arXiv:2602.09481v1 [math.FA] 10 Feb 2026

加权狄利克雷空间上加权复合算子的数值域与 Berezin 值域

SOMDATTA BARIK、Anirban Sen 和 KALLOL PAUL

Abstract. 我们研究加权狄利克雷空间上加权复合算子的数值域，重点关注诱导函数的性质。我们确定了这些函数满足何种条件时，原点位于数值域的内部。我们还分析了数值域的几何结构，确定其包含圆盘或椭圆盘的条件，并计算相应的半径。接着，我们引入一类 Weyl 型加权复合算子，并求得其 Berezin 值域和 Berezin 数。最后，我们刻画了这些空间上加权复合算子的 Berezin 值域的凸性。

Contents

1. 引言与预备知识 1
2. $W(C_{\psi,\phi};\mathcal{D}_s)$ 6
3. $W(C_{\psi,\phi};\mathcal{D}_s)$ 9
4. 在 $\mathcal{D}_s$ 上复合算子 Berezin 值域的凸性 12
5. 关于 $\mathcal{D}_s$ 上复合算子 Berezin 值域的凸性 14
声明 18
参考文献 18

1. 引言与预备知识

设 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 为开单位圆盘，$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$为 $\mathbb{C}$. 的单位圆。设 $\mathcal{H}(\mathbb{D})$表示 $\mathbb{D}$. 上所有全纯函数构成的空间。我们用 int(X)表示集合 $X \in \mathbb{C}$. 的内部。对于 $s \in \mathbb{R}$，加权狄利克雷空间 $\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_s(\mathbb{D})$ 定义为

$$\mathcal{D}_s = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{1-s} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

加权狄利克雷空间是加权Hardy空间 $H^2(\beta)$，其对应的权序列为 $\beta(n) = (n+1)^{\frac{1-s}{2}}$. 该框架涵盖了若干经典空间： $\mathcal{D}_1$ 是经典 Hardy-Hilbert空间 $H^2(\mathbb{D})$ $\mathcal{D}_2$ 是经典 Bergman 空间 $A^2(\mathbb{D})$，而 $\mathcal{D}_0$ 与 Dirichlet空间 $\mathcal{D}$. 一致。在本文中，我们主要关注 $0 < s < 1$ 的情形，并将相应的

2020 数学学科分类。主要分类：47A12、47B38；次要分类：47A05、47B33。关键词和短语。 Berezin 值域、数值域、加权复合算子、加权狄利克雷空间。

空间 $\mathcal{D}_s$ 称为加权狄利克雷空间。每个 $\mathcal{D}_s$ 都是一个带有内积的可分希尔伯特空间

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{D}_s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(s)}{\Gamma(n+s)} a_n \bar{b}_n,$$

其中 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 和 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. 空间 $\mathcal{D}_s$ 具有一组标准正交基 $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ 由下式给出 $e_n(z) = \sqrt{\frac{\Gamma(n+s)}{\Gamma(n+1)\Gamma(s)}} z^n$. 此外，这些空间是具有完全 Nevanlinna-Pick 核的再生核希尔伯特空间。在这种情况下，我们也称该空间为完全 Nevanlinna-Pick 空间（见 [1]）。在 $w \in \mathbb{D}$ 处的再生核由下式给出

$$k_w^s(z) = \frac{1}{(1-\bar{w}z)^s}, \ z \in \mathbb{D}. \tag{1.1}$$

$w \in \mathbb{D}$ 处的归一化再生核由下式给出

$$\hat{k}_w^s(z) = \frac{(1-|w|^2)^{\frac{s}{2}}}{(1-\bar{w}z)^s}, \ z \in \mathbb{D}. \tag{1.2}$$

关于加权 Dirichlet空间的更多信息，请参见 [8, 16]。

设 $\mathcal{B}(\mathcal{D}_s)$ 表示 $\mathcal{D}_s$. 上所有有界线性算子的空间。 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{D}_s)$ 的数值域记作 $W(T; \mathcal{D}_s)$，并定义为

$$W(T; \mathcal{D}_s) = \{\langle Tf, f\rangle_{\mathcal{D}_s} : f \in \mathcal{D}_s, \|f\|_{\mathcal{D}_s} = 1\}.$$

T在 $\mathcal{D}_s$ 上的数值半径记为 $w(T; \mathcal{D}_s)$，定义为

$$w(T; \mathcal{D}_s) = \sup\{|\langle Tf, f\rangle_{\mathcal{D}_s}| : f \in \mathcal{D}_s, \|f\|_{\mathcal{D}_s} = 1\}.$$

注意， $W(T; \mathcal{D}_s)$是 $\mathbb{C}$. 的有界凸子集。关于数值域和数值半径的更多细节，请参阅 [20]。

对于 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{D}_s)$， T ([3, 4])的 Berezin 变换是函数 $\widetilde{T}: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$，定义为

$$\widetilde{T}(z) = \langle T\hat{k}_z^s, \hat{k}_z^s\rangle_{\mathcal{D}_s}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

众所周知，Berezin 变换是 $\mathbb{D}$上的一一、有界实解析函数，参见 [4]。算子的若干性质由其 Berezin 变换决定。特别地，Berezin 变换唯一确定该算子，而算子的可逆性同样由其 Berezin 变换决定，参见 [13, 21]。关于 Berezin 变换理论的各个方面，可参阅 [6, 9, 22]。

T ([12, 13])的 Berezin 值域和 Berezin 半径分别记为$\mathbf{Ber}(T)$和$\mathbf{ber}(T)$，定义如下：

$$\mathbf{Ber}(T; \mathcal{D}_s) = \{\widetilde{T}(z) : z \in \mathbb{D}\} \text{ and } \mathbf{ber}(T; \mathcal{D}_s) = \sup_{z\in\mathbb{D}} |\widetilde{T}(z)|.$$

由定义可立即得出，Berezin 值域包含于该算子的数值域中。

对于 $\psi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ 和 $\mathbb{D}$ 上的 ϕ ，加权复合算子 $C_{\psi,\,\phi}$ 在 $\mathcal{H}(\mathbb{D})$上的定义为

$$C_{\psi,\phi} f = \psi f \circ \phi, \ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}).$$

特别地，当 $\psi \equiv 1$ 时，$C_{\psi,\,\phi}$ 就变为复合算子 C_{ϕ}. 。值得注意的是，关于加权狄利克雷空间上加权复合算子的有界性和紧性的研究见 [17, 23]。本文的分析仅限于 $\mathcal{D}_s$ 上的加权复合算子，其中 $s \in (0,1)$。

有了这些记号，我们现在概述一下我们的主要结果。受 [5, 11] 以及 [18]，中近期工作的启发，我们开始研究加权复合算子 $C_{\psi,\,\phi}$ 在 $\mathcal{D}_s$，特别关注原点是否属于 $W(C_{\psi,\,\phi};\ \mathcal{D}_s)$。尽管一般而言 $0 \notin W(C_{\psi,\,\phi};\ \mathcal{D}_s)$，我们证明，在对符号 ϕ 和 ψ. 施加适当假设后，这一情况会发生变化。下面的定理给出我们的第一个结果。

定理 1.1。设 ϕ 是 $\mathbb{D}$ 的全纯自映射，且 $\psi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ 满足$C_{\psi,\,\phi} \in \mathcal{B}(\mathcal{D}_s)$。

(i) 若 ϕ 是 $\mathbb{D}$ 上的恒等映射，且 ψ 在 $\mathbb{D}$ 中有零点，则 $0 \in W(C_{\psi,\,\phi};\ \mathcal{D}_s)$。$(ii)$ 若 ϕ 是 $\mathbb{D}$ 上的恒等映射，且 ψ 连续并在某点 $z_0 \in \mathbb{T}$ 处为零，则 $0 \in W(C_{\psi,\,\phi};\ \mathcal{D}_s)$。$(iii)$ 若 ϕ 在 $\mathbb{D}$ 上不是恒等映射，则 $0 \in W(C_{\psi,\,\phi};\ \mathcal{D}_s)$。

接下来，我们讨论加权复合算子的零点包含问题：当符号函数 ϕ 固定原点，但既不是旋转也不是伸缩时。下述定理对这一情形给出了完整的答案。

定理 1.2。设 $C_{\psi,\,\phi} \in \mathcal{B}(\mathcal{D}_s)$ 且 $\phi(0) = 0$. 除非 ϕ 具有特殊形式 $\phi(z) = \lambda z$，其中 $\lambda \in \mathbb{D}$，否则原点属于$C_{\psi,\,\phi}$ 在 $\mathcal{D}_s$上的数值域内部。

相反，当 $\phi(z) = \lambda z,\ \ \lambda \in [-1,0]$ 时，对于某些 ψ、$0 \in W(C_{\psi,\,\phi};\ \mathcal{D}_s)$。下文将讨论这种情形。

定理 1.3。设 $C_{\psi,\,\phi} \in \mathcal{B}(\mathcal{D}_s)$，且 ψ 非常数。若 $\phi(z) = \lambda z,\ \ \lambda \in [-1,0]$，则原点属于$C_{\psi,\,\phi}$ 在 $\mathcal{D}_s$上的数值域内部。

现在进入工作的下一阶段，重点研究 $\mathcal{D}_s$ 上加权复合算子数值域的几何刻画。了解数值域是否包含圆盘或椭圆盘尤其有用，因为这将导出显式的数值半径界。在这方面，我们确定圆盘的半径，或长轴和短轴的长度。我们的第一个结果如下。

定理 1.4. 设 $C_{\psi,\phi} \in \mathcal{B}(\mathcal{D}_s)$，其中 $\phi(0) = 0$，且 ψ 在原点处以正阶 r. 消失。若 b_r 表示 ψ 的 r 阶泰勒系数，则 $W(C_{\psi,\phi};\ \mathcal{D}_s)$ 包含一个以原点为中心、半径为 $\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)+\Gamma(r+1)\Gamma(s)}|b_r|$. 的圆盘。

对于 ϕ 的特定取值并满足适当的附加条件时，我们证明数值域 $W(C_{\psi,\,\phi};\ \mathcal{D}_s)$ 包含一个圆盘。相应结果如下：

定理 1.5. 假设 $C_{\psi,\phi} \in \mathcal{B}(\mathcal{D}_s)$ 满足 $\phi(z) = \mu z,\ \mu \neq 0$ 且 $\psi(z) = \sum_{n=\infty} b_n z^n$. 那么对于每个整数 $r \geq 2$, $W(C_{\psi,\phi};\ \mathcal{D}_s)$ 都包含一个以$n=1$原点为中心、半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Gamma}{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)\ \Gamma(r+s)}|\mu b_{r-1}|}$. 的圆盘

定理 1.6. 设 $C_{\psi,\phi} \in \mathcal{B}(\mathcal{D}_s)$，其中 $\phi(z) = \mu z$, 且 $\mu = e^{i\frac{2\pi}{m}}$ 和$\infty\psi(z) = \sum b_n z^n$. 。令 $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}^+$ 满足 $r_1 < r_2$. 。若 $b_{mr_1} b_{mr_2} b_{m(r_1-r_2)} = 0$，且$n=0$至少有一个系数 $b_{mr_1}, b_{mr_2}, b_{m(r_1-r_2)}$ 非零，则 $W(C_{\psi,\phi};\ \mathcal{D}_s)$ 包含一个以 b_0 为圆心、半径为

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Gamma(mr_1+1)\Gamma(s)}{\Gamma(mr_1+s)}|b_{mr_1}|^2 + \frac{\Gamma(mr_2+1)\Gamma(s)}{\Gamma(mr_2+s)}|b_{mr_2}|^2 + \frac{\Gamma(mr_1+s)\Gamma(mr_2+1)}{\Gamma(mr_1+1)\Gamma(mr_2+s)}|b_{m(r_2-r_1)}|^2}.$$

此外，我们证明，在适当的假设下，数值域$W(C_{\psi,\phi};\ \mathcal{D}_s)$ 包含一个椭圆区域。结果的详细表述如下。

定理 1.7. 设 $C_{\psi,\phi} \in \mathcal{B}(\mathcal{D}_s)$，其中 $\phi(z) = \mu z$, 且 $\mu = e^{i\frac{2\pi}{m}}$ 和$\infty\psi(z) = \sum b_n z^n$，其中 $b_{mr+k} \neq 0$ 对某个 $k \in (0, m)$. 则 $W(C_{\psi,\phi};\ \mathcal{D}_s)$ 包含焦点为点 b_0、$b_0 e^{i\frac{2\pi(mr+k)}{m}}$ 的椭圆，其长轴长度为 $\sqrt{\Gamma(mr+k+1)\Gamma(s)\Gamma(mr+k+s)}$ $|b_{mr+k}|^2 + |b_0|^2|1 - e^{i\frac{2\pi(mr+k)}{m}}|^2$，短轴长度为

$$\sqrt{\frac{\Gamma(mr+k+1)\Gamma(s)}{\Gamma(mr+k+s)}}|b_{mr+k}|.$$

定理 1.8。假设 $C_{\psi,\phi} \in \mathcal{B}(\mathcal{D}_s)$，其中 $\phi(z) = \mu z$, 且 $\mu = e^{i2\pi\phi}$, ϕ 是无理数，且 $\psi(z) = \sum b_n z^n$. 令 $p \geq 0$ 和 $q > 0$. 。则 $W(C_{\psi,\phi};\ \mathcal{D}_s)$ 包含焦点位于 $b_0 e^{i2\pi p\phi}$、$b_0 e^{i2\pi(p+q)\phi}$ 的椭圆，其长轴长度为

短轴长度为 $\sqrt{\frac{\Gamma}{\Gamma(p+q+1)\Gamma(p+s)}\sqrt{|b_0|^2|e^{i2\pi p\phi} - e^{i2\pi(p+q)\phi}|^2 + \frac{\Gamma(p+q+1)\Gamma(p+s)}{\Gamma(p+q+s)\Gamma(p+1)}|b_q|^2}}$。

接下来，我们通过引入一类特殊的 $\mathcal{D}_s$, 上的加权复合算子来展开分析，记作 $C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,\alpha}}$，称为 Weyl 型加权复合算子。此前，我们考察了原点是否属于数值域。由于 Berezin 值域始终包含于数值域中，自然会引出一个问题：原点是否属于 Berezin 值域? 我们对 Weyl 型算子的研究得到以下结果。

Theo注 1.9. 对于作用在 $\mathcal{D}_s$ 上的 Weyl 型加权复合算子 $C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,\alpha}}$ ，

$$0 \in \overline{\mathbf{Ber}(C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,\alpha}};\mathcal{D}_s)} \setminus \mathbf{Ber}(C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,\alpha}};\mathcal{D}_s),$$

当且仅当 $(\alpha,\gamma) \neq (1,0)$。

对于 α, 的适当取值，我们确定了$C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,\alpha}}$ 在$\mathcal{D}_s$,上的精确 Berezin 值域，其描述如下。

定理 1.10.对于$C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,-1}}$ 在$\mathcal{D}_s$, **Berezin 值域** $\left(C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,-1}};\ \mathcal{D}_s\right) = (0,1]$.

此外，对于参数 α,的另一种取值，我们得到 $(C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,\alpha}})$ 在 $\mathcal{D}_s$. 上的 Berezin 半径

定理 1.11.对于$C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,1}}$ 在$\mathcal{D}_s$, **Berezin 半径** $\left(C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,1}};\ \mathcal{D}_s\right) = (1-|\gamma|^2)^{\frac{s}{2}}$.

此外，我们计算了$\mathcal{X}_\gamma = C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,1}} + C_{\hat{k}^s_{-\gamma},\phi_{-\gamma,1}}$, 的 Berezin 半径，并证明 $\mathcal{X}_\gamma$ 满足 Berezin 半径的反向幂不等式。

本文最后一部分致力于研究 Berezin 值域的凸性。凸性是有界算子数值域的一项经典且基本的性质，因此自然会引出这样一个问题：Berezin 值域是否也具有类似性质？近期， [7], 作者刻画了 Hardy-Hilbert空间上一类复合算子的凸性，随后又在 Bergman 空间和加权 Bergman 空间中对此进行了探讨 [2, 19]。本文进一步研究加权狄利克雷空间中的这一问题 $\mathcal{D}_s$ ，并在若干重要情形下给出刻画。对于$\phi_{0,\ \xi}(z) = \xi z$，我们有如下结果。

定理 1.12. 设 $C_{\phi_{0,\ \xi}} \in \mathcal{B}(\mathcal{D}_s)$，其中 $\phi_{0,\ \xi}(z) = \xi z$，$\xi \in \mathbb{D}$ 且 $z \in \overline{\mathbb{D}}$.那么，当且仅当 $\xi \in [-1,1]$.时，$\mathbf{Ber}(C_{\phi_{0,\ \xi}};\ \mathcal{D}_s)$ 是凸的。

接下来考虑 Blaschke 因子 $\phi_{\gamma,\ 1} = \frac{z-\gamma}{1-\bar{\gamma}z}$ 其中γ， $z \in \mathbb{D}$， 由此得到以下结果。

定理 1.13。 设 $C_{\phi_{\gamma,\ 1}} \in \mathcal{B}(\mathcal{D}_s)$。 则 $\mathbf{Ber}(C_{\phi_{\gamma,\ 1}};\mathcal{D}_s)$ 是凸的，当且仅当$\gamma = 0$。

本文结构如下。第 2 节中，我们证明定理 1.1、定理 1.2 和定理 1.3，讨论 $C_{\psi,\phi}$ 的数值域包含零的情形，并给出示例说明其适用性。第 3 节中，我们证明定理 1.4、定理 1.5 和定理 1.6，说明 $C_{\psi,\phi}$ 的数值域包含一个圆盘。我们还证明定理 1.7 和定理 1.8，讨论 $C_{\psi,\phi}$ 在 $\mathcal{D}_s$ 上的数值域包含一个椭圆盘的情形，并给出相关示例。第 4 节中，我们给出定理 1.9、定理 1.10 和定理 1.11 的证明，研究 $\mathcal{D}_s$ 上 Weyl 型加权复合算子的 Berezin 值域和 Berezin 半径，并得到一类满足 Berezin 数反向幂不等式的算子。本文最后以第 5 节收尾，其中给出定理 1.12 和定理 1.13 的证明，并讨论关于 $\mathcal{D}_s$. 上复合算子的 Berezin 值域凸性的相关结果

2. Containment of zero in $W(C_{\psi,\phi};\ \mathcal{D}_s)$

本节讨论 $C_{\psi,\phi}$ 在 $\mathcal{D}_s$. 上的数值域包含零的情形。为证明定理 1.1，我们先回顾径向极限的定义。若函数 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ 的 $\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ 几乎处处在 $\mathbb{T}$. 存在，则称该函数存在径向极限。文献 [8, Th. 2.2] 证明，对于每个 $f \in H^2(\mathbb{D})$，都存在一个函数 $f^* \in L^2(\mathbb{T})$，其几乎处处由 $f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ 定义。此外，若 $f^*(e^{i\theta}) = 0$ 对某个弧 $I \subseteq \mathbb{T}$ 上几乎所有 $e^{i\theta}$ 都成立，则 $f(z) = 0$ 对所有 $z \in \mathbb{D}$. 都成立。现在我们来证明本节的第一个结果。

定理的证明 *1.1*。 由于 $C_{\psi,\ \phi}$ 在 $\mathcal{D}_s$上有界，直接应用核函数的再生性质可得 $C^*_{\psi,\ \phi}k^s_z = \overline{\psi(z)}k^s_{\phi(z)}$. 因此，对任意 $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned}\langle C_{\psi,\phi}\hat{k}^s_z, \hat{k}^s_z\rangle_{\mathcal{D}_s} &= \frac{1}{\|k^s_z\|^2_{\mathcal{D}_s}}\langle k^s_z, C^*_{\psi,\phi}k^s_z\rangle_{\mathcal{D}_s}\\ &= \frac{1}{\|k^s_z\|^2_{\mathcal{D}_s}}\langle k^s_z, \overline{\psi(z)}k^s_{\phi(z)}\rangle_{\mathcal{D}_s}\\ &= \psi(z)\left(\frac{1-|z|^2}{1-\bar{z}\phi(z)}\right)^s. \qquad (2.1)\end{aligned}$$

(*i*) 设 ϕ 为 $\mathbb{D}$. 上的恒等映射。则由（2.1）可得 $\langle C_{\psi,\ \phi}k^s_z,\ k^s_z\rangle_{\mathcal{D}_s} = \psi(z)$。因此，若存在 $z_0 \in \mathbb{D}$ 使得 $\psi(z_0) = 0$，则 $\langle C_{\psi,\ \phi}k^s_{z_0},\ k^s_{z_0}\rangle_{\mathcal{D}_s} = 0$.于是，$0 \in W(C_{\psi,\ \phi};\ \mathcal{D}_s)$。

(*ii*) 若 ψ 在 $z_0 \in \mathbb{T}$ 处连续，且 $\psi(z_0) = 0$，则 $\lim_{z\to z_0}\langle C_{\psi,\ \phi}k^s_z,\ k^s_z\rangle_{\mathcal{D}_s} = 0$. 这意味着 $0 \in W(C_{\psi,\ \phi};\ \mathcal{D}_s)$。

(*iii*) 假设 ϕ 不是 $\mathbb{D}$上的恒等映射。那么存在 $z_0 \in \mathbb{T}$ 使得$\phi^*(z_0) \neq z_0$. 由闭图定理可知，$\psi \in \mathcal{D}_s \subseteq H^2(\mathbb{D})$。因此，径向极限 $\psi^*(z_0)$ 存在。由（2.1），$\lim_{z\to z_0}\langle C_{\psi,\ \phi}k^s_z,\ k^s_z\rangle_{\mathcal{D}_s} = 0$. 因此，我们得到 $0 \in W(C_{\psi,\ \phi};\ \mathcal{D}_s)$。 □

如果我们将 ϕ 视为 $\mathbb{D}$ 上的常值自映射，且满足 $\phi \equiv v$ 那么对于任意$g \in \mathcal{D}_s$ $C_{\psi,\ \phi}(g) = \psi\langle g,\ k^s_v\rangle_{\mathcal{D}_s}$. 因此$C_{\psi,\ \phi}$ 是一个秩一算子。利用 [5,命题 2。5], 我们得到以下命题。

命题 2.1。 设 ϕ 是 $\mathbb{D}$ 的常值自映射，使得 $\phi \equiv v$.(*i*)。若对某个 $t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ 有 $k^s_v = t\psi$，则 $W(C_{\psi,\ \phi};\ \mathcal{D}_s)$ 是从 0 到 $\bar{t}\|\psi\|^2_{\mathcal{D}_s}$.(*ii*) 的闭线段。若 $k^s_v \perp \psi$，则 $W(C_{\psi,\ \phi};\ \mathcal{D}_s)$ 是以原点为圆心、半径为 $\|\psi\|_{\mathcal{D}_s}2(1-|v|^2)^{s/2}$.(*iii*) 的闭圆盘。否则，$W(C_{\psi,\ \phi};\ \mathcal{D}_s)$ 是焦点为 0 和 $\psi(v)$ 的闭椭圆盘。

我们的下一个结果依赖于以下引理，它是由 [15,定理 2.6 和定理 2.9]推出的。

引理 2.2。 假设 $C_{\psi,\phi} \in \mathcal{B}(\mathcal{D}_s)$ 非零，且 ψ 是 单位圆盘上的非常值自映射。如果 ϕ 不是单叶的，或者 ψ 在 $\mathbb{D}$ 上有零点，那么原点属于$C_{\psi,\phi}$ 在 $\mathcal{D}_s$上的数值域内部。

现在我们可以证明定理1.2。

定理*1.2*的证明。假设 $\phi'(0) \neq 0$. 对于 $\phi'(0) = 0$, 引理 2.2 保证原点是 $C_{\psi,\phi}$ 在 $\mathcal{D}_s$ 上的数值域的内部。设 ϕ 不是形如 $\phi(z) = \lambda z$ 且满足 $\lambda \in \mathbb{D}$. 的形式。那么

$$\phi(z) = \phi'(0)z\left(1 + az^p\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k\right)\right),$$

其中 $a \neq 0$ 和 $p \in \mathbb{N}$。因此，对于每个 $r \in \mathbb{N}$,

$$(\phi(z))^r = (\phi'(0))^r z^r + ra(\phi'(0))^r z^{r+p} + \text{terms of higher order in } z.$$

相对于标准正交基 $\left\{\sqrt{\frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r+1)\Gamma(s)}}z^r\right\}_{r=0}^{\infty}$ 的矩阵，其第 r 列为 $\sqrt{\frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r+1)\Gamma(s)}}\psi\phi^r$. 的幂级数系数序列。考虑二维子空间

$$P_r = span\left\{\sqrt{\frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r+1)\Gamma(s)}}z^r, \sqrt{\frac{\Gamma(r+p+s)}{\Gamma(r+p+1)\Gamma(s)}}z^{r+p}\right\}.$$

设 $\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. 则 $C_{\psi,\phi}$ 在 P_r 上关于基 $\left\{\sqrt{\frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r+1)\Gamma(s)}}z^r, \sqrt{\frac{\Gamma(r+p+s)}{\Gamma(r+p+1)\Gamma(s)}}z^{r+p}\right\}$ 由下式的矩阵表示

给出

$$\begin{bmatrix} b_0(\phi'(0))^r & 0 \\ \sqrt{\frac{\Gamma(r+p+1)\Gamma(r+s)}{\Gamma(r+1)\Gamma(r+p+s)}}(b_p + rab_0)(\phi'(0))^r & b_0(\phi'(0))^{r+p} \end{bmatrix} = (\phi'(0))^r M_r,$$

其中

$$M_r = \begin{bmatrix} b_0 & 0 \\ \sqrt{\frac{\Gamma(r+p+1)\Gamma(r+s)}{\Gamma(r+1)\Gamma(r+p+s)}}(b_p + rab_0) & b_0(\phi'(0))^p \end{bmatrix}.$$

鉴于压缩的数值域包含性质，尚需证明对某个 r. 有 $0 \in \text{int } W(M_r; P_r)$。对于 $b_0 = 0,$引理 2.2 蕴含$0 \in \text{int } W(M_r; P_r)$。设 $b_0 \neq 0$. 则 $W(M_r; P_r)$ 是一个椭圆盘，焦点位于点 b_0与 $b_0(\phi'(0))^p$，短轴长度为 $\sqrt{\frac{\Gamma(r+p+1)\Gamma(r+s)}{\Gamma(r+1)\Gamma(r+p+s)}}|b_p + rab_0|$.通过简单计算，我们得到

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\Gamma(r+p+1)\Gamma(r+s)}{\Gamma(r+1)\Gamma(r+p+s)} = 1.$$

通过选择足够大的 r， $W(M_r; P_r)$的短轴长度大于其中心的模。因此，存在 r 使得 $0 \in int\ W(M_r; P_r)$. □

在上述讨论的基础上，我们证明定理 1.3。

定理 1.3 的证明。设 $\psi(0) = 0$. 引理 2.2 表明，在 $\lambda \in [-1, 0)$ 的情形下，原点属于，ϕ 在 $\mathcal{D}_s$ 上的数值域的内部。其余情形由命题 2.1 得出。现在设 $\psi(0) \neq 0$. 不失一般性，假设 $\psi(z) = 1 + \zeta(z)$，其中 ζ是一个非恒定解析函数，满足 $\zeta(0) = 0$. 显然，$C_{\zeta,\,\phi}$ 在 $\mathcal{D}_s$. 上有界。注意，

$$\langle C_{\psi,\phi} g, g\rangle_{\mathcal{D}_s} = \langle C_\phi g, g\rangle_{\mathcal{D}_s} + \langle C_{\zeta,\phi} g, g\rangle_{\mathcal{D}_s},\ g \in \mathcal{D}_s \text{ with } \|g\|_{\mathcal{D}_s} = 1 \text{ and } \langle C_\phi g, g\rangle_{\mathcal{D}_s} \in \mathbb{R}.$$

引理 2.2 表明，$W(C_{\zeta,\,\phi};\ \mathcal{D}_s)$ 包含一个以原点为中心的圆盘，其中 $\lambda \notin [-1, 0)$。因此，存在 $h \in \mathcal{D}_s$，使得 $\|h\|_{\mathcal{D}_s} = 1$，从而 $Im\,\langle C_{\zeta,\,\phi} h,\ h\rangle_{\mathcal{D}_s} > 0$。因此，$k_1 = \langle C_{\psi,\,\phi} h,\ h\rangle_{\mathcal{D}_s}$ 位于上半平面。通过类似的论证，我们得到下半平面中的另一个点 k_2。此外，我们有$\langle C_{\psi,\,\phi} e_1,\ e_1\rangle_{\mathcal{D}_s} = \lambda$ 以及 $\langle C_{\psi,\,\phi} e_0,\ e_0\rangle_{\mathcal{D}_s} = 1$. 因此，我们得到

$$0 \in \text{int } (span\{1, \lambda, k_1, k_2\}) \subseteq \text{int } W(C_{\psi,\phi}; \mathcal{D}_s).$$

对于 $\lambda = 0$，结论可直接由命题 2.1得到。 □

还需考察 $\phi(z) = \lambda z$，其中 $\lambda \in (0, 1]$。在这种情况下，无法得出确定的结论，因为零可能位于数值域的内部，也可能不在$C_{\psi,\,\phi}$中。下面将讨论不同的情形。

(*i*) 若 ψ 为常数且 $\phi(z) = \lambda z,\ \ \lambda \in [-1, 1]$ 则 $W(C_{\psi,\,\phi};\ \mathcal{D}_s)$ 是 $\mathbb{C}$ 的一条线段，因此 0 不属于 $W(C_{\psi,\,\phi};\ \mathcal{D}_s)$ 的内部。
(*ii*) 若 ψ 不是常数，且 $\psi(0) = 0$ 并且 $\phi(z) = \lambda z,\ \ \lambda \in (0,\ 1)$，则由引理 2.2 可知，0 属于 $W(C_{\psi,\,\phi};\ \mathcal{D}_s)$ 的内部。
(*iii*) 若 ψ 不是常数，且 $\psi(0) \neq 0$ 并且 $\phi(z) = \lambda z,\ \ \lambda \in (0,\ 1)$，则出现以下两种情况:

Case 1：设对于某个 $z_0 \in \mathbb{D}.$，$\psi(0) \neq 0$ 且 $\psi(z_0) = 0$。由引理2.2 可知，0 属于 $W(C_{\psi,\,\phi};\ \mathcal{D}_s)$ 的内部。
Case 2：还需考虑对每个 $z \in \mathbb{D},\ \ \psi(z) \neq 0$ 的情形。下面给出一个例子，说明在这一假设下，一般无法得到所期望的结论。

例 2.3。考虑 $\psi(z) = 1 + \frac{z}{8}$ 以及 $\phi(z) = \frac{z}{4}$. 令 $g \in \mathcal{D}_s$ 满足 $\|g\|_{\mathcal{D}_s} = 1$∞且 $g(z) = \sum a_n z^n$. 则 $\langle C_{\psi,\,\phi} g,\ g\rangle_{\mathcal{D}_s} = \eta + \frac{1}{8}\zeta$，其中$_{n=0}$

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(s)}{4^n \Gamma(n+s)} |a_n|^2 \text{ and } \zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(s)}{4^n \Gamma(n+s+1)} a_n \overline{a_{n+1}}.$$

由于 $\eta > 0$，容易观察到 $|\zeta| \leq \frac{5}{2}\eta$.因此，$\eta + \frac{1}{8}\zeta \neq 0$，从而 $0 \notin W(C_{\psi,\,\phi};\ \mathcal{D}_s)$。

众所周知，如果 0 属于紧算子的数值域，则其数值域是闭的。结合这一观察与前面的结果，我们得到了加权复合算子在 $\mathcal{D}_s$.上为紧算子时其数值域闭合的充分条件

推论 2.4。假设 $C_{\psi,\,\phi}$ 在 $\mathcal{D}_s$. 上是紧算子，则当满足以下任一条件时，$W(C_{\psi,\,\phi};\ \mathcal{D}_s)$ 是闭的:
(*i*) $\phi(0) = 0$ 且 ϕ 不能写成 $\phi(z) = \lambda z$，其中 $\lambda \in \mathbb{D}.$

(ii) ψ 不是常数，且 $\phi(z) = \lambda z$, $\lambda \in (-1, 0]$.(iii) ψ 非零，并且满足以下条件之一：ψ 在 $\mathbb{D}$ 中有零点，或 ϕ 不是单叶的。

现在我们给出一些例子，以展示上述结果的适用性。

例 2.5. (i) 令 $\phi(z)= \frac{3z}{4-z}$ 和 $\psi(z) = e^z$。由 [17, 定理 1.2], 容易看出，$C_{\psi,\phi}$ 在 $\mathcal{D}_s$. 上是紧的。因此，根据定理 1.2，0 位于 $W(C_{\psi,\phi}; \mathcal{D}_s)$ 的内部，而推论 2.4 保证 $W(C_{\psi,\phi}; \mathcal{D}_s)$ 是闭集。(ii) 令 $\phi(z) = \lambda z$, $\lambda \in (-1, 0]$ 和 $\psi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$，其中 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ 满足$ad - bc \neq 0$，是 $\mathbb{D}$. 的自映射。由 [17, 定理 1.2], 可得，$C_{\psi,\phi}$ 在 $\mathcal{D}_s$. 上是紧的。因此，定理 1.2 意味着 0 是$W(C_{\psi,\phi}; \mathcal{D}_s)$ 的内部点，而推论 2.4 则保证该集合是闭集。

(iii) 令 $\phi(z) = \lambda z$, $\lambda \in (-1, 0]$ 且 $\psi(z) = e^{z-1}$. 于是由 [17, 定理 1。2], $C_{\psi,\phi}$ 在 $\mathcal{D}_s$. 上是紧的因此，由定理 1.3可知，0 属于 $W(C_{\psi,\phi}; \mathcal{D}_s)$ 的内部，而推论 2.4 保证 $W(C_{\psi,\phi}; \mathcal{D}_s)$ 是闭集。

3. Containment of circle or ellipse in $W(C_{\psi,\phi}; \mathcal{D}_s)$

本节旨在研究 $\mathcal{D}_s$. 上加权复合算子数值域的几何刻画。我们首先证明定理 1.4，该定理保证圆盘包含于 $W(C_{\psi,\phi}; \mathcal{D}_s)$。

定理 *1.4*的证明。设 $g(z) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}}}$ $\cancel{(\mu + z^r)\ \forall z} \in \mathbb{D}$ 其中 $\mu \in \mathbb{T}$.

于是 $g \in \mathcal{D}_s$ 且 $\|g\|_{\mathcal{D}_s} = 1$. 令 $\phi(z) = \sum_{n=r}^{\infty} a_n z^n$ 且 $\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$. 于是

$$
\begin{aligned}
C_{\psi,\phi}(g) &= \psi(z) g(\phi(z)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}}} \left(\sum_{n=r}^{\infty} b_n z^n\right) \left(\mu + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right)^r\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}}} \left(\sum_{n=r}^{\infty} b_n z^n\right) (\mu + a_1^r z^r + \text{higher order terms in } z).
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
&\langle C_{\psi,\phi} g, g\rangle_{\mathcal{D}_s} \\
&= \frac{1}{1+\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}} \left\langle \left(\sum_{n=r}^{\infty} b_n z^n\right) (\mu + a_1^r z^r + \text{higher order terms in } z), \mu + z^r \right\rangle_{\mathcal{D}_s} \\
&= \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)+\Gamma(r+1)\Gamma(s)} \mu b_r.
\end{aligned}
$$

由于 $\mu \in \mathbb{T}$ 是任意的，$W(C_{\psi,\phi}, \mathcal{D}_s)$ 包含以原点为圆心、半径为$\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)+\Gamma(r+1)\Gamma(s)}|b_r|$. □

接下来，我们给出定理1.5和定理1.6的证明。该证明表明，对于特定的 ϕ 取值并在适当的附加假设下，$W(C_{\psi,\phi}; \mathcal{D}_s)$ 包含一个圆盘。

定理 *1.5*的证明。令 $P_r =$ 张成空间$\{e_1, e_r\}$, $r \geq 2$. 现在,

$$C_{\psi,\phi}e_1(z) = \mu\sqrt{s}\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{n+1}$$

and

$$C_{\psi,\phi}e_r(z) = \mu^r\sqrt{\frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r+1)\Gamma(s)}}\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{n+r}.$$

因此 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma\, r+s}}\mu b_{r-1} & 0 \end{bmatrix}$ 是$C_{\psi,\ \phi}$ 到 P_r. 因此, $C_{\psi,\ \phi}$ 到 P_r 的压缩的数值域是以原点为圆心、半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{\Gamma_{(r+1)\Gamma(s+1)\,\Gamma(r+s)}}|\mu b_{r-1}|$. 由于压缩的数值域包含于算子的数值域，因此 $W(C_{\psi,\ \phi};\ \mathcal{D}_s)$包含以原点为圆心、半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{\Gamma_{(r+1)\Gamma(s+1)\,\Gamma(r+s)}}|\mu b_{r-1}|$.

□

现在我们给出一个例子，以说明上述定理的适用性。

例 3.1. 设 $\psi(z) = \frac{\alpha z}{1-\beta z}$, $\alpha \neq 0$, 是$\mathbb{D}$上的全纯自映射，且 $\phi(z) = \mu z$, $|\mu| \leq 1, \mu \neq 0$. 那么 $|\beta| < 1$ 且 $|\alpha| \leq 1 - |\beta|$. 由 [17,定理 1.1], , 我们有 $C_{\psi,\phi} \in \mathcal{B}(\mathcal{D}_s)$。由定理 1.5 可知，对每个整数 $r \geq 2$, $W(C_{\psi,\phi};\ \mathcal{D}_s)$包含以原点为圆心、半径为$\frac{1}{2}\sqrt{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)\,\Gamma(r+s)}|\mu\alpha\beta^{r-2}|$. 现在, 函数 $f(r) = \frac{1}{2}\sqrt{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)\,\Gamma(r+s)}|\mu\alpha\beta^{r-2}|$ 在 $r \geq 2$.时递减。因此, $w(C_{\psi,\phi};\ \mathcal{D}_s) \geq f(2) = \frac{1}{\sqrt{2(s+1)}}|\mu\alpha|$.

定理 *1.6* 的证明。设 $P =$ 张成空间 $\{e_0, e_{mr_1}, e_{mr_2}\}$. 那么

$$C_{\psi,\phi}e_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

$$C_{\psi,\phi}e_{mr_1}(z) = \sqrt{\frac{\Gamma(mr_1+s)}{\Gamma(mr_1+1)\Gamma(s)}}\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n+mr_1}$$

and

$$C_{\psi,\phi}e_{mr_2}(z) = \sqrt{\frac{\Gamma(mr_2+s)}{\Gamma(mr_2+1)\Gamma(s)}}\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n+mr_2}.$$

因此, $C_{\psi,\ \phi}$ 在 P 上的矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{\Gamma(mr_1+1)\Gamma(s)}{\Gamma(mr_1+s)}}b_{mr_1} & b_0 & 0 \\ \sqrt{\frac{\Gamma(mr_2+1)\Gamma(s)}{\Gamma(mr_2+s)}}b_{mr_2} & \sqrt{\frac{\Gamma(mr_1+s)\Gamma(mr_2+1)}{\Gamma(mr_1+1)\Gamma(mr_2+s)}}b_{m(r_2-r_1)} & b_0 \end{bmatrix}.$$

Let $b_{mr_1}\ b_{mr_2}\ b_{m(r_2-r_1)} =$ we obtain the coefficients that b_{mr_1}, b_{mr_2}, $b_{m(r_1-r_2)}$非零。因此，由 [14, 定理 4.1]可知，$C_{\psi,\ \phi}$ 在 P 上的压缩的数值域是以 b_0 为圆心、半径为 的圆盘 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Gamma(mr_1+1)\Gamma(s)\,\Gamma(mr_1+s)}{}}|b_{mr_1}|^2 + \frac{\Gamma}{(mr_2+1)\Gamma(s)\,\Gamma(mr_2+s)}|b_{mr_2}|^2 + \frac{\Gamma}{(mr_1+s)\Gamma(mr_2+1)\,\Gamma(mr_1+1)\Gamma(mr_2+s)}|b_{m(r_2-r_1)}|^2$. 由于

压缩的数值域包含于该算子的数值域中，因此所需结果成立。□

此外，我们给出定理 1.7 和1.8的证明，证明在适当的假设下，数值域 $W(C_{\psi,\phi};\mathcal{D}_s)$ 包含一个椭圆区域。

定理 *1.7* 的证明。 设 $P=$ 张成空间 $\{e_0,e_{mr+k}\}$. 那么

$$C_{\psi,\phi}e_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$$

and

$$C_{\psi,\phi}e_{mr+k}(z)=e^{i\frac{2\pi(mr+k)}{m}}\sqrt{\frac{\Gamma(mr+k+s)}{\Gamma(mr+k+1)\Gamma(s)}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^{mr+k+n}.$$

那么，$C_{\psi,\phi}$ 在 P 上的矩阵表示为 $\begin{bmatrix}b_0 & 0\\ \sqrt{\frac{\Gamma(mr+k+1)\Gamma(s)}{\Gamma\ mr+k+s}}b_{mr+k} & b_0e^{i\ 2\pi\ ()\ (mr+k}{}_{m}\end{bmatrix}$.) 由于 $k\in(0,m)$ $e^{i\frac{2\pi(mr+k)}{m}}\neq 1$. 因此，$C_{\psi,\phi}$ 到 P 的压缩的数值域是一个椭圆盘，其焦点为 b_0、 $b_0e^{i\frac{2\pi(mr+k)}{m}}$，长轴长度为 $\sqrt{\Gamma_{(mr+k+1)\Gamma(s)\Gamma(mr+k+s)}}$ $|b_{mr+k}|^2+|b_0|^2|1-e^{i\frac{2\pi}{(mr+k)m}}|^2$，短轴长度为 $\sqrt{\frac{\Gamma(mr+k+1)\Gamma(s)}{\Gamma\ mr+k+s}}$ $()\ |b_{mr+k}|$. 。由压缩的数值域包含于算子的数值域，所需结论即得。□

定理的证明 *1.8*。 设 $P=$ 张成空间 $\{e_p,e_{p+q}\}$. 则

$$C_{\psi,\phi}e_p(z)=e^{i2\pi p\phi}\sqrt{\frac{\Gamma(p+s)}{\Gamma(p+1)\Gamma(s)}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^{p+n}$$

and

$$C_{\psi,\phi}e_{p+q}(z)=e^{i2\pi(p+q)\phi}\sqrt{\frac{\Gamma(p+q+s)}{\Gamma(p+q+1)\Gamma(s)}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^{p+q+n}.$$

则，$C_{\psi,\ \phi}$在 P上的矩阵表示为 $\begin{bmatrix}b_0e^{i2\pi p\phi} & 0\\ e^{i2\pi p\phi}\sqrt{\frac{\Gamma\ p+q+1\ \Gamma\ p+s}{\Gamma\ p+q+s\ \Gamma\ p+1}} & ()()()()b_q\quad b_0e^{i2\pi(p+q)\phi}\end{bmatrix}$.

于是，$C_{\psi,\ \phi}$ 压缩到 P 上的数值域是一个椭圆盘，其焦点为 $b_0e^{i2\pi p\phi}$、 $b_0e^{i2\pi(p+q)\phi}$，长轴长度为

$$\sqrt{|b_0|^2|e^{i2\pi p\phi}-e^{i2\pi(p+q)\phi}|^2+\frac{\Gamma(p+q+1)\Gamma(p+s)}{\Gamma(p+q+s)\Gamma(p+1)}|b_q|^2}$$

且短轴长度为 $\sqrt{\Gamma_{\Gamma(p+q+1)\Gamma(p+s)\ (p+q+s)\Gamma(p+1)}}|b_q|$。因此，根据压缩下数值域的包含性质，证明得证。□

4. Weyl-type weighted composition operators on $\mathcal{D}_s$

令 $\phi_{\gamma,\alpha}$ 为单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的自同构，定义为 $\phi_{\gamma,\alpha}(z) = \alpha\frac{z-\gamma}{1-\bar{\gamma}z}$,其中 $\alpha \in \mathbb{T}$ 且 $\gamma \in \mathbb{D}$. 。我们引入作用于 $\mathcal{D}_s$ 上的 Weyl 型加权复合算子 $C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,\alpha}}$，定义如下

$$C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,\alpha}}(f) = \hat{k}^s_\gamma f \circ \phi_{\gamma,\alpha} \quad \forall f \in \mathcal{D}_s.$$

由 [17, 定理 1.1] 可知，$C_{\hat{k}^s_\gamma,\ \phi_{\gamma,\ \alpha}}$ 在 $\mathcal{D}_s$ 上有界，而且可逆。

$C_{\hat{k}^s_\gamma,\ \phi_{\gamma,\ \alpha}}$ 在 $\mathcal{D}_s$ 上的 Berezin 变换为

$$\begin{aligned}\widetilde{C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,\alpha}}}(z) = \langle C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,\alpha}}\hat{k}^s_z, \hat{k}^s_z\rangle_{\mathcal{D}_s} &= \frac{(1-|\gamma|^2)^{\frac{s}{2}}(1-|z|^2)^s}{(1-\bar{\gamma}z)^s(1-\bar{z}\phi_{\gamma,\alpha}(z))^s} \\ &= \left(\frac{(1-|\gamma|^2)(1-|z|^2)^2}{((1-\alpha|z|^2)-(z\bar{\gamma}-\alpha\bar{z}\gamma))^2}\right)^{\frac{s}{2}}. \quad (4.1)\end{aligned}$$

接下来，我们给出定理 1.9 的证明。该定理表明，尽管 0 位于 $C_{\hat{k}^s_\gamma,\ \phi_{\gamma,\ \alpha}}$的 Berezin 值域的闭包中，但它并不属于 Berezin 值域本身。

定理 *1.9* 的证明。 对任意 $z \in \mathbb{D}$， 有

$$\widetilde{C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,\alpha}}}(z) = \frac{(1-|\gamma|^2)^{\frac{s}{2}}(1-|z|^2)^s}{(1-\bar{\gamma}z)^s(1-\bar{z}\phi_{\gamma,\alpha}(z))^s}. \quad (4.2)$$

由于$\phi_{\gamma,\ \alpha}$ 不是 $\mathbb{D}$上的恒等映射，因此存在 $z_0 \in \mathbb{T}$ ，使得$\phi_{\gamma,\ \alpha}$ 在 z_0 处的径向极限存在，且$\phi^*_{\gamma,\ \alpha}(z_0) \neq z_0$. 因此，由（4.2）可得$\widetilde{C_{\hat{k}^s_\gamma,\ \phi_{\gamma,\ \alpha}}}(z) \to 0$ 当 z 沿径向趋近于点 z_0. 时。因此，我们得到$0 \in \mathbf{Ber}(C_{\hat{k}^s_\gamma,\ \phi_{\gamma,\ \alpha}}; \mathcal{D}_s)$。

再次，由（4.2）可得

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,\alpha}}}(z)\right| &= \frac{(1-|\gamma|^2)^{\frac{s}{2}}(1-|z|^2)^s}{|1-\bar{\gamma}z|^s|1-\bar{z}\phi_{\gamma,\alpha}(z)|^s} \\ &\geq \frac{(1-|\gamma|^2)^{\frac{s}{2}}(1-|z|^2)^s}{4^s} > 0 \text{ for all } z \in \mathbb{D}.\end{aligned}$$

因此，对于所有 $z \in \mathbb{D}$，，我们得到$C_{\hat{k}^s_\gamma,\ \phi_{\gamma,\ \alpha}}(z) \neq 0$，证毕。 □

现在我们给出定理1.10的证明，该定理刻画了算子$C_{\hat{k}^s_\gamma,\ \phi_{\gamma,\ \alpha}}$ 在 $\mathcal{D}_s$ 上的 Berezin 值域，其中 $\alpha = -1$。

定理的证明*1.10*。对于 $\alpha = -1$，我们有

$$\langle C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,-1}}\hat{k}^s_z, \hat{k}^s_z\rangle_{\mathcal{D}_s} = \left(\frac{(1-|\gamma|^2)(1-|z|^2)^2}{((1+|z|^2)-(z\bar{\gamma}+\bar{z}\gamma))^2}\right)^{\frac{s}{2}}.$$

方程 $\phi_{\gamma,-1}(z)=z$ 在 $\mathbb{D}$, $z(\gamma)$ 中有唯一解。 $=\frac{1-\sqrt{1-|\gamma|^2}}{\bar{\gamma}}$. 因此，经过简单计算，我们得到

$$\widetilde{C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,-1}}}(z(\gamma))=1.$$

$\widetilde{C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,-1}}}$ 是连续函数，因此$C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,-1}}$ 的值域是$\widetilde{\quad}$的一个连通子集，其中包含 1 和 $C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,-1}}(z)\to 0$ 当 $|z|\to 1.$ 时。因此，$\mathbf{Ber}\left(C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,-1}};\ \mathcal{D}_s\right)=(0,1]$。 □

接下来我们给出定理1.11的证明，该定理计算了算子 $C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,\alpha}}$ 在 $\mathcal{D}_s$ 上的 Berezin 数值，其中 $\alpha=1.$

定理 *1.11* 的证明。 我们有

$$\langle C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,1}}\hat{k}^s_z,\hat{k}^s_z\rangle_{\mathcal{D}_s}=\left(\frac{(1-|\gamma|^2)(1-|z|^2)^2}{((1-|z|^2)-(z\bar{\gamma}-\bar{z}\gamma))^2}\right)^{\frac{s}{2}}.$$

由于 $i(z\bar{\gamma}-\bar{z}\gamma)$ 是实数，因此我们得到

$$|(1-|z|^2)-(z\bar{\gamma}-\bar{z}\gamma)|^2=(1-|z|^2)^2+|z\bar{\gamma}-\bar{z}\gamma|^2.$$

So,

$$|\langle C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,1}}\hat{k}^s_z,\hat{k}^s_z\rangle_{\mathcal{D}_s}|=\left(\frac{(1-|\gamma|^2)(1-|z|^2)^2}{(1-|z|^2)^2+|z\bar{\gamma}-\bar{z}\gamma|^2}\right)^{\frac{s}{2}}\leq(1-|\gamma|^2)^{\frac{s}{2}}. \tag{4.3}$$

$\widetilde{\quad}$由于 $C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,1}}(0)=(1-|\gamma|^2)^{\frac{s}{2}}$, 因此 $\mathbf{ber}(C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,1}};\ \mathcal{D}_s)=(1-|\gamma|^2)^{\frac{s}{2}}.$ □

本节最后，我们研究两个 Weyl 型加权复合算子之和的 Berezin 半径。对于这类算子，我们证明 Berezin 半径满足反向幂不等式。

命题 4.1. 令 $\mathcal{X}_\gamma=C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,1}}+C_{\hat{k}^s_{-\gamma},\phi_{-\gamma,1}}.$ 则 $\mathbf{ber}(\mathcal{X}_\gamma;\mathcal{D}_s)=2(1-|\gamma|^2)^{\frac{s}{2}}$ 且 $\mathbf{ber}(\mathcal{X}^2_\gamma;\ \mathcal{D}_s)=2\left(\left(\frac{1-|\gamma|^2}{1+|\gamma|^2}\right)^s+1\right)$. 因此，对于所有满足 $0<|\gamma|<1$,$\mathbf{ber}(\mathcal{X}^2_\gamma;\ \mathcal{D}_s)>\mathbf{ber}^2(\mathcal{X}_\gamma;\ \mathcal{D}_s)$。

证明。 由（4.3）可得,

$$|\langle\mathcal{X}_\gamma\hat{k}^s_z,\hat{k}^s_z\rangle_{\mathcal{D}_s}|\leq|\langle C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,1}}\hat{k}^s_z,\hat{k}^s_z\rangle_{\mathcal{D}_s}|+|\langle C_{\hat{k}^s_{-\gamma},\phi_{-\gamma,1}}\hat{k}^s_z,\hat{k}^s_z\rangle_{\mathcal{D}_s}|\leq 2(1-|\gamma|^2)^{\frac{s}{2}}.$$

$\widetilde{\quad}$由于 $\mathcal{X}_\gamma(0)=2(1-|\gamma|^2)^{\frac{s}{2}}$, 因此, $\mathbf{ber}(\mathcal{X}_\gamma;\ \mathcal{D}_s)=2(1-|\gamma|^2)^{\frac{s}{2}}.$ -

由于 $C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,1}}C_{\hat{k}^s_{-\gamma},\phi_{-\gamma,1}}=C_{\hat{k}^s_{-\gamma},\phi_{-\gamma,1}}C_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,1}}=I$, , 我们有

$$\mathcal{X}^2_\gamma=C^2_{\hat{k}^s_\gamma,\phi_{\gamma,1}}+C^2_{\hat{k}^s_{-\gamma},\phi_{-\gamma,1}}+2I.$$

注意, $C^2_{\hat{k}^s_\gamma,\ \phi_{\gamma,\ 1}}=C_{\hat{k}^s\ \frac{2\gamma}{1+|\gamma|^2},\ \phi\ \frac{2\gamma}{1+|\gamma|^2},\ 1}$。 因此,

$$|\langle\mathcal{X}^2_\gamma\hat{k}^s_z,\hat{k}^s_z\rangle_{\mathcal{D}_s}|\ \leq\ \left|\left\langle C_{\hat{k}^s\ \frac{2\gamma}{1+|\gamma|^2},\phi\ \frac{2\gamma}{1+|\gamma|^2},1}\hat{k}^s_z,\hat{k}^s_z\right\rangle_{\mathcal{D}_s}\right|+\left|\left\langle C_{\hat{k}^s\ \frac{-2\gamma}{1+|\gamma|^2},\phi\ \frac{-2\gamma}{1+|\gamma|^2},1}\hat{k}^s_z,\hat{k}^s_z\right\rangle_{\mathcal{D}_s}\right|+2$$

$$\leq 2\left(1-\frac{4|\gamma|^2}{(1+|\gamma|^2)^2}\right)^{\frac{s}{2}}+2=2\left(\left(\frac{1-|\gamma|^2}{1+|\gamma|^2}\right)^s+1\right).$$

由于 $\widetilde{\mathcal{X}_\gamma^2\,0}(\,)=2\left(\left(\frac{1-|\gamma|^2}{1+|\gamma|^2}\right)^s+1\right)$，因此，$\mathbf{ber}(\mathcal{X}_\gamma^2;\mathcal{D}_s)=2\left(\left(\frac{1-|\gamma|^2}{1+|\gamma|^2}\right)^s+1\right)$.

由于 $0<|\gamma|<1$，我们有 $(1-|\gamma|^2)^s<1$ 且 $^1\,(1+|\gamma|^2)_s<1$。因此，我们得到

$$\left(\left(\frac{1-|\gamma|^2}{1+|\gamma|^2}\right)^s+1\right)>2(1-|\gamma|^2)^s.$$

证明至此完成。 □

注记4.2。 在 [10], 作者展示了一类正有界线性算子T 定义在复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上，这些算子满足关于 Berezin 半径的反向幂不等式，即

$$\mathbf{ber}(T^p;\mathcal{H})\geq \mathbf{ber}^p(T;\mathcal{H}),\ p\in\mathbb{N}.$$

在命题 4.1中，我们得到一类新的算子 $\mathcal{X}_\gamma$ 定义在 $\mathcal{D}_s$ 上，对于这些算子，关于 $p=2$ 成立更强的反向幂不等式。

5. Convexity of Berezin range of composition operators on $\mathcal{D}_s$

对于复合算子$C_{\phi_{\gamma,\,\xi}}$ 在 $\mathcal{D}_s$上，Berezin 变换由下式给出

$$\widetilde{C_{\phi_{\gamma,\xi}}}(z)=\frac{1}{\|k_z^s\|_{\mathcal{D}_s}^2}\langle C_{\phi_{\gamma,\xi}}k_z^s,k_z^s\rangle_{\mathcal{D}_s}=\frac{1}{\|k_z^s\|_{\mathcal{D}_s}^2}k_z^s(\phi_{\gamma,\xi}(z))=\left(\frac{1-|z|^2}{1-\bar{z}\phi_{\gamma,\xi}(z)}\right)^s.\quad(5.1)$$

对于 $\xi\in\overline{\mathbb{D}}$，定义 $\phi_{0,\,\xi}(z)=\xi z$.

$$\widetilde{C_{\phi_{0,\xi}}}(z)=\left(\frac{1-|z|^2}{1-\xi|z|^2}\right)^s,$$

其中 $0<s<1$。

我们先给出以下引理，这是证明定理 1.12 所需的。

引理 5.1。 假设 $\phi_{0,\,\xi}(z)=\xi z$，其中 $\xi\in\mathbb{D}$ 且 $z\in\overline{\mathbb{D}}$。则

(i) $\mathbf{Ber}(C_{\phi_{0,\xi}};\mathcal{D}_s)$ is singleton if and only if $\xi=1$,

(ii) $\mathbf{Ber}(C_{\phi_{0,\xi}};\mathcal{D}_s)\subset\mathbb{R}$ if and only if $\xi\in\mathbb{R}$.

证明。 (i) 由于充分性可直接得出，我们只讨论必要性。令$z=\rho e^{i\psi}$，且 $\rho\in[0,1)$ 和 $\psi\in[0,2\pi)$。则

$$\widetilde{C_{\phi_{0,\xi}}}(\rho e^{i\psi})=\left(\frac{1-\rho^2}{1-\xi\rho^2}\right)^s.$$

假设$\mathbf{Ber}(C_{\phi_{0,\xi}};\mathcal{D}_s)$是单点集。由于$C_{\phi_{0,\xi}}(0)=1$,因此$\mathbf{Ber}(C_{\phi_{0,\xi}};\mathcal{D}_s)=\{1\}$. 于是，对于所有 $\left(\frac{1-\rho^2}{1-\xi\rho^2}\right)^s=1$ $\rho\in[0,1)$。这意味着

$$\left|\frac{1-\rho^2}{1-\xi\rho^2}\right|=1\implies 1-\rho^2=|1-\xi\rho^2|.\quad(5.2)$$

因此， $1-\rho^2 \geq 1-|\xi|\rho^2$ 所以 $|\xi| \geq 1$. 由于 $\xi \in \mathbb{D}$，我们有 $|\xi| = 1$. 代入 $\xi =$ 余弦 $\theta + i$ 正弦 θ 到（5.2）中，得到

$$1 - \rho^2 = |(1 - \rho^2 \cos\theta) - i\ \rho^2 \sin\theta|.$$

这意味着 $\cos\ \theta = 1$. 因此， $\sin\theta = 0$.
(*ii*) 令 $\mathbf{Ber}(C_{\phi_0,\ \xi};\ \mathcal{D}_s) \subseteq \mathbb{R}$. 则 $\frac{1-\rho^2}{1-\xi\rho^2} \in \mathbb{R}$ 对所有 $\rho \in [0,1)$。令 $\frac{1-\rho^2}{1-\xi\rho^2} = m_\rho$，其中 $m_\rho \in \mathbb{R}$. 显然， $m_\rho \neq 0$ 对所有 $\rho \in [0,1)$。则 $\xi = \frac{1}{\rho^2} - \frac{1-\rho^2}{m_\rho \rho^2} \in \mathbb{R}$. 因此， $\xi \in \mathbb{R}$. 反向结论显然成立。□

现在我们可以证明定理 1.12，从而确定 ξ 的取值，以保证 C_{ϕ_0}的 *Berezin* 值域具有凸性，ξ.

定理 *1.12*的证明。 考虑 $z = \rho e^{i\psi}$，其中 $\rho \in [0,1)$ 以及 $\psi \in [0, 2\pi)$ 。 则

$$\widetilde{C_{\phi_{0,\xi}}}(\rho e^{i\psi}) = \left(\frac{1-\rho^2}{1-\xi\rho^2}\right)^s. \tag{5.3}$$

对于 $\xi = 1$，引理 5.1 (*i*) 可推出 $\mathbf{Ber}(C_{\phi_0,\ \xi};\ \mathcal{D}_s)$ 是一个单点，因此是凸集。对于 $\xi \in [-1,1)$，我们有 $\mathbf{Ber}(C_{\phi_0,\ \xi};\ \mathcal{D}_s) = (0,1]$,，它同样是凸集。
反过来，假设 $\mathbf{Ber}(C_{\phi_0,\xi};\ \mathcal{D}_s)$ 是凸集。公式 (5.3) 表明， $\widetilde{C_{\phi_0}}_{,\xi}(\rho e^{i\psi})$ 不依赖于 ψ.。因此， $\mathbf{Ber}(C_{\phi_0,\xi};\ \mathcal{D}_s)$ 在 $\mathbb{C}$. 中构成一条路径。因此，凸性保证 $\mathbf{Ber}(C_{\phi_0,\xi};\ \mathcal{D}_s)$ 退化为一条线段或一个单点。若 $\mathbf{Ber}(C_{\phi_0,\xi};\ \mathcal{D}_s)$ 退化为一个点，那么根据引理 5.1 (*i*)，我们必须有 $\widetilde{\ \ \ }\ \xi = 1$。设 $\mathbf{Ber}(C_{\phi_0,\xi};\ \mathcal{D}_s)$ 是一条线段。我们有 $\widetilde{C_{\phi_0,\xi}(0)} = 1$，并且 $\lim_{\rho\to 1^-} C_{\phi_0,\xi}(\rho e^{i\psi}) = 0$.。由此可知，$\mathbf{Ber}(C_{\phi_0,\xi};\ \mathcal{D}_s)$ 是一条经过点 1 并趋近原点的线段，因此 $\mathbf{Ber}(C_{\phi_0,\xi};\ \mathcal{D}_s) \subset \mathbb{R}$.。根据引理 5.1 (*ii*)，我们得出 $\xi \in \mathbb{R}$。因此， $\xi \in [-1,1]$. □

我们的下一个目标是分析 $C_{\phi_{\gamma,1},}$ 的 Berezin 值域的凸性，其中 $\phi_{\gamma,1}$ 是一个 Blaschke 因子。
设 $\phi_{\gamma,1}(z) = \frac{z-\gamma}{1-\bar{\gamma}z}$ 其中 $\gamma, z \in \mathbb{D}$. 则

$$\widetilde{C_{\phi_{\gamma,1}}}(z) = \left(\frac{1-|z|^2}{1-\bar{z}\phi_{\gamma,1}(z)}\right)^s = \left(\frac{(1-|z|^2)(1-\bar{\gamma}z)}{1-\bar{\gamma}z-|z|^2+\bar{z}\gamma}\right)^s, \tag{5.4}$$

其中 $0 < s < 1$。
我们现在给出以下引理，它们构成定理 1.13 的证明基础。

引理 5.2. 设 $C_{\phi_{\gamma,1}} \in \mathcal{B}(\mathcal{D}_s)$ 且 $\phi_{\gamma,1}(z) = \frac{z-\gamma}{1-\bar{\gamma}z}$, 其中 $\gamma, z \in \mathbb{D}$. 则 $\widetilde{\ \ \ }\ Im\{C_{\phi_{\gamma,1}}(z)\} = 0$ 当且仅当 $Im\{\bar{\gamma}z\} = 0$。

证明。 由式（5.4）可得

$$\widetilde{C_{\phi_{\gamma,1}}}(z) = \left(\frac{(1-|z|^2)(1-\bar{\gamma}z)(1-|z|^2-2iIm\{\bar{z}\gamma\})}{|1-|z|^2+2iIm\{\bar{z}\gamma\}|^2}\right)^s$$

$$= \left(\frac{1-|z|^2}{|1-|z|^2+2iIm\{\gamma\bar{z}\}|^2}\right)^s$$
$$\left((1-|z|^2)(1-Re\{\bar{\gamma}z\})+2Im^2\{\bar{\gamma}z\}+iIm\{\bar{\gamma}z\}(1+|z|^2-2Re\{\bar{\gamma}z\})\right)^s. \quad (5.5)$$

Let

$$(1-|z|^2)(1-Re\{\bar{\gamma}z\})+2Im^2\{\bar{\gamma}z\}=\rho\cos\theta$$

and

$$Im\{\bar{\gamma}z\}(1+|z|^2-2Re\{\bar{\gamma}z\})=\rho\sin\theta,$$

其中 $\rho=\left(((1-|z|^2)(1-Re\{\bar{\gamma}z\})+2Im^2\{\bar{\gamma}z\})^2+Im^2\{\bar{\gamma}z\}(1+|z|^2-2Re\{\bar{\gamma}z\})^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 且 $-\frac{\pi}{2}\prec\theta<\frac{\pi}{2}$.由式（5.5）可得

$$\widetilde{C_{\phi_{\gamma,1}}}(z) = \left(\frac{\rho(1-|z|^2)}{|1-|z|^2+2iIm\{\gamma\bar{z}\}|^2}\right)^s(\cos s\theta+i\sin s\theta).$$

因此，

$$Re\{\widetilde{C_{\phi_{\gamma,1}}}(z)\}$$
$$= \left(\frac{(1-|z|^2)}{|1-|z|^2+2iIm\{\gamma\bar{z}\}|^2}\right)^s$$
$$\left(((1-|z|^2)(1-Re\{\bar{\gamma}z\})+2Im^2\{\bar{\gamma}z\})^2+Im^2\{\bar{\gamma}z\}(1+|z|^2-2Re\{\bar{\gamma}z\})^2\right)^{\frac{s}{2}}$$
$$\cos\left(s\tan^{-1}\left(\frac{Im\{\bar{\gamma}z\}(1+|z|^2-2Re\{\bar{\gamma}z\})}{(1-|z|^2)(1-Re\{\bar{\gamma}z\})+2Im^2\{\bar{\gamma}z\}}\right)\right) \quad (5.6)$$

and

$$Im\{\widetilde{C_{\phi_{\gamma,1}}}(z)\}$$
$$= \left(\frac{(1-|z|^2)}{|1-|z|^2+2iIm\{\gamma\bar{z}\}|^2}\right)^s$$
$$\left(((1-|z|^2)(1-Re\{\bar{\gamma}z\})+2Im^2\{\bar{\gamma}z\})^2+Im^2\{\bar{\gamma}z\}(1+|z|^2-2Re\{\bar{\gamma}z\})^2\right)^{\frac{s}{2}}$$
$$\sin\left(s\tan^{-1}\left(\frac{Im\{\bar{\gamma}z\}(1+|z|^2-2Re\{\bar{\gamma}z\})}{(1-|z|^2)(1-Re\{\bar{\gamma}z\})+2Im^2\{\bar{\gamma}z\}}\right)\right). \quad (5.7)$$

由（5.7）可知，若 $Im\{\bar{\gamma}z\}=0$ 则 $Im\{\widetilde{C_{\phi_{\gamma,1}}}(z)\}=0$. 反之，假设 $Im\{\widetilde{C_{\phi_{\gamma,1}}}(z)\}=0$. 由于 $\frac{(1-|z|^2)}{|1-|z|^2+2iIm\{\gamma\bar{z}\}|^2}>0$，$(1-|z|^2)\ (1-Re\{\bar{\gamma}z\})+2Im^2\{\bar{\gamma}z\}>0$并且 $1+|z|^2-2Re\{\bar{\gamma}z\}>0$，（5.7）意味着

$$\sin\left(s\tan^{-1}\left(\frac{Im\{\bar{\gamma}z\}(1+|z|^2-2Re\{\bar{\gamma}z\})}{(1-|z|^2)(1-Re\{\bar{\gamma}z\})+2Im^2\{\bar{\gamma}z\}}\right)\right)=0. \quad (5.8)$$

由于 $(1-|z|^2)\ (1-Re\{\bar{\gamma}z\})+2Im^2\{\bar{\gamma}z\}>0$，因此可得

$$-\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}\left(\frac{Im\{\bar{\gamma}z\}(1+|z|^2-2Re\{\bar{\gamma}z\})}{(1-|z|^2)(1-Re\{\bar{\gamma}z\})+2Im^2\{\bar{\gamma}z\}}\right)<\frac{\pi}{2}.$$

由 $0<s<1$，我们得到

$$-\frac{\pi}{2}<s\tan^{-1}\left(\frac{Im\{\bar{\gamma}z\}(1+|z|^2-2Re\{\bar{\gamma}z\})}{(1-|z|^2)(1-Re\{\bar{\gamma}z\})+2Im^2\{\bar{\gamma}z\}}\right)<\frac{\pi}{2}. \quad (5.9)$$

结合（5.8）和（5.9），可得 $\tan^{-1}\left(\frac{Im\{\bar{\gamma}z\}}{1-|z|^2}\frac{(1+|z|^2-2Re\{\bar{\gamma}z\})\ ()(1-Re\{\bar{\gamma}z\})}{+2Im^2\{\bar{\gamma}z\}}\right)=0.$ 这意味着 $Im\{\bar{\gamma}z\}=0$。□

根据前述结果，我们给出定理 1.13 的证明，该定理刻画了 $C_{\phi_{\gamma,1}}$ 在 $\mathcal{D}_s$ 上的 Berezin 值域的凸性。

定理的证明 *1.13*。 对于 $\gamma = 0$，$\mathbf{Ber}(C_{\phi_{\gamma,1}}; \mathcal{D}_s) = \{1\}$ 是凸集。反过来，设 $\mathbf{Ber}(C_{\phi_{\gamma,1}}; \mathcal{D}_s)$ 是凸集。现在我们证明，对于任意 $z \in \mathbb{D}$, $Re\{C_{\phi_{\gamma,1}}(z)\} \in \mathbf{Ber}(C_{\phi_{\gamma,1}}; \mathcal{D}_s)$。设 $z = \rho e^{i\psi}$ 和 $\gamma = re^{i\theta}$, 对于 $\rho, r \in [0,1)$ 和 $\psi, \theta \in [0, 2\pi)$。直接计算可得

$$\widetilde{C_{\phi_{\gamma,1}}}(\rho e^{i(2\theta-\psi)}) = \overline{\widetilde{C_{\phi_{\gamma,1}}}(z)} \in \mathbf{Ber}(C_{\phi_{\gamma,1}}; \mathcal{D}_s).$$

由于 $\mathbf{Ber}(C_{\phi_{\gamma,1}}; \mathcal{D}_s)$ 是凸集，因此我们有

$$Re\{\widetilde{C_{\phi_{\gamma,1}}}(z)\} = \frac{1}{2}\left(\widetilde{C_{\phi_{\gamma,1}}}(z) + \overline{\widetilde{C_{\phi_{\gamma,1}}}(z)}\right) \in \mathbf{Ber}(C_{\phi_{\gamma,1}}; \mathcal{D}_s).$$

由此可知，对每个 $z \in \mathbb{D}$，存在 $w \in \mathbb{D}$ 使得 $\widetilde{C_{\phi_{\gamma,1}}}(w) = Re\{C_{\phi_{\gamma,1}}(z)\}$. 于是 $Im\{C_{\phi_{\gamma,1}}(w)\} = 0$. 由引理5.2, $Im\{\bar{\gamma}w\} = 0$ 因此 $w = t\gamma$ 对某个 $t \in \left(-\frac{1}{|\gamma|}, \frac{1}{|\gamma|}\right)$。因此

$$\begin{aligned}
&\widetilde{C_{\phi_{\gamma,1}}}(w) \\
&= Re\{\widetilde{C_{\phi_{\gamma,1}}}(t\gamma)\} \\
&= \left(\frac{1-|t\gamma|^2}{|1-|t\gamma|^2+2iIm\{\gamma\bar{t\gamma}\}|^2}\right)^s \\
&\left(((1-|t\gamma|^2)(1-Re\{\bar{\gamma}t\gamma\})+2Im^2\{\bar{\gamma}t\gamma\})^2+Im^2\{\bar{\gamma}t\gamma\}(1+|t\gamma|^2-2Re\{\gamma\bar{t\gamma}\})^2\right)^{\frac{s}{2}} \\
&\cos\left(s\tan^{-1}\left(\frac{Im\{\bar{\gamma}t\gamma\}(1+|t\gamma|^2-2Re\{\gamma\bar{t\gamma}\})}{(1-|t\gamma|^2)(1-Re\{\bar{\gamma}t\gamma\})+2Im^2\{\bar{\gamma}t\gamma\}}\right)\right) \\
&= (1-t|\gamma|^2)^s.
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\left\{\widetilde{C_{\phi_{\gamma,1}}}(t\gamma) : t \in \left(-\frac{1}{|\gamma|}, \frac{1}{|\gamma|}\right)\right\} = \left((1-|\gamma|)^s, (1+|\gamma|)^s\right).$$

我们有

$$\lim_{\rho\to 1^-} \widetilde{C_{\phi_{\gamma,1}}}(\rho e^{i\psi}) = \begin{cases} 0 & \text{for } \gamma \neq 0 \\ 1 & \text{for } \gamma = 0. \end{cases}$$

由此可知，当 $\gamma \neq 0$, 给定 ϵ，且 $0 < \delta < (1-|\gamma|)^s$, 存在一个点 z，使得 $|Re\{C_{\phi_{\gamma,1}}(z)\}| < \delta$. 现在，对于该 z，存在 $w \in \mathbb{D}$，使得 $|\widetilde{C_{\phi_{\gamma,1}}}(w)| = |Re\{\widetilde{C_{\phi_{\gamma,1}}}(z)\}| < \epsilon$. 这与 $\widetilde{C_{\phi_{\gamma,1}}}(w) \in ((1-|\gamma|)^s, (1+|\gamma|)^s)$。相矛盾。因此，$\gamma = 0$. □

最后的注记： 我们研究了非加权复合算子的 Berezin 值域的凸性，这些算子作用在 $\mathcal{D}_s$ 上，并在第 4 节中分析了特定情形下 Weyl 型加权复合算子的 Berezin 值域。这自然引出以下开放问题。

问题 5.3. 刻画能够确保 $C_{\psi,\phi}$ 在 $\mathcal{D}_s$ 上的 Berezin 值域具有凸性的符号 ϕ 和 ψ。

Declarations

致谢。 Somdatta Barik 女士感谢印度政府大学拨款委员会在 Kallol Paul 教授的指导下，以高级研究奖学金的形式提供经费支持。Anirban Sen 博士获得捷克科学基金会（GA CR）项目（编号：25-18042S）的资助。作者贡献： 所有作者对本文的贡献均等，并批准了最终版本。数据可用性： 本文所述研究未使用任何数据。利益冲突： 作者声明不存在利益冲突。

References

[1] J. Agler 和 J. E. McCarthy，《Pick 插值与希尔伯特函数空间》，《数学研究生教程》第 44 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，（2002）。[2] A. Augustine、M. Garayev 和 P. Shankar，复合算子、其 Berezin 值域的凸性及相关问题，《Complex Anal. Oper. Theory》17（2023），第 8 期，论文编号 126，共 22 页。[3] F. A. Berezin，量子化，《Math. USSR-Izv.》8（1974），1109–1163。[4] F. A. Berezin，算子的协变与逆变符号，《Math. USSR-Izv.》6（1972），1117–1151。[5] P. S. Bourdon 和 J. H. Shapiro，何时零属于复合算子的数值域？，《Integral Equations Operator Theory》44（2002），第 4 期，410–441。[6] L. A. Coburn，Bergman 空间上的 Berezin 变换与 Weyl 型酉算子，《美国数学会会刊》140（2012），3445–3451。[7] C. C. Cowen 和 C. Felder，Berezin 值域的凸性，《Linear Algebra Appl.》647（2022），47–63。[8] C. C. Cowen 和 B. D. MacCluer，解析函数空间上的复合算子，《Stud. Adv. Math.》，CRC 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，（1995）。[9] M. Engliˇs，在 Berezin 变换下不变的函数，《J. Funct. Anal.》121（1994），第 1 期，233–254。[10] M. T. Garayev 和 M. W. Alomari，算子的 Berezin 数不等式及相关问题，《Complex Anal. Oper. Theory》15(2)（2021），1–30。[11] G. Gunatillake、M. Jovovic 和 W. Smith，加权复合算子的数值域，《J. Math. Anal. Appl.》413（2014），第 1 期，458–475。[12] M. T. Karaev，再生核与 Berezin 符号技术在算子理论各类问题中的应用，《Complex Anal. Oper. Theory》7（2013），第 4 期，983–1018。[13] M. T. Karaev，函数希尔伯特空间上的 Berezin 符号与算子的可逆性，《J. Funct. Anal.》238（2006），第 1 期，181–192。[14] S. Keeler、L. Rodman 和 M. Spitkovsky，矩阵的数值域，《Linear Algebra Appl.》252（1997），115–139。[15] M. M. Khorami、F. Ershad 和 B. Yousefi，关于某些有界算子的数值域，《J. Math. Ext.》15（2021），第 2 期，1–14。[16] B. D. MacCluer 和 J. H. Shapiro，Hardy 空间和 Bergman 空间上的角导数与紧复合算子，《Canad. J. Math.》38（1986），第 4 期，878–906。[17] A. Sen，加权狄利克雷空间上的加权复合算子：有界性、紧性与谱性质，（2026）。http://arxiv.org/abs/2602.08651[18] A. Sen、S. Halder、R. Birbonshi 和 K. Paul，加权 Bergman 空间上 Toeplitz 算子与加权复合算子的数值域，《Canad. Math. Bull.》（2025），19 页。[19] A. Sen、S. Barik 和 K. Paul，关于加权 Bergman 空间上 Toeplitz 算子与加权复合算子的 Berezin 值域，《Complex Anal. Oper. Theory》19，223（2025），17 页。

[20] P. Y. Wu 和 H. -L. Gau，《希尔伯特空间算子的数值域》，《Encyclopedia Math. Appl.》179，剑桥大学出版社，剑桥，（2021）。[21] X. Zhao 和 D. Zheng，通过 Berezin 变换研究 Toeplitz 算子的可逆性，《J. Operator Theory》75（2016），第 2 期，475–495。[22] K. Zhu，Berezin 变换及其应用，《数学科学学报》41（2021），第 6 期，1839–1858。[23] N. Zorboska，加权狄利克雷空间上的复合算子，《美国数学会会刊》126（1998），第 7 期，2013–2023。（Barik） Department of Mathematics, Jadavpur University, Kolkata 700032, WestBengal, India电子邮箱地址: bariksomdatta97@gmail.com（Sen） Mathematical Institute, Silesian University in Opava, Na Rybníčku 1, 74601 Opava, Czech Republic电子邮箱地址: anirbansenfulia@gmail.com; Anirban.Sen@math.slu.cz（Paul） Vice-Chancellor, Kalyani University, West Bengal 741235, and Profes-sor (on lien), Department of mathematics, Jadavpur University, Kolkata 700032,West Bengal, India电子邮箱地址: kalloldada@gmail.com