arXiv:2602.09482v1 [physics.comp-ph] 10 Feb 2026

任意拉格朗日-欧拉表述下的单阶段高阶紧致气体动理学格式

YueZhang[a]、Xing Ji[d]、Yibing Chen[e]、Fengxiang Zhao[a]、Kun Xu[a,b,c,*]

[a]香港科技大学数学系，香港九龙清水湾[b]香港科技大学机械与航空航天工程系，香港九龙清水湾[c]香港科技大学深圳研究院，中国深圳[d]陕西省飞行器环境与控制重点实验室、机械结构强度与振动国家重点实验室，西安交通大学航空航天学院，中国西安[e]

应用物理与计算数学研究所，中国北京

摘要

本研究介绍了一种针对结构网格、采用任意拉格朗日-欧拉（ALE）公式的紧致气体动理学格式。与欧拉表述不同，ALE方法能够有效追踪激波和接触间断等流动间断。然而，网格运动会改变几何形状并增加计算成本。为此，我们提出了两项关键策略，以降低成本并提高精度。第一项策略是利用气体动理学格式构造三阶气体动理学通量，而非采用龙格-库塔方法来实现高阶时间精度，从而使每个时间步只需进行一次重构和通量计算。该方法通过时间精确通量函数直接更新单元平均流动变量及其梯度，便于进行紧致重构。第二项策略针对重构所需的高昂计算开销：由于网格会发生变化，每个时间步都必须重新计算重构矩阵。为降低这项开销，我们采用了基于小矩阵的简化四阶紧致重构。在ALE框架下，四阶空间重构与三阶时间精确通量演化相结合，兼顾了高分辨率和计算效率。测试结果表明，当前重构方法比此前的重构方法快2.4至3.0倍。此外，采用广义ENO（GENO）方法处理间断，提高了格式的鲁棒性。黎曼问题、Sedov 问题、Noh 问题和Saltzmann问题等数值测试算例表明，该方法具有良好的鲁棒性和精度。

关键词：
任意拉格朗日-欧拉（ALE）、几何守恒律（GCL）、单阶段三阶气体动理学通量、简化四阶紧致重构

1. 引言

在计算流体力学中，描述流体运动有两种常见框架：欧拉系统和拉格朗日系统。在欧拉系统中，流动是在固定网格上描述的；而在拉格朗日系统中，网格随流体速度运动。欧拉系统更容易实现，但在处理运动边界以及接触间断时引入耗散方面存在困难。拉格朗日系统能够很好地解析接触间断，例如材料界面或自由表面，但网格畸变可能导致计算崩溃。因此，发展任意拉格朗日-欧拉（ALE）方法 [1]具有吸引力。ALE方法分为两类：直接方法和间接方法。直接 ALE 方法使物体和计算网格同时运动。近年来，直接 ALE 方法在三维流动[2, 3], 领域取得了显著进展，尤其是在单步 ADER-WENO 格式 [4, 5]框架下。这些方法采用高阶数值格式，能够准确捕捉流动动力学。此外，研究人员还开发了能够处理拓扑变化的高阶直接 ALE 格式 [6]。此外，人们还致力于将 ALE 方法拓展至弱可压缩流 [7], 、两相流 [8], 和磁流体力学 [9]。这些拓展使得更广泛的物理现象得以模拟，并增强了直接 ALE 方法的通用性和适用范围。间接 ALE 方法将物体运动和计算网格运动分为三个阶段：拉格朗日阶段、重新分区阶段 [10], 和重映射阶段 [11]。在拉格朗日阶段，流场和网格同步更新。在重新分区阶段，构建新的计算网格以适应物体的新位置和形状，通常会采用网格生成和变形等技术，以确保网格质量和精度。在重映射阶段，将解转移到重新分区后的网格上。当前研究聚焦于采用固定网格拓扑的直接 ALE 方法，旨在处理激波和接触间断。因此，可以省略重映射和重新分区步骤。

在ALE框架中，网格运动会改变几何形状并增加计算成本。为实现高阶精度和计算效率，需要采用高阶方法。然而，传统高阶方法由于重构矩阵而在两个方面产生较高的计算成本：一方面需要求逆的大型重构矩阵，另一方面如龙格-库塔方法一样，在每个子时间步都需要进行多次重构。气体动理学格式（GKS）是一种基于动理学理论、用于求解欧拉方程和纳维–斯托克斯方程的数值方法 [12]。该方法能够提供时间精确通量函数；因此，采用单阶段高阶时间积分方法[13, 14, 15, 16]和多阶段多导数（MSMD）方法 [17, 18, 19, 20] ，以高阶时间精度更新解。在本文中，由于采用ALE框架，网格几何随时间变化，因此需要在每个时间步重新计算重构矩阵。

*通讯作者电子邮箱：yzhangnl@connect.ust.hk (Yue Zhang), jixing@xjtu.edu.cn (Xing Ji), chen_yibing@iapcm.ac.cn (Yibing Chen),fzhaoac@connect.ust.hk (Fengxiang Zhao), makxu@ust.hk (Kun Xu)

因此，本文采用单阶段三阶气体动理学通量演化模型。三阶气体动理学通量最初由Li 等人提出 [13] ，随后由Luo 等人 [14]扩展为多维格式。Zhou 等人 [15] 进一步简化了该演化模型。

此外，气体动理学格式还可以提供单元界面处时间精确的流动变量，并通过 Green-Gauss 方法获得单元平均梯度。在广义黎曼问题的初始条件下，GKS 中构造随时间演化的气体分布函数，以计算数值通量并评估单元界面处随时间变化的流动变量。因此，无需引入额外方程，即可直接更新单元平均流动变量及其梯度。与采用不同演化方程的间断Galerkin方法相比，GKS 中的单元平均流动变量及其梯度可通过单元界面处单一的气体演化模型直接更新。二维和三维情况下，结构网格与非结构网格上的紧致气体动理学格式（CGKS）均已构建 [21, 20, 22, 23, 24]。为进一步提高该格式在高速流动模拟中的鲁棒性，还进行了若干改进，例如允许单元界面处的流动变量出现间断 [25] ，以及引入间断反馈因子 [26, 27]。近期，通过广义ENO（GENO）重构发展出了更高阶的紧致气体动理学格式 [28, 27] ： 该方法引入路径函数，将高阶线性多项式与低阶 ENO重构相结合。通过处理间断，该方法能够兼顾高阶精度与鲁棒性。近年来，高阶 GKS 已扩展至 ALE 表述。Pan 在二维和三维结构网格上开发了一种高阶有限体积ALE气体动理学方法 [29, 30], ，采用非紧致加权本质无振荡格式和两阶段四阶离散。另有一种非结构紧致气体动理学格式 [31], ，采用三阶加权本质无振荡格式和两阶段四阶离散。得益于紧致模板，研究人员开发了内存缩减紧致气体动理学格式[32] ，并将其用于 ALE 表述 [33] ，以实现高性能。本文提出一种沿用相同思路以降低计算成本的四阶紧致重构。

本文结构如下。第 2 节介绍 ALE 表述下的气体动理学格式，包括动网格上的控制方程、三阶气体动理学通量以及网格速度的确定。第 3 节讨论简化四阶紧致重构以及针对不连续问题的 GENO 过程。第 4 节通过若干测试案例验证所提出的方法。最后一节给出结论。

2. 任意拉格朗日–欧拉（ALE）表述下的紧致气体动理学格式

2.1. 动网格上的控制方程

在有限体积法中，计算域 Ω 被离散为一系列互不重叠的单元Ω_i,

$$\Omega = \bigcup \Omega_i,\ \Omega_i \bigcap \Omega_j = \phi (i \neq j).$$

单元 Ω_i 的边界可表示为

$$\partial\Omega_i = \bigcup_{p=1}^{N_f} \Gamma_{ip},$$

其中 N_f 为单元表面的数目， Γ_{ip} 为单元的表面。雷诺输运定理给出了运动单元上任意拉格朗日–欧拉（ALE）公式中的守恒律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_i(t)} \mathbf{W}\ \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_i(t)} (\mathbf{F}(\mathbf{W}) - \mathbf{W}\mathbf{U})\cdot\mathbf{n}\ \mathrm{d}S = 0,$$

其中$\mathbf{U}$ 为网格速度，$\mathbf{F(W)}$为通过固定单元表面的通量，而$\mathbf{WU}$ 表示由网格运动引起的通量。对于纳维–斯托克斯方程，$\mathbf{W}$ $=[\rho, \rho V_1, \rho V_2, \rho V_3, \rho E]^T$为守恒流动变量， ρ为密度，$\mathbf{V}$ $=(V_1, V_2, V_3)$为速度，而 E 为流体的总能量。

- 当$\mathbf{U}$ $=\mathbf{V}$时，该格式为拉格朗日形式；
- 当$\mathbf{U}$ $=\mathbf{0}$时，该格式为欧拉形式。

通过在上述两个极限 [34]之间选择网格速度，也可以建立统一格式。

本文仅考虑六面体单元。为简便起见，假定网格速度在一个时间区间内为常数。对于三维计算，即使网格速度为常数，控制点也可能变得不共面，这给保持精度阶和几何守恒律带来了额外困难。因此，对具有不共面控制点的六面体单元引入三线性插值

$$\mathbf{x}(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{8} \mathbf{x}i\lambda_i(\xi,\eta,\zeta),$$

其中，$(\xi,\ \eta,\ \zeta)\ \in [-1,1]^3$为局部坐标，$\mathbf{x}i$是六面体单元的顶点，而 $\lambda_i(\xi,\ \eta,\ \zeta)$是如下所示的拉格朗日基函数：

$$\lambda_i(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta),$$

其中，(ξ_i, η_i, ζ_i)是顶点 $\mathbf{x}i$ 的第 i 个局部坐标。通过三线性插值，六面体单元上的三重积分可转换为关于

局部坐标的单积分，如下所示:

$$\begin{aligned}\iiint \Omega f(\mathbf{x})\ \mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\mathbf{x}(\xi,\eta,\zeta))\left|\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\right|\ \mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}\eta\ \mathrm{d}\zeta \\ &= \sum_{l,m,n=1}^{n} f(\mathbf{x}(\xi_l,\eta_m,\zeta_n))\left|\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\right|\omega(\xi_l,\eta_m,\zeta_n),\end{aligned}$$

其中，$\mathbf{x}(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ 是单元中心在局部坐标中的位置，$\omega(\xi_l,\ \eta_m,\ \zeta_n)$ 是高斯积分权重。对于每个单元界面，三线性插值在局部坐标中可简化为双线性插值，定义如下:

$$\mathbf{x}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4}\mathbf{x}_i\lambda_i(\xi,\eta),$$

其中，$(\xi,\ \eta)$ 是局部坐标，$\mathbf{x}_i$ 是四边形单元的顶点，$\lambda_i(\xi,\ \eta)$ 是拉格朗日基函数，定义如下:

$$\lambda_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta),$$

其中，$(\xi_i,\ \eta_i)$ 是顶点$\mathbf{x}_i$ 的第 i 个局部坐标。

在 此条件下，ALE 表述中的守恒律可写为

$$\mathbf{W}^{n+1}|\Omega^{n+1}| - \mathbf{W}^{n}|\Omega^{n}| = -\sum_{p=1}^{6}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\Gamma_p}(\mathbf{F}(\mathbf{W})-\mathbf{W}\mathbf{U})\cdot\mathbf{n}\ \mathrm{d}S\ \mathrm{d}t,$$

其中，时间步为 $\Delta t = t^{n+1} - t^n$， Γ_p 是单元的第 p 个表面。采用双线性插值，表面的法向量可写为

$$\mathbf{n} = \mathbf{x}_{,\xi}\times\mathbf{x}_{,\eta} = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi}\times\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\eta}.$$

曲面积分可写为

$$\int_{\Gamma_p}(\mathbf{F}(\mathbf{W})-\mathbf{W}\mathbf{U})\cdot\mathbf{n}\ \mathrm{d}S = \int_0^1\int_0^1(\mathbf{F}(\mathbf{W})-\mathbf{W}\mathbf{U})\cdot(\mathbf{x}_{,\xi}\times\mathbf{x}_{,\eta})\ \mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}\eta.$$

假设网格速度在一个时间区间内与时间无关，则表面上各点的坐标可写为 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^n + \mathbf{U}(t-t^n)$，其中 $\mathbf{x}^0$ 是各点的初始位置。如果流动变量的表面值也与时间无关，则由网格运动引起的通量项

可通过以下方式计算：

$$\begin{aligned}&\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_0^1\int_0^1 \mathbf{WU}\cdot(\mathbf{x}_{,\xi}\times\mathbf{x}_{,\eta})\ \mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}\eta\ \mathrm{d}t\\ =&\Delta t\int_0^1\int_0^1 \mathbf{WU}\cdot((\mathbf{x}^n+\frac{1}{2}\mathbf{U}\Delta t)_{,\xi}\times(\mathbf{x}^n+\frac{1}{2}\mathbf{U}\Delta t)_{,\eta})\ \mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}\eta\\ +&\frac{1}{12}\Delta t^3\int_0^1\int_0^1 \mathbf{WU}\cdot(\mathbf{U}_{,\xi}\times\mathbf{U}_{,\eta})\ \mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}\eta,\end{aligned}$$

这意味着，穿过表面的通量可以分为两部分计算：通过网格运动中点计算得到的通量，以及一个几何修正项。因此，总通量可近似表示为

$$\begin{aligned}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\Gamma_p}(\mathbf{F}(\mathbf{W})-\mathbf{WU})\cdot\mathbf{n}\ \mathrm{d}S\ \mathrm{d}t\approx&\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_0^1\int_0^1(\mathbf{F}(\mathbf{W})-\mathbf{WU})\cdot\mathbf{n}_{1/2}\ \mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}\eta\ \mathrm{d}t\\ &+\frac{1}{12}\Delta t^3\int_0^1\int_0^1\mathbf{W}^*\mathbf{U}\cdot(\mathbf{U}_{,\xi}\times\mathbf{U}_{,\eta})\ \mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}\eta,\end{aligned}$$

其中，$\mathbf{n}^{1/2}=(\mathbf{x}^n+1/2\mathbf{U}\Delta t)_\xi\times(\mathbf{x}^n+1/2\mathbf{U}\Delta t)_\eta$，$\mathbf{W}^*$表示时间区间开始时表面上的流动变量，其将按照以下步骤获得。因此，ALE 表述下有限体积法的最终形式可写为

$$\begin{aligned}\mathbf{W}^{n+1}|\Omega^{n+1}|-\mathbf{W}^n|\Omega^n|=-\sum_{p=1}^{6}\Bigg[&\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_0^1\int_0^1(\mathbf{F}(\mathbf{W})-\mathbf{WU})\cdot\mathbf{n}_{1/2}\ \mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}\eta\ \mathrm{d}t\\ &+\frac{1}{12}\Delta t^3\int_0^1\int_0^1\mathbf{W}^*\mathbf{U}\cdot(\mathbf{U}_{,\xi}\times\mathbf{U}_{,\eta})\ \mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}\eta\Bigg],\end{aligned}\tag{1}$$

其中，表面积分采用高斯积分进行近似，每个表面取 2×2 个积分点。

2.2. ALE 表述下的 *BGK*方程

气体动理学 BGK 方程可写为

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla_x f=\frac{g-f}{\tau},$$

其中，$f=f(\mathbf{x}\ t、\mathbf{v}\ \xi)$ 是气体分布函数，g是相应的平衡态，τ 是碰撞时间。$\mathbf{v}=(v_1、v_2、v_3)$ 是粒子速度。上述方程中的碰撞项描述了从非平衡态演化到平衡态的过程，并满足相容性条件

$$\int\frac{g-f}{\tau}\Psi\ \mathrm{d}\mathbf{v}\ \mathrm{d}\Xi=0,$$

其中，$\Psi = (1、v_1、v_2、v_3、\frac{1}{2}(v_1^2+v_2^2+v_3^2+\xi^2))^T$和$\mathrm{d}\Xi = \mathrm{d}\xi_1 \cdots \mathrm{d}\xi_K$($K$为内部自由度的数量，即对于三维流动，$K = (5-3\gamma)/(\gamma-1)$，而$\gamma$为比热比）。根据BGK方程的Chapman-Enskog展开，可以推导出宏观控制方程[35]。在连续介质区域内，可以重新整理BGK方程，并将气体分布函数展开为

$$f = g - \tau\mathcal{D}\mathbf{u}g + \tau\mathcal{D}\mathbf{u}(\tau\mathcal{D}\mathbf{u})g - \tau\mathcal{D}\mathbf{u}[\tau\mathcal{D}\mathbf{u}(\tau\mathcal{D}\mathbf{u})]g + \cdots,$$

其中$\mathcal{D}\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla$。采用零阶截断$f = g$，可得到欧拉方程。对于一阶截断$f = g - \tau\mathcal{D}\mathbf{u}g$，可得到动力黏度系数为$\mu = \tau p$（$p$为压力）、普朗特数为$\mathrm{Pr} = 1$的纳维–斯托克斯方程。

本文将在任意拉格朗日–欧拉（ALE）框架下，为三维流动构造一种高阶气体动理学格式。与网格$\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$相关的粒子速度为

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{U},$$

其中，$\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$为网格速度。运动参考系中的BGK方程可写为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{w}\cdot\nabla_x f = \frac{g-f}{\tau}. \tag{2}$$

任意拉格朗日-欧拉形式有限体积方法的通量（式（1））可通过以下方式计算：

$$\mathbb{F}(\mathbf{W}, \mathbf{x}^{1/2}) = (\mathbf{F}(\mathbf{W}) - \mathbf{W}\mathbf{U})\cdot\mathbf{n}_{1/2} = \int f(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}, \xi)\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}_{1/2}\boldsymbol{\Psi}\ \mathrm{d}\mathbf{v}\ \mathrm{d}\Xi.$$

在实际计算中，数值通量可通过对气体分布函数取与相应速度相关的矩得到。

$$\mathbb{F}'(\mathbf{W}, \mathbf{x}^{1/2}) = \int f(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}, \xi)\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}_{1/2}\boldsymbol{\Psi}'\ \mathrm{d}\mathbf{v}\ \mathrm{d}\Xi, \tag{3}$$

其中$\boldsymbol{\Psi}' = (1, w_1, w_2, w_3, \frac{1}{2}(w_1^2+w_2^2+w_3^2+\xi^2))^T$。$\mathbb{F}$的分量可由以下$\mathbb{F}'$的组合确定

$$\begin{cases}
\mathbb{F}_\rho = \mathbb{F}'_\rho, \\
\mathbb{F}_{\rho V_1} = \mathbb{F}'_{\rho W_1} + U_1\mathbb{F}'_\rho, \\
\mathbb{F}_{\rho V_2} = \mathbb{F}'_{\rho W_2} + U_2\mathbb{F}'_\rho, \\
\mathbb{F}_{\rho V_3} = \mathbb{F}'_{\rho W_3} + U_3\mathbb{F}'_\rho, \\
\mathbb{F}_{\rho E} = \mathbb{F}'_{\rho E} + U_1\mathbb{F}'_{\rho W_1} + U_2\mathbb{F}'_{\rho W_2} + U_3\mathbb{F}'_{\rho W_3} + \frac{1}{2}(U_1^2+U_2^2+U_3^2)\mathbb{F}'_\rho.
\end{cases}$$

定义旋转矩阵 $\mathbf{T}$ =diag(1，$\mathbf{T}'$，1)，并且

$$\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ -n_2 & n_1 + \frac{n_3^2}{1+n_1} & -\frac{n_2 n_3}{1+n_1} \\ -n3 & -\frac{n_2 n_3}{1+n_1} & 1 - \frac{n_3^2}{1+n_1} \end{pmatrix}, n_1 \neq -1,$$

并且当当 $n_1 = -1$ 时，$\mathbf{T}'$ 变为 diag($-1, -1$,1)，通量（式 3）可通过以下方式计算:

$$\mathbb{F}'(\mathbf{W}, \mathbf{x}^{1/2}) = \mathbf{T}^{-1} \int f(\tilde{\mathbf{x}}_{p,k}, t, \tilde{\mathbf{w}}, \xi) \tilde{w}_1 \tilde{\mathbf{\Psi}}' \, \mathrm{d}\tilde{\mathbf{w}} \, \mathrm{d}\Xi,$$

~其中，局部坐标的原点为 ~$\mathbf{x}$ =(0,0, 0)， x方向沿 $\mathbf{n}$，且 $\mathbf{\Psi}'$ =(1, $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3,$ 1 2($\tilde{w}_1^2 + \tilde{w}_2^2 + \tilde{w}_3^2 + \xi^2$))^T。局部坐标中的微观速度为 ~$\mathbf{w}$ = $\mathbf{T}'\mathbf{w}$ 和 $\tilde{w}_1 = n_1 w_1 + n_2 w_2 + n_3 w_3$。

2.3. 气体演化模型

为了在 $\mathbf{x}$ =(0, 0, 0)^T 处构造数值通量，BGK方程式（2）的积分解为

$$f(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}, \xi) = \frac{1}{\tau} \int_0^t g(\mathbf{x}', t', \mathbf{w}, \xi) e^{-(t-t')/\tau} \, \mathrm{d}t' + e^{t/\tau} f_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{w}), \tag{4}$$

其中轨迹为

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{w}(t - t').$$

在式(4)中， f_0 为初始气体分布函数， g 为相应的平衡态。$\mathbf{x}_0$ 是通过将$\mathbf{x}$ 处的粒子从时间 t 追溯至 $t = 0$得到的初始位置。

考虑到界面处可能存在不连续性，初始分布构造如下:

$$f_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{w}_0) = f_0^l(\mathbf{x}_0, \mathbf{w})(1 - \mathbb{H}(x_1)) + f_0^r(\mathbf{x}_0, \mathbf{w})\mathbb{H}(x_1), \tag{5}$$

其中， $\mathbb{H}$为Heaviside函数。 f_0^l和 f_0^r分别为界面左右两侧的初始气体分布函数，由相应的初始宏观变量及其空间导数确定。为达到二阶精度， f_0^k(**x**, **w**)通过在(**x**,**w**)处进行泰勒展开构造。

$$f_0^k(\mathbf{x}) = f_G^k(\mathbf{0}) + \frac{\partial f_G^k}{\partial x_i} x_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_G^k}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j \tag{6}$$

对于 $k = l$， r。根据 Chapman-Enskog展开， f_G^k 表示为

$$f_G^k = g^k [1 - \tau(\frac{\partial g^k}{\partial t} + \frac{\partial g^k}{\partial x_i} w_i)], \tag{7}$$

其中 g^k 是由单元界面两侧的宏观变量 $\mathbf{W}^k$定义的平衡分布函数。然后，通过泰勒展开定义平衡分布

$$g = g^c + \frac{\partial g^c}{\partial x_i}x_i + \frac{\partial g^c}{\partial t}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g^c}{\partial x_i \partial x_j}x_i x_j + \frac{\partial^2 g^c}{\partial x_i \partial t}x_i t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g^c}{\partial t^2}t^2 \tag{8}$$

在光滑流动区域，黏性流动的碰撞时间由 $\tau = \mu/p$ 确定，其中 μ 是动力黏度系数，p 是单元界面处的压力；对于无黏流动，碰撞时间应设为零。为正确捕捉未解析激波结构，需要增加数值耗散。指数函数部分中的物理碰撞时间τ 可替换为数值碰撞时间 τ_n。对于无黏流动，其设为

$$\tau_n = C_1\Delta t + C_2\frac{|p_l - p_r|}{p_l + p_r}\Delta t,$$

对于黏性流动，其为

$$\tau_n = \tau + C_2\frac{|p_l - p_r|}{p_l + p_r}\Delta t,$$

其中，p_l 和 p_r 分别表示单元界面左右两侧的压力。本文中，$C_1 = 0.01$，$C_2 = 5.0$。

将式（6）、式（7）和式（8）代入式（4），并取 τ 和 τ_n，即可得到三阶含时气体分布函数。然而，完整的三阶含时气体分布函数过于复杂，不便于数值实现。Zhou 等人提出了一种简化形式 [15]。引入一组新的系数如下:

$$ga_{x_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i}, \quad ga_t = \frac{\partial g}{\partial t}, \quad ga_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}, \quad ga_{x_i t} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial t}, \quad ga_{tt} = \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}.$$

这些系数可以通过以下方式获得

$$\begin{aligned}
&< a_{x_i} >= \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x_i}, \quad < a_t + a_{x_i}w_i >= 0, \\
&< a_{x_i x_j} >= \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial x_i \partial x_j}, \quad < a_{x_i t} + a_{x_i x_j}w_j >= 0, \quad < a_{tt} + a_{x_i t}w_i >= 0,
\end{aligned}$$

其中，$< \cdots >= \int (\cdots) g \Psi \, \mathbf{dw} \, \mathrm{d}\Xi$ 表示分布函数矩。平衡分布函数及其空间导数定义为

$$\begin{aligned}
\int g^c \Psi \ \mathrm{d}\mathbf{w} \ \mathrm{d}\Xi = \mathbf{W}^c &= \int_{w_1>0} g^l \Psi \ \mathrm{d}\mathbf{w} \ \mathrm{d}\Xi + \int_{w_1<0} g^r \Psi \ \mathrm{d}\mathbf{w} \ \mathrm{d}\Xi, \\
\int a_{x_i} g^c \ \mathrm{d}\mathbf{w} \ \mathrm{d}\Xi &= \int_{w_1>0} a_{x_i} g^l \ \mathrm{d}\mathbf{w} \ \mathrm{d}\Xi + \int_{w_1<0} a_{x_i} g^r \ \mathrm{d}\mathbf{w} \ \mathrm{d}\Xi, \\
\int a_{x_i x_j} g^c \ \mathrm{d}\mathbf{w} \ \mathrm{d}\Xi &= \int_{w_1>0} a_{x_i x_j} g^l \ \mathrm{d}\mathbf{w} \ \mathrm{d}\Xi + \int_{w_1<0} a_{x_i x_j} g^r \ \mathrm{d}\mathbf{w} \ \mathrm{d}\Xi.
\end{aligned}$$

最终简化的气体分布函数为

$$
\begin{aligned}
f\left(\mathbf{0},t,\mathbf{w},\xi\right) = g^{c}\left[1+a_{t}t+\frac{1}{2}a_{tt}t^{2}-\tau(a_{t}+a_{x_{i}}w_{i}+a_{tt}t+a_{x_{i}t}w_{i}t)\right] \\
-e^{-t/\tau_{n}}g^{c}(1-a_{x_{i}}w_{i}t) \\
+e^{-t/\tau_{n}}g^{l}(1-a_{x_{i}}w_{i}t)H(w_{1}) \\
+e^{-t/\tau_{n}}g^{r}(1-a_{x_{i}}w_{i}t)(1-H(w_{1}))
\end{aligned}
\tag{9}
$$

对上述分布函数取矩，即可得到式 (3) 中的通量。矩的计算方法见 [12]。式 (1) 中的表面守恒量 $\mathbf{W}^{*}$ 通过对平衡态 g^{c}取矩得到。

2.4. 单元平均空间梯度的演化

对式 (9) 中上述气体分布函数取矩，还可以得到高斯点处运动坐标系中的时间精确守恒流动变量

$$
\mathbf{W}'_{p_t,k}(t^{n+1}) = \mathbf{T}'\left(\int \widetilde{\mathbf{\Psi}} f(\tilde{\mathbf{x}}_{p_t,k},t^{n+1},\tilde{\mathbf{w}},\xi)\ \mathrm{d}\mathbf{w}\ \mathrm{d}\Xi\right),
$$

由此可得到绝对惯性坐标系中相应的守恒流动变量 $\mathbf{W}_{p_t,k}(t^{n+1})$。根据散度定理，在时间 t^{n+1} ，单元 Ω_i 上的单元平均梯度为

$$
\overline{\nabla\mathbf{W}}_{i}^{n+1} = \frac{2}{|\Omega_i|^{n}+|\Omega_i^{n+1}|}\sum_{p=1}^{6}\int \Gamma_p \mathbf{W}^{n+1}\mathbf{n}_p dS,
$$

其中，曲面积分可通过高斯求积计算

$$
\int \Gamma_p \mathbf{W}^{n+1}\mathbf{n}_p dS = \int_0^1\int_0^1 \mathbf{W}^{n+1}\mathbf{n}_{1/2}\ \mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}\eta \approx \sum_{k=1}^{4}|S_p|\omega_k \mathbf{W}_{p,k}(t^{n+1})\mathbf{n}_{p,k}.
$$

因此，通过上述过程即可得到守恒流动变量和单元平均梯度。下一节将构造紧致重构。

2.5. 网格运动公式

本文讨论了未直接给定网格速度时的两种网格运动方式。第一种方法是变分方法，它基于流动变量的梯度，用于使网格适应流动。第二种方法是拉格朗日速度方法，它基于单元中心拉格朗日节点求解器。该方法能够追踪移动的激波，并用于处理强激波。此外，为避免网格畸变，在确定网格速度后会进行平滑处理。

2.5.1. 变分方法

网格速度可以通过变分方法 [36], 确定，相应的欧拉-拉格朗日方程可由下式得到

$$
\begin{aligned}
(\omega x_{,\xi})_{,\xi} + (\omega x_{,\eta})_{,\eta} + (\omega x_{,\zeta})_{,\zeta} = 0, \\
(\omega y_{,\xi})_{,\xi} + (\omega y_{,\eta})_{,\eta} + (\omega y_{,\zeta})_{,\zeta} = 0, \\
(\omega z_{,\xi})_{,\xi} + (\omega z_{,\eta})_{,\eta} + (\omega z_{,\zeta})_{,\zeta} = 0,
\end{aligned}
$$

其中 (x, y, z) 和 (ξ, η, ζ) 分别表示物理坐标和计算坐标， ω 为监控函数，可选取为流动变量的函数，例如密度、速度、压力或其梯度。在数值测试中，若无特别说明，监控函数取如下形式

$$
\omega = \max\{2, \sqrt{1 + \alpha|\nabla\rho|^2}\}.
$$

为便于并行计算，采用有限元格式离散方程，并使用 PESTc 库[37] 求解所得线性方程组。网格分布可直接生成，网格速度由下式得到

$$
\mathbf{U}_{ijk} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t}.
$$

更多细节见 [36]。

2.5.2. 拉格朗日速度方法

网格速度可由单元中心拉格朗日节点求解器 [38] 确定。其基本思想是，在每个单元界面处求解两个半一维黎曼问题，并假定每个界面处的速度等于点速度。记 $C(p)$ 为共享公共顶点 p 的单元 c 集合， $F_p(c)$ 为单元 c中共享公共顶点 p 的面集合。网格速度 $\mathbf{U}_p$ 可由下式给出

$$
\mathbf{U}_p = \mathbb{M}_p^{-1} \sum_{c \in C(p)} \sum_{f \in F_p(c)} [S_f p_c \mathbf{N}_f^c + \mathbb{M}_{pcf} \mathbf{V}_c],
$$

其中， p_c和$\mathbf{V} + c$分别为单元 c的压力和速度， S_f，$\mathbf{N_f}$为表面积和法向方向。矩阵 $\mathbb{M}_{pcf}$ 的计算公式为

$$
\mathbb{M}_{pcf} = S_f \rho_c a_c (\mathbf{N}_f^c \otimes \mathbf{N}_f^c),
$$

其中， a_c 和 ρ_c 分别是单元 c 的声速和密度， $\otimes$是张量积算子，矩阵 $\mathbb{M}_p$ 是各个面的 $\mathbb{M}_{pcf}$ 之和，且为对称正定矩阵。在这种情况下，下一时间步中各点的坐标可通过以下方式计算:

$$
\mathbf{x}_p^{n+1} = \mathbf{x}_p^n + \mathbf{U}_p \Delta t.
$$

采用拉格朗日速度后，网格会发生畸变，计算可能因此崩溃。因此，需要通过以下方式对网格进行平滑：

$$\widetilde{\mathbf{x}}_p = (1-\omega)\mathbf{x}_p + \omega\frac{1}{N_p}\sum_{ip\in N(p)}\mathbf{x}_{ip},$$

其中，$N(p)$是与顶点p相连的顶点集合，N_p是$N(p)$的大小，ω是松弛系数。

2.6. 任意拉格朗日-欧拉方法的算法

算法1给出了完整的计算算法，其中粗体文本表示相较于欧拉表述所采用的特殊处理。每个时间步确定一次网格速度。因此，每一步都需要更新单元体积、法向量、面积以及界面处高斯点的坐标。采用单阶段高阶时间积分方法时，每一步只需计算一次几何变量。

算法1 任意拉格朗日-欧拉表述下的紧致气体动理学格式

1: **当**计算尚未完成 **时执行**2: 根据CFL数 Δt 计算时间步长3: **确定网格速度**4: **为虚单元定义边界条件**5: **重构单元分布**6: **推进界面**7: **更新几何形状**8: **更新单元平均守恒量及守恒量的一阶空间导数**9: **结束循环**

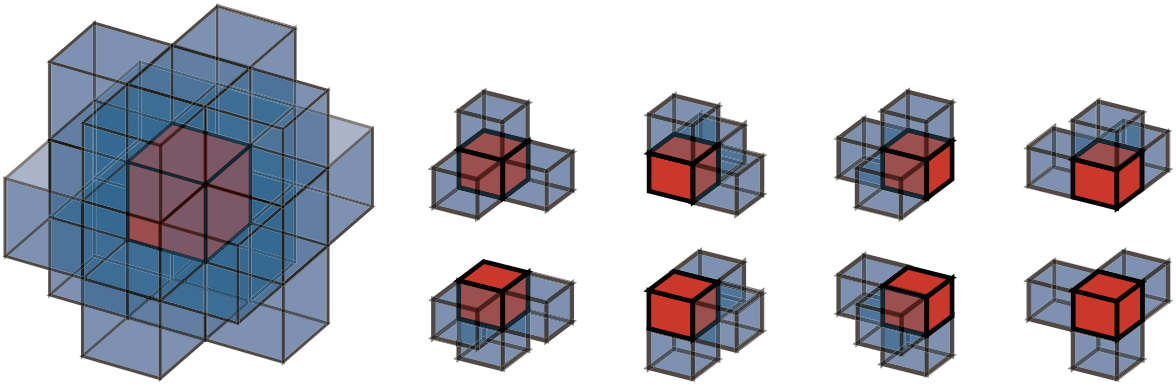
3. 紧致模板上的四阶广义ENO重构 s

本节介绍广义 ENO（GENO）重构[39, 28] 。GENO 方法采用一种自适应机制，在光滑流动区域从高阶线性重构过渡到间断附近的二阶重构。该方法在高精度与激波捕捉鲁棒性之间实现了最佳平衡：前者由覆盖宽广波数范围的高阶线性重构保证，后者则通过保持 ENO 性质得以保障。

3.1. 大模板的四阶线性紧致重构

对于目标单元 Ω_i，紧致重构的最大模板如图1(a)所示，其中包括目标单元、面邻接单元和边邻接单元。基于这一紧致重构模板，$_i$首次提出了五阶紧致GKS

。在该研究中，通过将边邻单元的单元平均梯度投影到特定方向上，实现了五阶紧致重构。本研究中的四阶线性紧致重构采用了 [28]提出的方法。唯一的区别是，为达到四阶精度，此处不需要目标单元的线平均数据。因此，这里不再给出四阶紧致重构的细节，详情请参阅 [28]。此外，为提高重构的鲁棒性，利用图1(b)所示的子模板构造了八个二阶多项式 p_j^1 (j =1，$\cdots$，8)。



(a) 大模板　　(b) 八个二阶子模板

图 1：四阶重构的重构模板

为在结构网格极端变形且不规则性较高的情况下保持强稳定性，本研究直接在物理网格上进行重构，而非在计算网格 [28] 上进行。对于静止网格，重构矩阵可预先计算并存储在内存中，以供后续使用。对于动网格，则需要在每个时间步计算重构矩阵。由于构建重构矩阵占据了主要的计算成本，传统的四阶重构需要使用完整矩阵，因此构成了性能瓶颈。为提高计算效率，缩小重构矩阵的规模是一个关键问题。本文提出了一种采用小尺寸矩阵的简化四阶紧致重构方法。四阶线性重构多项式为

$$p^3(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{n_1+n_2+n_3=0}^{3} \frac{q_{n_1,n_2,n_3}}{n_1!n_2!n_3!} \tilde{x}_1^{n_1} \tilde{x}_2^{n_2} \tilde{x}_3^{n_3},$$

其中，q_{n_1,n_2,n_3} 为重构系数，$\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)/h$ 为目标单元的归一化坐标（$\mathbf{x}_0$ 为单元中心的坐标），而 $h = |\Omega_0|/(\max_j S_j)$（$|\Omega_0|$ 为单元体积，S_j 为单元表面积）为单元尺寸。由于气体动理学格式能够给出单元平均值的一阶空间导数，因此可以先重构

一阶空间导数,

$$
\begin{aligned}
p^3_{,x_1} &= \frac{1}{2}q_{3,0,0}\tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2}q_{1,2,0}\tilde{x}_2^2 + \frac{1}{2}q_{1,0,2}\tilde{x}_3^2 + q_{2,1,0}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + q_{2,0,1}\tilde{x}_1\tilde{x}_3 + q_{1,1,1}\tilde{x}_2\tilde{x}_3 + O(\tilde{x}_i),\\
p^3_{,x_2} &= \frac{1}{2}q_{2,1,0}\tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2}q_{0,3,0}\tilde{x}_2^2 + \frac{1}{2}q_{0,1,2}\tilde{x}_3^2 + q_{1,2,0}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + q_{1,1,1}\tilde{x}_1\tilde{x}_3 + q_{0,2,1}\tilde{x}_2\tilde{x}_3 + O(\tilde{x}_i),\\
p^3_{,x_3} &= \frac{1}{2}q_{2,0,1}\tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2}q_{0,2,1}\tilde{x}_2^2 + \frac{1}{2}q_{0,0,3}\tilde{x}_3^2 + q_{1,1,1}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + q_{1,0,2}\tilde{x}_1\tilde{x}_3 + q_{0,1,2}\tilde{x}_2\tilde{x}_3 + O(\tilde{x}_i),
\end{aligned}
$$

其中， $O(\tilde{x}_i)$表示零阶项和一阶项。同时，单元平均斜率的分布函数可写为:

$$
p^3_{,x_i} = \frac{1}{2}b_{i,0}\tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2}b_{i,1}\tilde{x}_2^2 + \frac{1}{2}b_{i,2}\tilde{x}_3^2 + b_{i,3}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + b_{i,4}\tilde{x}_1\tilde{x}_3 + b_{i,5}\tilde{x}_2\tilde{x}_3 + O(\tilde{x}_i),
$$

因此，我们可以通过以下方式得到三阶重构系数$q_{i,\ j,\ k}$

$$
\begin{aligned}
&q_{3,0,0} = b_{1,0}, \quad q_{0,3,0} = b_{2,0}, \quad q_{0,0,3} = b_{3,0},\\
&q_{2,1,0} = (b_{1,3} + b_{2,0})/2, \quad q_{1,2,0} = (b_{1,1} + b_{2,3})/2, \quad q_{1,0,2} = (b_{1,2} + b_{3,4})/2,\\
&q_{2,0,1} = (b_{1,4} + b_{3,0})/2, \quad q_{0,2,1} = (b_{1,5} + b_{3,1})/2, \quad q_{0,1,2} = (b_{2,2} + b_{3,5})/2,\\
&q_{1,1,1} = (b_{1,5} + b_{2,4} + b_{3,3})/3.
\end{aligned}
$$

得到三阶重构系数后，可通过以下方式确定低阶系数

$$
\iiint_{\Omega_i} \sum_{n_1+n_2+n_3=0}^{2} \frac{q_{n_1,n_2,n_3}}{n_1!n_2!n_3!}\tilde{x}_1^{n_1}\tilde{x}_2^{n_2}\tilde{x}_3^{n_3}\ \mathrm{d}V = |\Omega_i|Q_i - \iiint_{\Omega_i} \sum_{n_1+n_2+n_3=3} \frac{q_{n_1,n_2,n_3}}{n_1!n_2!n_3!}\tilde{x}_1^{n_1}\tilde{x}_2^{n_2}\tilde{x}_3^{n_3}\ \mathrm{d}V.
$$

该重构严格保持目标单元的平均值，同时对相邻单元采用最小二乘最小化。值得注意的是，完整多项式和梯度分布使用相同的重构矩阵。与完整重构矩阵 [28] (20×61)相比，上述重构仅使用了一个维度为 10×19 的小矩阵。

3.2. 非线性 *GENO* 权重

广义 ENO（GENO）重构可写为

$$
R(\tilde{\mathbf{x}}) = \chi p^3(\tilde{\mathbf{x}}) - (1-\chi)\sum_{j=1}^{8}\bar{\omega}_j p_j^1(\tilde{\mathbf{x}}),
$$

它可以看作四阶多项式与基于子模板的二阶 ENO重构的凸组合，并通过广义ENO重构格式的路径函数 χ

实现[39, 28]。ENO 权重的计算方式为

$$\omega_j = \left(\frac{1}{\epsilon + \mathrm{IS}_j}\right)^5, \bar{\omega}_j = \frac{\omega_j}{\sum \omega_j}, j = 0, \cdots, 8$$

其中， $\epsilon = 10^{-16}$ 是一个较小的正常数，IS_j 是第 j个子模板的光滑度指标。光滑度指标的计算公式为

$$\mathrm{IS}_j = \sum_{|\alpha|=1}^{3} \Omega^{\frac{2}{3}|\alpha|-1} \iiint_{\Omega} \left(D^{\alpha} p_j^1(\mathbf{x})\right)^2 \, \mathrm{d}V,$$

其中， α 是一个多重指标， $D^{\alpha} = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}$是微分算子，且 $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$。路径函数 χ 的计算公式为

$$\chi = \tanh(C\alpha)/\tanh(C), C = 20,$$

其中

$$\alpha = \frac{2\alpha^H}{\alpha^H + \alpha^L}, \alpha^{H,L} = 1 + \left(\frac{\mathrm{IS}^{\tau}}{\mathrm{IS}^{H,L} + \epsilon}\right)^5.$$

A并且，光滑度指标通过四阶多项式计算，公式为

$$\mathrm{IS}^H = \sum_{|\alpha|=1}^{3} \Omega^{\frac{2}{3}|\alpha|-1} \iiint_{\Omega} \left(D^{\alpha} p^3(\mathbf{x})\right)^2 \, \mathrm{d}V \approx \sum_{|\alpha|=1}^{3} \Omega^{\frac{2}{3}|\alpha|} q^2_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}/h^{2|\alpha|},$$

$$\mathrm{IS}^L = \sum_{|\alpha|=1} \Omega^{\frac{2}{3}|\alpha|-1} \iiint_{\Omega} \left(D^{\alpha} p^3(\mathbf{x})\right)^2 \, \mathrm{d}V \approx \sum_{|\alpha|=1} \Omega^{\frac{2}{3}|\alpha|} q^2_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}/h^{2|\alpha|},$$

$$\mathrm{IS}^{\tau} = \sum_{|\alpha|=3} \Omega^{\frac{2}{3}|\alpha|-1} \iiint_{\Omega} \left(D^{\alpha} p^3(\mathbf{x})\right)^2 \, \mathrm{d}V \approx \sum_{|\alpha|=3} \Omega^{\frac{2}{3}|\alpha|} q^2_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}/h^{2|\alpha|}.$$

高斯点处所需的非平衡态变为

$$Q^{l,r}_{p,k} = R^{l,r}\left(\mathbf{x}_{p,k}\right), \left(Q^{l,r}_{x_i}\right)_{p,k} = \frac{\partial R^{l,r}}{\partial x_i}\left(\mathbf{x}_{p,k}\right), \left(Q^{l,r}_{x_i x_j}\right)_{p,k} = \frac{\partial^2 R^{l,r}}{\partial x_i \partial x_j}\left(\mathbf{x}_{p,k}\right).$$

4. 数值实验

本节对二维和三维算例进行了测试。对于二维问题，使用具有单层网格的三维求解器，并在 z 方向采用周期性边界条件。时间步由 $\Delta t = \min \Delta t_i$给出，其中 Δt_i在每个单元中定义

$$\Delta t_i = C_{CFL} \min\left(\frac{h}{|V|_i + c_i}, \frac{h^2}{3\nu_i}\right),$$

其中 C_{CFL} 为CFL数， $|V|_i, c_i$， 而 $\nu_i = (\mu/\rho)_i$ 为相关速度、声速和单元 i的运动黏度系数的大小。除非另有说明 [20]，这里将CFL数设为0.3。

4.1. 精度测试

通过三维流动中的密度扰动对流来测试精度阶。计算域为 $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$。本算例采用四个包含 $8^3, 16^3, 32^3, 64^3$ 四面体单元的均匀网格。时刻 t 的流场为

$$\begin{aligned} \rho(x,y,z) &= 1 + 0.2\sin(2\pi x_r)\sin(2\pi y_r)\sin(2\pi z_r), \\ p(x,y,z) &= 1, V_1 = V_2 = V_3 = 1, \end{aligned}$$

其中（x_r， y_r， z_r）为随时间变化的参考坐标

$$(x_r, y_r, z_r) = (x, y, z) - (1,1,1)t.$$

为了验证动网格下的精度阶，考虑如下形式的时变网格运动

$$\text{Motion 1:} \begin{cases} x &= x_0 + 0.1\sin(2\pi t)\sin(2\pi x_0)\sin(2\pi y_0)\sin(2\pi z_0), \\ y &= y_0 + 0.1\sin(2\pi t)\sin(2\pi x_0)\sin(2\pi y_0)\sin(2\pi z_0), \\ z &= z_0 + 0.1\sin(2\pi t)\sin(2\pi x_0)\sin(2\pi y_0)\sin(2\pi z_0), \end{cases}$$

$$\text{Motion 2:} \begin{cases} x &= x_0 + 0.05\sin(2\pi t)(\sin(2\pi x_0) + \sin(2\pi x_0)\sin(2\pi y_0)\sin(2\pi z_0)), \\ y &= y_0 + 0.05\sin(2\pi t)(\sin(2\pi y_0) + \sin(2\pi x_0)\sin(2\pi y_0)\sin(2\pi z_0)), \\ z &= z_0 + 0.05\sin(2\pi t)(\sin(2\pi z_0) + \sin(2\pi x_0)\sin(2\pi y_0)\sin(2\pi z_0)). \end{cases}$$

误差和数值阶数列于表1，结果表明动网格下达到了四阶精度。

表1：动网格中的误差和精度

mesh	$ErrorL^1$	OL^1	$Error_{L^2}$	O_{L^2}	$Error_{L^\infty}$	O_{L^∞}
运动1						
8^3	7.07E-03		8.98E-03		2.22E-02	
16^3	3.55E-04	4.31	4.65E-04	4.27	1.72E-03	3.69
32^3	2.27E-05	3.97	3.27E-05	3.83	3.52E-04	2.29
64^3	1.60E-06	3.83	3.08E-06	3.41	5.86E-05	2.59
运动 2						
8^3	9.01E-03		1.15E-02		3.98E-02	
16^3	5.82E-04	3.95	7.64E-04	3.92	4.01E-03	3.31
32^3	3.72E-05	3.97	4.82E-05	3.99	2.93E-04	3.78
64^3	2.71E-06	3.78	3.72E-06	3.69	5.82E-05	2.33

作为参考，静止网格的精度测试结果列于表2，结果表明动网格与固定网格的误差相当。

表2：静止网格下的误差与精度

mesh	$Error_{L^1}$	O_{L^1}	$Error_{L^2}$	O_{L^2}	$Error_{L^\infty}$	O_{L^∞}
8^3	7.07E-03		8.98E-03		2.22E-02	
16^3	3.55E-04	4.31	4.65E-04	4.27	1.72E-03	3.69
32^3	2.27E-05	3.97	3.27E-05	3.83	3.52E-04	2.29
64^3	1.60E-06	3.83	3.08E-06	3.41	5.86E-05	2.59

接下来，测试控制动网格上均匀流保持的几何守恒律。测试中采用相同的网格和相同的网格运动方法。初始条件设为

$$\rho(x,y,z)=1, p(x,y,z)=1, V_1=V_2=V_3=1.$$

$t=1$ 处的密度误差见表3。结果表明，误差降至机器零，从而满足几何守恒律。

表3：动网格中几何守恒律的误差

mesh	$Error_{L^1}$	$Error_{L^2}$	$Error_{L^\infty}$
运动1			
8^3	1.03E-15	1.28E-15	4.22E-15
16^3	1.34E-15	1.68E-15	5.66E-15
32^3	1.79E-15	2.24E-15	8.99E-15
64^3	2.68E-15	3.39E-15	1.82E-14
运动 2			
8^3	1.01E-15	1.27E-15	4.22E-15
16^3	1.33E-15	1.67E-15	6.44E-15
32^3	1.82E-15	2.28E-15	8.99E-15
64^3	2.74E-15	3.48E-15	1.82E-14

最后，将当前重构的计算效率与此前的四阶重构进行了比较 [28]。测试平台配备一颗运行频率为 4.2 GHz 的 AMD Ryzen Threadripper 2990WX 中央处理器，拥有 32 个核心和 128 GB 内存。代码使用 GCC 11.4.0 编译，采用 -O2 优化标志，并链接 Open MPI 4.1.5。该测试用例使用了 32 个核心。测试用例采用了定义为运动1的网格运动。计算时间如表4所示，结果表明，当前重构的计算效率比此前的重构快约 2.4 至 3.0 倍。

4.2. 双剪切层

双剪切层是用于评估不可压缩流格式精度和分辨率的典型测试问题。Minion 等人对不同分辨率下的解进行了比较。 [40] 在

表4：效率　　比较：当前和先前重构的总执行时间及加速比
用于平流　　密度扰动

mesh	当前重构(s)	先前重构(s)	加速比
16^3	20	49	2.45
32^3	292	789	2.70
64^3	4236	12472	2.94

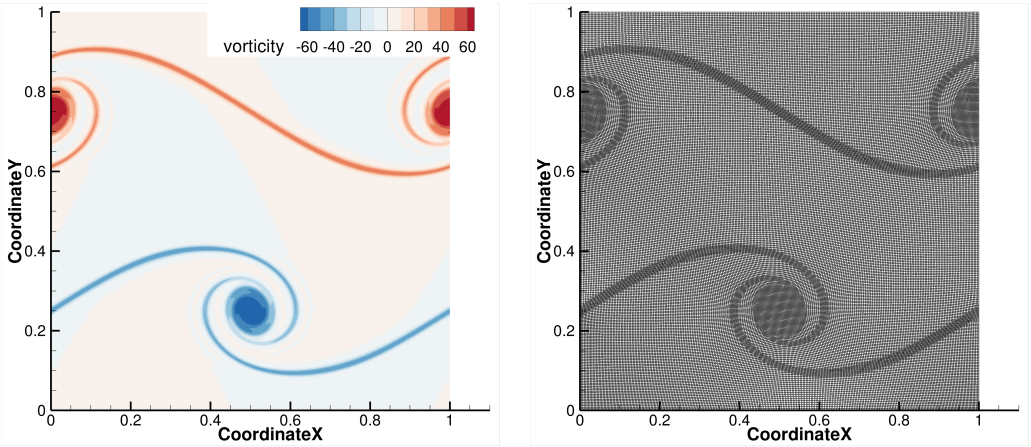
不同分辨率下。计算域为 $[0,1]\times[0,1]$，在 x 和 y 方向均采用周期性边界条件。网格单元总数为 192×192。初始流场设置为

$$V_1(x,y)=\begin{cases}\tanh\left(k(y-0.25)\right), & y\le 0.5,\\ \tanh\left(k(0.75-y)\right), & y>0.5,\end{cases}$$
$$V_2(x,y)=\delta\sin\left(2\pi x\right),\rho(x,y)=1,p(x,y)=\rho/(\gamma M^2),M=0.15,\gamma=1.4,$$

其中 $k=100$和 $\delta=0.05$。运动黏度为 $\nu=5.0\times10^{-5}$。此算例采用线性重构。网格变形采用变分方法，网格变形的监控函数设为

$$\omega=\sqrt{1+0.01|\partial_y V_1-\partial_x V_2|^2}.$$

时间 $t=0.8$ 的解如图2所示。ALE 网格上的涡量等值线如图2(a)所示。网格变形如图2(b)所示，可以看出网格在剪切层区域内进行了自适应加密。沿着



(a) ALE 网格上的涡量等值线　　(b) 网格变形

图2：时间 $t=0.8$时，含有 192^2 个网格单元的双剪切层解

图3中显示了曲线 $x=0.5$，可以看出涡量集中在剪切层区域。对比任意拉格朗日-欧拉方法与固定网格结果可知，

ALE方法比固定网格方法更能解析剪切层，尤其是在涡量极值处，这得益于通过监控函数进行的网格自适应。

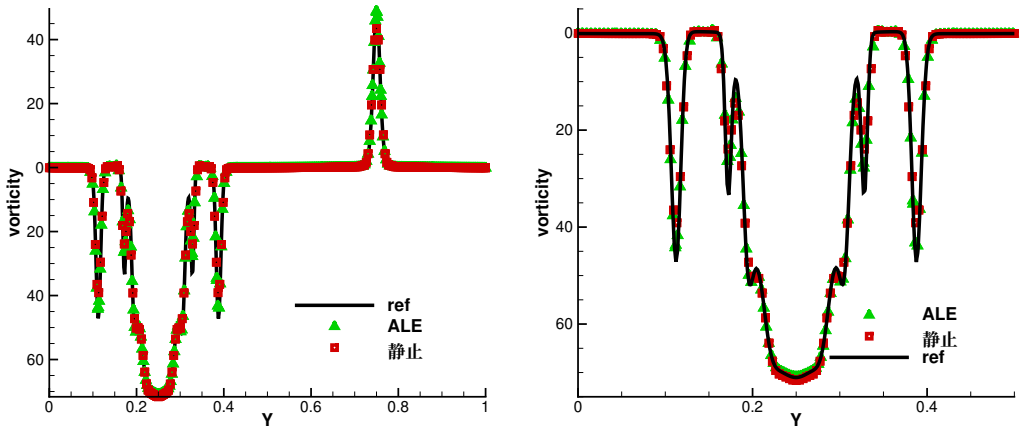


图3：沿直线 $x = 0.5$ 的涡量分布

4.3. 二维黎曼问题

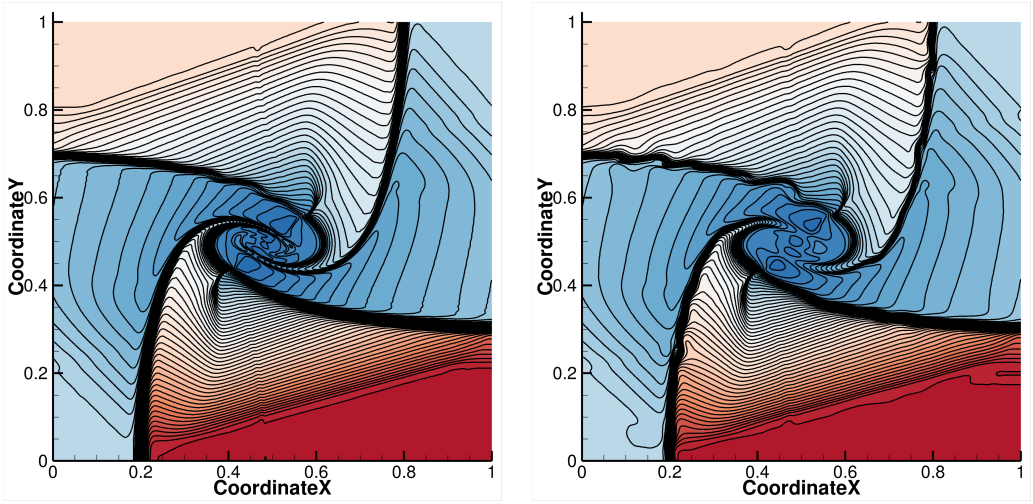
本小节模拟了欧拉方程的两个标准二维黎曼问题。计算域为 $[0, 1] \times [0, 1]$。网格分辨率为400×400。采用变分网格变形方法，变形系数为 $\alpha = 0.01$。

第一个测试算例是包含接触间断的黎曼问题，这是欧拉方程的标准基准问题。初始条件指定如下：

$$(\rho, V_1, V_2, p) = \begin{cases} (1, 0.75, -0.5, 1), & x > 0.5, y > 0.5, \\ (2, 0.75, 0.5, 1), & x < 0.5, y > 0.5, \\ (1, -0.75, 0.5, 1), & x < 0.5, y < 0.5, \\ (3, -0.75, -0.5, 1), & x > 0.5, y < 0.5. \end{cases}$$

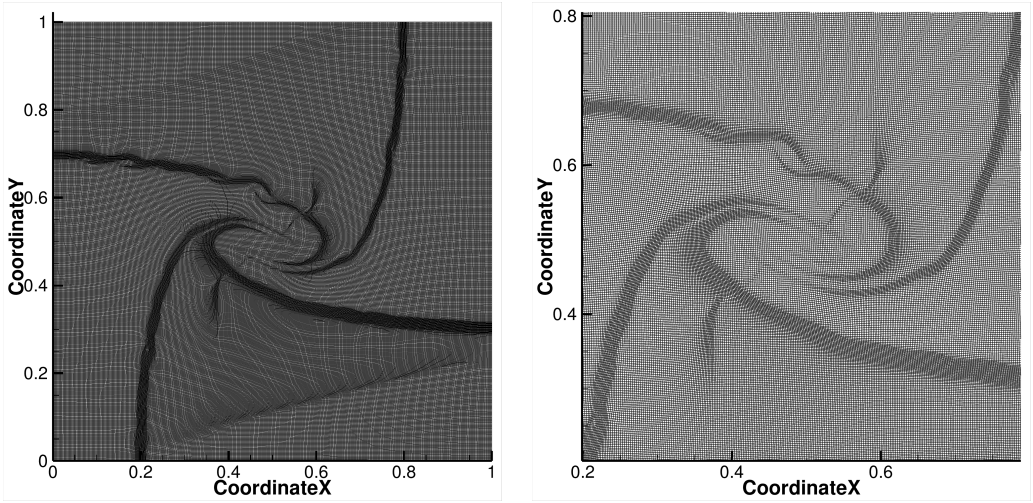
该算例模拟了四个初始接触间断之间的剪切不稳定性。图4展示了时刻 $t = 0.4$ 的解，其中可以看到四个初始接触间断之间的剪切不稳定性。对比任意拉格朗日-欧拉结果与静止网格结果可知，任意拉格朗日-欧拉解在接触间断处出现了不稳定性，表明其分辨率高于静止网格。图5展示了时刻 $t = 0.4$ 任意拉格朗日-欧拉网格上的网格分布及其局部放大图，表明网格在剪切不稳定区域进行了自适应加密。

第二个测试算例是激波相互作用问题，这是欧拉方程的经典测试问题



(a) 静止网格　　(b) ALE 网格

图4：时刻 $t = 0.4$ 含接触间断的二维黎曼问题的密度等值线（等值线水平从 0.2 到 3.0，增量为 0.05）



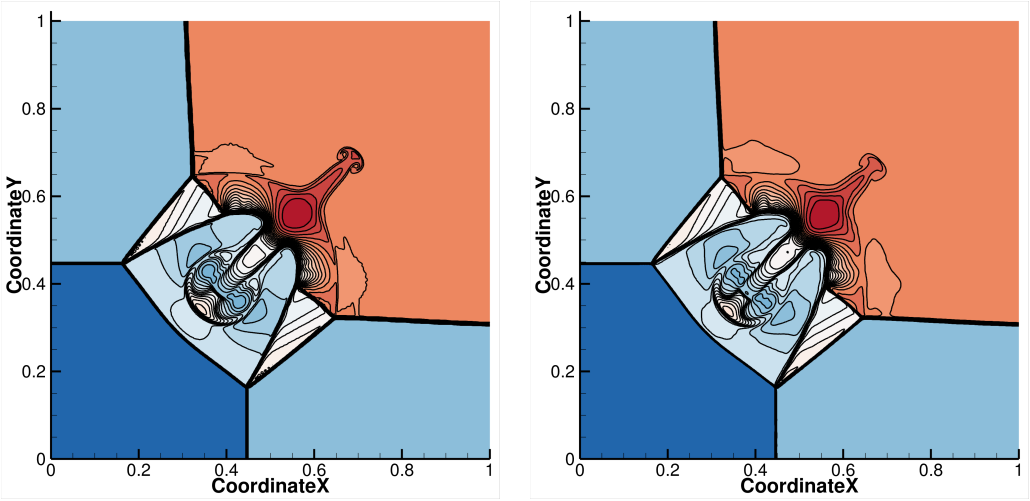
(a) 网格变形　　(b) 网格变形放大图

图5：时刻$t = 0.4$含接触间断的二维黎曼问题的网格分布

方程。初始条件设定为

$$(\rho, V_1, V_2, p) = \begin{cases} (1.5, 0, 0, 1.5), & x > 0.7, y > 0.7, \\ (0.5323, 1.206, 0, 0.3), & x < 0.7, y > 0.7, \\ (0.138, 0, 0, 0.1), & x < 0.7, y < 0.7, \\ (0.5323, 0, 1.206, 0.3), & x > 0.7, y < 0.7. \end{cases}$$

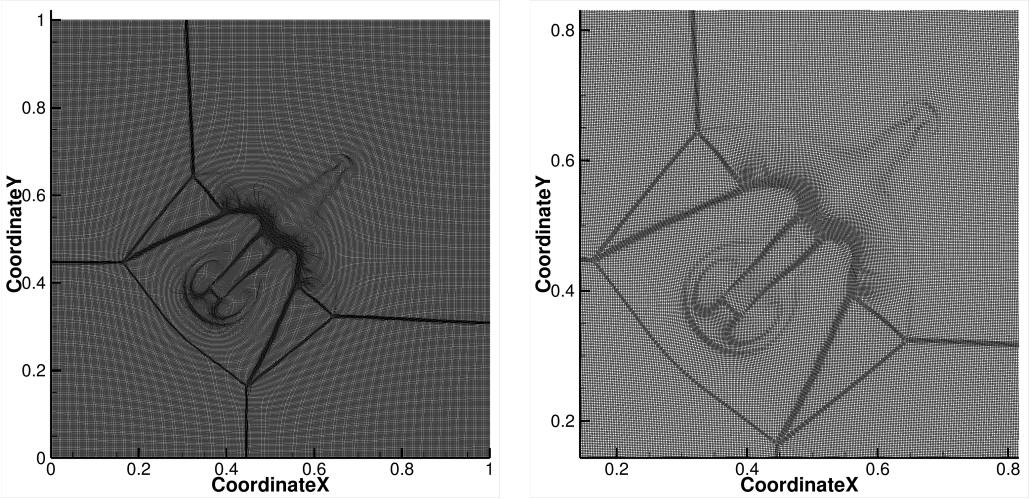
在此情况下，四个初始激波相互作用，形成了复杂得多的波型。如 [41], 初始激波 S_{23}^{-} 在尖点处分岔为反射激波、马赫杆和滑移线。反射激波与 S_{12}^{-}激波相互作用，产生新的激波。时间 $t = 0.6$ 的解如图6所示，图中显示激波彼此相互作用，形成了复杂得多的波型。静止网格和 ALE 网格上的密度等值线如图6所示。



(a) 静止网格　　(b) ALE 网格

图6：时间 $t = 0.6$二维激波相互作用黎曼问题的密度等值线（等值线级别从 0.2 到 1.7，间隔为 0.05）

ALE 与静止网格结果的比较表明，ALE方法的空间分辨率略高于固定网格方法，并且在滑移线上表现出轻微的数值不稳定性。图 7 展示了 ALE 网格的构型及局部放大图，说明激波相互作用区进行了自适应网格加密。



(a) 网格变形　　(b) 网格变形放大图

图 7：二维激波相互作用黎曼问题在时间 $t = 0.6$ 的网格分布

4.4. 球对称 *Sod* 问题

球对称 Sod 问题是黎曼问题的标准测试问题。初始条件设定如下：

$$(\rho, V_1, V_2, V_3, p) = \begin{cases} (1, 0, 0, 0, 1), & r < 0.5 \\ (0.125, 0, 0, 0, 0.1), & r > 0.5 \end{cases}$$

计算域为 $(x, y, z) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$，网格数为$50 \times 50 \times 50$。在满足 $x = 0$、$y = 0$ 和 $z = 0$ 的平面上施加对称边界条件，在满足 $x = 1$、$y = 1$ 和 $z = 1$ 的平面上施加非反射边界条件。球对称问题的精确解可由以下带几何源项的一维系统给出

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho \\ \rho U \\ \rho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial r}\begin{pmatrix} \rho U \\ \rho U^2 + p \\ \rho U E + p U \end{pmatrix} = -\frac{d-1}{r}\begin{pmatrix} \rho U \\ \rho U^2 \\ \rho U E + p U \end{pmatrix},$$

其中，径向记为 r，U 为径向速度，d 为空间维数。网格变形采用变分方法和拉格朗日速度方法。对于变分方法，系数设为 $\alpha = 1.0$。对于拉格朗日速度方法，每 20 个时间步应用一次额外的网格平滑过程，松弛系数为 $\omega = 0.5$。此算例的 CFL数设为 0.3。时间 $t = 0.25$ 的网格分布和密度等值线分别如图 9 和图 8 所示。

对于拉格朗日速度方法，网格分布如图 8 所示。在激波与接触间断之间的区域，网格进行了加密。对于

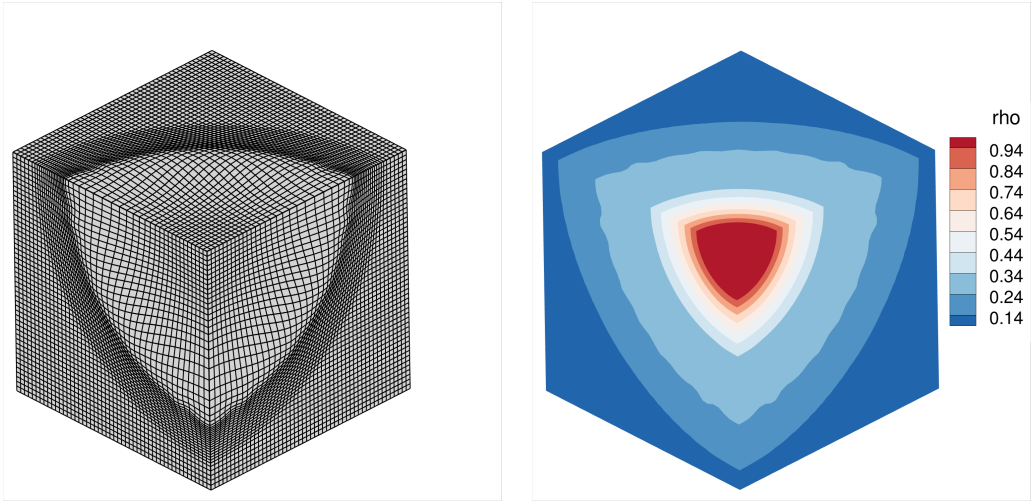


图 8：采用拉格朗日速度求解球对称 Sod 问题

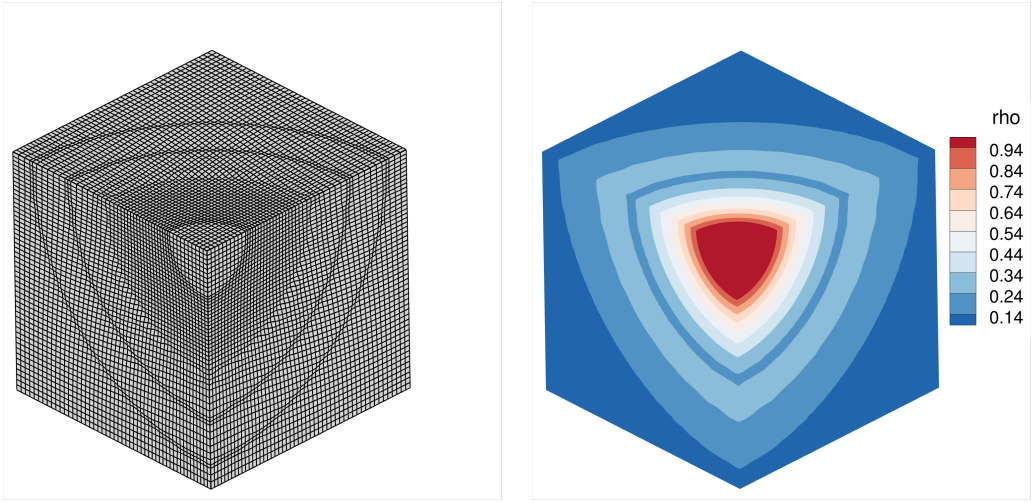


图 9：采用变分方法求解球对称 Sod 问题

变分方法下，网格分布如图 9 所示，其中激波、接触间断和稀疏波处的网格更加密集。对角线 $x = y = z$ 上的密度和压力分布如图 10 所示。该解与精确解吻合良好。

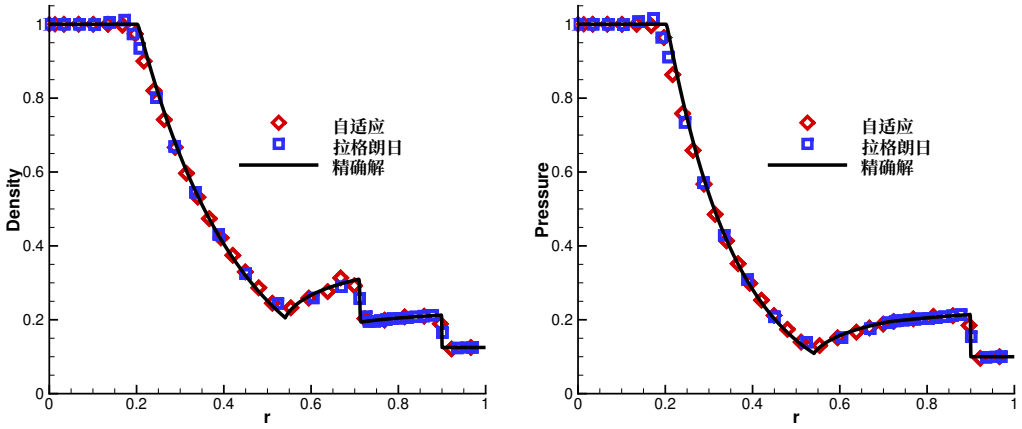
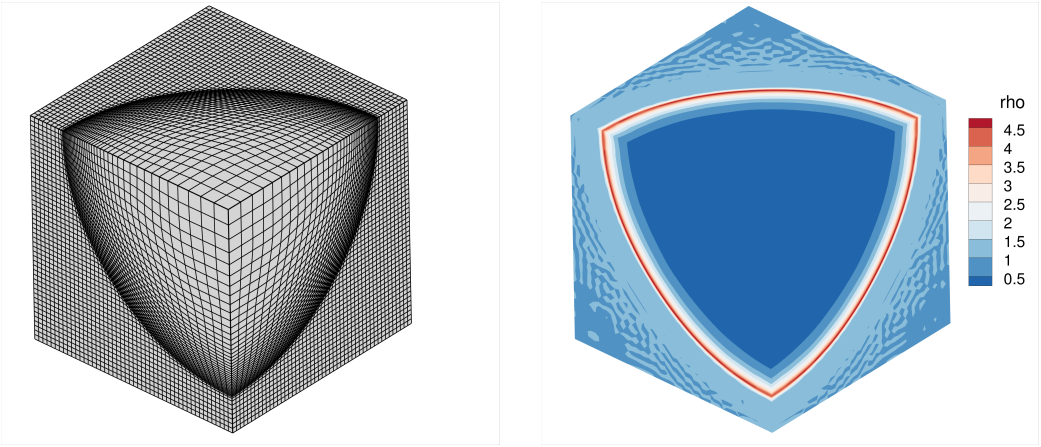


图 10：对角线 $x = y = z$上的密度和压力分布

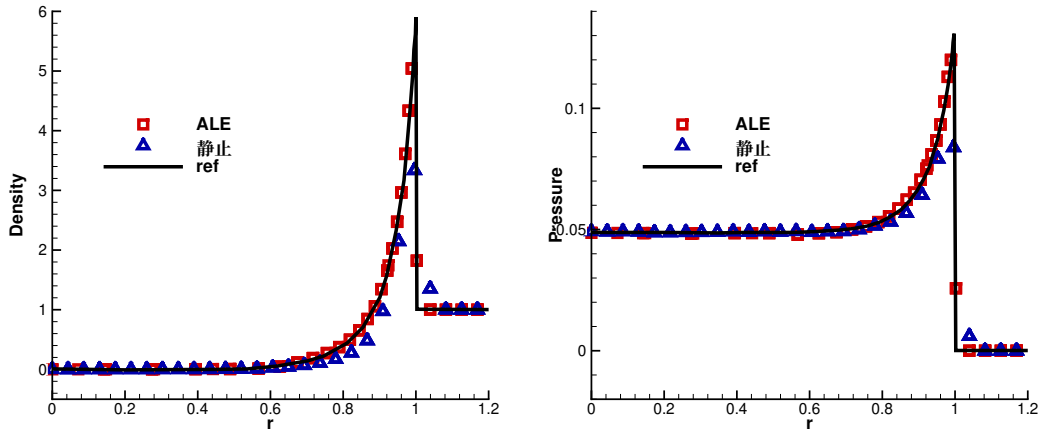
4.5. Sedov 问题

Sedov爆炸波是流体力学中的一个标准问题，用于模拟从能量点源发出的爆炸波。它是拉格朗日速度方法和ALE方法的基准问题。计算域为 $[0, 1.2]^3$，本测试案例采用 $h = 1/40$ 的均匀网格作为初始网格。流体采用理想气体状态方程建模，其中 $\gamma = 1.4$。除包含原点的单元外，初始条件为密度 $\rho = 1$ 、压力 $p = 1e - 6$ 的均匀静态场。该单元中的初始压力定义为 $p = (\gamma - 1)\epsilon_0/V$，其中 $\epsilon_0 = 0.106384$ 为释放的总能量， V 为单元体积。在平面 $x = 0$, $y = 0$ 和 $z = 0$ 上施加非对称边界条件，而在平面 $x = 1.2$, $y = 1.2$ 和 $z = 1.2$ 上使用非反射边界条件。网格运动采用拉格朗日速度实现，并每五个时间步应用一次平滑过程，松弛系数为 $\omega = 0.5$。为避免原点处初始奇异性引发的不稳定，采用较小的CFL数0.01。经过十步后，模拟转为常规CFL数0.3。图11显示了时间 $t = 1$ 时的网格分布和密度等值线，可以看出网格在激波周围自适应加密。图12显示了从(0，0，0)到(1。2，1。2，1。2)的对角线上的密度和压力分布，以及均匀静止网格的解。结果表明，与静态网格方法相比，ALE方法得到的解与精确解更为吻合。与均匀网格相比，ALE方法在极值点处得到的解更接近精确解。



（a）网格分布　　（b）密度等值线

图 11：Sedov 问题：$t = 1$ 时的网格分布和密度等值线



（a）密度　　(b) 压力

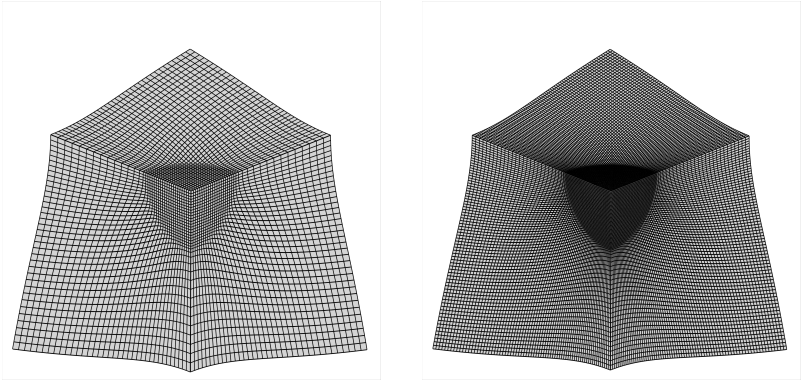
图 12：Sedov 问题：沿对角线的密度和压力分布

4.6. Noh 问题

该案例是验证ALE代码的典型测试案例。考虑一个尺寸为 $[0, 1.2] \times [0, 1.2] \times [0, 1.2]$ 的三维区域。本测试案例采用网格数为 36^3 和72^3 的两个网格。初始条件设为均匀密度 $\rho = 1$ 和内能 $e = p/(\gamma - 1) = 1 \times 10^{-4}$，其中 $\gamma = 5/3$。初始速度为$\mathbf{V} = (-x/r, -y/r, -z/r)$，其中 r 是到原点的距离。在原点处产生一个轴对称激波，并以恒定速度传播。在时间 $t = 0.6$ 时，激波位于 $r = 0.2$。密度为 [42] 的精确解是

$$\rho = \begin{cases} 64, & r < 0.2 \\ (1 + t/r)^2, & r > 0.2 \end{cases}.$$

在直线 $x = 0$、 $y = 0$ 和 $z = 0$ 上施加非对称边界条件，其余所有边界均采用非反射边界条件。网格运动采用拉格朗日速度实现，并每隔 5 个时间步进行一次平滑，松弛系数为 $\omega = 0.8$。此算例的 CFL数设为 0.05。图13 展示了采用 36^3 和 72^3 的最终网格，可以观察到网格集中在激波后区域。

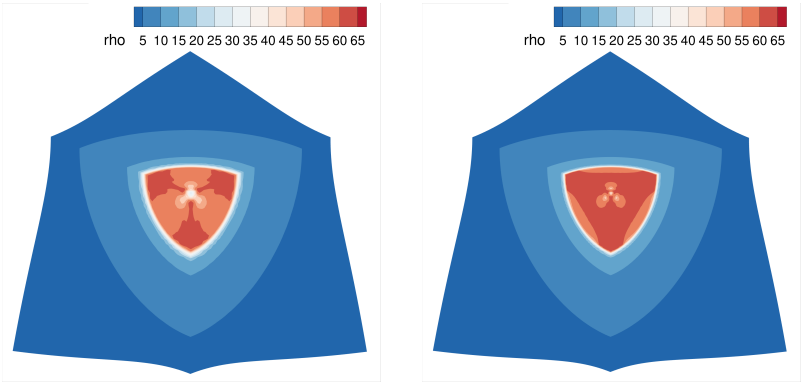


(a) 网格分布（网格 36^3

(b) 网格分布（网格 72^3

图13：Noh 问题中采用网格 36^3 和 72^3 的网格分布

时刻 $t = 0.6$ 的密度等值线如图14 所示，其分布采用

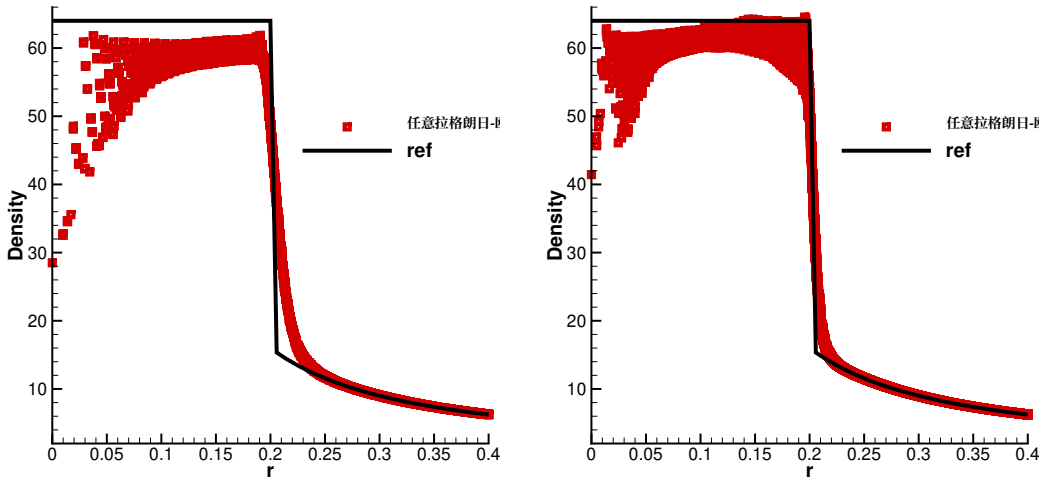


(a) 密度等值线采用 mesh 36^3

（b）带网格的密度等值线 72^3

图14：Noh 问题中使用的密度等值线和网格 36^3 and 72^3

整个计算域内相对于 r 的结果如图15所示。数值解与精确解吻合良好。粗网格和细网格的对比表明，细网格能够得到更准确的解，并减少数值振荡。



(a) 密度分布相对于 r 与网格 36^3

(b) 密度分布相对于 r 与网格 72^3

图15：Noh 问题在 $t = 0.6$ 时关于 r 的密度分布

*4.7. Saltzmann*问题

Saltzmann问题是一个模拟圆柱体内活塞驱动流体流动的测试算例，用于考察平面激波在倾斜笛卡尔网格上的运动。计算域为 $[0, 1] \times [0, 0.1] \times [0, 0.1]$。网格在三个方向上均匀分布，间距为 $h = 0.01$。 x坐标的网格畸变定义为

$$\Delta x = (0.5y + z - 15yz) \sin(\pi x).$$

如上所述，相应的初始网格如图16所示。初始时，一个理想的

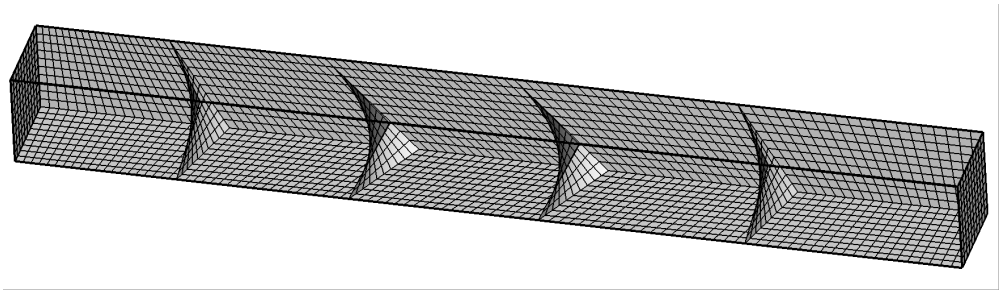
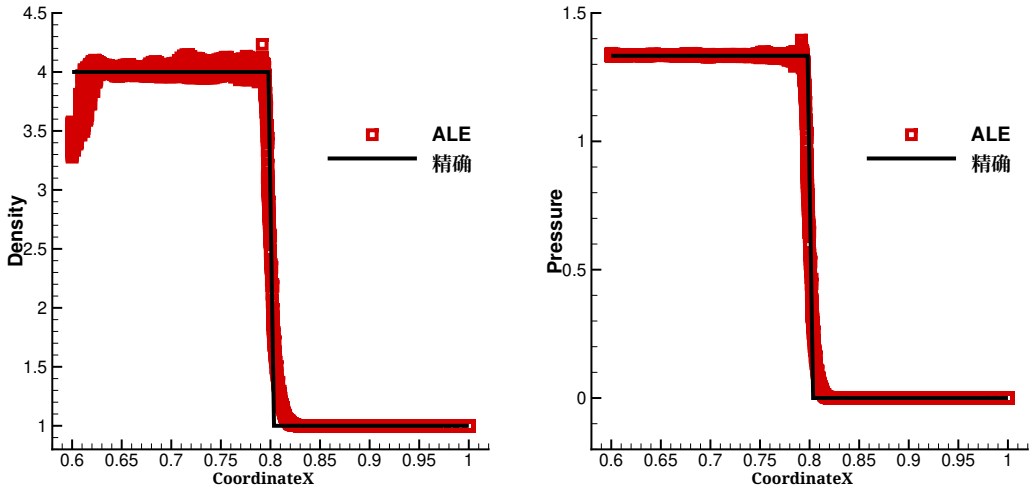


图16：Saltzmann问题的初始网格

单原子气体，其 $\rho = 1$， $e = 10^{-4}$， $\gamma = 5/3$ 充满整个箱体。左侧壁面以恒定速度 1 向右运动，充当活塞。其他边界则作为无黏反射壁。气体受压时会产生激波，并向右传播，速度超过活塞。网格运动采用拉格朗日速度。每经过 20 个时间步，便进行一次平滑处理，松弛系数为 $\omega = 0.8$。

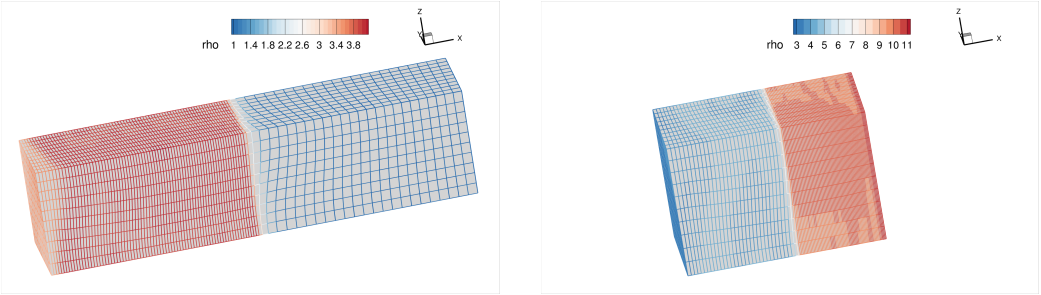
图17展示了计算域在 $t = 0.6$ 时的完整解，表明该解趋向于一维结果。密度的下降可能是由于增加了



（a）密度　　(b) 压力

图17：Saltzmann问题： $t = 0.6$时的密度和压力分布

壁面处的熵。在 $t = 0.6$ 时，激波位于 $x = 0.8$，激波后解为 $\rho = 4$ 和 $p = 1.333$。在时间 $t = 0.85$，激波因壁面而反弹。图18展示了拉格朗日速度方法能够处理激波运动问题，其中给出了时刻 $t = 0.6$ 和 $t = 0.85$ 的网格分布。



(a) $t = 0.6$　　(b) $t = 0.85$

图18：Saltzmann问题：不同时刻的网格和密度分布

5. 结论

本文在三维结构网格上，基于任意拉格朗日–欧拉（ALE）框架构建了一种高阶紧致气体动理学格式。气体动理学公式能够在单元界面处提供时间精确的解，因此可以采用单阶段三阶通量计算；而龙格–库塔方法则需要多个

子步。本文采用紧致GKS，通过使用小模板实现高阶精度。紧致重构基于GKS，可同时演化单元平均流动变量及其梯度。基于紧致模板，本文采用降内存重构以降低计算成本[32]。测试结果表明，与基准方法相比，计算效率提升了2.4× 至3.0× 倍。本文还采用广义 ENO（GENO）方法，通过引入一种路径函数，将四阶多项式与二阶 ENO 重构相结合，从而实现高阶精度和鲁棒性。从低速黏性流到高速激波的数值测试算例表明，该方法具有良好的鲁棒性和精度。

致谢

本研究得到国家重点研发计划（项目编号：2022YFA1004500）、国家自然科学基金（项目编号：12172316、92371107、12302378 和 92371201）、香港研究资助局（项目编号：16301222 和 16208324）、国家计算物理重点实验室资助以及陕西省自然科学基础研究计划（项目编号：2025SYS-SYSZD-070）的支持。

参考文献

[1] C. Hirt, A. Amsden, J. Cook，一种适用于所有流速的任意拉格朗日-欧拉计算方法，计算物理学杂志 14 (3) (1974) 227–253。[2] M. Dumbser, A. Uuriintsetseg, O. Zanotti，刚性双曲平衡律的任意拉格朗日–欧拉单步加权本质无振荡格式，计算物理通讯 14 (2) (2013) 301–327。[3] W. Boscheri, M. Dumbser，针对三维守恒与非守恒双曲系统、基于非结构四面体网格的直接任意拉格朗日–欧拉ADER-WENO有限体积格式，计算物理学杂志 275 (2014) 484–523。[4] V. A. Titarev, E. F. Toro，ADER：任意高阶Godunov方法，科学计算杂志 17 (2002) 609–618。[5] V. Titarev, E. Toro，三维非线性双曲系统的ADER格式，计算物理学杂志 204 (2) (2005) 715–736。[6] E. Gaburro, W. Boscheri, S. Chiocchetti, C. Klingenberg, V. Springel, M. Dumbser，具有拓扑变化的移动 Voronoi 网格上的高阶直接任意拉格朗日–欧拉格式，计算物理学杂志 407 (2020) 109167。

[7] S. Busto, M. Dumbser, L. Río-Martín，适用于纳维–斯托克斯方程的移动非结构网格任意拉格朗日-欧拉混合有限体积/有限元方法，应用数学与计算 437 (2023) 127539。[8] D. Henneaux, P. Schrooyen, P. Chatelain, T. Magin，可压缩黏性相之间跳跃条件的高阶强制处理：一种用于锐界面模拟的扩展内罚间断Galerkin方法，计算机辅助应用力学与工程 415 (2023) 116215。[9] S. Chiocchetti, I. Peshkov, S. Gavrilyuk, M. Dumbser，表面张力作用下可压缩流一阶双曲型表述的高阶ADER格式与GLM旋度清理，计算物理学杂志 426 (2021) 109898。[10] J. Brackbill, J. Saltzman，二维奇异问题的自适应分区，计算物理学杂志 46 (3) (1982) 342–368。[11] M. Kucharik, M. Shashkov, 交错多材料任意拉格朗日–欧拉方法的守恒多材料重映射，计算物理学杂志 258 (2014) 268–304。[12] K. Xu，纳维–斯托克斯方程的气体动理学BGK格式及其与人工耗散和Godunov方法的联系，计算物理学杂志 171 (1) (2001) 289–335。[13] Q. Li, K. Xu, S. Fu，高阶气体动理学纳维–斯托克斯流动求解器，计算物理学杂志 229 (19) (2010) 6715–6731。[14] J. Luo, K. Xu，流体动力学方程的高阶多维气体动理学格式，中国科学：技术科学 56 (2013) 2370–2384。[15] G. Zhou, K. Xu,高阶气体动理学演化模型通量函数的简化，计算物理学杂志 339 (2017) 146–162。[16] N. Liu, H. Tang，一维和二维流动模拟的高阶精度气体动理学格式，计算物理通讯 15 (4) (2014) 911–943。[17] D. C. Seal, Y. Güçlü, A. J. Christlieb，双曲守恒律的高阶多导数时间积分器，Journal of Scientific Computing 60 (2014) 101–140。[18] J. Li, Z. Du，Lax–Wendroff型流动求解器的两阶段四阶时间精确离散I：双曲守恒律，SIAM 科学计算杂志 38 (5) (2016) A3046–A3069。[19] J. Li，两阶段四阶方法：计算流体力学（CFD）中的时空耦合，Advances in Aerodynamics 1 (1) (2019) 1–36。

[20] X. Ji、F. Zhao、W. Shyy、K. Xu，面向三维流动模拟的紧致高阶气体动理学格式，AIAA Journal 59 (8) (2021年) 2979–2996.[21] X. Ji、L. Pan、W. Shyy、K. Xu，面向欧拉方程与纳维–斯托克斯方程的紧致四阶气体动理学格式，计算物理学杂志 372 (2018) 446–472.[22]F. Zhao、X. Ji、W. Shyy、K. Xu，具有类谱分辨率、用于可压缩流动模拟的紧致更高阶气体动理学格式，Advances in Aerodynamics 1 (1) (2019年) 13.[23] F. Zhao、X. Ji、W. Shyy、K. Xu，一种具有类谱分辨率、可捕捉声波与激波的紧致高阶气体动理学格式，International Journal of Computational Fluid Dynamics 34 (10) (2020) 731–756.[24] F. Zhao、X. Ji、W. Shyy、K. Xu，用于声波与激波计算的非结构网格紧致高阶气体动理学格式，计算物理学杂志 449 (2022) 110812.[25] F. Zhao、X. Ji、W. Shyy、K. Xu，计算流体力学的直接建模及用于可压缩流动模拟的高阶紧致格式构建，计算物理学杂志 477 (2023年) 111921.[26] X. Ji、W. Shyy、K. Xu，基于梯度压缩的三维混合非结构网格紧致高阶气体动理学格式，International Journal of Computational Fluid Dynamics 35 (7) (2021年) 485–509.[27] Y. Zhang、X. Ji、K. Xu，旋转坐标系及滑移网格上的高阶紧致气体动理学格式，International Journal of Computational Fluid Dynamics (2023年) 1–20.[28] Y. Yang、F. Zhao、K. Xu，面向可压缩流的结构网格高阶紧致气体动理学格式的有效实现，arXiv 预印本 arXiv:2508.08965 (2025).[29] L. Pan、F. Zhao、K. Xu，采用 WENO 重构的高阶任意拉格朗日-欧拉气体动理学格式，计算物理学杂志 417 (2020) 109558.[30] L. Pan、K. Xu，用于三维计算的任意拉格朗日–欧拉高阶气体动理学格式，Journal of Scientific Computing 88 (8) (2021年) 1–26.[31] Y. Zhang、K. Xu，任意拉格朗日–欧拉表述下的高阶紧致气体动理学格式，计算物理学杂志 515 (2024) 113270.[32] L. Hongyu、X. Ji、M. Yunpeng、Z. Qian、K. Xu，三维非结构网格上的内存缩减紧致气体动理学格式，Computer Physics Communications 320 (2025) 109981.

[33] Y. Wang、X. Ji、L. Pan，一种高效且稳健的高阶紧致 ALE 气体动理学格式，计算物理学杂志 (2025) 114398.[34] W.-H. Hui、K. Xu，基于统一坐标的计算流体力学，施普林格，2012年.[35] K. Xu，用于非定常可压缩流动模拟的气体动理学格式，计算流体力学年度讲座系列第29届，Rhode-Saint-Genese，比利时 (1998年).[36] H. Tang、T. Tang，一维与二维双曲守恒律的自适应网格方法，SIAM 数值分析杂志 41 (2) (2003) 487–515.[37] S. Balay、W. D. Gropp、L. C. McInnes、B. F. Smith，面向对象数值软件库中并行性的高效管理，载于：E. Arge、A. M. Bruaset、H. P. Langtangen（编），《科学计算中的现代软件工具》，Birkhäuser 出版社，1997年，第163–202页.[38] P.-H. Maire、B. Nkonga，用于单元中心离散拉格朗日流体动力学的多尺度 Godunov 型方法，计算物理学杂志 (2013年) 799–821.[39] F. Zhao、K. Xu，用于可压缩流动模拟的紧致气体动理学格式中的广义 ENO 重构，计算物理学杂志 (2025) 114612.[40] M. L. Minion、D. L. Brown，欠分辨二维不可压缩流动模拟的性能（二），计算物理学杂志 138 (2) (1997年) 734–765.[41] P. D. Lax、X.-D. Liu，用正性格式求解气体动力学二维黎曼问题，SIAM 科学计算杂志 19 (2) (1998年) 319–340.[42] W. Noh，采用人工黏性与人工热通量计算强激波的误差，计算物理学杂志 72 (1) (1987年) 78–120.