arXiv:2602.09454v1 [math.GT] 10 Feb 2026

三维流形的伪同痕与无限基本群

JIANFENG LIN、YI XIE 和 BOYU ZHANG

Abstract. 设 Y 是一个紧致、连通、定向的三维流形，边界可以非空，且 $\pi_1(Y)$ 是无限的。令 $\mathrm{Diff}_\partial(I\times Y)$ 表示 $I\times Y$ 的自微分同胚群，其中的微分同胚在边界附近等于恒等映射。令 $\mathrm{Diff}_{PI}(I\times Y)$ 表示 $\mathrm{Diff}_\partial(I\times Y)$ 的子群，由与恒等映射伪同痕的元素组成。类似地，定义同胚群 $\mathrm{Homeo}_\partial(I\times Y)$、$\mathrm{Homeo}_{PI}(I\times Y)$。我们证明典范映射 $\pi_0\mathrm{Diff}_{PI}(I\times Y)\to\pi_0\mathrm{Homeo}_{PI}(I\times Y)$ 的秩是无限的。因此，$\pi_0\mathrm{Diff}_{PI}(I\times Y)$、$\pi_0\mathrm{Diff}_\partial(I\times Y)$、$\pi_0\mathrm{Homeo}_{PI}(I\times Y)$、$\pi_0\mathrm{Homeo}_\partial(I\times Y)$ 都是无限秩阿贝尔群。我们还证明，$\pi_0 C(Y)$ 含有一个无限秩阿贝尔子群，而 $\pi_0 C(I\times Y)$ 存在到一个无限秩阿贝尔群的满射，其中 $C(X)$ 表示协合同构群 $\mathrm{Diff}(I\times X,\{0\}\times X\cup I\times\partial X)$ 或 $\mathrm{Homeo}(I\times X,\{0\}\times X\cup I\times\partial X)$。这些结果通过研究哑铃微分同胚在嵌入弧空间和构形空间上的作用得以证明。

1. Introduction

给定一个带边界的定向光滑流形 X，我们用 $\mathrm{Diff}_\partial(X)$ 表示 X 的自微分同胚群，其中的微分同胚在边界附近均为恒等映射。我们用 $\mathrm{Diff}_{PI}(X)$ 表示 $\mathrm{Diff}_\partial(X)$ 的子群，该子群由与恒等映射伪同伦的微分同胚组成。根据定义，微分同胚 f 属于 $\mathrm{Diff}_{PI}(X)$ 当且仅当存在一个微分同胚 $\tilde{f}\colon I\times X\to I\times X$，使得其在 $I\times\partial X$ 的某个邻域上为恒等映射，并且对所有 $x\in X$，都有 $\tilde{f}=\mathrm{id}$、$\tilde{f}(0,x)=(0,x)$、$\tilde{f}(1,x)=(1,f(x))$。路径连通分支群 $\pi_0\mathrm{Diff}_\partial(X)$ 称为 X 的光滑映射类群，它包含 $\pi_0\mathrm{Diff}_{PI}(X)$ 作为一个正规子群。

类似地，当 X 是一个定向拓扑流形时，我们用 $\mathrm{Homeo}_\partial(X)$ 表示在 X 边界附近为恒等映射的自同胚所构成的拓扑群。令 $\mathrm{Homeo}_{PI}(X)$ 为 $\mathrm{Homeo}_\partial(X)$ 的子群，它由与恒等映射伪同伦（拓扑意义下）的同胚构成。于是群 $\pi_0\mathrm{Homeo}_\partial(X)$ 是 X的拓扑映射类群。

设 $I=[0,1]$，令 Y 为一个紧致、连通、定向的三维流形。本文研究 $I\times Y$ 在光滑范畴和拓扑范畴中的映射类群性质。注意，$\pi_0\mathrm{Diff}_{PI}(I\times Y)$、$\pi_0\mathrm{Diff}_\partial(I\times Y)$、$\pi_0\mathrm{Homeo}_{PI}(I\times Y)$、$\pi_0\mathrm{Diff}_\partial(I\times Y)$ 都是阿贝尔群。这是因为，总可以将 $I\times Y$ 上的两个给定微分同胚／同胚分别同位，使它们的支集不交，从而彼此可交换。还要注意，存在一个典范包含 $\mathrm{Diff}_{PI}(I\times Y)\to\mathrm{Homeo}_{PI}(I\times Y)$，它诱导出一个同态$\pi_0\mathrm{Diff}_{PI}(I\times Y)\to\pi_0\mathrm{Homeo}_{PI}(I\times Y)$。

我们的第一个主要结果陈述如下。

定理 A. 设 Y 是一个连通、紧致、定向的3维流形（可能带边界），并且 $\pi_1(Y)$ 是无限的。那么，该映射的像

$$\pi_0\,\mathrm{Diff}_{PI}(I\times Y)\to\pi_0\,\mathrm{Homeo}_{PI}(I\times Y) \tag{1.1}$$

具有无限秩。

定理 A 有以下直接推论。

推论 1.1. 设 Y 是一个连通、紧致、定向的3维流形，可能带有边界，且 $\pi_1(Y)$ 是无限的。那么阿贝尔群

$$\pi_0 \operatorname{Diff}_{PI}(I \times Y),\ \pi_0 \operatorname{Homeo}_{PI}(I \times Y),\ \pi_0 \operatorname{Diff}_{\partial}(I \times Y),\ \pi_0 \operatorname{Homeo}_{\partial}(I \times Y)$$

a具有无限秩。

注记 1.2. 推论 1.1 的若干特殊情形此前已为人所知：在光滑范畴中，Budney-Gabai [BG19], 以及 Watanabe 独立地 [Wat20], 证明了 $Y = S^1 \times D^2$ 的情形。Singh [Sin25] 证明了 Y 是 $S^2 \times S^1$ 的情形（另一种证明见 [FGHK24]），以及两个闭的非球面三维流形的连通和这一情形。Igusa [Igu21]证明了对于非单连通 Y'，$Y = (S^2 \times S^1) \# Y'$ 的情形。关于拓扑范畴中的相关结果，参见 [BG25, GN25]。关于 $\pi_1(Y)$ 有限时的结果，参见 [OW23]。

粘合 $\{0\} \times Y$与 $\{1\} \times Y$得到同态 微分同胚群$_\partial(I \times Y) \to$ 微分同胚群$_\partial(S^1 \times Y)$ 和 同胚群$_\partial(I \times Y) \to$ 同胚群$_\partial(S^1 \times Y)$。Igusa 已证明 [Igu21，引理 51][1] 这些映射在 π_0上诱导单射。因此，我们得到以下推论。

推论 1.3. 设 Y 是一个连通、紧致、定向的三维流形，可以有边界，且 $\pi_1(Y)$ 是无限的。那么群

π_0微分同胚群$_{PI}(S^1 \times Y)$ π_0同胚群$_{PI}(S^1 \times Y)$ π_0微分同胚群$_\partial(S^1 \times Y)$ π_0同胚群$_\partial(S^1 \times Y)$包含无限秩的阿贝尔子群。

我们的第二个主要结果涉及三维和四维流形的协合同构群。给定一个光滑流形 X，协同微分同胚群（分别为协同同胚群） $C^{\mathrm{diff}}(X)$（分别为 C^{top}）定义为由 $I \times X$ 上在（$\{0\} \times X$）$\cup (I \times \partial X)$ 附近等于恒等映射的微分同胚（分别为同胚）组成的群。协合同构群也称为伪同位群。这是高维流形理论中的关键对象，并且与代数 K 理论有着深刻联系。事实上，存在良定义的稳定化映射 $C^{\mathrm{diff}}(X) \hookrightarrow C^{\mathrm{diff}}(I \times X)$，当 $\dim X \geq \max(2n+7, 3n+4)$ [Igu88] 时，该映射在 π_{n-1} 上诱导同构。此外，极限对象 $\varinjlim C^{\mathrm{diff}}(I^k \times X)$ 的同伦型可通过代数 K 理论 [WJR13], 理解，从而为计算稳定范围内 $C^{\mathrm{diff}}(X)$ 的同伦群提供了强有力的工具。关于道路分支群，Cerf [Cer70]证明，对于维数为 ≥ 5 的单连通 X，有 $\pi_0 C^{\mathrm{diff}}(X) = 0$。Hatcher–Wagner[HW73] 和 Igusa [Igu84] 进一步计算了维数为 ≥ 5 的一般 X 的 $\pi_0 C^{\mathrm{diff}}(X)$。（精确表述见 [Hat78, Theorem 3.1] 。）这些结果在拓扑范畴中也成立 [BL82, Ped76, Hat78]。另一方面，对于三维和四维流形，理解 $\pi_0 C^{\mathrm{diff}}(X)$ 和$\pi_0 C^{\mathrm{top}}(X)$ 仍是一个具有挑战性的问题。事实上，除少数特定族 [KS93, KS96, BG19, Igu21, OW23], 外，此前尚不清楚对于一般三维流形 Y，$\pi_0 C^{\mathrm{diff}}(Y)$ 或 $\pi_0 C^{\mathrm{top}}(Y)$ 是否非平凡。我们的第二个主要结果研究 Y 和 $I \times Y$ 的协合同构群的性质。

定理 B. 设 Y 是一个连通、紧致、定向的3维流形，可能带有边界，且 $\pi_1(Y)$ 是无限的。设 $C = C^{\mathrm{diff}}$ 或 C^{top}。那么 $\pi_0 C(Y)$ 含有一个无限秩阿贝尔子群，并且 $\pi_0 C(I \times Y)$ 存在一个到无限秩阿贝尔群的满射。

现在我们概述证明的思路。首先讨论定理 A。为了在（$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$）的像中构造一组无限多个线性无关元素，我们使用 Budney– Gabai 的哑铃微分同胚。主要结果是证明，每个非平凡的 $\mathbb{Z}$–线性

[1]这个结果最初是在闭流形的光滑范畴中陈述的，但同样的论证也适用于拓扑范畴和带边流形。

组合 φ 由这些 φ_i 构成，在 $\pi_0\mathrm{Homeo}_\partial(I\times Y)$ 中不同痕于恒等映射。为了阻止从 φ 到 id 的同痕，我们考察 φ 在 $I\times Y$ 的弧空间上的作用。

令 $\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)$ 表示嵌入弧 γ 的空间：$[0,1]\to I\times Y$使得存在$y\in Y$，它可以依赖于 γ，满足 $\gamma(0)=(0,y)$、$\gamma(1)=(1,y)$，且 γ 到 Y 的投影像是一个可缩圈。在本文第1部分，我们将研究 $\pi_1\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)$ 和 $\pi_2\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)$ 的性质。群 $\pi_1\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)$ 将在命题 3.1 中利用 Dax 同构计算。当 $b_1(Y)>0$ 且 Y 不可约时，我们将借助点的构形空间和 Bousfield–Kan谱序列，构造一个从 $\pi_2\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)$ 到 $\oplus_\infty\mathbb{Q}$ 的同态 Ψ，从而推广[BG25、LXZ25]中的构造。

我们的策略是通过证明 φ 与 id 之间不存在同痕，证明 φ 在 Emb 中曲线与曲面的同伦类集合上非平凡地作用$^\dagger(I,\ I\times Y)$。闭曲线的同伦类由 $\pi_1\mathrm{Emb}^\dagger(I,\ I\times Y)$ 中的共轭类给出。至于曲面，我们将在第4 节中建立若干结果，利用 $\pi_1\mathrm{Emb}^\dagger(I,\ I\times Y)$ 和 $\pi_2\mathrm{Emb}^\dagger(I,\ I\times Y)$ 的性质来阻碍它们之间的同伦。

我们经常使用的另一种技术，是将 φ 上的同胚 $I\times Y$提升到有限$\tilde{}$覆盖上。如果 Y 是 Y 的一个有限覆盖，且后者是 Haken 流形，我们将在引理7.4中证明，存在一个从$\tilde{}$的映射类群到 $I\times Y$的映射类群的良定义拉回映射 $I\times Y$。因此，我们可以通过阻碍 φ的拉回至$\sim I\times Y$的同痕，来阻碍 φ的同痕。

我们将针对不同类别的流形 Y。设 $\hat{}Y$ 得自 Y，做法是把每个微分同胚于 S^2的边界分支用一份 D^3填入。若 $\hat{}Y$不可约，我们将通过考虑曲面的同伦类来阻碍同痕，这些曲面位于 $\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)$ 中，必要时先拉回到某个覆盖空间。我们针对以下情形采用三种不同的论证：当 $\partial\hat{}Y\neq\emptyset$时，当 $\hat{}Y$为闭且 Seifert $\hat{}$ 纤维化时，以及当 Y 为闭且非 Seifert 纤维化时。这是第2部分的内容。

$\hat{}\hat{}$ 当 Y 可约的情形将在第 3部分处理。若 Y 不微分同胚于$S^1\times S^2$ 或 $\mathbb{RP}^3\#\mathbb{RP}^3$，则同痕的阻碍由考虑圆的同伦类给出，这些圆属于 $\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)$。若 $\hat{}Y$为 $S^1\times S^2$ 或 $\mathbb{RP}^3\#\mathbb{RP}^3$，我们建立一种 特设论证，即通过比较映射类群：比较 $I\times Y$的映射类群与 $S^1\times D^3$。综合以上所有论证，即可完成定理 A的证明。

定理 B 的证明基于定理 A的一个更强版本。该版本指出，我们构造的微分同胚不仅在 π_0 同胚群 $_\partial(I\times Y)$ 中线性无关，在 π_0 同胚群 $(I\times Y, I\times\partial Y)$ 中也线性无关。定理 A 的更强形式将在下文的定理C 和D 中陈述。我们还注意到，存在正合序列

$$\pi_0\,\mathrm{Diff}_\partial(I\times X)\to\pi_0\,C^{\mathrm{diff}}(X)\to\pi_0\,\mathrm{Diff}_{PI}(X)\to 0,$$
$$\pi_0\,\mathrm{Homeo}_\partial(I\times X)\to\pi_0\,C^{\mathrm{top}}(X)\to\pi_0\,\mathrm{Homeo}_{PI}(X)\to 0.$$

定理 B 将由上述陈述推得。

致谢：我们感谢 Alexander Kupers 和 Yi Liu 的有益通信。J. Lin 部分受到国家重点研发计划 2025YFA1017500 和国家自然科学基金 12271281 的资助。Y. Xie 部分受到国家自然科学基金 12341105 的资助。B. Zhang 部分受到美国国家科学基金会项目 DMS-2405271 和西蒙斯基金会差旅资助的支持。

Contents

1. 引言 1

第1部分。弧的空间 $I \times Y$ 4 2. 弧的嵌入空间 5 3. Emb†(I, $I \times Y$) 的同伦群 6 3.1. Dax 同构 6 3.2. 从嵌入空间到构形空间 7 3.3. Bousfield–Kan谱序列 9 3.4. 从 $\pi_5 C_3^\tau(I \times Y)$ 到一个同态 10 3.5. Ψ 11 的性质

第2部分。填充后 Y **不可约的情形** D^3**的** 13 4. 从曲面到映射的同伦类 14 4.1. 与 $\pi_2(X)$的内部连通和 14 4.2. 带边界曲面上的内部连通和 15 4.3. 闭曲面上的内部连通和 16 5. $S^1 \times D^3$ 上的微分同胚群以及映射 Ψ 17 6. $\partial Y \neq \emptyset$ 20的情形 7. $\partial Y = \emptyset$ 21~的情形 7.1. Y 不是 Seifert 纤维化的情形 23~7.2. Y 是 Seifert 纤维化的情形 27

第3部分。填充后可约的情形 Y D^3**的** 28 8. $Y = S^1 \times S^2$ 28的情形9. $Y = \mathbb{RP}^3$的情形#$\mathbb{RP}^3$ 29 10. Y 为 Y_1#Y_2 且 $Y_2 \ncong \mathbb{RP}^3$ 30的情形参考文献 34

第1部分。 $I \times Y$中的弧空间

设 Y 是一个连通、定向、紧致的三维流形，可以带边界，也可以不带边界。回顾一下，我们记作 $I = [0,1]$。本文第 1 部分定义了 $I \times Y$ 中的若干弧空间，并研究它们的同伦群的性质。

我们稍后将考虑自同构群在 $I \times Y$ 的弧空间上的作用，因此在此介绍若干自同构群的记号。若 $A \subset X$ 是拓扑空间，令 Homeo(X) 表示 X的自同胚群，令 Homeo(X, A) 表示 Homeo(X) 中固定 A的元素所成的群，并令 Homeo$_0$(X) 表示 Homeo(X) 中与恒等映射同伦的元素所成的群。下文中，我们总是取 X 为紧致流形，并取 A 为 X边界上的闭区域。因此，Homeo(X),Homeo$_0$(X), Homeo(X, A) 关于 C^0 拓扑都是拓扑群。

我们还回顾一下引言中的几个定义。若 X 是一个光滑流形，记 Diff$_\partial$(X) 为 X 上在边界附近等于恒等映射的微分同胚群，并赋予其 C^∞ 拓扑。记 Diff$_{PI}$(X) 为 Diff$_\partial$(X) 中由与恒等映射伪同伦的微分同胚组成的子群。根据定义，~微分同胚 f属于 Diff$_{PI}$(X)，当且仅当存在一个微分同胚 f:~ ~ ~$I \times X \to I \times X$，使得 $f =$ 在 $I \times \partial X$的某个邻域上恒等，并且 $f(0, x) = (0, x)$ $f(1, x) =$

(1, $f(x)$) 对所有 $x \in X$ 均成立。对于同胚，我们类似地定义 $\mathrm{Homeo}_\partial(X)$、$\mathrm{Homeo}_{PI}(X)$，并为它们赋予 C^0 拓扑。

如果 G 是上述自同构群之一，且 φ_1，$\varphi_2 \in G$ 位于同一个路径连通分支中，我们就称 φ_1 和 φ_2 在 G中是同痕的 。

自同构群之间存在各种包含关系。例如，我们有单射映射

$$\mathrm{Diff}_{PI}(X) \hookrightarrow \mathrm{Homeo}_{PI}(X) \hookrightarrow \mathrm{Homeo}_0(X) \hookrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$$

这些映射将一个自同构映到其自身。我们将这些映射及其在同伦群上诱导的映射称为典范映射。

2. The embedding spaces of arcs

设 $\mathrm{Emb}_\dagger(I,\ I\times Y)$ 是由拓扑 真嵌入 $\gamma\colon\ I\to I\times Y$ 构成的空间，其中存在 $y\in Y$（它可能依赖于 γ），使得 $\gamma(0)=(0,\ y)$、$\gamma(1)=(1,\ y)$，且 γ 到 Y 的投影是一个可缩圈。定义

$$\begin{aligned} \mathscr{I} : Y &\to \mathrm{Emb}_\dagger(I, I\times Y) \\ y &\mapsto (t\mapsto (t,y)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

是将每个 $y\in Y$ 映射到像为 $I\times\{y\}$ 的标准弧的嵌入。

令 $y_0\in Y$ 为基点，并令 $\mathscr{I}(y_0)$ 为 $\mathrm{Emb}_\dagger(I,I\times Y)$ 的基点。当上下文明确时，记号中将省略同伦群的基点。定义 $\mathrm{Emb}_\partial(I,I\times Y)$ 为满足 $\gamma(0)=(0,y_0)$、$\gamma(1)=(1,y_0)$ 的元素 $\gamma\in\mathrm{Emb}_\dagger(I,I\times Y)$ 的集合。于是 $\mathrm{Emb}_\partial(I,I\times Y)$ 是 $\mathrm{Emb}_\dagger(I,I\times Y)$ 的子空间，并且有一个纤维化 $\mathrm{Emb}_\partial(I,I\times Y)\hookrightarrow\mathrm{Emb}_\dagger(I,I\times Y)\to Y$。因此，若 Y是非球面的，则包含映射在同伦群上诱导一个同构

$$\pi_i\,\mathrm{Emb}_\partial(I,I\times Y)\cong\pi_i\,\mathrm{Emb}_\dagger(I,I\times Y)$$

对所有 $i\geq 2$ 均成立。由于映射 $\mathscr{I}\colon\ Y\to\mathrm{Emb}_\dagger(I,\ I\times Y)$ 是上述纤维化的一个截面，我们得到一个正合序列

$$0\to\pi_1\,\mathrm{Emb}_\partial(I,I\times Y)\to\pi_1\,\mathrm{Emb}_\dagger(I,I\times Y)\to\pi_1(Y)\to 0$$

其分裂映射为 $\mathscr{I}_*\colon\ \pi_1(Y)\to\pi_1\,\mathrm{Emb}_\dagger(I,\ I\times Y)$。因此，我们有

$$\pi_1\,\mathrm{Emb}_\dagger(I,I\times Y)\cong\pi_1\,\mathrm{Emb}_\partial(I,I\times Y)\rtimes\pi_1(Y). \tag{2.2}$$

令 $\mathrm{Emb}_\partial^{sm}(I,\ I\times Y)\subset\mathrm{Emb}_\partial(I,\ I\times Y)$ 表示由光滑嵌入的弧组成的子空间。根据 Robinson 的一个定理 [Rob74][2]，，包含映射在 π_1: 上诱导一个同构

$$\pi_1\,\mathrm{Emb}_\partial^{sm}(I,I\times Y)\cong\pi_1\,\mathrm{Emb}_\partial(I,I\times Y). \tag{2.3}$$

在本文准备期间，Alexander Kupers 告诉我们，同构(2.3) 也将由 Kremer–Kupers 即将开展的工作推出 [KK]。

设 $\varphi\in\mathrm{Homeo}_\partial(I\times Y)$。则 φ 诱导一个同胚 $\varphi_*\colon\mathrm{Emb}_\dagger(I,\ I\times Y)\to\mathrm{Emb}_\dagger(I,\ I\times Y)$。显然，若 φ 在 $\mathrm{Homeo}_\partial(I\times Y)$ 中与恒等映射同痕，则 φ_* 与恒等映射同伦。事实上，我们还有以下结果，它允许我们利用 φ_* 的同伦类来阻碍 $\mathrm{Homeo}(I\times Y,\ I\times\partial Y)$ 中的同痕。

引理 2.1. 假设 $\varphi\in$同胚群$_\partial(I\times Y)$ 在 同胚群$(I\times Y, I\times\partial Y)$ 中与恒等映射同伦，并假设 φ 相对于 $\{0,1\}\times Y$ 与 $I\times Y$ 的恒等映射同伦。则 $\varphi_*\circ\mathscr{I}$ 与 $\mathscr{I}$ 作为从 Y 到 嵌入$_\dagger(I,I\times Y)$ 的映射是同伦的。

[2]Rob 的原始陈述 [Rob74] 仅讨论了闭流形的嵌入空间，但其中采用的论证也适用于带边流形。

证明. 我们称映射 $\varphi\colon Y\times I\to Y\times I$ 是保水平的，如果它保持 I–坐标。注意存在一个纤维化（在同伦等价的意义下）

$$\mathrm{Homeo}_\partial(I\times Y)\hookrightarrow \mathrm{Homeo}(I\times Y, I\times\partial Y)\xrightarrow{p}\mathrm{Homeo}_\partial(\{0,1\}\times Y),$$

其中映射 p 由限制到 $\{0,1\}\times Y$ 定义。因此我们得到一个正合序列

$$\pi_1(\mathrm{Homeo}_\partial(\{0,1\}\times Y))\to\pi_0\,\mathrm{Homeo}_\partial(I\times Y)\to\pi_0\,\mathrm{Homeo}(I\times Y, I\times\partial Y).$$

显然，$\pi_1(\mathrm{Homeo}_\partial(\{0,1\}\times Y))\to\pi_0\mathrm{Homeo}_\partial(I\times Y)$ 的像中的元素均可由保层同胚表示。因此，若 φ 在 $\mathrm{Homeo}(I\times Y,\ I\times\partial Y)$ 中与恒等映射同痕，那么经过 $\mathrm{Homeo}_\partial(I\times Y)$ 中的一次同痕后，我们可以假设 φ 是一个保层同胚。

设 $F\colon I\times(I\times Y)\to I\times Y$ 是一个从 φ 到恒等映射、相对于 $\{0,1\}\times Y$ 的同伦。定义 $\hat{}\,\hat{}F\colon I\times(I\times Y)\to I\times Y$，使得 $F(t,\ (s,\ y))=(s,\ \pi_Y(F(t,\ (s,\ y))))$，其中 $\pi_Y\colon I\times Y\to Y$ 是 $\hat{}$ 投影。于是 F 是一个从 φ 到恒等映射、相对于 $\{0,1\}\times Y$、通过保层映射给出的同伦。

L并且 $G\colon I\times Y\to\mathrm{Emb}^\dagger(I,\ I\times Y)$ 是将 $(t,\ y)\in I\times Y$映射到该弧的映射

$$I\to I\times Y$$
$$s\mapsto\hat{F}(t,(s,y)).$$

注意，上述弧始终是嵌入的，因为它保持 I 坐标不变。因此，G 是良定义的。直接验证可知，G 是 $\mathscr{I}$ 与 $\varphi_*\circ\mathscr{I}$ 之间的同伦。□

3. The homotopy groups of $\mathrm{Emb}_\dagger(I, I\times Y)$

下文中，我们用 $\pi_i^{\mathbb{Q}}$ 表示有理同伦群。本节旨在研究 $\pi_1\mathrm{Emb}^\dagger(I,\ I\times Y)$ 和 $\pi_2^{\mathbb{Q}}\mathrm{Emb}^\dagger(I,\ I\times Y)$ 的性质。

3.1. **Dax 同构**。在本小节中，我们计算 $\pi_1\mathrm{Emb}^\dagger(I,\ I\times Y)$。为简化计算，我们假设在整个第 $\pi_1(Y)$ 节中 3.1均为无限。此假设意味着 Y 的万有覆盖非紧致，因此它与一个单连通的二维 CW 复形同伦等价，而后者总是与 2-球面的楔和同伦等价。因此，我们有

$$\pi_3^{\mathbb{Q}}(Y)=[\pi_2^{\mathbb{Q}}(Y),\pi_2^{\mathbb{Q}}(Y)],\tag{3.1}$$

其中，$[\cdot,\cdot]$ 表示怀特海德积。

给定两个元素 $\gamma_0,\ \gamma_1\in\mathrm{Emb}_\partial(I,\ I\times Y)$，我们可以将 γ_1 视为 $[1,2]\times Y$中的一条路径。接着，将这两条路径连接起来，得到 $[0,2]\times Y\cong I\times Y$中的一条路径 $\gamma_0*\gamma_1$。不难验证，这一构造使 $\mathrm{Emb}_\partial(I,\ I\times Y)$ 成为一个 H-空间。因此，$\pi_1\mathrm{Emb}_\partial(I,\ I\times Y)$ 是一个阿贝尔群。

令 $\mathrm{Map}_\partial(I,\ I\times Y)$ 表示连续映射 $\gamma\colon I\to I\times Y$ 的空间，其中 $\gamma(0)=(0,\ y_0)$，$\gamma(1)=(1,\ y_0)$，其中 $y_0\in Y$是基点。我们有一个典范嵌入

$$\mathrm{Emb}_\partial(I,I\times Y)\to\mathrm{Map}_\partial(I,I\times Y)$$

它诱导出一个同态

$$\mathcal{F}:\pi_1\,\mathrm{Emb}_\partial(I,I\times Y)\to\pi_1\,\mathrm{Map}_\partial(I,I\times Y)\cong\pi_2(Y).$$

$\mathcal{F}$的右逆 $\mathcal{J}\colon\ \pi_2(Y)\to\pi_1\,\mathrm{Emb}_\partial(I,I\times Y)$可按如下方式构造：给定由 $\eta\colon(I^2,\partial I^2)\to(Y,y_0)$ 所表示的元素 $[\eta]\in\pi_2(Y)$，我们如下定义 $\mathcal{J}([\eta])=[\xi]$：

$$\xi:(I,\partial I)\to\mathrm{Emb}_\partial(I,I\times Y;\mathscr{I}(y_0))$$
$$t\mapsto(s\mapsto(s,\eta(t,s))).$$

因此，我们有

$$\pi_1 \operatorname{Emb}_\partial(I, I\times Y) \cong \pi_1^D \operatorname{Emb}_\partial(I, I\times Y) \oplus \pi_2(Y) \tag{3.2}$$

其中我们用 $\pi_1^D\mathrm{Emb}_\partial(I, I\times Y)$ 表示 $\mathcal{F}$ 的核。根据 Dax 同构定理（见 [Gab21，定理 0.3]）和（2.3），我们有

$$\pi_1^D \operatorname{Emb}_\partial(I, I\times Y) \cong \mathbb{Z}[\pi_1(Y)\setminus\{1\}]/\operatorname{Im} d_3$$

其中同态 $d_3\colon \pi_3(I\times Y) \to \mathbb{Z}[\pi_1(Y)\setminus\{1\}]$ 定义见 [Gab21，定义 3.8]。

根据 [KT24，命题 3.14]，对于 a，$b\in\pi_2(I\times Y)$，我们有

$$d_3([a,b]) = \lambda(a,b)+\lambda(b,a)$$

其中，$\lambda(a,b)$ 表示 $a,b\in\pi_2(I\times Y)$ 的等变交数（略去 1 的系数）。由于 $\pi_2(I\times Y)\cong\pi_2(Y)$，我们可以假设 a 和 b 由浸入球面表示，且它们位于 $I\times Y$ 的不同 Y-切片中。因此，由于不存在交点，我们有 $\lambda(a,b)=\lambda(b,a)=0$。根据 (3.1)，可得 $d_3=0$，进而

$$\pi_1^D \operatorname{Emb}_\partial(I, I\times Y) \cong \mathbb{Z}[\pi_1(Y)\setminus\{1\}]. \tag{3.3}$$

现在我们证明本小节的主要结果。

命题 3.1. 我们有一个半直积分解

$$\pi_1 \operatorname{Emb}_\dagger(I, I\times Y) \cong (\mathbb{Z}[\pi_1(Y)\setminus\{1\}]\oplus\pi_2(Y))\rtimes\pi_1(Y), \tag{3.4}$$

其中 $\mathscr{I}_*$ 是 $\pi_1(Y)$ 在 $\pi_1\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)$ 中的嵌入映射，作为半直积的一个分量；而 $\pi_1(Y)$ 对 $\mathbb{Z}[\pi_1(Y)\setminus\{1\}]\oplus\pi_2(Y)$ 的共轭作用，由其在 $\mathbb{Z}[\pi_1(Y)\setminus\{1\}]$ 的生成元上的共轭作用以及在 $\pi_2(Y)$上的标准作用给出。

证明。由（2.2）、（3.2）和（3.3），

$$\begin{aligned}\pi_1 \operatorname{Emb}_\dagger(I, I\times Y) &\cong \pi_1 \operatorname{Emb}_\partial(I, I\times Y)\rtimes\pi_1(Y)\\ &\cong (\mathbb{Z}[\pi_1(Y)\setminus\{1\}]\oplus\pi_2(Y))\rtimes\pi_1(Y).\end{aligned}$$

我们需要计算 $\mathscr{I}_*(\pi_1(Y))$ 对 $\pi_1\mathrm{Emb}_\partial(I, I\times Y)$ 的共轭作用，并将它们视为 $\pi_1\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)$ 的子群。

对于每个 $[\gamma]\in\pi_1(Y)$，令 $H\colon Y\times I\to Y$ 为 Y 从 id 到 id 的一个光滑同痕，使得基点的轨迹为 γ。对于每个 $\alpha\in\pi_1\mathrm{Emb}_\partial(I, I\times Y)$，令 $\hat{}\alpha\colon S^1\to\mathrm{Emb}_\partial(I, I\times Y)$ 为 α 的一个代表元。对于每个 t，映射 $H(-,t)$ 诱导 $\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)$ 的一个自同胚，我们用 $\hat{}\alpha_t$ 表示 $\hat{}\alpha$ 在此同胚下的像。于是 $\hat{}\alpha_t$ $(t\in[0,1])$ 定义了一个从 S^1 到 $\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)$ 的单参数映射族，其基点轨迹为 $\mathscr{I}\circ\gamma$。因此，$\hat{}\alpha_1$ 表示 $[\mathscr{I}\circ\gamma]$ 对 α 的共轭作用的像。由于 Dax 同构（3.3）关于 $I\times Y$ 的自微分同胚是自然的，且 $H(-,1)$ 在 $\pi_1(Y)$ 上的诱导映射是由 $[\gamma]$ 给出的共轭作用，因此我们得出结论：在通过（3.3）作出的识别下，$\pi_1(Y)$ 对 $\pi_1^D\mathrm{Emb}_\partial(I, I\times Y)$ 的共轭作用由其在 $\mathbb{Z}[\pi_1(Y)\setminus\{1\}]$ 的生成元上的共轭作用给出。类似地，$H(-,1)$ 在 $\pi_2(Y)$ 上的作用是由 $[\gamma]$ 给出的标准作用；显然，根据 $\mathcal{J}$ 的构造，该作用与 $H(-,1)$ 的作用可交换。□

3.2. **从嵌入空间到构形空间。** 在本节3余下部分中，我们假设 Y 是不可约的，且 $b_1(Y)>0$。这意味着 Y 是非球面的。本节 3 的余下部分将构造一个同态 Ψ，从同伦群 $\pi_2^{\mathbb{Q}}\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)$ 到一个无限维 $\mathbb{Q}$向量空间，并证明该映射 Ψ的若干基本性质。

我们首先建立点的嵌入空间与构形空间之间的关系。本小节中的构造是 [BG25第 4]

~和 [LXZ25第 7 节。4]。令 Y 如上所述。令 Y 为 Y 的正规覆盖，使得~的像 $\pi_1(Y)$ $\to \pi_1(Y)$ 等于商映射的核

$$\tau : \pi_1(Y) \to H_1(Y;\mathbb{Z})/\mathrm{tors},$$

其中， $H_1(Y;\mathbb{Z})/\mathrm{tors}$ 表示将 $H_1(Y;\mathbb{Z})$ 除去其挠元后所得的商。

对于表示由 α 确定的覆盖变换 $t^a : \widetilde{Y} \to \widetilde{Y}$，我们也滥用记号，用 t^a 表示映射 $\mathrm{id}_I \times t^a$: $I \times Y \to I \times Y$。令~$\tilde{y}_0$ 为 Y 上的基点，它是基点 $y_0 \in Y$ 的一个提升。

注记 3.2。 第 3.2 - 3.4 节中的所有构造在将 τ 替换为从 $\pi_1(Y)$ 到某个阿贝尔群的任意满射时仍然成立。之所以特意选取 τ，原因如下：(1) 命题 3.11 所述的自然性要求 τ 的陪域关于 Y 具有函子性，并且映射 τ 是自然的。(2) 在定理 $r \circ \Psi(\alpha)$ 的证明中计算 7.8时，我们需要用到 τ 的陪域没有挠元这一事实。

定义 3.3. 对于每个正整数 n，定义

$$\begin{aligned} C_n^\tau(I \times Y) = \{&(x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in (I \times \widetilde{Y})^{n+2} | x_0 = (0, \tilde{y}_0), x_{n+1} = (1, \tilde{y}_0), \\ &x_i \neq t^a x_j \text{ for all } a \in (H_1(Y;\mathbb{Z})/tors) \setminus \{0\}, \\ &0 \leq i < j \leq n+1\} \end{aligned}$$

空间序列 $C_n^\tau(I \times Y)$ $(n \geq 0)$ 可以赋予余单纯空间结构，其中余面映射 δ_n^i: $C_n^\tau(M)$ $\to C_{n+1}^\tau(M)$ $(0 \leq i \leq n+1)$ 定义为将 i^{th} 点加倍，而余退化映射 σ_n^i : $C_n^\tau(M) \to C_{n-1}^\tau(M)$ $(1 \leq i \leq n)$ 定义为遗忘i^{th} 点。注意，余面映射是余纤维化，因为它们是闭子流形的嵌入。

根据 [LXZ25，定义 3.1], ，我们称拓扑空间 X 具有Δ^n–结构，若对于 $S \subset \{0, \ldots, n\}$，存在一个相应的子集 X_S，使得 $X_S \cap X_{S'} = X_{S \cap S'}$。若 X_1、X_2 具有 Δ^n–结构，我们用 Map_Δ (X_1, X_2) 表示从 X_1 到 X_2 的连续映射空间，这些映射对所有 S均将 $(X_1)_S$ 映至 $(X_2)_S$。

空间 $C_n^\tau(I \times Y)$ 借助其余单纯结构赋予了一个 Δ^n–结构：每个 $S \subset \{0, \ldots, n\}$ 都会从余单纯结构诱导出一个嵌入 $C_{|S|-1}^\tau(I \times Y) \to C_n^\tau(I \times Y)$。我们将 $C_{n,S}^\tau(I \times Y)$ 定义为该映射的像。我们还将单形Δ^n 与集合 $\{(t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1})$ $|0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq t_{n+1} = 1\}$ 等同起来；该集合赋有标准的 Δ^n–结构，其中对所有 $i \notin S\}$，均有 $\Delta_S^n = \{(t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}) \in \Delta^n | t_i = t_{i+1}$。

那么，对每个 n，我们都有一个映射[3]

$$\Phi_n : \mathrm{Emb}_\partial(I, I \times Y) \to \mathrm{Map}_\Delta(\Delta^n, C_n^\tau(I \times Y))$$

~ ~将 $f \in \mathrm{Emb}_\partial(I, I \times Y)$ 映射到 f^n: $I^n \to (I \times Y)^n$ 在 Δ^n 上的限制，其中

~ ~ ~f: $I \to I \times Y$ 是 $f \in \mathrm{Emb}_\partial(I, I \times Y)$ 的提升，并满足 $f(0) = (0, \tilde{y}_0)$。

考虑 $n = 3$ 时上述映射，并考察它在 $\pi_2^{\mathbb{Q}}$ 上诱导的映射。我们得到一个同态

$$(\Phi_3)_* : \pi_2^{\mathbb{Q}} \mathrm{Emb}_\partial(I, I \times Y) \to \pi_2^{\mathbb{Q}} \mathrm{Map}_\Delta(\Delta^n, C_3^\tau(I \times Y))$$

[3]LXZ Ψ_n 中将此映射记作 [LXZ25]。

3.3. **Bousfield–Kan谱序列。** 正如 [LXZ25第 7 节所述，4], Bousfield–Kan谱序列有一个特殊情形，可以计算 $\pi_2^{\mathbb{Q}}$映射$_\Delta(\Delta^3,\ C_3^\tau(I\times Y))$。该谱序列表明，$\pi_2^{\mathbb{Q}}$映射$_\Delta(\Delta^3,\ C_3^\tau($ $I\times Y))$ 同构于 $\pi_5^{\mathbb{Q}}(C_3^\tau(I\times Y))$ 对余面映射的像取商所得的商群

$$\delta_2^i:\pi_5^{\mathbb{Q}}(C_2^\tau(I\times Y))\to\pi_5^{\mathbb{Q}}C_3^\tau(I\times Y),\ 0\le i\le 3$$

以及 $\oplus^6\pi_4^{\mathbb{Q}}C_1^\tau(I\times Y)$ 的一个子群的像。这里，为简化记号，我们也用 δ_2^i 表示 δ_2^i 在同伦群上诱导的映射。在我们的假设下，$\pi_4^{\mathbb{Q}}(C_1^\tau(I\times Y))\cong 0$，因为 Y 是非球面的。因此，我们有

$$\pi_2^{\mathbb{Q}}\operatorname{Map}_\Delta(\Delta^3,C_3^\tau(I\times Y))\cong\pi_5^{\mathbb{Q}}C_3^\tau(I\times Y)/\sum_i\operatorname{Im}\delta_2^i. \tag{3.5}$$

式 (3.5) 中同伦群的基点见 [LXZ25，第3节3]；我们在此简要回顾这些定义。一般而言，只要将基点选在单连通集合中，同伦群便定义良好。同伦群 $\pi_5^{\mathbb{Q}}(C_3^\tau(I\times Y))$ 的基点选自满足 $x_i=(t_i,\tilde{y}_0)$ 和 $0=t_0\le t_1\le\cdots\le t_3\le t_4=1$ 的集合 $(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)\in C_3^\tau(I\times Y)$。$\pi_2^{\mathbb{Q}}\operatorname{Map}_\Delta(\Delta^3,C_3^\tau(I\times Y))$ 的基点取为 $\Phi_3(\mathscr{I}(y_0))$。回忆一下，$\mathscr{I}$ 由 (2.1) 定义。

现在我们构造一些工具来计算 $\operatorname{Im}(\delta_2^i)$。令 $\hat{}Y$ 为 Y 的万有覆盖。那么，$C_n^\tau(I\times Y)$ 的万有覆盖可描述为

$$\begin{aligned}\hat{C}_n^\tau(I\times Y)=\{&(x_0,x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})\in(I\times\hat{Y})^n|x_0=(0,\tilde{y}_0),x_{n+1}=(1,\tilde{y}_0),\\&x_i\neq t^\alpha x_j\text{ for all }\alpha\in\pi_1(Y)\setminus\ker\tau,0\le i<j\le n+1\}\end{aligned}$$

其中，t^α 表示由 $\alpha\in\pi_1(Y)$ 确定的覆盖变换。

我们在以下空间的同伦群中定义如下元素：$C_n^\tau(I\times Y)$（参见 [LXZ25，定义 4.3、4.8]）。

定义 3.4。 对于 $1\le i<j\le n$ 和 $\alpha\in\pi_1(Y)$，我们定义

$$t_i^\alpha w_{ij}\in\pi_3\hat{C}_n^\tau(I\times Y)$$

令 x_i 在一个小的坐标邻域内绕 $t^\alpha x_j$ 旋转，从而定义。

ˆ 注意，如果 $\alpha\in\ker\tau$，那么 $t_i^\alpha w_{ij}=0\in\pi_3C_n^\tau(I\times Y)$。因此，我们通常只会在 $\alpha\in\pi_1(Y)\setminus\ker\tau$ 时使用定义 3.4。

ˆ由于 $\pi_3C_n^\tau(I\times Y)\cong\pi_3C_n^\tau(I\times Y)$，我们也通过记号滥用将 $t_i^\alpha w_{ij}$ 视为 $\pi_3C_n^\tau(I\times Y)$ 中的一个元素。根据余面映射的定义，我们有以下公式。

$$\begin{aligned}\delta_2^0(t_1^\alpha w_{12})&=t_2^\alpha w_{23}\\\delta_2^1(t_1^\alpha w_{12})&=t_1^\alpha w_{13}+t_2^\alpha w_{23}\\\delta_2^2(t_1^\alpha w_{12})&=t_1^\alpha w_{12}+t_1^\alpha w_{13}\\\delta_2^3(t_1^\alpha w_{12})&=t_1^\alpha w_{12}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

以下命题的证明与 [LXZ25，命题 4.26、引理 7.8(a)]类似。

命题 3.5。 向量空间 $\pi_5^{\mathbb{Q}}C_2^\tau(I\times Y)$ 由以下元素生成

$$[t_1^\alpha w_{12},t_1^\beta w_{12}]\ \textit{for}\ \alpha,\beta\in\pi_1(Y)\setminus\ker\tau,\alpha\neq\beta$$

其中 $[\cdot,\cdot]$ 表示怀特海德积。

ˆˆ证明。 令 int($C_n^\tau(I\times Y)$) 表示满足以下条件的点集 $(x_0,\dots,x_{n+1})\in C_n^\tau(I\times Y)$: ˆˆˆ 每个 x_i 都位于 $(I\times Y)^n$ 的内部。于是，int($C_n^\tau(I\times Y)$) 到 $C_n^\tau(I\times Y)$ 的包含映射是一个同伦等价，并且我们有一个纤维化

$$\mathrm{int}(I\times\hat{Y})\setminus\{t^\alpha p|\alpha\in\pi_1(Y)\setminus\ker\tau\}\to\mathrm{int}(\hat{C}_2^\tau(I\times Y))\to\mathrm{int}(I\times\hat{Y}),$$

其中 $p\in$int($I\times$ˆY) 是一个不动点。由于 Y 是非球面的，我们有 $\pi_5^{\mathbb{Q}}$int($I\times$ˆY) $\setminus\{t^\alpha p|\alpha\in\pi_1($ Y) $\setminus$ker $\tau\}\cong\pi_5^{\mathbb{Q}}$int(ˆ$C_n^\tau(I\times Y)$)。注意，int($I\times$ˆ$Y$) $\setminus\{t^\alpha p|\alpha\in\pi_1(Y)\setminus$ker $\tau\}$ 同伦等价于一族 S^3 的楔和，其中每个 S^3 对应于 $\{t^\alpha p|\alpha\in\pi_1(Y)\setminus$ker $\tau\}$ 的一个元素。因此，它的 $\pi_5^{\mathbb{Q}}$ 由基于 $\pi_3^{\mathbb{Q}}$ 的怀特海德积生成，通过直接的图表追踪即可得到所需结果。□

命题 3.5 以及（3.6）使我们能够直接计算 Im(δ_2^i)。

3.4. 从 $\pi_5C_3^\tau(I\times Y)$ 得到的同态。 在 S^5 上固定一个定向。设 $\mu\colon S^5\to C_3^\tau(I\times Y)$ 是一个连续映射。对于 $0\neq a\in H_1(Y;\mathbb{Z})/$tors，令 Co$_j^i(a,\ \mu)$ 表示满足以下条件的$p\in S^5$ 的集合: $t^a(x_i)$ 在 Y 上的投影与 x_j 相同，且其 I 坐标大于 x_j，其中 $(x_1,\ x_2,\ x_3)=\mu(p)$。对 μ 进行通有扰动后，集合 Co$_i^j(a,\ \mu)$ 是 S^5 的横截切出的余维数 2 闭子流形，并且具有诱导定向。

设 $a,\ b\in H_1(Y;\ \mathbb{Z})/$tors 满足 $a,\ b,\ a-b\neq0$。下一个引理与 [LXZ25，引理 71] 中的表述完全相同。

引理 3.6. 对于通有的 μ，环绕数

$$\mathrm{lk}\left(\mathrm{Co}_2^1(a,\mu)-\mathrm{Co}_3^1(a-b,\mu),\mathrm{Co}_1^3(b-a,\mu)-\mathrm{Co}_2^3(b,\mu)\right)$$

是良定义的，且仅依赖于 μ的同伦类。 □

定义 $\theta_{-a,-b}\colon\ \pi_5(C_3^\tau(I\times Y))\to\mathbb{Z}$ 为上述环绕数。[4]

类似地，设 $a,b\in H_1(Y;\mathbb{Z})/$tors、 $a,b,a-b\neq0$与 $1\le i<j\le3$。则对所有 μ，有 Co$_j^i(a,\mu)\cap$Co$_j^i(b,\mu)=\emptyset$。因此，对于通有的 μ，环绕数

$$\mathrm{lk}\left(\mathrm{Co}_j^i(a,\mu),\mathrm{Co}_j^i(b,\mu)\right)$$

是良定义的，且仅依赖于 μ 的同伦类。我们定义 $\zeta^{i,\ j}_{-a,-b}(\mu)$ 为该环绕数。注意，对所有 $i,\ j,a,b,$ 均有 $\zeta^{i,\ j}_{a,\ b}(\mu)=-\zeta^{i,\ j}_{b,\ a}(\mu)$。

由定义显然可见，$\theta_{a,b}$ 与 $\zeta^{i,\ j}_{a,\ b}$,诱导出从$\pi_5C_3^\tau(I\times Y)$到 $\mathbb{Z}$的群同态。我们滥用记号，也用 $\theta_{a,b}$ 与 $\zeta^{i,\ j}_{a,\ b}$,表示$\mathbb{Q}$–系数下的映射。定义 $\Theta\colon\ \pi_5^{\mathbb{Q}}C_3^\tau(I\times Y)\to\oplus_\infty\mathbb{Q}$ 为 $\theta_{a,b}$ 与 $\zeta^{i,\ j}_{a,\ b,}$ 的直和。下述结果容易验证。

命题 3.7. 以下恒等式在 $\pi_5^{\mathbb{Q}}C_3^\tau(I\times Y)$上成立。

$$\theta_{a,b}([t_i^\alpha w_{ij},t_i^\beta w_{ij}])=0$$

$$\theta_{a,b}([t_1^\alpha w_{12},t_2^\beta w_{23}])=\begin{cases}\pm1\ \ if\ a=\tau(\alpha),b=-\tau(\beta)\\0\ \ otherwise\end{cases}$$

$$\zeta^{i,j}_{a,b}([t_1^\alpha w_{12},t_2^\beta w_{23}])=0$$

$$\zeta^{i,j}_{a,b}([t_i^\alpha w_{ij},t_i^\beta w_{ij}])=\begin{cases}\pm1\ \ if\ a=\tau(\alpha),b=\tau(\beta)\\\mp1\ \ if\ a=\tau(\beta),b=\tau(\alpha)\\0\ \ otherwise\end{cases}$$

[4]这里在下标中添加负号，使命题 3.7 中的符号更简洁 .

$$\zeta^{i,j}_{a,b}([t^\alpha_k w_{kl}, t^\beta_k w_{kl}]) = 0 \ \textit{if}\ (i,j) \neq (k,l).$$

□

我们也可以选择定向约定，使得 ± 1命题3.7中的所有值都等于 $+1$，而值 ∓ 1 等于 -1。

现在，我们可以利用 (3.6)、命题 3.5 和命题 3.7 计算 $\Theta\circ\delta^i_2$ 在 $\oplus_\infty\mathbb{Q}$ 中的像。当 $Y = S^1\times D^2$ 时，这已在 [BG19 第 3] 节中完成。下文中，令 $\hat{}\theta_{a,b}, \hat{}\zeta^{i,a}_{\ j},_b (a,b,a-b\neq 0, 1\le i<j\le 3)$ 表示 $\oplus_\infty\mathbb{Q}$ 中分别对应于 $\theta_{a,b}$ 和 $\zeta^{i,a}_{\ b}$ 的基向量。则 Θ 的像包含于由 $\hat{}\theta_{a,b}$ 和 $\hat{}\zeta^{i,a}_{\ j},_b - \hat{}\zeta^{i,b}_{\ j},_a$ 张成的空间中，。

推论3.8。 $\mathrm{Im}(\Theta\circ\delta^i_2)$ 描述如下。

(1) $\mathrm{Im}(\Theta\circ\delta^0_2)$ 由形如 $\hat{}\zeta^{2,a}_{\ 3},_b - \hat{}\zeta^{2,b}_{\ 3},_a$ 的向量生成。(2)

$\mathrm{Im}(\Theta\circ\delta^1_2)$ 由形如以下形式的向量生成

$$(\hat\zeta^{1,3}_{a,b} - \hat\zeta^{1,3}_{b,a}) + (\hat\zeta^{2,3}_{a,b} - \hat\zeta^{2,3}_{b,a}) - \hat\theta_{a-b,-b} + \hat\theta_{b-a,-a}.$$

(3) $\mathrm{Im}(\Theta\circ\delta^2_2)$ 由形如以下形式的向量生成

$$(\hat\zeta^{1,2}_{a,b} - \hat\zeta^{1,2}_{b,a}) + (\hat\zeta^{1,3}_{a,b} - \hat\zeta^{1,3}_{b,a}) - \hat\theta_{a,a-b} + \hat\theta_{b,b-a}.$$

(4) $\mathrm{Im}(\Theta\circ\delta^3_2)$ 由形如 $\hat{}\zeta^{1,a}_{\ 2},_b - \hat{}\zeta^{1,b}_{\ 2},_a$ 的向量生成。

证明。 断言 (1)、(2) 由命题3.7 和 (3.6) 得出。断言 (3)、(4) 由 [LXZ25、等式（4.3）] 以及类似的计算得出。□

注意，$\mathrm{Im}(\Theta)\subset$ 由$\{\hat{}\theta_{a,b}, \hat{}\zeta^{i,b}_{\ j},_a - \hat{}\zeta^{j,b}_{\ i},_a\}$生成。根据上述推论，我们有

$$\begin{aligned}&\mathrm{span}\{\hat\theta_{a,b}, \hat\zeta^{i,j}_{b,a} - \hat\zeta^{j,i}_{b,a}\}/\sum_i \mathrm{Im}(\delta^i_2)\\ \cong\ &\mathrm{span}\{\hat\theta_{a,b}\}/\mathrm{span}\{\hat\theta_{a-b,-b} - \hat\theta_{b-a,-a} - \hat\theta_{a,a-b} + \hat\theta_{b,b-a}\},\end{aligned}$$

^ ^ 其中，同构将 $\theta_{a,b}$ 的等价类映射为 $\theta_{a,b}$ 的等价类。现在我们可以定义所需的映射 Ψ。

定义 3.9. 将 Ψ 定义为以下各项的复合

$$\begin{aligned}&\pi^{\mathbb{Q}}_2\,\mathrm{Emb}_\partial(I, I\times Y) \xrightarrow{(\Phi_3)_*} \pi^{\mathbb{Q}}_2\,\mathrm{Map}_\Delta(\Delta^n, C^\tau_n(I\times Y))\\ \cong\ &\pi^{\mathbb{Q}}_5 C^\tau_3(I\times Y)/\sum_i \mathrm{Im}(\delta^i_2) \xrightarrow{\Theta} \mathrm{span}\{\hat\theta_{a,b}, \hat\zeta^{i,j}_{b,a} - \hat\zeta^{j,i}_{b,a}\}/\sum_i \mathrm{Im}(\delta^i_2)\\ \cong\ &\mathrm{span}\{\hat\theta_{a,b}\}/\mathrm{span}\{\hat\theta_{a-b,-b} - \hat\theta_{b-a,-a} - \hat\theta_{a,a-b} + \hat\theta_{b,b-a}\}.\end{aligned}$$

3.5. 的性质. 给定上述的 Y，记

$$\mathcal{W}(Y) = \mathrm{span}\{\hat\theta_{a,b}\}/\mathrm{span}\{\hat\theta_{a-b,-b} - \hat\theta_{b-a,-a} - \hat\theta_{a,a-b} + \hat\theta_{b,b-a}\},$$

其中（a,b）遍历 $H_1(Y;\mathbb{Z})/\mathrm{tors}$ 中满足 $a,b,a-b\neq 0$ 的所有元素对。于是，$\mathcal{W}(Y)$ 是 Ψ 的陪域。若 Y' 是另一个满足与 Y 相同假设的流形，且 $i: Y'\hookrightarrow Y$ 是一个余维零保定向嵌入，并在 $H_1(-;\mathbb{Z})/\mathrm{tors}$ 上诱导单射，则存在一个诱导映射 $i_*: \mathcal{W}(Y')\to\mathcal{W}(Y)$。注意，由于 i_* 在 $H_1(-;\mathbb{Z})/\mathrm{tors}$ 上诱导单射映射，每当 $a,b\in H_1(Y';\mathbb{Z})/\mathrm{tors}$ 满足 a,b, $a-b\neq 0$ 时，它们在 $H_1(Y;\mathbb{Z})/\mathrm{tors}$ 中的像也满足相同条件。

命题 **命题 3.10.** 令 $i\colon Y' \hookrightarrow Y$ 如上。令 $r\colon \mathcal{W}(Y) \to \mathcal{W}(Y')$ 定义为

$$r(\hat{\theta}_{a,b}) = \begin{cases} \hat{\theta}_{(i_*)^{-1}(a),(i_*)^{-1}(b)} & \text{if } a,b \in \mathrm{Im}(i_* : H_1(Y';\mathbb{Z})/tors \to H_1(Y;\mathbb{Z})/tors) \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

则 r 是良定义的，并且 $r \circ i_* = \mathrm{id}$ 在 $\mathcal{W}(Y)$上。特别地， $i_*\colon \mathcal{W}(Y') \to \mathcal{W}(Y)$ 是单射。

证明。 给定一个 3 维流形 Z，令

$$V(Z) = \mathrm{span}\{\hat{\theta}_{a,b} | a,b \in H_1(Z;\mathbb{Z})/\mathrm{tors},\ a,b,a-b \neq 0\}$$
$$R(Z) = \mathrm{span}\{\hat{\theta}_{a-b,-b} - \hat{\theta}_{b-a,-a} - \hat{\theta}_{a,a-b} + \hat{\theta}_{b,b-a} | a,b \in H_1(Z;\mathbb{Z})/\mathrm{tors},\ a,b,a-b \neq 0\}.$$

显然， $\mathcal{W}(Z) = V(Z)/R(Z)$。映射 $i\colon Y' \hookrightarrow Y$诱导出一个映射 $\hat{}i\colon V(Y') \to V(Y)$，它有一个左逆 $\hat{}r\colon V(Y) \to V(Y')$，该左逆由定义 r 时的相同公式给出。为了证明该命题，只需证明 $\hat{}r(R(Y)) \subset R(Y')$。若 $a,b \in \mathrm{Im}\, i_*$，则显然

$$\hat{r}(\hat{\theta}_{a-b,-b} - \hat{\theta}_{b-a,-a} - \hat{\theta}_{a,a-b} + \hat{\theta}_{b,b-a}) \in R(Y').$$

如果 a 或 b 不在 $\mathrm{Im}\, i_*$ 中，那么我们有

$$\hat{r}(\hat{\theta}_{a-b,-b} - \hat{\theta}_{b-a,-a} - \hat{\theta}_{a,a-b} + \hat{\theta}_{b,b-a}) = 0 \in R(Y').$$

因此，结论得证。 □

根据 Budney–Gabai 在 [BG25第 4] 节中的工作， $\mathcal{W}(Y)$ 在 $Y = S^1 \times D^2$时是无限维的。由于我们假设 $b_1(Y) > 0$，命题 3.10 意味着$\mathcal{W}(Y)$ 是无限维的。

命题 3.11。 令 $i\colon Y' \hookrightarrow Y$如上，并假设 i 将Y' 的基点映射到 Y的基点。我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \pi_2^{\mathbb{Q}} \mathrm{Emb}_\dagger(I, I \times Y') & \xrightarrow{\Psi'} & \mathcal{W}(Y') \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_*} \\ \pi_2^{\mathbb{Q}} \mathrm{Emb}_\dagger(I, I \times Y) & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{W}(Y) \end{array}$$

证明。 嵌入 i 提升为映射 $\tilde{i}\colon \widetilde{Y}' \to \widetilde{Y}$，其满足

$$\tilde{i}(t^a \cdot x) = t^{i_*(a)} \cdot i(x)$$

对于所有 $a \in H_1(Y';\mathbb{Z})$/扭结和 $x \in \widetilde{Y}'$。根据记号滥用，我们也用 $\tilde{i}$ 表示映射 $\mathrm{id}_I \times i\colon I \times Y' \to I \times Y$。由于

$$i_* : H_1(Y';\mathbb{Z})/\mathrm{tors} \to H_1(Y;\mathbb{Z})/\mathrm{tors}$$

是单射，$\tilde{i}$ 诱导出良定义的映射 $C_n^\tau(Y') \to C_n^\tau(Y)$，继而诱导出映射 $\mathrm{Map}_\Delta(\Delta^n, C_n^\tau(I \times Y')) \to \mathrm{Map}_\Delta(\Delta^n, C_n^\tau(I \times Y))$。现在，命题由˜构造以及 i 是 I-纤维保持的这一事实得证。□

现在我们证明，定义 3.9 中的同态 Ψ 在$\pi_1(Y)$的作用下保持不变。对于 $\beta \in \pi_i(X, x_0)$ 和 $u \in \pi_1(X, x_0)$，我们用 β^u 表示 u 在 β上的 π_1 作用。回忆一下，我们固定一个基点 $y_0 \in Y$，并令 $\mathscr{I}(y_0)$为 $\mathrm{Emb}\dagger(I, I \times Y)$的基点。

命题 3.12. 设 $\beta \in \pi_2^{\mathbb{Q}} \mathrm{Emb}\dagger(I, I \times Y)$ 且 $u \in \mathrm{Im}(\mathscr{I}_*\colon \pi_1(Y) \to \pi_1 \mathrm{Emb}\dagger(I, I \times Y))$。则 $\Psi(\beta) = \Psi(\beta^u)$。

命题 3.12 将作为下一命题的一个特例得出。设 $y_0, y_1 \in Y$是 Y上的两种基点选取，我们比较相对于 y_0 和y_1定义的 Ψ 映射。为区分记号，我们暂时用 Ψ_{y_i}：$\pi_2(\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)\ \mathscr{I}(y_i)) \to \mathcal{W}(Y)$ $(i = 0, 1)$ 表示相对于基点 y_i定义的 Ψ 映射。注意，$\mathcal{W}(Y)$与基点无关。令 $u\colon [0,1] \to Y$为 Y中从 y_0 到 y_1 的一条弧。对于 $\beta \in \pi_2(\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)\ \mathscr{I}(y_0))$，令 $\beta^u \in \pi_2(\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)\ \mathscr{I}(y_1))$表示$\beta$ 在由 $\mathscr{I}\circ u$诱导的基点变换同构下的像。于是有以下结果。

命题 3.13。令 y_0 如上。则 $\Psi_{y_1}(\beta^u) = \Psi_{y_0}(\beta)$。

证明。经过同伦，假设 u 是光滑的。存在一个同痕 $F\colon [0,1]\times Y \to Y$，其在边界附近等于恒等映射，使得 $u(t) = F(t, y_0)$，$F(0, -) =$恒等映射。

令 $i_t = F(1, t)\colon Y \to Y$，令 $\hat{i}_t\colon \mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y) \to \mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)$ 是 $\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)$ 上诱导的同胚，并令 $\hat{}\ \beta\colon S^2 \to \mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)$ 为 β 的一个代表元。则 $\hat{}\ i_t \circ \hat{}\beta$ $(t \in [0,1])$ 是一个同伦，使得基点 $\hat{}\,\hat{}$ 的轨迹为 $\mathscr{I}\circ u$。因此，$i_1 \circ \beta$ 是 β^u 的一个代表元。由命题 3.11，我们有 $\Psi_{y_1}(\beta^u) = (i_1)_* \circ \Psi_{y_0}(\beta)$。由于 i_1 在同调上诱导恒等映射，所需结果得证。□

第2 部分。Y 在填入 D^3后不可约的情形

设 $\hat{}Y$ 由以下方式得到：将 Y 中每个与 S^2微分同胚的边界分支，填入一个 D^3。在本文第 2 部分中，我们证明定理A在 $\hat{}Y$ 不可约的情形下成立。

为方便记号，若 $i\colon M_1 \to M_2$ 是紧流形之间的余维零嵌入，且 $\varphi \in \mathrm{Homeo}_\partial(M_1)$，则用 $i_*(\varphi)$表示将 $i\circ\varphi\circ i^{-1}$ 从 $\mathrm{Im}(i)$延拓到 M_2 并在其余部分取恒等映射后得到的 M_2 的同胚。我们称 $i_*(\varphi)$为 φ经嵌入 i从 M_1 到 M_2 的延拓。若 i 是光滑的，则 i_* 将微分同胚映为微分同胚。

第 2 部分的主要结果如下定理所述。

定理 C。设 Y 是一个紧致、连通、不可约的定向3–流形，且 $\pi_1(Y)$ 是无限的。则存在一个光滑嵌入 $i\colon Y_0 = S^1\times D^2 \to Y$，使得复合映射的像

$$\pi_0 \mathrm{Diff}_{PI}(I\times Y_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0 \mathrm{Diff}_{PI}(I\times Y) \to \pi_0 \mathrm{Homeo}(I\times Y, I\times \partial Y)$$

具有无限秩。

注意，由于 $\pi_0\mathrm{Diff}_{PI}(I\times Y_0)$是阿贝尔的，其像也具有阿贝尔性，因此讨论像的秩是有意义的。

$\hat{}$引理。定理 C 蕴含定理 A 在 Y 不可约的情形下成立。

证明。用 D^3 的副本填充与 S^2 微分同胚的边界分支，不会改变基本群，因此 Y满足定理C的假设。令 $i\colon Y_0 \to Y$为定理C给出的嵌入。经过同痕后，我们可以假设 i的像包含于 Y 中。令 $j\colon Y \to Y$为 Y嵌入到 Y中的嵌入。那么我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \pi_0 \mathrm{Diff}_{PI}(I\times Y_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_0 \mathrm{Diff}_{PI}(I\times Y) & \xrightarrow{h_1} & \pi_0 \mathrm{Homeo}(I\times Y, I\times\partial Y) \\ & & \downarrow{\scriptstyle j_*} & & \downarrow{\scriptstyle j_*} \\ & & \pi_0 \mathrm{Diff}_{PI}(I\times \hat{Y}) & \xrightarrow{h_2} & \pi_0 \mathrm{Homeo}(I\times \hat{Y}, I\times\partial\hat{Y}), \end{array} \tag{3.7}$$

其中 h_1， h_2 是将 $[\varphi]$ 映射到 $[\varphi]$的典范映射。根据定理C，复合π_0微分同胚群$_{PI}(I \times Y_0)$ $\to \pi_0$同胚群$(I \times Y,\ I \times \partial Y)$具有无限秩，因此 h_1也具有无限秩。注意，复合映射

$$\pi_0 \operatorname{Diff}_{PI}(I \times Y) \to \pi_0 \operatorname{Homeo}_{PI}(I \times Y) \to \pi_0 \operatorname{Homeo}(I \times Y, I \times \partial Y)$$

等于 h_1，因此映射 π_0微分同胚群$_{PI}(I \times Y) \to \pi_0$同胚群$_{PI}(I \times Y)$ 的秩为无限。□

ˆ**引理**。 定理 C 意味着定理 B 在 Y 不可约的情形下。

证明。 存在一个纤维化

$$\operatorname{Diff}_\partial(I \times X) \hookrightarrow C^{\mathrm{diff}}(X) \xrightarrow{ev} \operatorname{Diff}_{PI}(X) \to 0,$$

其中 $ev_*([f]) = [f|_{\{1\}\times X}]$，它诱导出一个正合序列

$$\pi_0 \operatorname{Diff}_\partial(I \times X) \to \pi_0 C^{\mathrm{diff}}(X) \xrightarrow{ev_*} \pi_0 \operatorname{Diff}_{PI}(X) \to 0.$$

类似地，我们有一个正合序列

$$\pi_0 \operatorname{Homeo}_\partial(I \times X) \to \pi_0 C^{\mathrm{top}}(X) \xrightarrow{ev_*} \pi_0 \operatorname{Homeo}_{PI}(X) \to 0.$$

当 $X = I \times Y$ 时，所需结论由以下结果推出： π_0Diff$_{PI}(I \times Y)$ 和 π_0Homeo$_{PI}(I \times Y)$ 是无限秩阿贝尔群。

当 $X = Y$ 时，复合

$$\pi_0 \operatorname{Diff}_\partial(I \times Y) \to \pi_0 C^{\mathrm{diff}}(Y) \to \pi_0 C^{\mathrm{top}}(Y) \to \pi_0 \operatorname{Homeo}(I \times Y, I \times \partial Y)$$

等于映射 h_1 （见3.7），因此其像是一个无限秩阿贝尔群。因此， $\pi_0 \operatorname{Diff}_\partial(I \times Y)$ $\to \pi_0 C^{\mathrm{diff}}(Y)$ 和 $\pi_0 \operatorname{Diff}_\partial(I \times Y) \to \pi_0 C^{\mathrm{top}}(Y)$ 的像都是无限秩阿贝尔群。□

第 2 部分其余内容致力于证明定理C。

4. 曲面映射的同伦类

我们将通过考察 Homeo$(I \times Y, I \times \partial Y)$ 在 Emb$^\dagger(I, I \times Y)$ 中曲面上的作用来研究它。本节将阐述关于拓扑空间中曲面的若干一般性结果。设Σ 是一个紧致、连通、定向的曲面（边界可以非空），设 X 是一个拓扑空间。我们研究从 Σ到 X、相对于 $\partial\Sigma$ 的映射的同伦类的性质。稍后，我们将令 X 为 Emb$^\dagger(I, I \times Y)$。

4.1. 与 $\pi_2(X)$的内部连通和。 设 $f\colon \Sigma \to X$ 是一个映射，且 $p \in \operatorname{int}(\Sigma)$，并令 $\alpha \in \pi_2(X, f(p))$。我们将 f与 α在 p处的内部连通和 定义为 $f\#_p\alpha$。这是一个从 Σ 到 X的映射；对于任意给定的紧集 $A \subset \Sigma \setminus \{p\}$，它在相对于 A 的同伦意义下是良定义的。

下面给出 $f\#_p\alpha$的定义。首先定义映射 $\xi_p\colon \Sigma \to \Sigma \vee_p S^2$ 如下。设 Σ 上以 p为中心的一个小圆盘为 D_p ，设 ξ_p 是 Σ 的商映射，该映射将 ∂D_p 压缩为一点，并将商空间与 $\Sigma \vee_p S^2$等同。我们还要求从 $D_p/\partial D_p$ 到 S^2 的同胚是保向的，并且映射 ξ_p 在 D_p的某个邻域之外等于恒等映射。令 $\alpha \in \pi_2(X, f(p))$，并令 ˆ$\alpha\colon S^2 \to X$为 α的一个代表元。定义 $f\#_p\alpha$ 为以下复合

$$\Sigma \xrightarrow{\xi_p} \Sigma \vee S^2 \xrightarrow{f\vee\hat{\alpha}} X.$$

映射 $f\#_p\alpha$ 取决于 ˆα 和 ξ_p的选择。若 $A \subset \Sigma \setminus \{p\}$ 是一个固定的紧集，通过要求 D_p 与 A不相交，映射 $f\#_p\alpha$ 在相对于 A的同伦意义下是良定义的。

本节其余部分将比较 f 与 $f\#_p\alpha$的同伦类。

4.2. 带边界曲面上的内部连通和。 下文中，若 $x_0 \in X$是一个基点， $u \in \pi_1(X, x_0)$, $\beta \in \pi_i(X, x_0)$，则我们用 $\beta^u \in \pi_i(X, x_0)$表示 π_1对 β的作用 u 。

引理 4.1。 设 Σ是一个连通、定向的紧曲面，且 $\partial\Sigma \neq \emptyset$。设： $\Sigma \to X$是一个映射， $p \in \mathrm{int}(\Sigma)$，且 $\alpha \in \pi_2(X, f(p))$。那么， f与 $f\#_p\alpha$ 相对于$\partial\Sigma$ 同伦，当且仅当 α 属于 $\pi_2(X, f(p))$ 的子群，该子群由以下形式的所有元素生成

$$\beta - \beta^u,$$

其中 $\beta \in \pi_2(X, f(p))$，且 u 属于 f_*： $\pi_1(\Sigma, p) \to \pi_1(X, f(p))$的像。

证明。 在 Σ 上赋予一个相对于 $\partial\Sigma$的 CW 复形结构，使其恰有一个 2胞腔且没有 0胞腔。令 $\Sigma^{(1)}$ 为其 1-骨架；也就是说， $\Sigma^{(1)}$ 等于 $\partial\Sigma$ 与所有 1-胞腔的并。令 $e\colon D^2 \to \Sigma$ 为该 2胞腔的特征映射，其中 D^2 表示二维闭圆盘。我们还要求 p位于 2胞腔（的内部）。

令 $\mathrm{Map}_{\partial\Sigma}(\Sigma, X)$ 为所有满足 $g|_{\partial\Sigma} = f|_{\partial\Sigma}$ 的映射 $g\colon \Sigma \to X$ 所构成的空间，并赋予紧开拓扑。类似地，令 $\mathrm{Map}_{\partial\Sigma}(\Sigma^{(1)}, X)$ 为所有满足 $g|_{\partial\Sigma} = f|_{\partial\Sigma}$ 的映射 $g\colon \Sigma^{(1)} \to X$ 所构成的集合。那么限制映射

$$\mathrm{Map}_{\partial\Sigma}(\Sigma, X) \to \mathrm{Map}_{\partial\Sigma}(\Sigma^{(1)}, X)$$

是一个纤维化，且纤维 F 可典范地识别为所有满足 $g|_{\partial D^2} = f \circ e|_{\partial D^2}$ 的映射 $g\colon D^2 \to X$ 所构成的集合。

考虑从 $\pi_2(X, f(p))$ 到 $\pi_0(F)$ 的映射，它将 $\alpha \in \pi_2(X, f(p))$ 送到 $(f \circ e)\#_q\alpha$ 的同伦类，其中 $q = (e)^{-1}(p)$。那么此映射是一个双射，我们用它将 $\pi_0(F)$ 与 $\pi_2(X, f(p))$ 识别。

设 $\mathrm{Map}_{\partial\Sigma}(\Sigma, X)$ 和 $\mathrm{Map}_{\partial\Sigma}(\Sigma^{(1)}, X)$ 的基点分别为 f和 $f|_{\Sigma^{(1)}}$。我们有一个正合序列

$$\pi_1 \mathrm{Map}_{\partial\Sigma}(\Sigma^{(1)}, X) \xrightarrow{\partial_*} \pi_0(F) \to \pi_0 \mathrm{Map}_{\partial\Sigma}(\Sigma, X).$$

注意， $\pi_0(F)$ 通过同构 $\pi_0(F) \cong \pi_2(X, f(p))$ 具有阿贝尔群结构，并且映射 ∂_* 从 $\pi_1 \mathrm{Map}_{\partial\Sigma}(\Sigma^{(1)}, X)$ 到 $\pi_0(F)$ 是群同态。上述序列的正合性意味着， $\pi_0(F)$ 中的两个元素映射到 $\pi_0 \mathrm{Map}_{\partial\Sigma}(\Sigma, X)$ 中同一个元素，当且仅当它们的差属于 ∂_* 的像。

因此， f 与 $f\#_p\alpha$ 关于 $\partial\Sigma$ 同伦，当且仅当 $\alpha \in \pi_2(X, f(p))$ 属于以下映射的像

$$\partial_* : \pi_1 \mathrm{Map}_{\partial\Sigma}(\Sigma^{(1)}, X) \to \pi_0(F) \cong \pi_2(X, f(p)).$$

现在我们计算 ∂_* 的像： $\pi_1 \mathrm{Map}_{\partial\Sigma}(\Sigma^{(1)}, X) \to \pi_2(X, f(p))$。令 J 为 $\Sigma^{(1)}$ 的 1-胞腔集合。那么

$$\pi_1 \mathrm{Map}_{\partial\Sigma}(\Sigma^{(1)}, X) \cong \oplus_{j \in J} \pi_2(X, f(p)).$$

对于每个 $j \in J$，令 $\pi_2^{(j)}(X, f(p))$ 表示上述直和分解中对应于 j 的分量。于是， $\partial_*(\pi_2^{(j)}(X, f(p)))$ 描述如下。设 q 是 1-胞腔内部的一个点，则 $e^{-1}(q)$ 在 ∂D^2 上包含两个点；将它们记为 $\hat{}q_1$, $\hat{}q_2$。设 γ_i 是 D^2 中从 p 到 $\hat{}q_i (i = 1, 2)$ 的一条弧。 $f(\gamma_1)$ 与 $f(\gamma_2)$ 的反向路径在 X 中连接，定义了 $\pi_1(X, f(p))$ 中的一个元素 u_j。注意， u_j 仅取决于 j，与构造中的其他选择无关。通过直接计算可得

$$\partial_*(\pi_2^{(j)}(X, f(p))) = \{\beta - \beta^{u_j} \mid \beta \in \pi_2(X, f(p))\}.$$

由于形如 u_j 的元素生成了 $\pi_1(X, f(p))$ 中 $\pi_1(\Sigma, p)$ 的像，引理得证。□

4.3. 闭曲面上的内部连通和。本小节证明若干关于从闭曲面出发的映射的同伦类的技术性引理。第一个引理考察相对于基点的同伦类。

引理 4.2. 设 Σ 是一个连通、定向的闭曲面，p、q 是Σ上的不同点。设 $f\colon \Sigma \to X$是一个映射，并设 $\alpha \in \pi_2(X, f(p))$。将 $f\#_p\alpha$视为一个在相对于 q的同伦意义下定义的映射。那么，$f\#_p\alpha$ 与 f 相对于 q 同伦，当且仅当 α 属于由以下所有形式的元素生成的 $\pi_2(X, f(p))$ 子群

$$\beta - \beta^u,$$

其中 $\beta \in \pi_2(X, f(p))$ 和 u 属于 $f_*\colon \pi_1(\Sigma, p) \to \pi_1(X, f(p))$的像。

证明。设 D 是 Σ 中围绕 q 的小闭圆盘，且与 p不相交，并设 $\Sigma = \Sigma \setminus \mathring{D}$是$D$的内部。于是 $\Sigma/\partial\Sigma \cong \Sigma$。设 $r : \Sigma \to \Sigma$ 是一个在 p附近等于恒等映射的商映射。那么，f和 $f\#_p\alpha$相对于 q同伦，当且仅当 $r\circ f$和 $r\circ(f\#_p\alpha) = (r\circ f)\#_p\alpha$相对于 $\partial\Sigma$同伦。因此，对 Σ应用引理 4.1即可证明结论。□

接下来的两个引理表明，在附加技术假设下，自由同伦的存在意味着存在相对于基点的同伦。

引理 4.3. 设 Σ 是一个连通、定向的闭曲面，$f\colon \Sigma \to X$ 是一个映射，$p \in \Sigma$，且 $\alpha \in \pi_2(X, f(p))$。令 $q \in \Sigma \setminus \{p\}$，并将 $f\#_p\alpha$ 视为一个在相对于 q 的同伦意义下定义的映射。进一步假设，$\pi_1(\Sigma)$ 的像在 $\pi_1(X)$中的中心化子是平凡的。那么，f 与 $f\#_p\alpha$ 同伦，当且仅当它们相对于 q 同伦。

证明。“若”部分显然；我们证明该引理的“仅若”部分。假设 f 与 $f\#_p\alpha$ 彼此同伦。选取 Σ 的一个 CW 复形结构，使得 q 是唯一的 0胞腔，且 p 位于一个 2胞腔中。令 f' 为 $f\#_p\alpha$ 的一个代表元，使得 $f = f'$ 在 1-骨架上。取一个从 f 到 f' 的同伦，令 γ 为 q 在该同伦下的轨迹。于是 γ 定义了一个元素 $[\gamma] \in \pi_1(X, f(q))$。由于 f 和 $f\#_p\alpha$ 在 1-胞腔上的限制是同一个映射，元素 $[\gamma]$ 必须与 f_* 的像中的所有元素可交换：$\pi_1(\Sigma, q) \to \pi_1(X, f(q))$。根据这些假设，我们推得 $[\gamma]$ 是平凡的。由同伦延拓定理，存在一个从 f 到 $f\#_p\alpha$ 的同伦，它保持 q 的像不变。□

引理 4.4。 设 $\Sigma = S^1 \times S^1$。令 $f\colon \Sigma \to X$ 为一个映射，令 p 为 Σ上的一点，并令$\alpha \in \pi_2(X, f(p))$。令 $q \in \Sigma \setminus \{p\}$，并将 $f\#_p\alpha$视为一个在相对于 q的同伦意义下定义的映射。进一步假设 f 等于一个复合映射

$$\Sigma \cong S^1 \times S^1 \xrightarrow{projection} S^1 \xrightarrow{g} X. \tag{4.1}$$

T那么 f 和 $f\#_p\alpha$ 同伦，当且仅当它们相对于 q同伦。

证明。“若”部分显然；我们证明引理的“唯若”部分。在 S^1上取具有一个 0-胞腔和一个 1-胞腔的标准 CW 复形结构，并赋予 $\Sigma \cong S^1 \times S^1$ 乘积CW复形结构。要求 q 为唯一的 0-胞腔，且 p 包含在 2-胞腔中。令 $\hat{}q$ 为 $q \in \Sigma$ 在 S^1中的投影像，则 $\hat{}q$ 是S^1的唯一 0-胞腔。令 f'为 $f\#_p\alpha$的一个代表元，使得 $f = f'$位于 Σ的 1-骨架上。假设f 与 f'同伦。

令 $H\colon [0,1] \times \Sigma \to X$为一个同伦，使得 $H(0, -) = f$, $H(1, -) = f'$。令$\gamma\colon [0,1] \to X$由 $\gamma(t) = H(t, q)$定义。令 g为（4.1）中的映射。则 γ和 g都是 X 中以 $f(q)$ 为基点的环路，并且我们有

$$[g] = [\gamma] \cdot [g] \cdot [\gamma]^{-1} \in \pi_1(X, f(q)).$$

因此，存在一个从 g 到其自身的自由同伦，使得 $\hat{}q$ 的轨迹是 γ 的反向路径。由于 f 经由 g 分解，这意味着存在一个同伦 $G\colon [0,1]\times\Sigma\to X$，使得 $G(0,\ -)=G(1,\ -)=f$，并且 q 的轨迹是 γ 的反向路径。

同伦 G 与 H 的复合给出了一个从 f 到 f' 的同伦，使得 q 的轨迹是 X 中的一个可缩圈。因此，根据同伦延拓定理，存在一个从 f 到 f' 的同伦，并且保持 q 的像。□

稍后我们将把引理 4.4 应用于 X 上存在自然 U(1) 作用的情形。例如，当 Y 是一个 U(1) 丛，且 $X=\mathrm{Emb}^{\dagger}(I,I\times Y)$。

设 $m:\mathrm{U}(1)\times X\to X$ 是 X 上的 U(1) 作用。将 S^1 与 U(1) 等同，并设 $f\colon S^1\times S^1\to X$ 是一个映射。定义映射 $m\circledast f\colon S^1\times S^1\to X$，使得 $m\circledast f(e^{ix},e^{iy})=m(e^{-ix},f(e^{ix},e^{iy}))$。显然，运算 $m\circledast -$ 在从 $S^1\times S^1$ 到 X 的映射同伦类上定义了一个双射。我们记录以下两个引理，以供后文参考。

引理 4.5。设 $p\in\{1\}\times S^1\subset S^1\times S^1$。设 $\alpha\in\pi_2(X,f(p))$。那么 $m\circledast(f\#_p\alpha)$ 同伦于 $(m\circledast f)\#\alpha$。

证明。设 $v:\mathrm{U}(1)\to\mathrm{U}(1)$ 是一个次数 1 的光滑映射，满足当 x 接近 0 时，$v(e^{ix})=1$。定义 $m'\circledast f\colon S^1\times S^1\to X$，使得

$$m'\circledast f(e^{ix},e^{iy})=m(v(e^{-ix}),f(e^{ix},e^{iy})).$$

由于 v 相对于 $1\in S^1$ 同伦于 id，我们知道 $m'\circledast f$ 相对于 $\{1\}\times S^1$ 同伦于 $m\circledast f$。另一方面，$m'\circledast(f\#_p\alpha)$ 和 $(m'\circledast f)\#\alpha$ 由同一个映射表示。因此引理得证。□

引理 4.4、4.5和4.2 推出以下结果。

引理 4.6. 假设 $\Sigma=S^1\times S^1$。令 $f\colon\Sigma\to X$ 为一个映射，令 p 为 Σ上的一个点，并令 $\alpha\in\pi_2(X,f(p))$。假设存在一个 $\mathrm{U}(1)$ 作用 $m:\mathrm{U}(1)\times X\to X$，使得 $m\circledast f$等于一个复合映射

$$\Sigma\cong S^1\times S^1\xrightarrow{projection}S^1\xrightarrow{g}X.$$

那么，f和 $f\#_p\alpha$ 同伦，当且仅当 α属于由以下形式的所有元素生成的 $\pi_2(X,f(p))$的子群

$$\beta-\beta^u,$$

其中 $\beta\in\pi_2(X,f(p))$ 且 u属于 $(m\circledast f)_*\colon\pi_1(\Sigma,p)\to\pi_1(X,(m\circledast f)(p))$的像。

证明。由于 $m\circledast -$ 在从 Σ 到 X的映射的同伦类上定义了一个双射，我们知道，f 与 $f\#_p\alpha$ 同伦，当且仅当 $m\circledast f$ 与 $m\circledast(f\#_p\alpha)$同伦。注意，旋转 Σ 的 S^1–因子的坐标会改变 $m\circledast f$ 的定义，但不会改变其同伦类。旋转 Σ的坐标后，我们可以假设 $p\in\{1\}\times S^1\subset S^1\times S^1$。根据引理 4.5，我们知道 $m\circledast(f\#_p\alpha)$ 与 $(m\circledast f)\#_p\alpha$同伦。根据这些假设和引理 4.4，$m\circledast f$ 与 $(m\circledast f)\#_p\alpha$ 同伦，当且仅当它们相对于基点 $q\in\Sigma\setminus\{p\}$同伦。因此，所需结果由引理 4.2 得出。□

5. Diffeomorphisms on $S^1\times D^3$ and the map Ψ

本节研究 Budney–Gabai 的哑铃微分同胚之间的关系，其中作用于 $S^1\times D^3$以及映射 Ψ 定义于第3节。

从现在起，我们记 $Y_0=S^1\times D^2$。Budney–Gabai 在 π_0同胚群$_\partial(I\times Y_0)$ 到 $\pi_2\mathrm{Emb}_\partial(I,I\times Y_0)$ 之间引入了一个同态，见 [BG19](参见 [LXZ25，第 2] 节)，我们将其记为 $\mathcal{S}$。下面简要回顾 $\mathcal{S}$的定义。取一点 $(t_0,\ x_0)\ \in S^1\times D^2$

并令 $i_0:\ D^2 \to Y_0$ 由 $i_0(x) = (t_0,\ x)$ 给出。我们有复合映射 $\mathscr{I} \circ i_0:\ D^2 \to \mathrm{Emb}^\dagger(I,\ I \times Y_0)$（回忆一下，$\mathscr{I}$是在（2.1）中定义的）。给定 $\varphi \in$ 同胚群$_\partial(I \times Y_0)$，考虑映射

$$\varphi_* \circ \mathscr{I} \circ i_0 : D^2 \to \mathrm{Emb}_\dagger(I, I \times Y_0)$$

其中 $\varphi_*: \mathrm{Emb}^\dagger(I, I \times Y_0) \to \mathrm{Emb}^\dagger(I, I \times Y_0)$ 由 φ 诱导。由于 φ 的支集位于 $I \times Y_0$ 的内部，$\varphi_* \circ \mathscr{I} \circ i_0$ 和 $\mathscr{I} \circ i_0$ 在 D^2 的边界附近重合。因此，我们可以将这两个映射粘合起来，得到 $\mathcal{S}(\varphi) \in \pi_2(\mathrm{Emb}^\dagger(I, I \times Y_0)\ \mathscr{I}(t_0, x_0))$。显然，$\mathcal{S}(\varphi)$ 只取决于 $\mathrm{Homeo}_\partial(I \times Y_0)$ 的同伦类 $[\varphi] \in \pi_0$，因此我们也将其记为 $\mathcal{S}([\varphi])$。

有时，在上述定义中指定基点 $t_0 \in S^1$ 很重要。在这种情况下，我们将映射 $\mathcal{S}$ 记为 $\mathcal{S}_{t_0}$。

现在设 $\sigma: (\Sigma, \partial\Sigma) \looparrowright (Y, \partial Y)$ 是一个恰当浸入的、连通的定向曲面。若 Y 是闭的，则这一假设蕴含 $\partial\Sigma = \emptyset$。设 $\gamma: S^1 \hookrightarrow Y$ 是一条光滑嵌入的定向圆周，使得其诱导映射

$$\gamma_* : H_1(S^1; \mathbb{Z}) \to H_1(Y; \mathbb{Z})/\mathrm{tors}$$

是单射。令 $\nu(\gamma):\ Y_0 = S^1 \times D^2 \to Y$ 为一个保定向嵌入，其核心圆为 γ。令 $\varphi \in \mathrm{Homeo}_\partial(I \times Y_0)$，令 $\nu(\gamma)_*(\varphi) \in \mathrm{Diff}(I \times Y)$ 为 φ 经由 $\mathrm{id}_I \times \nu(\gamma)$ 延拓到 $I \times Y$ 的映射。令 $\varphi_*: \mathrm{Emb}^\dagger(I,\ I \times Y) \to \mathrm{Emb}^\dagger(I,\ I \times Y)$ 表示由 $\nu(\gamma)_*\varphi$ 诱导的同胚。令 $f = \mathscr{I} \circ \sigma:\ \Sigma \to \mathrm{Emb}^\dagger(I,\ I \times Y)$。下一个命题比较 f 和 $\varphi_* \circ f$ 的同伦类。

命题5.1。假设 γ（S^1）与 σ（Σ）在 k 个不同点 $p_1, \ldots, p_k \in Y$ 处横截相交，符号为 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$。假设 σ 是一个在某个邻域上定义的嵌入

$$\sigma^{-1}(\{p_1, \ldots, p_k\}) \subset \Sigma.$$

于是，映射 $\varphi_* \circ f:\ \Sigma \to \mathrm{Emb}^\dagger$（$I$、$I \times Y$）相对于 $\partial\Sigma$ 同伦于在 σ^{-1}（p_i）处分别对 f 与 $\alpha_i \in \pi_2$（$\mathrm{Emb}^\dagger$（I、$I \times Y$）$\mathscr{I}$（p_i））进行内部连通和所得的结果，其中每个 α_i 都满足

$$\Psi(\alpha_i) = \epsilon_i \cdot \nu(\gamma)_* \circ \Psi \circ \mathcal{S}_{\gamma^{-1}(p_i)}([\varphi]). \tag{5.1}$$

这里，等式（5.1）左端的映射 Ψ 定义在 π_2（$\mathrm{Emb}^\dagger$（I、$I \times Y$）$\mathscr{I}$（p_i））上，而右端的映射 Ψ 定义在 π_2（$\mathrm{Emb}^\dagger$（I、$I \times Y_0$）$\mathscr{I}$（γ^{-1}（p_i）x_0））上，其中 $x_0 \in D^2$ 是 Y_0的 D^2 因子上的基点。映射 $\mathcal{S}_{\gamma^{-1}}$（$p_i$）是上文相对于基点（$\gamma^{-1}$（$p_i$）$x_0$）$\in S^1 \times D^2 = Y_0$定义的映射 $\mathcal{S}$。映射ν（γ）$_*$：$\mathcal{W}$（Y_0）$\to \mathcal{W}$（Y）是由 ν（γ）诱导的、定义域为 Ψ 的陪域上的映射，具体定义见第3.5节。

证明。根据 $\mathcal{S}$和 $\varphi_* \circ f$的构造，显然，$\varphi_* \circ f$相对于$\partial\Sigma$同伦于在 σ^{-1}处将 f与 α_i作内部连通和所得的映射p_i（$i = 1,\ \cdots,\ k$），其中

$$\alpha_i = \epsilon_i \cdot \nu(\gamma)_* \circ \mathcal{S}_{\gamma^{-1}(p_i)}([\varphi]) \in \pi_2(\mathrm{Emb}_\dagger(I, I \times Y), \mathscr{I}(p_i)),$$

以及 $\nu(\gamma)_*:\ \pi_2(\mathrm{Emb}^\dagger(I, I \times Y_0)\ \mathscr{I}(\gamma^{-1}(p_i)\ x_0)) \to \pi_2(\mathrm{Emb}^\dagger(I, I \times Y)\ \mathscr{I}(p_i))$ 表示由 $\nu(\gamma)$ 诱导的嵌入空间同伦群上的映射。现在，所需命题由命题 3.11 得出。□

注意，Ψ 和映射 $\nu(\gamma)_*:\ \mathcal{W}(Y_0) \to \mathcal{W}(Y)$ 的陪域分别由 Y_0 和 Y的同调群给出，因此不依赖于基点的选择。我们还有如下观察。

L引理 5.2. $\Psi \circ \mathcal{S}_t([\varphi])$ 的值不依赖于基点 $t \in S^1$。

证明。设 t_1、$t_2 \in S^1$，并令 $r\colon Y_0 \to Y_0$ 为 S^1 因子中的旋转，使得 $r(\{t_1\}\times D^2) = \{t_2\}\times D^2$。由命题 3.11，得 $\Psi\circ\mathcal{S}_{t_2}([\varphi]) = \Psi\circ\mathcal{S}_{t_1}([r^{-1}\circ\varphi\circ r])$。由于 $r^{-1}\circ\varphi\circ r$相对于边界与 φ同痕，因此 $\Psi\circ\mathcal{S}_{t_1}([\varphi]) = \Psi\circ\mathcal{S}_{t_2}([\varphi])$。□

由引理 5.2可知，不指定基点 $\Psi\circ\mathcal{S}([\varphi]) \in \mathcal{W}(Y_0)$ 就有意义。 $t \in S^1$因此，我们得到命题 5.1的如下推论。设 γ、 σ、 f、φ_* 由命题 5.1之前的设定给出。此处无需假设 γ与 σ 有横截交点。

推论 5.3。 设 $q \in \mathrm{int}(\Sigma)$ 为一个不动点。那么， $\varphi_*\circ f\colon \Sigma \to \mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)$相对于 $\partial\Sigma$同伦于在 $q \in \mathrm{int}(\Sigma)$ 处将 f 与 $\alpha \in \pi_2(\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)\ \mathscr{I}\circ\sigma(q))$作内部连通和，其中 α 满足

$$\Psi(\alpha) = \#(\sigma\cap\gamma)\cdot\nu(\gamma)_*\circ\Psi\circ\mathcal{S}([\varphi]).$$

这里，$\#(\sigma\cap\gamma)$ 表示 σ 与 γ 的代数交数。

证明。 经过对 γ 的同痕，我们可以假设 $\gamma(S^1)$ 与 $\sigma(\Sigma)$ 横截地相交于 k 个点p_1、$\cdots$、p_k，并且 σ 在 $\sigma^{-1}(\{p_1,\ldots,p_k\})$ 的某个邻域上是单射的。

根据命题5.1， $\varphi_*\circ f$ 同伦于将 f 与 $\alpha_i \in \pi_2(\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)\ \mathscr{I}(p_i))$ 分别在 $\sigma^{-1}(p_i)$ $(i = 1, \cdots, k)$ 处作内部连通和的结果，其中每个 α_i 都满足 (5.1)。对于每个 i，任取一条从 $\sigma^{-1}(p_i)$ 到 q 的路径 η_i ，其中 Σ。令 $\alpha_i^{\eta_i} \in \pi_2(\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)\ \mathscr{I}\circ\sigma(q))$ 表示 α_i 在由路径 $\mathscr{I}\circ\sigma\circ\eta_i$ 诱导的、从 $\pi_2(\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)\ \mathscr{I}(p_i))$ 到 $\pi_2(\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)\ \mathscr{I}\circ\sigma(q))$ 的基点变换同构下的像。于是， $\varphi_*\circ f$ 同伦于在 q 处将 f 与$\alpha = \sum_i \alpha_i^{\eta_i}$ 作内部连通和的结果。由命题 3.13，我们有 $\Psi(\alpha_i^{\eta_i}) = \Psi(\alpha_i)$。所以

$$\Psi(\alpha) = \sum_i \Psi(\alpha_i) = \#(\sigma\cap\gamma)\cdot\nu(\gamma)_*\circ\Psi\circ\mathcal{S}([\varphi]).$$

因此，该推论得证。 □

推论 5.3 几乎可以逐字推广，若将 γ 替换为嵌入圆的不交并。设 γ_1，.....， γ_k： $S^1 \to Y$ 是 Y中互不相交的光滑嵌入的定向圆周，使得每个 γ_i 诱导一个单射 $H_1(S^1) \to H_1(Y;\mathbb{Z})/$ tors，并设 $\nu(\gamma_i)\colon Y_0 = S^1\times D^2 \to Y$ 是以 γ_i给出核心圆的保定向嵌入。假设诸 $\nu(\gamma_i)$的像互不相交。设 $\varphi_i \in$ 同胚群$_\partial(I\times Y_0)$，设 $\nu(\gamma_i)_*(\varphi) \in$ 微分同胚群$(I\times Y)$ 是 φ_i 经由 $\mathrm{id}_I\times\nu(\gamma_i)$到 $I\times Y$的延拓。注意 $\nu(\gamma_i)_*(\varphi_i)$具有不交支撑，因此它们是可交换的。设 φ 为所有 $\nu(\gamma_i)_*(\varphi_i)$的乘积。设

$$\varphi_*\colon \mathrm{Emb}_\dagger(I, I\times Y) \to \mathrm{Emb}_\dagger(I, I\times Y)$$

表示由 φ 诱导的同胚。设 σ 是 $(\Sigma,\partial\Sigma)$ 在 $(Y,\partial Y)$ 中的真浸入，并设 $f = \mathscr{I}\circ\sigma\colon \Sigma \to \mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)$。于是我们有如下结果。

命题 5.4. 设 $\varphi_i, \gamma_i, \varphi, f$如上。设 $q \in \mathrm{int}(\Sigma)$ 为一个不动点。则映射 $\varphi_*\circ f$ 相对于 $\partial\Sigma$ 同伦于 f 在 q 处与$\alpha \in \pi_2(\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)\ \mathscr{I}\circ\sigma(q))$的内部连通和，其中 α 满足

$$\Psi(\alpha) = \sum_i \#(\sigma\cap\gamma_i)\cdot\nu(\gamma_i)_*\circ\Psi\circ\mathcal{S}([\varphi_i]).$$

这里，$\#(\sigma\cap\gamma_i)$ 表示 σ 与 γ_i的代数交数。

证明。设 $q_1,\ldots,q_k$ 是 $\mathrm{int}(\Sigma)$ 中的不同点。根据推论 5.3 的相同论证，每个 $\nu(\gamma_i)_*(\varphi_i)$ 都会通过在 q_i 处与某个 $\alpha_i \in \pi_2(\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)\ \mathscr{I}\circ\sigma(q_i))$ 作内部连通和，改变 f 的同伦类，其中 $\Psi(\alpha_i) = \#(\sigma\cap\gamma_i)\cdot\nu(\gamma_i)_*\circ\Psi\circ\mathcal{S}([\varphi_i])$。因此，将每个内部连通和的粘接点沿着 Σ 上的一条弧从 q_i 移至 q ，并应用命题 3.13，即得所需结果。□

我们还记录 Budney–Gabai 的以下结果，以供后续参考。回忆一下，我们用 $Y_0 = S^1 \times D^2$ 表示。

定理 5.5 ([BG19])。 存在一个序列 $\varphi_i \in$微分同胚群$_{PI}(I \times Y_0)$，使得

(1) $\Psi \circ \mathcal{S}([\varphi_i]) \in \mathcal{W}(Y_0)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上线性无关。(2) 假设 $\iota\colon Y_0 \to Y_0$ 是一个保向同胚，它在 $H_1(Y_0;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$上诱导出$(-\mathrm{id})$。那么

$$\iota_* \circ \Psi \circ \mathcal{S}([\varphi_i]) = -\Psi \circ \mathcal{S}([\varphi_i])$$

对所有 i。

证明。当应用于 $Y = Y_0$ 的特殊情形时，复合映射 $\Psi \circ \mathcal{S}$ 与 Budney–Gabai 在 [BG25 第 4] 节中构造的 $\pi_0 \mathrm{Homeo}_\partial(S^1 \times D^3)$ 上的“W_3 不变量之商”相同。“W_3 不变量之商”在 [BG25] 中记作 W_3'。在[BG19],中构造了一个元素序列 $\varphi_i \in \mathrm{Diff}_{PI}(S^1 \times D^3)$，并在[BG19 定理 8.3]中证明了 W_3 不变量是线性无关的。[BG25 第 4] 节指出，在对陪域取商后，W_3' 不变量也线性无关。这就得到了定理的陈述 (1)。

上述性质是通过直接计算 W_3 和 W_3' 不变量证明的。计算结果见 [BG19，推论 8。2]。定理的结论 (2) 是该计算结果的直接推论。□

定理 5.5 有如下推论。

推论 5.6。 设 φ_i 由定理 *5.5*给出。设 $\iota\colon Y_0 \to Y_0$ 是一个保向微分同胚，在 $(-\mathrm{id})$上诱导 $H_1(Y_0;\mathbb{Z})$，设 $\hat{\iota} = \mathrm{id}_I \times \iota\colon I \times Y_0 \to I \times Y_0$。则

$$\Psi \circ \mathcal{S}([\varphi_i]) = \Psi \circ \mathcal{S}([\hat{\iota} \circ \varphi_i \circ \hat{\iota}^{-1}])$$

证明。 令 $(t_0, x_0) \in S^1 \times D^2 = Y_0$ 为基点。经过同痕后，假设 $\iota(\{t_0\} \times D^2) = (\{t_0\} \times D^2)$，且 ι 固定 (t_0, x_0)。于是 ι 在 $\{t_0\} \times D^2$ 上限制为一个反向微分同胚。

设 $\hat{\iota}_*\colon \pi_2 \mathrm{Emb}^\dagger(I, I \times Y_0) \to \pi_2 \mathrm{Emb}^\dagger(I, I \times Y_0)$ 为由 $\hat{\iota}$ 诱导的映射。于是 $\mathcal{S}([\hat{\iota} \circ \varphi_i \circ \hat{\iota}^{-1}]) = -\hat{\iota}_* \circ \mathcal{S}([\varphi])$。负号源于以下事实： ι 在 $\{t_0\} \times D^2$ 上的限制是一个反向微分同胚，因此通过 $\hat{\iota}$ 进行坐标变换会反转 $\mathcal{S}$ 定义中的符号。因此，根据定理 5.5 (2) 和命题 3.11，我们有

$$\Psi \circ \mathcal{S}([\hat{\iota} \circ \varphi_i \circ \hat{\iota}^{-1}]) = -\Psi \circ \hat{\iota}_* \circ \mathcal{S}([\varphi]) = -\hat{\iota}_* \circ \Psi \circ \mathcal{S}([\varphi]) = \Psi \circ \mathcal{S}([\varphi]).$$

□

6. The case when $\partial Y \neq \emptyset$

本节在 C 的情形下证明定理 $\partial Y \neq \emptyset$。在此情形下，该定理可重新表述如下。回忆 π_0微分同胚群$_{PI}(I \times Y)$、 π_0微分同胚群$_\partial(I \times Y)$ 和 π_0同胚群$_\partial(I \times Y)$ 均为阿贝尔群。

定理 6.1. 假设 Y 是一个紧致、连通、定向、不可约的3维流形，满足 $\partial Y \neq \emptyset$ 和 $\pi_1(Y)$ 是无限的。那么存在一个光滑嵌入 $i\colon S^1 \times D^2 = Y_0 \to Y$，使得复合映射的像

$$\pi_0 \mathrm{Diff}_{PI}(I \times Y_0) \xrightarrow{(\mathrm{id}_I \times i)_*} \pi_0 \mathrm{Diff}_{PI}(I \times Y) \to \pi_0 \mathrm{Homeo}(I \times Y, I \times \partial Y)$$

具有无限秩，其中$(\mathrm{id}_I \times i)_*$ 表示通过$\mathrm{id}_I \times i$到 $I \times Y$的延拓。

证明。我们首先证明这些假设蕴含 $b_1(Y) > 0$。注意，由于 $\pi_1(Y)$是无限的，我们知道 $Y \ncong D^3$。由于 Y 不可约， ∂Y 不包含任何与 S^2微分同胚的连通分支。由于 $\partial Y \neq \emptyset$，我们有秩 $H_1(\partial Y) > 0$。根据3-流形拓扑中的一个标准结果（例如参见 [Hat07，引理3.5]），$H_1(\partial Y) \to H_1(Y)$的像的秩为1 2 秩 $H_1(\partial Y)$。因此 $b_1(Y) > 0$。

设 $\sigma\colon (\Sigma, \partial\Sigma) \to (Y, \partial Y)$ 是一个恰当浸入的连通定向曲面，并设$\gamma\colon S^1 \to \operatorname{int}(Y)$ 是一个光滑嵌入，使得 Σ与 γ 的代数交数非零。由于 $b_1(Y) > 0$，这样的二元组 (σ, γ) 存在。将 Σ 管连接到 ∂Y之后，我们可以假设 $\partial\Sigma \neq \emptyset$。

设 $\nu(\gamma)\colon S^1 \times D^2 = Y_0 \to Y$是一个保定向嵌入，其核心圆由 γ给出。设 φ_1、φ_2、$\cdots \in$微分同胚群$_{PI}(I \times Y_0$由定理 5.5给出。设 $\nu(\gamma)_*(\varphi_i)$ 是 φ_i 到 $I \times Y$经由 $\mathrm{id}_I \times\nu(\gamma)$ 的延拓。

我们声称， $\nu(\gamma)_*(\varphi_i)$在 $\mathbb{Z}$ 中的 $\pi_0 \operatorname{Homeo}(I \times Y, I \times \partial Y)$ 中线性无关。设 $0 \neq (c_k) \in \oplus_\infty\mathbb{Z}$，并令 $\varphi = \prod_k \varphi_k^{c_k}$。目标是证明， $\nu(\gamma)_*(\varphi)$ 在 $\pi_0 \operatorname{Homeo}(I \times Y, I \times \partial Y)$ 中非平凡。

考虑映射 $f = \mathscr{J} \circ \sigma\colon \Sigma \to \operatorname{Emb}\dagger(I, I \times Y)$。令 $\varphi_*\colon \operatorname{Emb}\dagger(I, I \times Y) \to \operatorname{Emb}\dagger(I, I \times Y)$ 为由 $\nu(\gamma)$ $_*\varphi\colon I \times Y \to I \times Y$ 诱导的 $\operatorname{Emb}\dagger(I, I \times Y)$ 的自同胚。我们首先证明， f 与 $\varphi_* \circ f$ 关于 $\partial\Sigma$不同伦。

根据推论 5.3，存在 $\alpha \in \pi_2$ 嵌入$\dagger(I, I \times Y)$，使得 $\varphi_* f$ 与 f 的一个内部连通和同伦，其中 α，且 α 满足

$$\Psi(\alpha) = \#(\sigma \cap \gamma) \cdot \nu(\gamma)_* \circ \Psi \circ \mathcal{S}([\varphi]).$$

由定理 5.5 和 φ 的定义，我们知道 $\Psi \circ \mathcal{S}([\varphi]) \neq 0 \in \mathcal{W}(Y_0)$。由命题 3.12，映射 $\nu(\gamma)_*\colon \mathcal{W}$ $(Y_0) \to \mathcal{W}(Y)$ 是单射。根据 σ 和 γ 的定义，我们还有 $\#(\sigma \cap \gamma) \neq 0$。因此 $\Psi(\alpha) \neq 0$。

根据命题 3.12，所有形如 $\beta - \beta^u$ 的元素，其中

$$\beta \in \pi_2 \operatorname{Emb}_\dagger(I, I \times Y), \quad u \in \operatorname{Im}(i_* : \pi_1(\Sigma) \to \pi_1 \operatorname{Emb}_\dagger(I, I \times Y)),$$

都属于 Ψ 的核。因此 α 不包含在由形如 $\beta - \beta^u$ 的元素生成的子群中。由引理 4.1，我们得出 f 和 f' 彼此不相对 $\partial\Sigma$同伦。

注意 $\nu(\gamma)_*(\varphi)$ 同伦于 id（相对于 $\{0, 1\} \times Y$）。因此，由引理 2.1，$\nu(\gamma)_*(\varphi)$ 在 π_0 同胚群$(I \times Y, I \times \partial Y)$ 中是非平凡的。这证明了所需结果。□

注记 6.2。 定理6.1 的证明依赖于假设 $\partial Y \neq \emptyset$，具体分为两个步骤：首先，该证明引用引理 4.1，该引理仅适用于具有非空边界的曲面。其次，定理 6.1 的假设蕴含 $b_1(Y) > 0$，这在闭情形下一般并不成立。第 7 节将处理这些问题，并将该论证推广到 $\partial Y = \emptyset$ 的情形。

7. The case when $\partial Y = \emptyset$

为证明定理 C 当 $\partial Y = \emptyset$ 时，我们援引文献中的如下定理。

定理 7.1 (Agol [Agol13], Wise [Wise09], Luecke [Luecke88], 等)。 设 Y 是一个闭、定向、不可约的 3维流形，且 $\pi_1(Y)$ 是无限的。那么存在一个有限覆盖$\sim$ $\sim Y$，它覆盖 Y 且满足 $b_1(Y) > 0$。

证明。 如果 Y 是双曲的，那么虚纤维化定理 [Ago13，Wis09] 指出 Y存在一个有限覆盖，它是一个以 S^1为底的曲面丛，这就推出了所需结果。如果 Y存在非平凡的 JSJ 分解，则所需结果由 [Lue88] 给出。如果 Y 是 Seifert 纤维化的，那么根据 Y 不可约且具有无限 π_1这一假设，我们知道

Y 的轨道空间具有非正的轨形欧拉数，因此 Y 可被一个以正亏格定向曲面为底的S^1 丛覆盖，所需结果随之得出。□

注7.2。已知混合三维流形（即既非双曲流形也非图流形的流形）也具有虚纤维化性质 [PW18]，而且具有非正截面曲率黎曼度量的图流形也具有这一性质 [Liu13]。

下一个结果表明，在定理 Y 中，覆盖空间 7.1 可以取为正规覆盖。

推论7.3。 设 Y 是一个闭、定向、不可约的3维流形，且 $\pi_1(Y)$ 为无限群。那么存在一个正规有限覆盖 Y，使得 Y 的 $b_1(Y) > 0$。

证明。设 Y' 是 Y的一个有限覆盖，满足 $b_1(Y') > 0$，如定理 7.1 所示。固定 Y' 的一个基点，并令其在 Y 中的像为 Y 的基点。令 $H \subset \pi_1(Y)$ 为 $\pi_1(Y')$在 $\pi_1(Y)$中的像。由于 H 是 $\pi_1(Y')$的有限指数子群，$\pi_1(\widetilde{Y'})$中形如 gHg^{-1}, $g \in \pi_1(Y)$的子群至多只有有限多个。令$K = \cap_{g\in\pi_1(Y)} gHg^{-1}$，则$K$ 是 $\pi_1(Y)$的有限指数正规子群。令 Y 为由 K确定的 Y 的覆盖，则 Y 是正规覆盖。存在一个有限覆盖映射 $p: Y \to Y'$。映射 p 诱导出单射 $H^1(\widetilde{Y'}; \mathbb{R}) \to H^1(\widetilde{Y}; \mathbb{R})$，因为通过 p 拉回会在调和形式的空间上定义一个单射。因此，$b_1(Y) \geq b_1(Y') > 0$。推论得证。□

注意，若 Y是 Y的有限覆盖，则由覆盖空间的同伦提升性质，微分同胚群$_{PI}(I \times Y)$的每一个元素都容许唯一的提升到微分同胚群$_{PI}(I \times Y)$。回想一下，同胚群$_0(I \times Y)$表示 $I \times Y$的与恒等映射同伦、而不必固定边界的同胚所构成的群。下一个引理使我们能够定义一个从 π_0 同胚群$_0(I \times Y)$到 π_0同胚群$_0(I \times Y)$的拉回同态。

引理 7.4. 设 Y 是一个闭定向3–流形，且 $p: Y \to Y$ 是正规覆盖映射。又假设 Y 上每一个与恒等映射同伦的覆盖变换都与恒等映射同伦。设 $\varphi \in$ 同胚群$_0(I \times Y)$。则存在一个提升$\tilde{\varphi} \in$ 同胚群$_0(I \times Y)$，使得该图可交换

$$\begin{array}{ccc} I \times \widetilde{Y} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & I \times \widetilde{Y} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_I \times p} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_I \times p} \\ I \times Y & \xrightarrow{\varphi} & I \times Y. \end{array}$$

此外，$\tilde{\varphi}$ 的同痕类由 φ决定。

证明。 $\tilde{\varphi}$ 的存在性由将与恒等映射同伦的同伦提升到覆盖空间得到。如果 $\tilde{\varphi}_1$ 和 $\tilde{\varphi}_2$ 是两个这样的提升，那么它们必相差一个与恒等映射同伦的甲板变换，即 id_I times。根据关于 Y的假设，该微分同胚必须与恒等映射同伦。因此，$\tilde{\varphi}$ 的同痕类由φ决定。□

注 7.5。 根据 Waldhausen 定理 [Wal68], ，如果 Y 是 Haken 的，则每个同胚群 phismof Y 与恒等映射同伦的映射都与恒等映射同伦。

根据引理 7.4，如果 $p: Y \to Y$ 是正规覆盖映射且 Y 是 Haken 的，则有一个良定义同态 $p^*: \pi_0$同胚群$_{PI}(I \times Y) \to \pi_0$同胚群$_{PI}(I \times Y)$ 定义为$p^*([\varphi]) = [\tilde{\varphi}]$。

设 Y 是为闭、定向、不可约且 $\pi_1(Y)$ 是无限的，并设 Y 是一个闭、定向、不可约的3维流形，由于 Y 不可约且 $\pi_1(Y)$是无限的，Y 是

$\tilde{}$ $\tilde{}$非球面。由于对所有 $i \geq 2$， $\pi_i(Y) \cong \pi_i(Y)$，我们知道 Y 也是非球面的，因此$\tilde{}$ $\tilde{}$它是不可约的。由于 $b_1(Y) > 0$，我们知道 Y 是 Haken。因此，在这种情况下，拉回映射$\sim\pi_0$同胚群$_{PI}(I \times Y) \to \pi_0$同胚群$_{PI}(I \times Y)$是良定义的。

$\tilde{}$7.1. **当 Y 不是 Seifert 纤维化时。** 在本小节中，我们证明定理$\tilde{}$C 在 Y 为闭流形且 Y 不是 Seifert 纤维化时成立。我们将应用引理 4.2 和4.3来阻碍 $\mathrm{Emb}^\dagger(I, I \times Y)$ 中曲面的同伦。为验证引理 4.3的假设，我们需要研究 $\pi_1 \mathrm{Emb}^\dagger(I, I \times Y)$ 的子群的中心化子。

命题 7.6。 设 Y 是一个闭、定向、不可约的三维流形，且 $\pi_1(Y)$ 包含两个元素 ξ_1、 ξ_2，使得

(1) ξ_1 具有无限阶，并且对于每个正整数 m， ^{m} 在$\pi_1(Y)$ 中的中心化子是由 ξ_1 生成的无限循环群。(2) ξ_2 与 ξ_1 不可交换，且 $(\xi_2)^2 \neq 1$。

于是，由 $\mathscr{I}_*(\xi_1)$ $\mathscr{I}_*(\xi_2)$ 生成的 $\pi_1 \mathrm{Emb}^\dagger(I, I \times Y)$ 子群在 $\pi_1 \mathrm{Emb}^\dagger(I, I \times Y)$中具有平凡中心化子。

注记 7.7. 为了更精确地说明命题 7.6 中同伦群的基点，固定 $q \in Y$为 Y的基点，令 $\mathscr{I}(q)$ 为 $\mathrm{Emb}^\dagger(I, I \times Y)$ 的基点。注意，中心化子的平凡性不依赖于 q 的选取。为简化记号，我们将省略基点。

证明。 这些假设意味着 $\pi_1(Y)$ 是无限的，且 $\pi_2(Y) = 0$。根据命题 3.1，我们有

$$\pi_1 \mathrm{Emb}_\dagger(I, I \times Y) \cong \mathbb{Z}[\pi_1(Y) \setminus \{1\}] \rtimes \pi_1(Y),$$

并且 $\mathscr{I}_*\colon \pi_1(Y) \to \pi_1 \mathrm{Emb}^\dagger(I, I \times Y)$ 是半直积中到该分支的包含映射。特别地， $\pi_1 \mathrm{Emb}^\dagger(I, I \times Y)$ 中的每个元素都可以唯一地表示为乘积 xy，其中 $x \in \mathbb{Z}[\pi_1(Y) \setminus \{1\}]$ 且 $y \in \pi_1(Y)$。对于 $z \in \pi_1(Y)$，我们有

$$z(xy)z^{-1} = (zxz^{-1})(zyz^{-1}),$$

因此， z 与 xy 可交换，当且仅当 z 同时与 x 和 y.

根据假设，由 ξ_1, ξ_2 生成的 $\pi_1(Y)$的子群在$\pi_1(Y)$中具有平凡中心化子。因此，我们只需证明：若 $x \in \mathbb{Z}[\pi_1(Y) \setminus \{1\}]$在 ξ_1 和 ξ_2的共轭作用下均不变，则 $x = 0$。

设 $x = \sum_{i=1}^n a_i \eta_i \in \mathbb{Z}[\pi_1(Y) \setminus \{1\}]$在 ξ_1, ξ_2的共轭作用下不变，其中 $a_i \in \mathbb{Z}, \eta_i \in \pi_1(Y) \setminus \{1\}$，我们来证明 $x = 0$。不失一般性，假设$\eta_1, \ldots, \eta_n$两两不同，且对所有 i， $a_i \neq 0$。目标是在 $n > 0$时推出矛盾。由于 $\sum a_i \eta_i$ 在 ξ_1的共轭作用下不变，ξ_1 的共轭作用在集合 $\{\eta_i\}_{1 \leq i \leq n}$上定义了一个置换。因此，$(\xi_1)^{n!}$ 与每个η_i均可交换。根据假设，存在非零整数 $b_1, \ldots, b_n$， 使得 $\eta_i = (\xi_1)^{b_i}$。

由于 $\sum a_i \eta_i$ 在 ξ_2 的共轭作用下也保持不变，因此存在一个由非零整数 $c_1, \ldots, c_n$ 构成的序列，使得

$$\xi_2 \cdot (\xi_1)^{b_i} \cdot (\xi_2)^{-1} = (\xi_1)^{c_i}$$

并且 $(c_1, \ldots, c_n)$ 等于 $(b_1, \ldots, b_n)$ 的一个置换。上述方程意味着

$$(\xi_2 \cdot \xi_1 \cdot (\xi_2)^{-1})^{b_i} = (\xi_1)^{c_i},$$

因此 $\xi_2 \cdot \xi_1 \cdot (\xi_2)^{-1}$与 $(\xi_1)^{c_i}$可交换。根据关于 ξ_1 的假设，存在一个整数k 使得

$$\xi_2 \cdot \xi_1 \cdot (\xi_2)^{-1} = (\xi_1)^k.$$

由于 ξ_1 不是挠元，我们有 $c_i = kb_i$。由于 $(c_1, \ldots\ldots, c_n)$ 是 $(b_1, \ldots\ldots, b_n)$ 的一个置换，因此我们有 $k = 1$或 -1。若 $k = 1$，则 ξ_1 与 ξ_2可交换，这与关于 ξ_2 的假设矛盾。若 $k = -1$，我们有

$$(\xi_2)^2 \xi_1 (\xi_2)^{-2} = \xi_1,$$

因此，$(\xi_2)^2$ 与 ξ_1可交换。根据假设，存在一个非零整数 l，使得$(\xi_2)^2 = (\xi_1)^l$。因此，ξ_2 与 $(\xi_1)^l$可交换，所以 ξ_2 是 ξ_1的整数次幂，因而 ξ_2 与 ξ_1可交换，这就产生了矛盾。□

~现在我们可以证明定理C 的情形，其中 Y 满足命题7.6的假设。注意，由于我们假设 Y 是闭的，Homeo($I \times Y$，$I \times \partial Y$)与 Homeo($I \times Y$)相同。

定理 7.8。设 Y 是一个闭的、定向的、不可约的3维流形，并且 $\pi_1(Y)$ 是无限的。令 Y 为 Y 的一个有限正规覆盖，使得 $b_1(Y) > 0$。假设存在~$\xi_1, \xi_2 \in \pi_1(Y)$，使得

(1) ξ_1 是无限阶的，并且对于每个正整数 m，~$\pi_1(Y)$ 中$(\xi_1)^m$ 的中心化子是由 ξ_1生成的无限循环群。(2) ξ_2 与 ξ_1不可交换，且 $(\xi_2)^2 \neq 1$。

于是存在一个光滑嵌入 $S^1 \times D^2 = Y_0 \to Y$，使得其像

$$\pi_0 \operatorname{Diff}_{PI}(I \times Y_0) \to \pi_0 \operatorname{Homeo}(I \times Y)$$

具有无限秩。

证明。设 $\gamma\colon S^1 \to \widetilde{Y}$ 是一个嵌入的简单闭曲线，且 $\sigma\colon \Sigma \looparrowright \widetilde{Y}$ 是一个连通闭定向浸入曲面，其与 γ的代数交数等于 1。通过给 Σ附加把手，我们可以假设 $\sigma_*\colon \pi_1(\Sigma) \to \pi_1(Y)$的像包含 ξ_1 和 ξ_2。

经过扰动后，我们可以假设 γ 在 Y中的像是嵌入的，因此 γ 与其在甲板变换群作用下的像不相交。设 $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$是 γ在甲板变换下的像，其中 $\gamma_1 = \gamma$。设 $\nu(\gamma_i)\colon Y_0 = S^1 \times D^2 \to \widetilde{Y}$是一个定向保持嵌入，其核心圆为 γ_i。我们可以要求映射 $\nu(\gamma_i)$ 彼此由甲板变换关联，且 $\nu(\gamma_i)$的像两两不相交。设 $p\colon Y \to Y$是覆盖映射，则对所有 i，$p \circ \nu(\gamma_i)$都相同。令 $\hat{}\nu(\gamma) = p \circ \nu(\gamma_i)$。那么 $\hat{}\nu(\gamma)$ 是 $S^1 \times D^2$ 到 Y中的一个光滑嵌入。

由定理 5.5给出 φ_1、φ_2、$\cdots \in$微分同胚群$_{PI}(I \times Y_0)$。令 $\tilde{\varphi}_{i,\,j}$为 φ_j 经由 $\mathrm{id}_I \times \nu(\gamma_i)$到 $I \times Y$ 的延拓~。于是，对于 j 的固定取值，不同 i 取值对应的微分同胚 $\tilde{\varphi}_{i,\,j}$ 彼此可交换，因为它们具有不交支撑。令$\tilde{\varphi}_j = \prod_i \tilde{\varphi}_{i,\,j}$。于是，$\tilde{\varphi}_j$ 的同伦类属于.....的像

$$\begin{aligned} \pi_0 \operatorname{Diff}_{PI}(I \times Y_0) &\xrightarrow{(\mathrm{id}_I \times \hat{\nu}(\gamma))_*} \pi_0 \operatorname{Diff}_{PI}(I \times Y) \\ &\to \pi_0 \operatorname{Homeo}_0(I \times Y) \xrightarrow{(\mathrm{id}_I \times p)^*} \pi_0 \operatorname{Homeo}_0(I \times \widetilde{Y}). \end{aligned} \tag{7.1}$$

~我们证明，$\tilde{\varphi}_j$ 在 π_0同胚群$_0(I \times Y)$ 中关于 $\mathbb{Z}$ 线性无关。令 $0 \neq (c_j) \in \oplus_\infty \mathbb{Z}$，令 $\varphi = \prod_j \tilde{\varphi}_j^{c_j} \in$ 同胚群$_0(I \times \widetilde{Y})$。我们证明，$\varphi$ 在~同胚群$_0(I \times Y)$中不与恒等映射同伦。

~ ~ ~令 $f = \mathscr{I} \circ \sigma\colon \Sigma \to \mathrm{Emb}^\dagger(I, I \times Y)$，令 $\varphi_*\colon \mathrm{Emb}^\dagger(I, I \times Y) \to \mathrm{Emb}^\dagger(I, I \times Y)$ 为由 φ 诱导的同胚。我们通过证明 f 与 $\varphi_* \circ f$ 不同伦，来阻止 φ 与 id 之间的同痕。

根据命题 5.4， $\varphi_* \circ f$ 由 f 与 $\alpha \in \pi_2 \mathrm{Emb}^\dagger(I, I \times Y)$ 作内部连通和得到，其中

$$\Psi(\alpha) = \sum_i \#(\sigma \cap \gamma_i) \cdot \nu(\gamma_i)_* \circ \Psi \circ \mathcal{S}([\prod_j \varphi_j^{c_j}]).$$

根据定理5.5 (1)，可得 $\Psi \circ \mathcal{S}([\prod_j \varphi_j^{c_j}]) \neq 0 \in \mathcal{W}(Y_0)$。

令 $r : \mathcal{W}(\widetilde{Y}) \to \mathcal{W}(Y_0)$ 是命题3.10 给出的收缩，关于嵌入 $\nu(\gamma_1) : Y_0 \to Y$。我们断言 $r \circ \Psi(\alpha)$ 非零。

为证明该断言，注意到由于 γ 与 σ 的代数交数为 1，$\widetilde{\gamma}$ 的基本类在 $H_1(Y;\mathbb{Z})$/扭子群中是本原的。下文中，我们用 $H_1(Y)$ 和$H_1(Y_0)$表示系数取 $\mathbb{Z}$ 时的同调群。于是对每个 i， γ_i 的基本类在 Y中是本原的。因此有三种可能：

(1) .....的像

$$(\gamma_i)_* : \mathbb{Z} \cong H_1(Y_0)/\mathrm{tors} \to H_1(\widetilde{Y})/\mathrm{tors}$$

与 $(\gamma_1)_*$ 在 $\{0\}$ 处的像相交。

(2) $(\gamma_i)_* = (\gamma_1)_*$ 作为从 $H_1(Y_0)$/挠子群到 $H_1(Y)$/挠子群的映射。

(3) $(\gamma_i)_* = -(\gamma_1)_*$ 作为从 $H_1(Y_0)$/挠子群到 $H_1(Y)$/挠子群的映射。

对于情形 (1)，映射 r 在 $(\gamma_i)_*$ 的像上等于 0： $\mathcal{W}(Y_0) \to \mathcal{W}(Y)$。因此

$$r(\#(\sigma \cap \gamma_i) \cdot \nu(\gamma_i)_* \circ \Psi \circ \mathcal{S}(\varphi)) = 0.$$

对于情形 (2)，我们有 $\#(\sigma \cap \gamma_i) = \#(\sigma \cap \gamma_1)$，且 $\nu(\gamma_i)_* \circ \Psi \circ \mathcal{S}(\varphi) = \nu(\gamma_1)_* \circ \Psi \circ \mathcal{S}(\varphi)$，因此

$$r(\#(\sigma \cap \gamma_i) \cdot \nu(\gamma_i)_* \circ \Psi \circ \mathcal{S}(\varphi)) = \#(\sigma \cap \gamma_1) \cdot \nu(\gamma_1)_* \circ \Psi \circ \mathcal{S}(\varphi).$$

对于情形 (3)，我们有 $\#(\sigma \cap \gamma_i) = -\#(\sigma \cap \gamma_1)$ and $\nu(\gamma_i)_* = \nu(\gamma_1)_* \circ \tau_*$，其中 $\tau : Y_0 \to Y_0$ 是一个保向同胚，它在 $-\mathrm{id}$ 上诱导 $H_1(Y_0)$。因此由定理5.5 (2)，我们仍有

$$r(\#(\sigma \cap \gamma_i) \cdot \nu(\gamma_i)_* \circ \Psi \circ \mathcal{S}(\varphi)) = \#(\sigma \cap \gamma_1) \cdot \nu(\gamma_1)_* \circ \Psi \circ \mathcal{S}(\varphi).$$

总之，我们有

$$r \circ \Psi(\alpha) = k \cdot \#(\sigma \cap \gamma_1) \cdot \nu(\gamma_1)_* \circ \Psi \circ \mathcal{S}(\varphi),$$

其中， k 等于满足上述情形 (2) 或 (3) 的指标 i 的个数。显然， $k > 0$，因为 $i = 1$ 满足情形 (2)。因此， $r \circ \Psi(\alpha) \neq 0$，所以 $\Psi(\alpha) \neq 0$。

根据关于 σ 的假设和命题 7.6，我们知道，$(\mathscr{I} \circ \sigma)_* : \widetilde{\pi}_1(\Sigma) \to \pi_1(Y)$ 的像在 $\pi_1 \mathrm{Emb}^\dagger(I, I \times Y)$ 中具有平凡中心化子。因此，映射 f 满足引理 4.3 的假设。由于 $\Psi(\alpha) \neq 0$，由引理 4.3、4.2 和命题 3.12 可知， f 与$\varphi_* \circ f$ 不同伦。由引理 2.1， φ 在$\widetilde{\text{同胚群}}_0(I \times Y)$ 中不同痕于 id。

这表明复合映射7.1）的像具有无限秩。因此，复合映射

$$\pi_0 \mathrm{Diff}_{PI}(I \times Y_0) \xrightarrow{(\mathrm{id}_I \times \hat{\nu}(\gamma))_*} \pi_0 \mathrm{Diff}_{PI}(I \times Y) \to \pi_0 \mathrm{Homeo}_0(I \times Y)$$

具有无限秩。由于典范映射 π_0同胚群$_0(I \times Y) \to \pi_0$同胚群$(I \times Y)$ 是单射，所需定理得证。□

注记 7.9. 令人感到有些反直觉的是，上文情形（2）和（3）对 $r \circ \Psi(\alpha)$ 的贡献符号相同，而不是相互抵消。推论 5.6 可以说明这一点：如果我们反转 γ_i的所有定向，那么法丛的定向也会反转，而 $\Psi(\alpha)$ 的值却保持不变，而非符号反转。

下一个结果表明，任意满足 Y 且$b_1(Y) > 0$ 且 Y不是 Seifert 纤维化的闭、定向、不可约三维流形，都满足命题 7.6 的假设。因此，~~关于 $\pi_1(Y)$ 的假设在定理 7.8 中成立，只要 Y 不是 Seifert 纤维化的。

命题7.10. 设 Y 是一个闭、定向、不可约的3维流形，满足$b_1(Y) > 0$，且 Y不是 *Seifert* 纤维化的。则存在 ξ_1、$\xi_2 \in \pi_1(Y)$，使得

(1) ξ_1 是无限阶的，并且对每个正整数 m，$\pi_1(Y)$ 中$(\xi_1)^m$ 的中心化子是由 ξ_1生成的无限循环群。(2) ξ_2 与 ξ_1不可交换，且$(\xi_2)^2 \neq 1$。

证明. 如果 Y 是闭双曲流形，那么 $\pi_1(Y)$中的每个非平凡元素都是无限阶的，并且每个非平凡元素的中心化子都是循环群。设 $\xi_1 \in \pi_1(Y)$是一个本原元素，并设 $\xi_2 \in \pi_1(Y)$是一个与ξ_1不可交换的元素，则 ξ_1, ξ_2 满足所需性质。下面我们假设 Y 不是双曲的。由于我们还假设 Y不可约且不是 Seifert 纤维化的，因此 Y具有非平凡的 JSJ 分解。

T_1、.....、$T_k \subset Y(k \geq 1)$ 是 Y 的 JSJ环面，Y_1、.....、Y_l 是 $Y \setminus (T_1 \cup \cdots \cup T_k)$ 的连通分支。那么，对于所有 i，j，$\pi_1(Y_i) \to \pi_1(Y)$ 和 $\pi_1(T_j) \to \pi_1(Y)$ 都是单射，且所有这些同态的像都是 $\pi_1(Y)$ 的真子群。

令 $p : Z \to Y$ 为 Y 的万有覆盖。那么，$p^{-1}(Y_i)$ 和 $p^{-1}(T_j)$ 的每个分支都是单连通的。我们按如下方式构造图 $\mathcal{T}$。令 $\mathcal{T}$ 的顶点为 $p^{-1}(Y_i)$ 的各个分支，边为 $p^{-1}(T_j)$ 的各个分支。每条边的两个顶点由 $p^{-1}(T_j)$ 的该分支两侧确定。根据 Seifert-van Kampen定理，$\pi_1(Z) \cong \pi_1(\mathcal{T})$，因此 $\mathcal{T}$ 是一棵树。我们在 $\mathcal{T}$ 上赋予一个度量，使每条边都是长度为 1 的测地线。

群 $\pi_1(Y)$ 等距地作用于 $\mathcal{T}$。由于 Y是定向流形，我们可以给每个 T_j 指定一个定向，并用它们给 $\mathcal{T}$的每条边指定一个定向，使得 $\pi_1(Y)$ 在 $\mathcal{T}$上的作用保持边定向。因此，$\pi_1(Y)$ 在 $\mathcal{T}$上的作用具有非空不动点集，当且仅当存在一个不动顶点。由于每个 $\pi_1(Y_i) \to \pi_1(Y)$ 的像是 $\pi_1(Y)$ 的真子群，我们知道 $\pi_1(Y)$ 在 $\mathcal{T}$上的作用没有全局不动顶点。因此，该作用没有全局不动点。由于 $\pi_1(Y)$ 是有限生成的，根据 [Ser02, I §6.5, 推论 3], ，我们得出结论：$\pi_1(Y)$ 中存在一个元素，其在 $\mathcal{T}$上的作用没有不动点。

对于 $\xi \in \pi_1(Y)$，令

$$l(\xi) = \inf_{x \in \mathcal{T}} d(x, \xi(x)).$$

则 $l(\xi)$ 是一个整数，并且它等于零当且仅当 ξ 的作用具有不动点。设 $\xi_1 \in \pi_1(Y)$ 使得 $l(\xi_1) > 0$ 且 $l(\xi_1)$ 取得最小正值。

根据 [Ser02，第 §64], ，我们知道 $l(\xi^k) = |k|\, l(\xi)$ 对所有 $\xi \in \pi_1(Y)$ 和整数 k 都成立。因此，上文构造的元素 ξ_1 具有无限阶，而包含 $\pi_1(Y)$ 的唯一循环子群是由 ξ_1 生成的无限循环群 ξ_1。

根据 Jaco–Shalen 的结果以及 Johannson 的结果（[JS79，Joh06], 另见 [Fri11，定理 1。1]），如果 $\xi \in \pi_1(Y)$ 的中心化子不是循环群，那么 ξ 就共轭于 $\pi_1(T_j)$ 或 $\pi_1(Y_i)$ 中的一个元素，且它们是 Y_i Seifert 纤维化。这意味着 ξ 在 $\mathcal{T}$ 上的作用有一个不动顶点。因此，对每个正整数 m，$(\xi_1)^m$ 的中心化子都是循环群。

由于（ξ_1）^{m} 的中心化子群包含 ξ_1，它必定是由 ξ_1 生成的循环群。这表明 ξ_1 满足条件（1）。

在3-流形拓扑中有一个标准结果：唯一使得 π_1 同构于 $\mathbb{Z}$ 的闭定向三维流形是 $S^1 \times S^2$（不难证明这样的流形必须是素的且不是非球面的，因此它必须是 $S^1 \times S^2$）。因此我们的假设蕴含

$\pi_1(Y) \ncong \mathbb{Z}$。回想我们假设 $b_1(Y) > 0$，因此 $\pi_1(Y)$由在 $H_1(Y;\mathbb{Q})$中具有非平凡基本类的元素生成。因此，存在 $\xi_2 \in \pi_1(Y)$，其在 $H_1(Y;\mathbb{Q})$中的像非零，使得 ξ_2 与 ξ_1不可交换。由于 ξ_2 在$H_1(Y;\mathbb{Q})$中的像非零，它具有无限阶。因此， ξ_1, ξ_2 满足条件(2)。□

应用命题7.10 于 Y 并援引定理7.8，我们得出定理C 在 Y 为闭流形且 Y 不是Seifert纤维化流形时成立。

注记7.11。若为闭Seifert纤维化流形，则命题7.10的结论不成立。若 Y 是纤维可定向的Seifert纤维化流形，则 $\pi_1(Y)$的中心包含一个由纤维的像生成的 $\mathbb{Z}$ 的同构副本。若 Y 是纤维不可定向的Seifert纤维化流形，则 $\pi_1(Y)$有一个指数为二的子群，其中心包含一个 $\mathbb{Z}$ 的同构副本。无论哪种情况，都很容易看出，命题7.10 中描述的元素 ξ_1， ξ_2都不可能存在。

7.2. **当 Y 为Seifert纤维化流形时的情形**。现在我们证明C 在 Y 为Seifert纤维化流形时的情形。证明将类似于定理7.8的证明，只不过我们将使用U(1)作用，而非平凡中心化子群，来阻止曲面的同伦。

令 B 为 Y的轨道空间。由于 $\pi_2(Y) = 0$，我们有 $\chi_{\text{orb}}(B) \leq 0$。因此，存在一个覆盖映射 $B \to B$，其中 B 是亏格为 ≥ 1的闭定向曲面。所以，Y 被一个以亏格为 ≥ 1的闭定向曲面为底的 S^1 丛覆盖。由于曲面上的 S^1 丛的有限覆盖空间始终是曲面上的 S^1 丛，进一步取一个覆盖后，我们可以得到一个 Y 对 S^1 的 正规覆盖，其中 S^1 是以亏格为 ≥ 1的闭定向曲面为底的丛。因此，不失一般性，我们可以假设 $\widetilde{Y}$ 是以正亏格闭定向曲面为底的 S^1 丛。

定理7.12。 假设 Y 有一个有限正规覆盖 Y，且它与一个以正亏格闭定向曲面为底的 S^1 丛微分同胚。那么存在一个光滑嵌入 $Y_0 = S^1 \times D^2 \to Y$，使得 π_0微分同胚群$_{PI}(I \times Y_0) \to \pi_0$同胚群$(I \times Y)$的像具有无限秩。

证明。 令 $S^1 \to \widetilde{Y} \to B$ 为 $\widetilde{Y}$的纤维丛结构。根据假设，纤维是定向的，因此我们可以将 Y 认作一个 U(1) 丛。

令γ是一个S^1光滑嵌入，其在 B 中的投影像在 $H_1(B;\mathbb{Z})$中具有本原基本类。经过扰动后，我们可以假设 γ 在 Y 中的投影像是嵌入的，因此 γ 与其在甲板变换群作用下的像互不相交。令 $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$为 γ在甲板变换下的像，其中$\gamma_1 = \gamma$。令 $\nu(\gamma_i)$: $Y_0 = S^1 \times D^2 \to \widetilde{Y}$ 为一个保定向嵌入，其核心圆为 γ_i。我们可以要求映射 $\nu(\gamma_i)$彼此通过甲板变换联系起来，并且 $\nu(\gamma_i)$的像彼此互不相交。

由定理 *5.5* 给出 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \in \text{Diff}_{PI}(I \times Y_0)$。令 $\tilde{\varphi}_{i,j}$ 为 φ_j 经由 $\text{id}_I \times \nu(\gamma_i)$ 延拓到 $I \times Y$ 的映射。对于固定的 j，不同 i 值对应的微分同胚 $\tilde{\varphi}_{i,j}$ 彼此可交换，因为它们的支集不交。令$\tilde{\varphi}_j = \prod_i \tilde{\varphi}_{i,j}$。那么 $\tilde{\varphi}_j$ 的同痕类属于

$$\begin{aligned} &\pi_0 \,\text{Diff}_{PI}(I \times Y_0) \xrightarrow{(\text{id}_I \times \hat{\nu}(\gamma))_*} \pi_0 \,\text{Diff}_{PI}(I \times Y) \\ &\to \pi_0 \,\text{Homeo}_0(I \times Y) \xrightarrow{(\text{id}_I \times p)^*} \pi_0 \,\text{Homeo}_0(I \times \widetilde{Y}). \end{aligned} \tag{7.2}$$

我们证明， $\tilde{\varphi}_j$ 在 π_0Homeo$_0(I \times Y)$上关于 $\mathbb{Z}$ 线性无关。令 $0 \neq (c_j) \in \oplus_\infty \mathbb{Z}$，令 $\varphi = \prod_j \tilde{\varphi}_j^{c_j} \in$Homeo$_{PI}(I \times \widetilde{Y})$。我们证明， φ在Homeo$_0(I \times Y)$中不与恒等映射同痕。

令 μ ： $S^1 \to B$ 为一条浸入曲线，它与 γ_1 在 B中的投影像具有非零交数。将 $\widetilde{Y}$ （作为一个 S^1 丛）拉回到 μ 后得到一个平凡的 S^1丛。令 σ： $S^1 \times S^1 \to \widetilde{Y}$为提升 μ的丛映射。令 $f = \mathscr{I} \circ \sigma$： $S^1 \times S^1 \to \widetilde{\mathrm{Emb}}^{\dagger}(I, I \times Y)$，令 φ_*： $\mathrm{Emb}^{\dagger}(I, I \times Y) \to \mathrm{Emb}^{\dagger}(I, I \times Y)$为由 φ诱导的同胚。我们证明， f 与 $\varphi_* \circ f$ 不同伦。

根据命题 5.4， $\varphi_* \circ f$ 由 f 通过与 $\alpha \in \widetilde{\pi}_2 \mathrm{Emb}^{\dagger}(I, I \times Y)$ 作内部连通和得到，其中

$$\Psi(\alpha) = \sum_i \#(\sigma \cap \gamma_i) \cdot \nu(\gamma_i)_* \circ \Psi \circ \mathcal{S}(\varphi).$$

与定理 7.8 中相同的论证表明， $\Psi(\alpha) \neq 0$。

注意，映射 f 满足引理 4.6的假设。这是因为 Y 具有一个 $\widetilde{\mathrm{U}}(1)$作用 $m : \mathrm{U}(1) \times Y \to Y$，它来自其丛结构。这在 $I \times Y$以及 $\mathrm{Emb}^{\dagger}(I, I \times \widetilde{Y})$ 上诱导出 U(1) 作用，我们也将其记为 m。根据 σ: $S^1 \times S^1 \to \widetilde{Y}$的构造，我们知道 $S^1 \times S^1$ 带有一个以 S^1为底空间的平凡 U(1) 丛结构，并且σ 是 U(1)-等变的。因此， $m \circledast f$ 满足所需性质。

由于 $\Psi(\alpha) \neq 0$，我们得出 f 与 $\varphi_* \circ f$ 不同伦，这是引理4.6 和命题3.12的结论。因此，根据引理2.1， φ 在 π_0同胚群$_0(I \times Y)$中非平凡。

这表明复合映射 (7.2) 的像具有无限秩。因此，复合映射 π_0微分同胚群$_{PI}(I \times Y_0) \xrightarrow{\hat{\nu}(\gamma)^*} \pi_0$微分同胚群$_{PI}(I \times Y) \to \pi_0$同胚群$_0(I \times Y)$ 具有无限秩。因此，所需结果得证。□

T 这就完成了C 在 Y 为闭流形且 Y 为 Seifert 纤维化时的定理证明 .

第3 部分：当 Y 在填充 D^3后可约时的情形

与第2部分的记号类似，令 Y 表示通过对 Y 中每个与 S^2 微分同胚的边界分支填入一份 D^3而得到的流形。以下定理是第3部分的主要结果。

定理 D。 设 Y 是一个紧致、连通、可约的定向3维流形，满足$\pi_1(Y)$ 是无限的，且 ∂Y 不含与 S^2 微分同胚的连通分支。那么存在一个光滑嵌入 i： $X_0 \to I \times Y$，使得复合映射的像

$$\pi_0 \mathrm{Diff}_{PI}(X_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0 \mathrm{Diff}_{PI}(I \times Y) \to \pi_0 \mathrm{Homeo}(I \times Y, I \times \partial Y)$$

具有无限秩。这里，我们规定：若 $Y = S^1 \times S^2$ 或 $\mathbb{RP}^3 \# \mathbb{RP}^3$，则 X_0 为 $S^1 \times D^3$；否则，X_0 为$(S^2 \times D^2) \natural (S^1 \times D^3)$ 。

定理 D 在 A 和B 的情形下，当 Y 可约时，推出定理 A 和 B。这可通过将定理 C 陈述之后的同一论证中的 $I \times Y_0$ 替换为 X_0得到。第 3 部分的其余内容用于证明定理D。

8. The case when $Y = S^1 \times S^2$

本节证明 $Y = S^1 \times S^2$ 时的定理 D。假设 $Y = S^1 \times S^2$。令 γ: $S^1 \to Y$为一个在 H_1 上诱导同构的嵌入。令 $\nu(\gamma)$： $S^1 \times D^3 \to I \times \widetilde{Y}$为一个核心圆为 γ 的保定向嵌入。令 $\varphi_j \in \mathrm{Diff}_{PI}(S^1 \times D^3) \cong \mathrm{Diff}_{PI}(I \times S^1 \times D^2)$ 为定理 5.5 给出的微分同胚序列。令 $\nu(\gamma)_*(\varphi_j)$ 为通过 $\nu(\gamma)$ 将 φ_j 延拓到 $I \times Y$ 的延拓。我们将证明， $\nu(\gamma)_*(\varphi_j)$ 的像在 $\pi_0\mathrm{Homeo}(I \times Y)$ 中关于 $\mathbb{Z}$ 线性无关。

我们从以下引理开始。首先，注意到根据同痕延拓性质，我们有一个塞尔纤维化

$$\mathrm{Homeo}_\partial(S^1\times D^3)\hookrightarrow \mathrm{Homeo}(S^1\times D^3)\to \mathrm{Homeo}(S^1\times S^2)$$

引理 8.1. 限制映射 $\mathrm{Homeo}(S^1\times D^3)\to \mathrm{Homeo}(S^1\times S^2)$ 在以 id 为基点的环空间上诱导一个满射。

证明. Hatcher 计算了 $\mathrm{Homeo}(S^1\times S^2)$ 的同伦型 [Hat81]。特别是，已知 $\pi_1\mathrm{Homeo}(S^1\times S^2)\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2$，且它由 S^1 因子上的旋转以及 S^2 因子上由 $\pi_1(\mathrm{SO}(3))$ 中非平凡元素给出的旋转生成。这两个环路都可以提升到 $\mathrm{Homeo}(S^1\times D^3)$。因此，映射 $\mathrm{Homeo}(S^1\times D^3)\to\mathrm{Homeo}(S^1\times S^2)$ 在 π_1上诱导一个满射。由于该映射是塞尔纤维化，它也在环空间上诱导一个满射。□

令 $\kappa\colon I\times Y\to S^1\times D^3$ 为一个嵌入，其像是 $\partial(S^1\times D^3)$ 的闭领圈邻域。

引理 8.2. 设 $\varphi\in$ 同胚群$_\partial(I\times Y)$，令 $\kappa_*\varphi$ 表示经由 κ将 φ 延拓到 $S^1\times D^3$所得的映射。若 $[\varphi]$ 在 π_0同胚群$(I\times Y)$中是平凡的，则 $[\kappa_*\varphi]$ 在 同胚群$(S^1\times D^3)$中是平凡的。

证明。不失一般性，设 $\kappa(\{1\}\times Y)=\partial(S^1\times D^3)$。设 $F\colon I\times(I\times Y)\to I\times Y$是一个从 φ到同胚群$(I\times Y)$ 中恒等映射的同痕。于是由引理 8.1，存在一个同痕 $G\colon I\times(S^1\times D^3)\to S^1\times D^3$，从恒等映射到恒等映射，使得 $G|_{I\times\partial(S^1\times D^3)}=F|_{I\times\{0\}\times Y}$。将 G 与 F 粘合，得到一个从 $\kappa_*\varphi$ 到 $S^1\times D^3$ 上恒等映射的同痕。□

回顾一下，我们记 $Y_0=S^1\times D^2$，因此 $I\times Y_0\cong S^1\times D^3$。

引理 8.3. 假设 $\varphi\in$ 同胚群$_\partial(I\times Y_0)\cong$ 同胚群$_\partial(S^1\times D^3)$ 满足 $\Psi\circ\mathcal{S}([\varphi])\neq 0$，则 $[\varphi]$ 在 π_0同胚群$(S^1\times D^3)$中是非平凡的。

证明。我们有一个塞尔纤维化

$$\mathrm{Homeo}_\partial(S^1\times D^3)\hookrightarrow \mathrm{Homeo}(S^1\times D^3)\to \mathrm{Homeo}(S^1\times S^2),$$

因此有一个正合序列

$$\begin{aligned}\pi_1\mathrm{Homeo}(S^1\times D^3)&\to\pi_1\mathrm{Homeo}(S^1\times S^2)\\ &\to\pi_0\mathrm{Homeo}_\partial(S^1\times D^3)\to\pi_0\mathrm{Homeo}(S^1\times D^3).\end{aligned}$$

由引理 8.1，π_1同胚群$(S^1\times D^3)\to\pi_1$同胚群$(S^1\times S^2)$ 是满射，因此 π_0同胚群$_\partial(S^1\times D^3)\to\pi_0$同胚群$(S^1\times D^3)$ 是单射，从而结论成立。□

现在我们可以完成定理 D 在 $Y=S^1\times S^2$ 情形下的证明。

证明。令 $0\neq(c_k)\in\oplus_\infty\mathbb{Z}$，并令 $\hat{}\varphi=\prod_k\varphi_k^{c_k}$，令 $\varphi=\prod_k\nu(\gamma)_*(\varphi_k)^{c_k}=\nu(\gamma)_*(\hat{}\varphi)$。我们证明 φ 在 $\pi_0\mathrm{Homeo}(I\times Y)$ 中非平凡。注意到 $\kappa\circ\gamma$ 与 $S^1\times D^3$ 的核心圆同痕，因此我们可以选取 $\nu(\gamma)$，使得 $\kappa\circ\nu(\gamma)$与 $S^1\times D^3$ 到 $S^1\times D^3$中核心圆的一个邻域的标准嵌入同痕。因此，$\kappa_*\varphi$ 在 $\mathrm{Homeo}_\partial(S^1\times D^3)=\mathrm{Homeo}_\partial(I\times Y_0)$ 中与 $\hat{}\varphi$同痕。由定理 5.5，我们知道 $\Psi\circ\mathcal{S}([\kappa_*\varphi])\neq 0$。因此，由引理 8.2 和引理 8.3 可知，$\varphi$ 在 $\pi_0\mathrm{Homeo}(I\times Y)$ 中非平凡。□

9. The case when $Y=\mathbb{RP}^3\#\mathbb{RP}^3$

本节证明定理 D 当 $Y=\mathbb{RP}^3\#\mathbb{RP}^3$时。设 $Y=\mathbb{RP}^3\#\mathbb{RP}^3$，则存在二重覆叠映射 $p\colon S^1\times S^2\to Y$。令 $\widetilde{Y}=S^1\times S^2$。非平凡的覆盖变换 $\tau\colon\widetilde{Y}\to\widetilde{Y}$ 由 S^1 上的反射与 S^2 上的对径映射的乘积给出。

令 $\hat{\tau}$ 为 S^1 上的反射与 D^3上的映射 $x \mapsto -x$ 的乘积。于是 $\hat{\tau}$ 是 $S^1 \times D^3$上的对合。存在嵌入 $\kappa\colon I \times \widetilde{Y} \to S^1 \times D^3$，其像是 $\partial(S^1 \times D^3)$的一个闭领状邻域，使得 $\hat{\tau} \circ \kappa = \kappa \circ (\mathrm{id}_I \times \tau)$。

作用于 $S^1 \times S^2$ 上的非平凡覆盖变换不同伦于恒等映射。因此，根据引理7.4，拉回映射

$$\pi_0 \mathrm{Homeo}_0(I \times Y) \xrightarrow{(\mathrm{id}_I \times p)^*} \pi_0 \mathrm{Homeo}_0(I \times \widetilde{Y})$$

是良定义的。

令 $\gamma\colon S^1 \to I \times \widetilde{Y}$ 为一个光滑嵌入，其像表示$\pi_1(I \times Y)$的一个生成元。扰动 γ，使其像与 $\tau \circ \gamma$不相交。记 $\gamma_1 = \gamma, \gamma_2 = (\mathrm{id}_I \times \tau) \circ \gamma$。令 $\nu(\gamma_i)\colon S^1 \times D^3 \to I \times \widetilde{Y}$为一个保定向嵌入，其核心圆为 γ_i。我们还要求 $\nu(\gamma_i)$ $(i = 1, 2)$ 互不相交，且 $\nu(\gamma_2) = (\mathrm{id}_I \times \tau) \circ \nu(\gamma_1)$。定义 $\hat{\nu}(\gamma)$ 为 $I \times Y$ 中 $S^1 \times D^3$ 的嵌入，由下式给出

$$\hat{\nu}(\gamma) = (\mathrm{id}_I \times p) \circ \nu(\gamma_1) = (\mathrm{id}_I \times p) \circ \nu(\gamma_2).$$

令 $\varphi_j \in \mathrm{Diff}_{PI}(S^1 \times D^3) \cong \mathrm{Diff}_{PI}(I \times S^1 \times D^2)$ 为定理 5.5 给出的微分同胚序列。令 $\tilde{\varphi}_{i,j}$ 为通过 $\nu(\gamma_i)$ 将 φ_j 延拓到 $I \times Y$ 所得的延拓。令 $\tilde{\varphi}_j = \tilde{\varphi}_{1,j} \circ \tilde{\varphi}_{2,j}$。那么 $\tilde{\varphi}_j$ 的同痕类属于..... 的像

$$\begin{aligned} &\pi_0 \mathrm{Diff}_{PI}(S^1 \times D^3) \xrightarrow{\hat{\nu}(\gamma)_*} \pi_0 \mathrm{Diff}_{PI}(I \times Y) \\ &\to \pi_0 \mathrm{Homeo}_0(I \times Y) \xrightarrow{(\mathrm{id}_I \times p)^*} \pi_0 \mathrm{Homeo}_0(I \times \widetilde{Y}). \end{aligned} \tag{9.1}$$

~我们证明 $\tilde{\varphi}_j$ 在 $\pi_0\mathrm{Homeo}_0(I \times Y)$ 中线性无关。考虑延拓映射

$$\kappa_* : \pi_0 \mathrm{Homeo}_{PI}(I \times \widetilde{Y}) \to \pi_0 \mathrm{Homeo}_{PI}(S^1 \times D^3).$$

那么 $\kappa_*(\tilde{\varphi}_j) = \kappa_*(\tilde{\varphi}_{1,j}) \circ \kappa_*(\tilde{\varphi}_{2,j})$，并且我们有 $\kappa_*(\tilde{\varphi}_{2,j}) = \tau \circ \kappa_*(\tilde{\varphi}_{1,j}) \circ \tau^{-1}$。现在我们运用推论 5.6。注意，在推论 5.6中，我们可以选取 $\hat{\iota}$，使得 $\tau \circ \kappa_*(\tilde{\varphi}_{1,j}) \circ \tau^{-1}$ 与 $\hat{\iota} \circ \kappa_*(\tilde{\varphi}_{1,j}) \circ \hat{\iota}^{-1}$ 同痕。因此我们有

$$\Psi \circ \mathcal{S}(\kappa_*(\tilde{\varphi}_{1,j})) = \Psi \circ \mathcal{S}(\kappa_*(\tilde{\varphi}_{2,j})),$$

因此

$$\Psi \circ \mathcal{S}(\kappa_*(\tilde{\varphi}_j)) = 2 \cdot \Psi \circ \mathcal{S}(\kappa_*(\tilde{\varphi}_{1,j})).$$

因此，$\kappa_*(\tilde{\varphi}_j)$ 在 $\Psi \circ \mathcal{S}$ 下的像线性无关，因此 $\tilde{\varphi}_j$ 在~ π_0同胚群$_0(I \times Y)$ 中线性无关，由引理 8.2 和引理 8.3得证。

总之，我们已经证明（9.1）的像具有无限秩。因此，复合

$$\pi_0 \mathrm{Diff}_{PI}(S^1 \times D^3) \xrightarrow{\hat{\nu}(\gamma)_*} \pi_0 \mathrm{Diff}_{PI}(I \times Y) \to \pi_0 \mathrm{Homeo}(I \times Y)$$

具有无限秩。

10. The case when Y is $Y_1 \# Y_2$ with $Y_2 \ncong \mathbb{RP}^3$

现在假设 Y满足定理 D 的假设，且 $Y \ncong S^1 \times S^2$ 或 $\mathbb{RP}^3 \# \mathbb{RP}^3$。那么我们可以将 $Y = Y_1 \# Y_2$ 写成 $Y_1 \ncong S^3$，且 $Y_2 \ncong S^3$ 或 $\mathbb{RP}^3$。由于∂Y 没有任何一个分支与 S^2微分同胚，因此有 $\pi_1(Y_1) \ncong \{1\}$，且 $\pi_1(Y_2) \ncong \{1\}$ 或 $\mathbb{Z}/2$。在这种情况下，我们将在 $I \times Y$上构造一个哑铃微分同胚序列，并通过考察其在 $\mathrm{Emb}^\dagger(I, I \times Y)$ 中曲线同伦类上的作用，证明它们在 π_0 同胚群$(I \times Y, I \times \partial Y)$中线性无关。

引理 10.1。 存在 $\alpha \in \pi_1(Y_2)$ 使得 $\alpha^2 \neq 1$。

证明. 假设 $\pi_1(Y_2)$ 的每个元素的阶均为 2，则对所有 $\alpha, \beta \in \pi_1(Y_2)$，我们有

$$\alpha\beta = (\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1} = \beta\alpha,$$

因此 $\pi_1(Y_2)$ 是阿贝尔的。众所周知，唯一的阿贝尔三维流形群是循环群， $\mathbb{Z}^2$、 $\mathbb{Z}^3$和 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$ (例如参见 [AFW15，表 1。2])。由于 $\pi_1(Y_2) \ncong \{1\}$ 或$\mathbb{Z}/2$，所需结果得证。 □

设 $S^2 \cong S \subset Y$ 为连通和分解中的附着球面。令 $\nu(S)$ 表示 S 在 Y 中的闭管状邻域。我们固定一个保向微分同胚 $\rho\colon [1,2] \times S \cong \nu(S)$，并定义

$$\widetilde{\rho}\colon I \times [1,2] \times S \to I \times Y, \quad \widetilde{\rho}(t,s,x) := (t, \rho(s,x)).$$

固定两个点 $b \neq b' \in S$，并将 b 取为基点。我们将 Y 写成

$$Y = Y_1^\circ \cup_{\rho(\{1\}\times S)} \big(\nu(S)\big) \cup_{\rho(\{2\}\times S)} Y_2^\circ,$$

其中 Y_1°、 Y_2° 是 $Y \setminus \nu(S)$ 的两个连通分支的闭包。

选取非平凡元素 $\alpha_i \in \pi_1(Y_i, b)$（$i = 1,2$），并要求 α_2 不是 2-扭元。令 $\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \in \pi_1(Y, b)$。我们用满足下列条件的嵌入环 $\hat{}\alpha\colon S^1 \cong \mathbb{R}/4\mathbb{Z} \hookrightarrow Y$ 来表示 α：

(1) $\hat{}\alpha(t) = \rho(t, b)$ 对所有 $t \in [1,2]$ 成立。(2) $\hat{}\alpha(t) = \rho(4-t, b')$ 对所有 $t \in [3,4]$ 成立。(3) $\hat{}\alpha([0,1]) \subset Y_1^\circ$并表示该元素

$$\alpha_1 \in \pi_1(Y_1^\circ, \rho(\{1\} \times S)) \cong \pi_1(Y_1).$$

(4) $\hat{}\alpha([2,3]) \subset Y_2^\circ$并表示该元素

$$\alpha_2 \in \pi_1(Y_2^\circ, \rho(\{2\} \times S)) \cong \pi_1(Y_2).$$

此处， $\pi_1(Y_i^\circ, \rho(\{i\} \times S))$ 表示相对同伦群。

回顾 $X_0 = (S^2 \times D^2) \natural (S^1 \times D^3)$。我们考虑自参照哑铃 $\mathcal{B} \subset X_0$，其定义如下：设 $S_0 = S^2 \times \{0\} \subset S^2 \times D^2$。选取一个嵌入

$$D = D^3 \hookrightarrow (S^2 \times \operatorname{int}(D^2)) \setminus S_0 \subset X_0.$$

设 $S_1 = \partial D^3$。取一条弧 $\gamma\colon I \to X_0$，使其满足下列条件：

(1) $\gamma(0) \in S_0$, $\gamma(1) \in S_1$, $\gamma([0, \frac{1}{2}]) \subset S^2 \times D^2$; (2) $\gamma(0, 1) \cap S_0 = \emptyset$和 $\gamma(0,1) \pitchfork D = \gamma(\frac{1}{2}) \in \operatorname{int}(D)$; (3) $[\gamma]$ 表示 $\mathbb{Z} \cong \pi_1(X_0, S^2 \times D^2)$ 中的一个生成元 g。

于是， $S_0 \cup \operatorname{Im}(\gamma) \cup S_1$ 的正则邻域是一个哑铃，记作 $\mathcal{B}$。令 $\psi_1 \in \operatorname{Diff}_\partial(X_0)$ 为与 $\mathcal{B}$关联的哑铃微分同胚。注意，对于每个整数 $k > 1$，我们都有一个自嵌入 $i_k\colon X_0 \hookrightarrow X_0$，它将 S_0 映到自身，并满足 $(i_k)_*(g) = g^k \in \pi_1(X_0)$。将微分同胚 $i_k \circ \psi_1 \circ i_k^{-1} \in \operatorname{Diff}_\partial(\operatorname{Im}(i_k))$ 与恒等映射拼接延拓，可得微分同胚 $\psi_k \in \operatorname{Diff}_\partial(X_0)$。由于 S_1 围成一个嵌入的 D^3，根据 [BG25，命题 2.6],，我们有 $\psi_k \in \operatorname{Diff}_{PI}(X_0)$。

下一步是将 ψ_k 变成 X上的微分同胚。我们选取一条光滑嵌入的环路 $\xi\colon I \to I \times Y$，使其满足以下条件：

(1) $\xi(0) = \xi(1) \in \{1/2\} \times (S \setminus \{b, b'\})$.(2) $\operatorname{Im}\xi \cap (I \times \operatorname{Im} \hat{}\alpha) = \emptyset$(3) $[\xi] = \alpha \in \pi_1(I \times Y, \{1/2\} \times S) \cong \pi_1(Y)$。

我们取包含于 $\operatorname{Im} \widetilde{\rho}$ 中的 $\{\frac{1}{2}\} \times S \subset I \times Y$ 的闭管状邻域 $\nu(\{\frac{1}{2}\} \times S)$，并取 $\operatorname{Im}(\xi)$ 的闭管状邻域 $\nu(\xi)$，使其不与 $I \times \operatorname{Im} \hat{}\alpha$ 相交。

对于 $x \in S^2$，令 $D_x = \{x\} \times D^2 \subset S^2 \times D^2$ 并令 $D'_x := \widetilde{\rho}([0,1] \times [1,2] \times \{x\}) \subset X$。于是存在一个嵌入

$$i : X_0 \xrightarrow{\cong} \nu(\{1/2\} \times S) \cup \nu(\operatorname{Im} \xi) \subset X$$

使得

$$(\operatorname{Im} i) \cap (I \times \operatorname{Im} \hat{\alpha}) = i(D_b \sqcup D_{b'}) = D'_b \sqcup D'_{b'}. \tag{10.1}$$

通过将 $i \circ \psi_k \circ i^{-1} \in$ 微分同胚群 $_{PI}(\operatorname{Im} i)$ 用恒等映射延拓，我们得到一个微分同胚 $\varphi_k \in$ 微分同胚群 $_{PI}(I \times Y)$，对每个 $k \geq 1$ 都成立。我们将通过证明D来证明定理 $\{\varphi_k\}_{k \geq 1}$ 在 $\pi_0 \operatorname{Homeo}(I \times Y, I \times \partial Y)$ 中线性无关。为此，取 $0 \neq (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{Z}^n$ 并令 $\varphi = \prod_k \varphi_k^{c_k}$。那么微分同胚 φ 诱导出一个同胚

$$\varphi_* : \operatorname{Emb}_\dagger(I, I \times Y) \to \operatorname{Emb}_\dagger(I, I \times Y).$$

命题 10.2。这些环路

$$S^1 \xrightarrow{\hat{\alpha}} Y \xrightarrow{\mathscr{I}} \operatorname{Emb}_\dagger(I, I \times Y),$$

and

$$S^1 \xrightarrow{\hat{\alpha}} Y \xrightarrow{\mathscr{I}} \operatorname{Emb}_\dagger(I, I \times Y) \xrightarrow{\varphi_*} \operatorname{Emb}_\dagger(I, I \times Y)$$

不是自由同伦的。

命题10.2 意味着映射 $\varphi_* \circ \mathscr{I}$ 不同伦于 $\mathscr{I}$，因此根据引理2.1， φ 在 $\operatorname{Homeo}(I \times Y, I \times \partial Y)$ 中不与恒等映射同痕。因此，命题10.2蕴含定理D。

本节余下部分将用于证明命题 10.2。注意，两个环路 $\mathscr{I} \circ \hat{\alpha}$ 和 $\varphi_* \circ \mathscr{I} \circ \hat{\alpha}$ 都将 S^1 的基点映到 $\operatorname{Emb}_\dagger(I, I \times Y)$ 的基点 $\mathscr{I}(b)$，因此它们分别表示 $\pi_1 \operatorname{Emb}_\dagger(I, I \times Y)$ 中的元素 $[\mathscr{I} \circ \hat{\alpha}]$ 和 $[\varphi_* \circ \mathscr{I} \circ \hat{\alpha}]$。由于 $[\hat{\alpha}] = \alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \in \pi_1(Y)$，我们有

$$[\mathscr{I} \circ \hat{\alpha}] = \mathscr{I}_*(\alpha_1) \cdot \mathscr{I}_*(\alpha_2) \in \pi_1 \operatorname{Emb}_\dagger(I, I \times Y). \tag{10.2}$$

为了计算 $[\varphi_* \circ \mathscr{I} \circ \hat{\alpha}]$，我们需要做一些准备。首先，注意到同构

$$\pi_1(\operatorname{Emb}_\dagger(I, I \times Y), \mathscr{I}(\nu(S))) \cong \pi_1 \operatorname{Emb}_\dagger(I, I \times Y)$$

因为 $\mathscr{I}(\nu(S)) \cong I \times S^2$ 是单连通的。对于 $[a,b] \subset [0,4]$，我们用 $\widetilde{\alpha}_{[a,b]}$ 表示路径

$$\varphi_* \circ \mathscr{I} \circ \hat{\alpha}|_{[a,b]} : [a,b] \to \operatorname{Emb}_\dagger(I, I \times Y).$$

于是我们有

$$\varphi_* \circ \mathscr{I} \circ \hat{\alpha} = \widetilde{\alpha}_{[0,1]} \cdot \widetilde{\alpha}_{[1,2]} \cdot \widetilde{\alpha}_{[2,3]} \cdot \widetilde{\alpha}_{[3,4]}. \tag{10.3}$$

由于 φ 支撑于 i 的像中： $X_0 \to X$根据（10.1），我们有

$$[\widetilde{\alpha}_{[0,1]}] = [\mathscr{I} \circ \hat{\alpha}|_{[0,1]}] = \mathscr{I}_*([\alpha_1]) \in \pi_1(\operatorname{Emb}_\dagger(I, I \times Y), \mathscr{I}(\nu(S)))$$

and

$$[\widetilde{\alpha}_{[2,3]}] = [\mathscr{I} \circ \hat{\alpha}|_{[2,3]}] = \mathscr{I}_*([\alpha_2]) \in \pi_1(\operatorname{Emb}_\dagger(I, I \times Y), \mathscr{I}(\nu(S))).$$

回顾第 3.1 节， $\pi_1^D \operatorname{Emb}_\partial$（$I$， $I \times Y$）表示映射 $\operatorname{Emb}_\partial$（$I$， $I \times Y$） $\to \operatorname{Map}_\partial$（$I$， $I \times Y$） $\cong \pi_2$（Y）的核。

定义 10.3. 定义 F 为复合映射

$$\pi_1^D \operatorname{Emb}_\partial(I, I \times Y) \hookrightarrow \pi_1 \operatorname{Emb}_\dagger(I, I \times Y) \cong \pi_1(\operatorname{Emb}_\dagger(I, I \times Y), \mathscr{I}(\nu(S))).$$

Let

$$\beta_0 := \sum_{k=1}^{n} c_k(\alpha^k + \alpha^{-k}) \in \mathbb{Z}[\pi_1(Y) \setminus \{1\}] \cong \pi_1^D \operatorname{Emb}_\dagger(I, I \times Y).$$

命题 10.4. 我们有 $[\widetilde{\alpha}_{[1,2]}] = F(\beta_0)$，$[\widetilde{\alpha}_{[3,4]}] = -F(\beta_0)$。
证明。考虑微分同胚 $\psi := \prod_k \psi_k^{c_k} \in \mathrm{Diff}_{PI}(X_0)$。注意，弧族

$$\{\mathscr{I} \circ \hat{\alpha}(s)\}_{s\in[1,2]} \subset \mathrm{Emb}_\dagger(I, I\times Y).$$

是圆盘的扫描族 $D_b' \hookrightarrow X$。根据（10.1），我们有 $i^{-1}(D_b') = D_b$。由 Dax 不变量的自然性，$[\widetilde{\alpha}_{[1,2]}] \in \pi_1(\mathrm{Emb}^\dagger(I, I\times Y)\ \mathscr{I}(S))$ 等于相对 Dax 不变量在复合下的像

$$\mathrm{Dax}(D_b, \psi(D_b)) \in \pi_1^D(\mathrm{Emb}_\partial(I, X_0)) \cong \mathbb{Z}[\pi_1(X_0)\setminus 1]$$

作用于复合

$$\begin{aligned}\pi_1^D(\mathrm{Emb}_\partial(I, X_0)) &\xrightarrow{i_*} \pi_1^D(\mathrm{Emb}_\partial(I, X))\\ &\hookrightarrow \pi_1(\mathrm{Emb}_\dagger(I, X)) \cong \pi_1(\mathrm{Emb}_\dagger(I, X), \mathscr{I}(S)).\end{aligned} \tag{10.4}$$

接下来，我们计算 Dax 不变量。根据 [Gab21，定理 4.9]，，我们有 $\mathrm{Dax}(D_b, \psi_1(D_b)) = g + g^{-1}$，其中 g 是 $\pi_1(X_0) \cong \mathbb{Z}$的标准生成元。由于 ψ_k 是从$i_k\circ\psi_1\circ i_k^{-1}$扩展而来的，并且映射 $(i_k)_*\colon \pi_1(X_0) \to \pi_1(X_0)$ 将 g映到 g^k，因此我们有 $\mathrm{Dax}(D_b, \psi_k(D_b)) = g^k + g^{-k}$。

给定 ψ，$\psi' \in$微分同胚群$_{PI}(X_0)$，由 Dax 不变量的可加性和自然性可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Dax}(D_b, (\psi\circ\psi')(D_b)) &= \mathrm{Dax}(D_b, \psi(D_b)) + \mathrm{Dax}(\psi(D_b), (\psi\circ\psi')(D_b))\\ &= \mathrm{Dax}(D_b, \psi(D_b)) + \psi_*\mathrm{Dax}(D_b, \psi'(D_b))\\ &= \mathrm{Dax}(D_b, \psi(D_b)) + \mathrm{Dax}(D_b, \psi'(D_b)).\end{aligned}$$

上式最后一个等式用到了这样一个事实：ψ 在 $\pi_1(X_0)$ 上诱导恒等映射。这意味着

$$\mathrm{Dax}(D_b, \psi(D_b)) = \sum_{i=1}^n c_k(g^k + g^{-k}). \tag{10.5}$$

在（10.4）下，元素 $\sum_{i=1}^n c_k$（$g^k + g^{-k}$）被映到 F（β_0）。由此完成了$[\widetilde{\alpha}_{[1,2]}] = F$（$\beta_0$）的证明。$[\widetilde{\alpha}_{[3,4]}] = -F$（$\beta_0$）的证明类似。□

推论 10.5。 设 $\beta = F$（β_0）。则有

$$[\varphi_*\circ\mathscr{I}\circ\hat{\alpha}] = \mathscr{I}(\alpha_1)\cdot\beta\cdot\mathscr{I}(\alpha_2)\cdot\beta^{-1} \in \pi_1\,\mathrm{Emb}_\dagger(I, I\times Y).$$

证明。这由（10.3）和命题10.4可得。□

接下来，我们需要以下引理。回顾一下，$\alpha = \alpha_1\alpha_2 \in \pi_1(Y)$。另外，回顾一下，$\pi_1(Y)$通过对生成元取共轭作用于 $\mathbb{Z}[\pi_1(Y)\setminus\{1\}]$。对于每个 $\hat{}\alpha \in \pi_1(Y)$，令

$$C_{\hat{\alpha}} : \mathbb{Z}[\pi_1(Y)\setminus\{1\}] \to \mathbb{Z}[\pi_1(Y)\setminus\{1\}]$$

表示$\hat{}\alpha$的共轭作用。

引理 10.6. 不存在 $\beta_1 \in \mathbb{Z}[\pi_1(Y)\setminus\{1\}]$ 使得

$$\beta_1 - C_{\alpha_2\alpha_1}(\beta_1) = \beta_0 - C_{\alpha_2}(\beta_0).$$

证明。我们有

$$\begin{aligned}C_{\alpha_2}(\beta_0) &= \sum_{k=1}^n c_k(\alpha_2(\alpha_1\alpha_2)^k\alpha_2^{-1} + \alpha_2(\alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1})^k\alpha_2^{-1})\\ &= \sum_{k=1}^n c_k((\alpha_2\alpha_1)^k + (\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1})^k)\end{aligned}$$

在 $C_{\alpha_2}(\beta_0)$ 中，$(\alpha_2\alpha_1)^k$ 的系数为 c_k。由于 α_2 不是 2-扭元，$(\alpha_2\alpha_1)^k$ 在 β_0 中的系数为 0。因此，$(\alpha_2\alpha_1)^k$ 在 $\beta_0 - C_{\alpha_2}(\beta_0)$ 中的系数为 $-c_k$。另一方面，$(\alpha_2\alpha_1)^k$ 在 $\beta_1 - C_{\alpha_2\alpha_1}(\beta_1)$ 中的系数始终为零，因为 $\alpha_2\alpha_1$ 与 $(\alpha_2\alpha_1)^k$ 可交换。由于 $(c_k) \neq 0 \in \mathbb{Z}^n$，对于每个 β_1，我们都有 $\beta_1 - C_{\alpha_2\alpha_1}(\beta_1) \neq \beta_0 - C_{\alpha_2}(\beta_0)$。□

现在我们可以完成命题10.2的证明。

命题 *10.2* 的证明。 设 $\beta = F(\beta_0)$。只需证明这些元素

$$[\mathscr{I} \circ \hat{\alpha}] = \mathscr{I}(\alpha_1) \cdot \mathscr{I}(\alpha_2)$$

and

$$[\varphi_* \circ \mathscr{I} \circ \hat{\alpha}] = \mathscr{I}(\alpha_1) \cdot \beta \cdot \mathscr{I}(\alpha_2) \cdot \beta^{-1}$$

在 $\pi_1 \operatorname{Emb}^\dagger(I, I \times Y)$ 中不共轭。假设并非如此，则存在$w \in \pi_1 \operatorname{Emb}^\dagger(I, I \times Y)$ 使得

$$w \cdot \mathscr{I}(\alpha_1) \cdot \mathscr{I}(\alpha_2) \cdot w^{-1} = \mathscr{I}(\alpha_1) \cdot \beta \cdot \mathscr{I}(\alpha_2) \cdot \beta^{-1} \tag{10.6}$$

根据命题3.1，有

$$\pi_1 \operatorname{Emb}_\dagger(I, I \times Y) \cong (\mathbb{Z}[\pi_1(Y) \setminus \{1\}] \oplus \pi_2(Y)) \rtimes \pi_1(Y),$$

其中 $\mathscr{I}\colon\ \pi_1(Y) \to \pi_1 \operatorname{Emb}^\dagger(I, I \times Y)$ 与半直积中到 $\pi_1(Y)$ 分量的包含映射一致。下文中，我们将 $\pi_1(Y)$ 与其在 $\mathscr{I}$ 下的像等同起来，并将 $\pi_1 \operatorname{Emb}_\partial(I, I \times Y)$ 视为 $\pi_1 \operatorname{Emb}^\dagger(I, I \times Y)$ 的子群。于是可以写成 $w = x \cdot y$，其中

$$x \in \pi_1 \operatorname{Emb}_\partial(I, I \times Y) \cong \mathbb{Z}[\pi_1(Y) \setminus \{1\}] \oplus \pi_2(Y),\ \ y \in \pi_1(Y).$$

将 (10.6) 投影到 $\pi_1(Y)$ 得到 $y\alpha y^{-1} = \alpha$。因此 (10.6) 推出

$$x\alpha x^{-1} = \alpha_1\beta\alpha_2\beta^{-1},$$

可将其改写为

$$(\alpha_1^{-1}x\alpha_1)(\alpha_2 x^{-1}\alpha_2^{-1}) = \beta(\alpha_2\beta^{-1}\alpha_2^{-1}).$$

令 $x' = \alpha_1^{-1}x\alpha_1$，则

$$x'\big((\alpha_2\alpha_1)(x')^{-1}(\alpha_2\alpha_1)^{-1}\big) = \beta(\alpha_2\beta^{-1}\alpha_2^{-1}).$$

令 $\beta_1 \in \mathbb{Z}[\pi_1(Y) \setminus \{1\}]$ 为 x 在映射下的投影

$$\pi_1 \operatorname{Emb}_\partial(I, I \times Y) \cong \mathbb{Z}[\pi_1(Y) \setminus \{1\}] \oplus \pi_2(Y) \to \mathbb{Z}[\pi_1(Y) \setminus \{1\}].$$

于是我们有

$$\beta_1 - C_{\alpha_2\alpha_1}(\beta_1) = \beta_0 - C_{\alpha_2}(\beta_0).$$

根据引理 10.6，这样的 β_1 不存在，因此没有 w 满足 (10.6)。 □

References

[AFW15] Matthias Aschenbrenner、Stefan Friedl 和 Henry Wilton, *3-Manifold groups*, 《EMS数学讲座系列》第20卷, 欧洲数学会, 苏黎世, 2015年。[Ago13] Ian Agol, *The virtual Haken conjecture (with an appendix by Ian Agol, Daniel Groves and Jason Manning)*. **18** 2013 1045 1087 , 《数学文献》 () , –。[BG19] Ryan Budney 和 David Gabai, *Knotted 3-balls in S^4*, arXiv 预印本 arXiv:1912.09029（2019年）。[BG25] , *On the automorphism groups of hyperbolic manifolds*, 《国际数学研究通知》**2025** （2025年） , 第7期, rnaf083。[BL82] D. Burghelea 和 R. Lashof, *Geometric transfer and the homotopy type of the automorphism groups of a manifold* **269** 1982 1, 1 38 637027 , 《美国数学会汇刊》 () , 第–期。MR[Cer70] Jean Cerf, *La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie*, 《高等科学研究所数学出版物》 ´Etudes Sci. Publ. Math. **39** （1970年） , 5–173。MR292089

[FGHK24] Eduardo Fernández、David Gay、Daniel Hartman 和 Danica Kosanovic，，arXiv预印本，arXiv:。（2024年）。[Fri11] Stefan Friedl，*Centralizers in 3-manifold groups*，《RIMS Kˆokyˆuroku》1747（2011年），23–34。[Gab21] David Gabai，*Self-referential discs and the light bulb lemma*，《瑞士数学评论》96（2021年），第3期。[GN25] Daniel Galvin 和 Isacco Nonino，*Pseudo-isotopy versus isotopy for homeomorphisms of 4-manifolds* 2506 11905 2025，arXiv预印本，。（）。[Hat07] Allen Hatcher，*Notes on basic 3-manifold topology*，2007年。[Hat78] A. E. Hatcher，*Concordance spaces，higher simple-homotopy theory，and applications*，《代数与几何拓扑》（1976年于斯坦福大学举行的纯数学专题讨论会论文集），第1部分，1978年，第3–21页。MR520490[Hat81] Allen Hatcher，*On the diffeomorphism group of $S^1 \times S^2$*，《美国数学会会刊》（1981年），427–430。[HW73] Allen Hatcher 和 John Wagoner，*Pseudo-isotopies of compact manifolds*，《Astérisque》第6号，法国数学会，巴黎，。附英文和法文序言。MR Igu Kiyoshi Igusa，，arXiv预印本 .08293（2021年）。[Igu84]，*What happens to Hatcher and Wagoner's formulas for $\pi_0 C(M)$ when the first Postnikov invariant of M is nontrivial?*，《代数 K-理论、数论、几何与分析》（比勒费尔德，1982 1984，104 172 750679），第–页。MR Igu，，*K-理论2*（[88] *The stability theorem for smooth pseudoisotopies* 1988年），第1-2期，vi+355。MR972368[Joh06] Klaus Johannson，*Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*，第761卷，Springer，2006年。[JS79] W. Jaco 和 P. Shalen，*Seifert fibered spaces in 3-manifolds*，《美国数学会回忆录》220（1979年）。[KK] Christian Kremer 和 Alexander Kupers，*in preparation*。[KS93] S ławomir Kwasik 和 Reinhard Schultz，，《杜克数学杂志》（），第–期，MR1240607 [96] *Unitary nilpotent groups and the stability of pseudoisotopies* **71** 1993 3, 871 887 *Pseudo-isotopies of 3-manifolds* **35** 1996 KS，，《拓扑学》（），第2期，363–376。MR1380504[KT24] Danica Kosanović 和 Peter Teichner，*A new approach to light bulb tricks: disks in 4-manifolds*，《杜克数学杂志》173（2024年），第4期，673–721。MR4734552[Liu13] Yi Liu，*Virtual cubulation of nonpositively curved graph manifolds*，《拓扑学杂志》6（2013年），第4期，793–822。[Lue88] John Luecke，*Finite covers of 3-manifolds containing essential tori*，《美国数学会汇刊》310（1988年），第1期，381–391。[LXZ25] Jianfeng Lin、Yi Xie 和 Boyu Zhang，*On the mapping class groups of 4-manifolds with 1-handles*，arXiv预印本，arXiv:2501.11821（2025年）。[OW23] Yuji Ohta 和 Tadayuki Watanabe，*Unstable pseudo-isotopies of spherical 3-manifolds*，arXiv预印本，2303.13877（2023年）。[Ped76] Erik Kjaer Pedersen，*Topological concordances*，《数学发明》38（1976/77年），第3期，255–267。MR436154[PW18] Piotr Przytycki 和 Daniel T Wise，*Mixed 3-manifolds are virtually special*，《美国数学会杂志》31（2018年），第2期，319–347。[Rob74] Helen D. Robinson，*Continuous and differentiable embeddings in the metastable range*，《伦敦数学学会杂志》（ 2 **8** 1974 139 141 362354 ）（），–。MR Ser Jean-Pierre Serre，，[02] *Trees* Springer Science & Business Media，2002年。[Sin25] Oliver Singh，*Pseudo-isotopies and diffeomorphisms of 4-manifolds*，《拓扑学杂志》18（2025年），第4期，e70043。[Wal68] Friedhelm Waldhausen，*On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*，《数学年刊》87（1968年），第1期，56–88。[Wat20] Tadayuki Watanabe，*Theta-graph and diffeomorphisms of some 4-manifolds*，arXiv预印本 arXiv:2005.09545（2020年）。[Wis09] Daniel T Wise，*Research announcement: the structure of groups with a quasiconvex hierarchy*（2009年）。[WJR13] Friedhelm Waldhausen、Bjørn Jahren 和 John Rognes，*Spaces of PL manifolds and categories of simple maps* 186，，《数学年刊研究》第卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2013年。MR3202834

Yau Mathematical Sciences Center, Tsinghua University, Beijing 100084, China
Email address: linjian5477@mail.tsinghua.edu.cn

Beijing International Center for Mathematical Research, Peking University, Beijing 100871,China*Email address*: yixie@pku.edu.cnDepartment of Mathematics, The University of Maryland at College Park, Maryland20742, USA*Email address*: bzh@umd.edu