C. Park、Z. Sun、B. D. O. Anderson、V. H. Pham 和 H.-S. Ahn。图刚性的进一步分析。载于 第*55*届 *IEEE* 决策与控制会议（*CDC*）论文集，第922–927页。IEEE，2016年。

[291] M. H. Trinh、V. H. Pham、M.-C. Park、Z. Sun、B. D. O. Anderson 和 H.-S. Ahn。对“平面刚性编队的全局稳定化 [Automatica 49（2013年）1436–1441]”的评论。*Automatica*，77:393–396，2017年。[292] M. H. Trinh、Q. V. Tran 和 H.-S. Ahn。最小与冗余方位刚性：条件及应用。*IEEE*自动控制汇刊，66(7)，2020年。[293] M. H. Trinh、D. V. Vu、Q. V. Tran 和 H.-S. Ahn。矩阵缩放一致性。载于 *IEEE*决策与控制会议论文集，墨西哥坎昆，2022年。[294] M. H. Trinh、H. H. Vu、N.-M. Le-Phan 和 Q. N. Nguyen。无向网络上的矩阵缩放一致性。*IEEE* 网络科学与工程汇刊，2024年。[295] M. H. Trinh、M. Ye、H.-S. Ahn 和 B. D. O. Anderson。具有领导者跟随型拓扑的矩阵加权一致性。载于 亚洲控制会议论文集，澳大利亚昆士兰州黄金海岸，第1–6页。IEEE，2017年。[296] M. H. Trinh、D. Zelazo 和 H.-S. Ahn。指向一致性及费马–韦伯选址问题的基于方位的解。*IEEE*自动控制汇刊，65(6):2339–2354，2019年。[297] M. H. Trinh、D. Zelazo 和 H.-S. Ahn。指向一致性及费马–韦伯选址问题的基于方位的解。*IEEE*自动控制汇刊，65(6)，2020年。[298] M. H. Trinh、S. Zhao、Z. Sun、D. Zelazo、B. D. O. Anderson 和 H.-S. Ahn。具有领导者优先的跟随者结构的一组智能体的基于方位的编队控制。自动控制汇刊，64(2):598–613，2019年。[299] R. Tron、J. Thomas、G. Loianno、K. Daniilidis 和 V. Kumar。结合辅助距离测量、领导者与碰撞避免的仅基于方位的编队控制。载于 第*55*届 *IEEE* 决策与控制会议（*CDC*）论文集，美国内华达州拉斯维加斯，第1806–1813页，2016年。[300]S. E. Tuna。耦合线性系统阵列的可同步性条件。*IEEE*自动控制汇刊，54(10):2416–2420，2009年。[301] S. E. Tuna。矩阵加权拉普拉斯矩阵下的同步。*Automatica*，73:76–81，2016年。[302] W. T. Tutte。图论。朗文高等教育，1984年。[303] P. van Goor、Z. Sun 和 C. B. Yu。单位四元数上多智能体系统的姿态同步控制。载于 第十一届亚洲控制会议（*ASCC*）论文集，澳大利亚黄金海岸，第216 – 221页。IEEE，2017年。[304] T. Vicsek、A. Czirók、E. Ben-Jacob、I. Cohen 和 O. Shochet。自驱动粒子系统中的新型相变。《物理评论快报》，75(6):1226，1995年。[305] D. V. Vu、M. H. Trinh、P. D. Nguyen 和 H.-S. Ahn。存在有界扰动的基于距离的编队控制。*IEEE* 控制系统快报，5(2):451–456，2020年。[306] H. M. Vu、M. H. Trinh、Q. Van Tran 和 H.-S. Ahn。单积分器和双积分器智能体的基于距离的编队跟踪。*IEEE*自动控制汇刊，69(2):1332– 1339，2023年。

[307] J. Wang 和 N. Elia。集中式与分布式凸优化的控制视角。载于第*50*届*IEEE*决策与控制会议及欧洲控制会议论文集，美国佛罗里达州奥兰多，第3800–3805页。IEEE，2011年。[308] L. Wang 和 F. Xiao。动态智能体网络的有限时间一致性问题。《style id='5'>IEEE自动控制汇刊，55(4):950—955，2010年。[309] H. Weimerskirch、J. Martin、Y. Clerquin、P. Alexandre 和 S. Jiraskova。编队飞行中的节能。《style id='8'>Nature》，413(6857):697–698，2001年。[310] J. T. Wen 和 M. Arcak。网络流控制的统一无源性框架。《style id='11'>IEEE自动控制汇刊》，49(2):162–174，2004年。[311] D. B. West。《style id='14'>图论导论》，第2卷。Prentice Hall，新泽西州上萨德尔河镇，1996年。[312] W. Whiteley。《style id='17'>离散应用几何中的一些拟阵。Contemporary Mathematics，第137卷。AMS，1996年。[313] H. Whitney。不可分图与平面图。《style id='20'>美国数学学会汇刊》，34(2):339–362，1932年。[314] P. Wieland、R. Sepulchre 和 F. Allgöwer。线性输出同步的内模原理是充分且必要的。《style id='23'>Automatica》，47(5):1068–1074，2011年。[315] L. Xiao 和 S. Boyd。用于分布式平均的快速线性迭代。《style id='26'>系统与控制快报》，53(1):65–78，2004年。[316] L. Xiao、S. Boyd 和 S. Lall。基于平均一致性的鲁棒分布式传感器融合方案。载于《style id='29'>第四届传感器网络信息处理国际研讨会，美国爱达荷州博伊西》，第63–70页，2005年。[317] M. Ye、M. H. Trinh、Y.-H. Lim、B. D. O. Anderson 和 H.-S. Ahn。多个相互依赖议题上的连续时间意见动力学。《style id='32'>Automatica》，115(108884)，2020年。[318] M. Ye、C. Yu 和 B. D. Anderson。有向网络上欧拉-拉格朗日智能体的与模型无关的会合。载于《style id='35'>2015年第54届IEEE决策与控制会议（CDC）》，第3499–3505页。IEEE，2015年。[319] P. Yi、Y. Hong 和 F. Liu。用于约束优化的分布式梯度算法及其在电力系统负荷分担中的应用。《style id='38'>系统与控制快报》，83:45–52，2015年。[320] P. Yi、Y. Hong 和 F. Liu。具有可行性约束的最优资源分配无初始化分布式算法及其在电力系统经济调度中的应用。《style id='41'>Automatica》，74:259–269，2016年。[321] B. J. Young、R. W. Beard 和 J. M. Kelsey。改进多车辆编队机动的控制方案。载于《style id='44'>美国控制会议（ACC）论文集》，第2卷，第704–709页。IEEE，2001年。[322] C. Yu、B. D. O. Anderson、S. Dasgupta 和 B. Fidan。平面内最小持续编队的控制。《style id='47'>《SIAM控制与优化杂志》》，48(1):206–233，2009年。

[323]C. Yu、J. M. Hendrickx、B. Fidan、B. D. O. Anderson 和 V. D. Blondel。三维及更高维自主编队：刚性、持久性与结构持久性。《style id='2'>Automatica》，43(3):387–402，2007。[324] W. Yu、G. Chen、M. Cao 和 W. Ren。多智能体动力系统中的时延诱导一致性与准一致性。《style id='5'>IEEE电路与系统汇刊I：常规论文》，60(10):2679–2687，2013年。[325] M. Zavlanos 和 G. J. Pappas。用于维持移动网络连通性的势场。《style id='8'>《IEEE机器人学汇刊》》，23(4):812–816，2007。[326]D. Zelazo、A. Franchi、H. H. Bülthoff 和 P. Robuffo Giordano。采用距离测量的多机器人系统分散式刚性维持控制。《style id='11'>国际机器人研究期刊》，34(1):105–128，2015年。[327] D. Zelazo、P. R. Giordano 和 A. Franchi。采用 SE(2)刚性理论的编队控制。载于《style id='14'>第54届IEEE决策与控制会议（CDC）论文集，日本大阪》，第6121–6126页，2015年。[328]D. Zelazo 和 M. Mesbahi。边一致：图论性能界与无源性分析。《style id='17'>IEEE自动控制汇刊》，56(3):544–555，2010年。[329] D. Zelazo、M. Mesbahi 和 M.-A. Belabbas。系统与控制中的图论。载于《style id='20'>IEEE决策与控制会议（CDC）论文集》，第6168–6179页。IEEE，2018年。[330] H. Zhang、F. L. Lewis 和 Z. Qu。有向通信图上协作系统的李雅普诺夫、自适应与最优设计技术。《style id='23'>IEEE 工业电子学汇刊》，59(7):3026–3041，2011年。[331] S. Zhao、Z. Li 和 Z. Ding。多智能体系统的仅基于方位的编队跟踪控制。《style id='26'>IEEE自动控制汇刊》，64(11):4541–4554，2019年。[332] S. Zhao、F. Lin、P. K.、B. M. Chen 和 T. H. Lee。利用仅方位测量实现循环编队的有限时间稳定化。《style id='29'>《国际控制杂志》》，87(4):715–727，2014年。[333] S. Zhao、F. Lin、K. Peng、B. M. Chen 和 T. H. Lee。利用仅方位测量对角度约束循环编队进行分布式控制。《style id='32'>《系统与控制快报》》，63:12–24，2014年。[334] S. Zhao、Z. Sun、D. Zelazo、M. H. Trinh 和 H.-S. Ahn。Laman图在任意维度上具有一般方位刚性。载于《style id='35'>第56届决策与控制会议，澳大利亚墨尔本》，第3356–3361页，2017年。[335]S. Zhao 和 D. Zelazo。多智能体系统的基于方位的分布式控制与估计。载于《style id='38'>欧洲控制会议论文集，瑞士苏黎世》，第2202–2207页，2015年。[336] S. Zhao 和 D. Zelazo。基于方位的编队机动。载于《style id='41'>2015年IEEE智能控制国际研讨会论文集》，第658–663页，2015年。[337]S. Zhao 和 D. Zelazo。具有有向交互拓扑的基于方位的编队稳定。载于《style id='44'>第54届IEEE决策与控制会议论文集》，第6115 – 6120页，2015年。

[338] S. Zhao 和 D. Zelazo。方位刚性与几乎全局的仅方位编队稳定化。*IEEE*自动控制汇刊，61(5):1255–1268，2016年。[339] S. Zhao 和 D. Zelazo。任意维度下基于方位的网络定位的可定位性与分布式协议。*Automatica*，69:334–341，2016年。[340] Z. Zuo、J. Zhang 和 Y. Wang。线性与 Lipschitz 非线性多智能体系统的自适应容错跟踪控制。*IEEE* 工业电子学汇刊，62(6):3923–3931，2014年。




*Nội dung sách bao gồm:*
*- Tổng quan về điều khiển hệ đa tác tử*
*- Các kiến thức cơ bản về đồ thị*
*- Thuật toán đồng thuận*
*- Một số ứng dụng của hệ đa tác tử*
*Các ví dụ với code mô phỏng MATLAB và Bài tập*

