arXiv:2602.09508v1 [math.RA] 10 Feb 2026

块型李代数上的2-局部导子

QIUFAN CHEN 和 XIAOHAN GUO

Abstract. 本文旨在研究块型李代数上的2-局部导子。块型李代数是一种具有若干外导子的无限维李代数。我们证明，块型李代数上的每个2-局部导子都是导子。

Contents

1. 引言 1
2. 预备知识 3
3. 关于 $\mathcal{B}$参考文献的2-局部导子 3
9

1. Introduction

全文中，我们分别用 $\mathbb{C}$， $\mathbb{Z}$， $\mathbb{Z}_+$， $\mathbb{N}$ 表示复数、整数、非负整数和正整数集。文中所讨论的所有代数和向量空间均定义在 $\mathbb{C}$ 上。

作为导子的推广，ˇSemrl 在 [15]中引入了 2-局部导子的概念。该文中，他证明了在 $B(H)$ 上的每个 2-局部导子都是导子； $B(H)$ 是无限维可分希尔伯特空间 H 上所有有界线性算子构成的代数。随后，人们借鉴并推广了这一思想，研究不同类结合代数上的 2-局部导子，例如冯·诺依曼代数以及交换正则代数上的矩阵代数 $[2,3]$。2-局部导子的概念确实重要且有趣

2010 数学主题分类。 17B40, 17B65, 17B68.关键词和短语。 块型李代数、导子、2-局部导子。本文得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12271345 和 12361006）及上海市科学技术委员会（项目编号：25ZR1402183）的资助。1

对于代数而言。该领域的主要问题是确定所有 2-局部导子，并考察它们是否必然是（全局）导子。对于李（超）代数， [4], 中的研究证明，在代数闭域上的有限维半单李代数（域的特征为零）上的每个 2-局部导子都是导子；而每个维数大于二的有限维幂零李代数都存在一个不是导子的 2-局部导子。 [23] 中的作者证明，在代数闭域（特征为零）上，除 $A(n, n)$ 外，基本典型李超代数上的所有 2-局部超导子都是导子。近年来，许多学者关注其他一些李（超）代数上的 2-局部（超）导子的研究，参见 [1,5,7,8,19–22,26,28]。目前尚无统一方法来确定李（超）代数上的所有 2-局部（超）导子。

块型李代数最早由 Block [6] 于 1958年提出。众所周知，这类李代数与多种著名李代数密切相关，例如 Virasoro 代数 [13], 、Virasoro 类代数 [27], 、（广义）Cartan 型李代数[25], 、W-无穷代数 [10] ，并在可积系统 [11, 12]中有所应用。基于这些原因，许多作者对块型李代数的结构理论和表示论进行了深入研究，参见 [9, 14, 16–18]。然而，由于其固有的复杂性，文献对块型李代数的结构理论，尤其是其局部性质，至今关注不足。本文旨在研究块型李代数上的 2-局部导子，该李代数记作 $\mathcal{B}$，其基为$\{L_{\alpha,i} \mid \alpha \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{Z}_+\}$ ，其关系为

$$[L_{\alpha,i}, L_{\beta,j}] = ((\alpha-1)(j+1) - (\beta-1)(i+1))L_{\alpha+\beta,i+j}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}, i, j \in \mathbb{Z}_+.$$

这个特殊的块型李代数之所以有趣，是因为其中心扩张由$\mathcal{B}$ 给出

$$[L_{\alpha,i}, L_{\beta,j}] = ((\alpha-1)(j+1)-(\beta-1)(i+1))L_{\alpha+\beta,i+j}+\delta_{\alpha+\beta,0}\delta_{i,0}\delta_{j,0}\frac{\alpha^3-\alpha}{6}C, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}, i, j \in \mathbb{Z}_+,$$

其中包含一个由 $\{L_{\alpha,0}, C \mid \alpha \in \mathbb{Z}\}$ 张成的子代数，该子代数与 Virasoro 代数同构。 $\mathcal{B}$ 的导子代数、自同构群和拟有限表示已在 [16, 24]中得到研究。

本文的组织结构如下。第 2 节回顾下文所需的一些基本定义和已知结果。第 3 节证明，Block 型李代数 $\mathcal{B}$ 上的每个 2-局部导子都是导子。

2. Preliminaries

本节给出一些必要的定义和预备结果 s.

李代数 $\mathcal{L}$ 上的**导子** 是一个线性映射 $D:\mathcal{L}\to\mathcal{L}$，满足

$$D([x,y])=[D(x),y]+[x,D(y)],\ \forall x,y\in\mathcal{L}.$$

$\mathcal{L}$ 的所有导子组成的集合记为 Der($\mathcal{L}$)。对于每个元素 $a\in\mathcal{L}$，映射

$$\mathrm{ad}(a):\mathcal{L}\to\mathcal{L},\ \mathrm{ad}(a)(x)=[a,x],\ \forall x\in\mathcal{L}$$

是 $\mathcal{L}$的一个导子，这种形式的导子称为**内导子**。所有内导子组成的集合记为 Inn($\mathcal{L}$)，它是 Der($\mathcal{L}$)的一个理想。

映射 $\Delta:\mathcal{L}\to\mathcal{L}$（不一定是线性的）称为**2-局部导子**，如果对于任意 x，$y\in\mathcal{L}$，都存在一个导子 $D_{x,\ y}\in$ Der($\mathcal{L}$)（依赖于 x，y），使得 $\Delta(x)=D_{x,\ y}(x)$ 且 $\Delta(y)=D_{x,\ y}(y)$。特别地，对于任意 $x\in\mathcal{L}$ 和 $k\in\mathbb{C}$，都存在 $D_{kx,\ x}\in$ Der($\mathcal{L}$)，使得

$$\Delta(kx)=D_{kx,x}(kx)=kD_{kx,x}(x)=k\Delta(x).$$

现在我们回顾并建立若干辅助结果。

引理 2.1. *(参见 [24])*$\mathrm{Der}\mathcal{B}=\mathrm{ad}\mathcal{B}\oplus\mathbb{C}d$，其中 d 是由 $d(L_{\beta,j})=\beta L_{\beta,j}$ 定义的外导子，对所有 $\beta\in\mathbb{Z},j\in\mathbb{Z}_+$均成立。

由引理 2.1 可直接得到以下结论。

引理 2.2. 设 Δ 是 $\mathcal{B}$上的一个 *2*-局部导子。那么对于任意 $x,y\in\mathcal{B}$，存在 $\mathcal{B}$ 的一个导子 $D_{x,y}$，使得 $\Delta(x)=D_{x,y}(x)$ $\Delta(y)=D_{x,y}(y)$ 并且可写为

$$D_{x,y}=\mathrm{ad}(\sum_{(\alpha,i)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+}a_{\alpha,i}(x,y)L_{\alpha,i})+\lambda(x,y)d,$$

其中 $a_{\alpha,i}(x,y)$ $\lambda(x,y)\in\mathbb{C}$，而 d 由引理 *2.1* 给出。

3. 2-local derivations on $\mathcal{B}$

在本节中 ，我们将确定块型李代数 $\mathcal{B}$ 上的所有 2-局部导子 .

引理 3.1。设 Δ是 $\mathcal{B}$上的一个 *2*-局部导子，并令 $(\beta,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+$满足 $\Delta(L_{\beta,j})=0$。那么对任意 $y\in\mathcal{B}$，有

$$D_{L_{\beta,j},y}=\mathrm{ad}(\frac{\beta}{\beta+j}\lambda(L_{\beta,j},y)L_{0,0}+\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}a_{k_i,i}(L_{\beta,j},y)L_{k_i,i})+\lambda(L_{\beta,j},y)d\ \text{ for }\ j\neq-\beta,\tag{3.1}$$

$$D_{L_{\beta,-\beta},y} = \mathrm{ad}(\sum_{i\in\mathbb{Z}_+} a_{-i,i}(L_{\beta,-\beta},y)L_{-i,i}) + \delta_{\beta,0}\lambda(L_{0,0},y)d, \tag{3.2}$$

其中 $k_i = \frac{\beta i+\beta-i+j}{j+1} \in \mathbb{Z}$, $a_{k_i,i}(L_{\beta,j},y)\, a_{-i,i}(L_{\beta,-\beta},y)\ \lambda(L_{\beta,j},y)\ \lambda(L_{0,0},y) \in \mathbb{C}$ 且 $\delta_{\beta,0}$ 是克罗内克δ。

证明。 根据引理 2.2，对于任意 $j \in \mathbb{Z}_+$，我们可以假设

$$D_{L_{\beta,j},y} = \mathrm{ad}(\sum_{(\alpha,i)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+} a_{\alpha,i}(L_{\beta,j},y)L_{\alpha,i}) + \lambda(L_{\beta,j},y)d$$

其中 $a_{\alpha,i}(L_{\beta,j},y)\ \lambda(L_{\beta,j},y) \in \mathbb{C}$。首先考虑情形 $j \neq -\beta$。在这种情况下，我们有 e

$$\begin{aligned}\Delta(L_{\beta,j}) &= D_{L_{\beta,j},y}(L_{\beta,j})\\ &= \sum_{(\alpha,i)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+} [a_{\alpha,i}(L_{\beta,j},y)L_{\alpha,i}, L_{\beta,j}] + \lambda(L_{\beta,j},y)d(L_{\beta,j})\\ &= \sum_{(\alpha,i)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+} ((\alpha-1)(j+1)-(\beta-1)(i+1))a_{\alpha,i}(L_{\beta,j},y)L_{\alpha+\beta,i+j} + \beta\lambda(L_{\beta,j},y)L_{\beta,j}\\ &= 0.\end{aligned}$$

对于 $(\alpha,i) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+ \setminus \{(0,0)\}$，通过比较上述方程中 $L_{\alpha+\beta,i+j}$和 $L_{\beta,j}$的系数，分别得到

$$((\alpha-1)(j+1)-(\beta-1)(i+1))a_{\alpha,i}(L_{\beta,j},y) = 0$$

and

$$-(\beta+j)a_{0,0}(L_{\beta,j},y) + \beta\lambda(L_{\beta,j},y) = 0.$$

第一个方程表明，只要 $\alpha \neq \frac{\beta i+\beta-i+j}{j+1}$，就有 $a_{\alpha,i}(L_{\beta,j},y) = 0$。由第二个方程可得 $a_{0,0}(L_{\beta,j},y) = \frac{\beta}{\beta+j}\lambda(L_{\beta,j},y)$。因此，(3.1)成立。 在剩余的情形$j = -\beta$下，经过直接计算可得

$$\begin{aligned}\Delta(L_{\beta,-\beta}) &= D_{L_{\beta,-\beta},y}(L_{\beta,-\beta})\\ &= \sum_{(\alpha,i)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+} [a_{\alpha,i}(L_{\beta,-\beta},y)L_{\alpha,i}, L_{\beta,-\beta}] + \lambda(L_{\beta,-\beta},y)d(L_{\beta,-\beta})\\ &= \sum_{(\alpha,i)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+} (1-\beta)(\alpha+i)a_{\alpha,i}(L_{\beta,-\beta},y)L_{\alpha+\beta,i-\beta} + \beta\lambda(L_{\beta,-\beta},y)L_{\beta,-\beta}\\ &= 0.\end{aligned}$$

对于 $(\alpha, i) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+ \setminus \{(0,0)\}$，比较上式中 $L_{\beta,-\beta}$和 $L_{\alpha+\beta,i-\beta}$的系数可得

$$\beta\lambda(L_{\beta,-\beta}, y) = 0,$$
$$(1-\beta)(\alpha+i)a_{\alpha,i}(L_{\beta,-\beta}, y) = 0,$$

这进而蕴含 $\lambda(L_{\beta,-\beta}, y) = 0$ 对 $\beta \neq 0$ 以及$a_{\alpha,i}(L_{\beta,-\beta}, y) = 0$ 对 $\alpha \neq -i$。这就证明了(3.2)，从而证明了该引理。□

引理 *3.2.* 设 Δ 是 $\mathcal{B}$ 上的一个2-局部导子，使得 $\Delta(L_0,0) = \Delta(L_1,0) = 0$。则对任意$(\beta, j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+$，我们有 $\Delta(L_{\beta,j}) = j\xi_{L_\beta,j}L_{\beta,j}$，其中$\xi_{L_\beta,j} = -\lambda(L_1,0, L_{\beta,j})$。

证明。 根据 $\Delta(L_{0,0}) = \Delta(L_{1,0}) = 0$ 以及引理 3.1，对任意$(\beta, j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+$，我们有

$$D_{L_{1,0},L_{\beta,j}} = \mathrm{ad}(\lambda(L_{1,0}, L_{\beta,j})L_{0,0} + \sum_{i\in\mathbb{Z}_+} a_{1,i}(L_{1,0}, y)L_{1,i}) + \lambda(L_{1,0}, L_{\beta,j})d,$$
$$D_{L_{0,0},L_{\beta,j}} = \mathrm{ad}(\sum_{i\in\mathbb{Z}_+} a_{-i,i}(L_{0,0}, L_{\beta,j})L_{-i,i}) + \lambda(L_{0,0}, L_{\beta,j})d$$

对于某些 $\lambda(L_{1,\,0},\ L_{\beta,\,j})a_{1,\,i}(L_{1,\,0},\ L_{\beta,\,j})a_{-i,\,i}(L_{0,\,0},\ L_{\beta,\,j})\ \lambda(L_{0,\,0},\ L_{\beta,\,j}) \in \mathbb{C}$。现在我们进行显式计算

$$\begin{aligned}
\Delta(L_{\beta,j}) =& D_{L_{1,0},L_{\beta,j}}(L_{\beta,j}) \\
=& [\lambda(L_{1,0}, L_{\beta,j})L_{0,0}, L_{\beta,j}] + \sum_{i\in\mathbb{Z}_+}[a_{1,i}(L_{1,0}, L_{\beta,j})L_{1,i}, L_{\beta,j}] + \lambda(L_{1,0}, L_{\beta,j})d(L_{\beta,j}) \\
=& -\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}(\beta-1)(i+1)a_{1,i}(L_{1,0}, L_{\beta,j})L_{1+\beta,i+j} - j\lambda(L_{1,0}, L_{\beta,j})L_{\beta,j}, \\
\Delta(L_{\beta,j}) =& D_{L_{0,0},L_{\beta,j}}(L_{\beta,j}) \\
=& \sum_{i\in\mathbb{Z}_+}[a_{-i,i}(L_{0,0}, L_{\beta,j})L_{-i,i}, L_{\beta,j}] + \lambda(L_{0,0}, L_{\beta,j})d(L_{\beta,j}) \\
=& -\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}(i+1)(\beta+j)a_{-i,i}(L_{0,0}, L_{\beta,j})L_{-i+\beta,i+j} + \beta\lambda(L_{0,0}, L_{\beta,j})L_{\beta,j}.
\end{aligned}$$

将上述关于 $\Delta(L_{\beta,j})$的两个表达式等同起来，并比较两边$L_{1+\beta}$、$_{i+j}$的系数，我们立即得到$(\beta-1)(i+1)a_{1,i}(L_1,0, L_{\beta,j}) = 0$对所有 $i \in \mathbb{Z}_+$成立。因此，$\Delta(L_{\beta,j}) = j\xi_{L_\beta,j}L_{\beta,j}$，其中$\xi_{L_\beta,j} = -\lambda(L_1,0, L_{\beta,j}) \in \mathbb{C}$，即为所求。□

引理*3.3.* 设 Δ 是 $\mathcal{B}$ 上的一个*2*-局部导子，使得 $\Delta(L_0,0) = \Delta(L_1,0) = 0$。则对任意 $x = \sum_{(\gamma,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+} \mu_{\gamma,k}L_{\gamma,k}$，我们有 $\Delta(x) = \xi_x \sum_{(\gamma,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+} k\mu_{\gamma,k}L_{\gamma,k}$，其中 $\xi_x = -\lambda(L_n,0,x) \in \mathbb{C}$。

证明。结合 $\Delta(L_{0,0}) = \Delta(L_{1,0}) = 0$ 与引理 3.2，可知对于任意$n \in \mathbb{Z}$，都有 $\Delta(L_{n,0}) = 0$。由此结合引理 3.1 得到

$$D_{L_{0,0},x} = \mathrm{ad}(\sum_{i\in\mathbb{Z}_+} a_{-i,i}(L_{0,0},x)L_{-i,i}) + \lambda(L_{0,0},x)d,$$

$$D_{L_{n,0},x} = \mathrm{ad}(\lambda(L_{n,0},x)L_{0,0} + \sum_{i\in\mathbb{Z}_+} a_{ni+n-i,i}(L_{n,0},x)L_{ni+n-i,i}) + \lambda(L_{n,0},x)d \text{ for } n \neq 0,$$

其中 $\lambda(L_{n,0},x)a_{ni+n-i,i}(L_{n,0},x) \in \mathbb{C}$。将这些代入 $\Delta(x) = D_{L_{0,0},x}(x) = D_{L_{n,0},x}(x)$，其中 $n \neq 0$，可得

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= -\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\sum_{(\gamma,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+} (i+1)(k+\gamma)a_{-i,i}(L_{0,0},x)\mu_{\gamma,k}L_{-i+\gamma,i+k} + \lambda(L_{0,0},x)\sum_{(\gamma,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+}\gamma\mu_{\gamma,k}L_{\gamma,k}\\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\sum_{(\gamma,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+} (i+1)(nk+n-k-\gamma)a_{ni+n-i,i}(L_{n,0},x)\mu_{\gamma,k}L_{ni+n-i+\gamma,i+k}\\ &\quad - \lambda(L_{n,0},x)\sum_{(\gamma,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+} k\mu_{\gamma,k}L_{\gamma,k}.\end{aligned}$$

在第二个等式中取充分大的 n，得到 $\Delta(x) = \xi_x \sum_{(\gamma,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+} k\mu_{\gamma,k}L_{\gamma,k}$，且 $\xi_x = -\lambda(L_{n,0},x)$。证明完毕。□

引理3.4. 设 Δ 是 $\mathcal{B}$ 上的一个 *2*-局部导子，满足 $\Delta(L_{0,0}) = \Delta(L_{1,0}) = \Delta(L_{-1,1}) = 0$。则对于任意 $p \in \mathbb{N}$ 和 $y \in \mathcal{B}$，有

$$D_{L_{p,0}+L_{-2p,2p},y} = \mathrm{ad}(\sum_{\substack{\alpha+i\in p\mathbb{Z}_+\\(\alpha,i)\neq(0,0)}} a_{\alpha,i}(L_{p,0}+L_{-2p,2p},y)L_{\alpha,i})$$

对于某些 $a_{\alpha,i}(L_{p,0}+L_{-2p,2p},y) \in \mathbb{C}$。

证明。对于任意 $p \in \mathbb{N}$，根据 $\Delta(L_{0,0}) = \Delta(L_{1,0}) = 0$ 以及引理 3.2，我们可知

$$\Delta(L_{p,0}+L_{-2p,2p}) = 2p\xi_{L_{p,0}+L_{-2p,2p}}L_{-2p,2p} \tag{3.3}$$

对某些 $\xi_{L_{p,0}+L_{-2p,2p}} \in \mathbb{C}$。同时，利用 $\Delta(L_{-1,1}) = 0$ 和引理 3.1，我们可以假设 $D_{L_{-1,1},y} = \mathrm{ad}(\sum_{i\in\mathbb{Z}_+} a_{-i,i}(L_{-1,1},y)L_{-i,i})$，其中 $a_{-i,i}(L_{-1,1},y) \in \mathbb{C}$，由此得到

$$\Delta(L_{p,0}+L_{-2p,2p}) = D_{L_{-1,1},L_{p,0}+L_{-2p,2p}}(L_{p,0}+L_{-2p,2p})$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}_+} [a_{-i,i}\left(L_{-1,1}, L_{p,0}+L_{-2p,2p}\right) L_{-i,i}, L_{p,0}] \\
&= -\sum_{i\in\mathbb{Z}_+} p(i+1)a_{-i,i}(L_{-1,1}, L_{p,0}+L_{-2p,2p})L_{-i+p,i}.
\end{aligned}
$$

结合 (3.3)，这迫使

$$\Delta(L_{p,0}+L_{-2p,2p})=0. \tag{3.4}$$

对于任意 $y\in\mathcal{B}$，由引理 2.2 可设

$$D_{L_{p,0}+L_{-2p,2p},y}=\mathrm{ad}(\sum_{(\alpha,i)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+} a_{\alpha,i}(L_{p,0}+L_{-2p,2p},y)L_{\alpha,i})+\lambda(L_{p,0}+L_{-2p,2p},y)d$$

对某个 $a_{\alpha,\ i}(L_{p,\ 0}+L_{-2p,\ 2p},\ y)$ $\lambda(L_{p,\ 0}+L_{-2p,\ 2p},\ y)\in\mathbb{C}$。将此式与（3.4）结合可得

$$
\begin{aligned}
\Delta(L_{p,0}+L_{-2p,2p}) =& D_{L_{p,0}+L_{-2p,2p},y}(L_{p,0}+L_{-2p,2p}) \\
=& \sum_{(\alpha,i)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+} (\alpha+i-pi-p)a_{\alpha,i}(L_{p,0}+L_{-2p,2p},y)L_{\alpha+p,i} \\
&+\sum_{(\alpha,i)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+} (2p+1)(\alpha+i)a_{\alpha,i}(L_{p,0}+L_{-2p,2p},y)L_{\alpha-2p,i+2p} \\
&+p\lambda(L_{p,0}+L_{-2p,2p},y)L_{p,0}-2p\lambda(L_{p,0}+L_{-2p,2p},y)L_{-2p,2p} \\
=&0. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

在（3.5）中比较 $L_{p,\ 0}$，$L_{-2p,\ 2p}$ 和 $L_{-(3n+2)p,\ 2(n+1)p}$ 关于 $n\in\mathbb{N}$ 的系数，分别得到

$$
\begin{gathered}
-pa_{0,0}(L_{p,0}+L_{-2p,2p},y)+p\lambda(L_{p,0}+L_{-2p,2p},y)=0, \\
2p(p+1)a_{-3p,2p}(L_{p,0}+L_{-2p,2p},y)+2p\lambda(L_{p,0}+L_{-2p,2p},y)=0, \\
p(2np+2p+n+2)a_{-3(n+1)p,2(n+1)p}(L_{p,0}+L_{-2p,2p},y) \\
+np(2p+1)a_{-3np,2np}(L_{p,0}+L_{-2p,2p},y)=0.
\end{gathered}
$$

这意味着 $\lambda(L_{p,0}+L_{-2p,2p},y)=a_{0,0}(L_{p,0}+L_{-2p,2p},y)=0$；否则，对于所有 $n\in\mathbb{Z}_+$，都有 $a_{-3np,2np}(L_{p,0}+L_{-2p,2p},y)\neq 0$，这与集合 $\{(\alpha,i)\mid a_{\alpha,i}\neq 0\}$ 的有限性相矛盾。现在，对于 $(\alpha,i)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+\setminus\{(0,0)\}$ 和 $n\in\mathbb{Z}_+$，通过考察 (3.5) 中 $L_{\alpha-(3n+2)p,i+2(n+1)p}$ 的系数，我们得到以下递推关系

$$(\alpha+i-p(n+i+2+2pn+2p))a_{\alpha-3(n+1)p,i+2(n+1)p}(L_{p,0}+L_{-2p,2p},y)$$

$$= -(2p+1)(\alpha+i-np)a_{\alpha-3np,i+2np}(L_{p,0}+L_{-2p,2p},y).$$

如果 $\alpha+i\notin p\mathbb{Z}_+$，那么必有 $a_{\alpha,\ i}(L_{p,\ 0}+L_{-2p,\ 2p},\ y)=0$；否则，对于所有 $n\in\mathbb{Z}_+$，都有 $a_{\alpha-3np,\ i+2np}(L_{p,\ 0}+L_{-2p,\ 2p},\ y)\neq 0$，这显然荒谬。证明完毕。□

引理 3.5. 设 Δ是 $\mathcal{B}$ 上的一个 2-局部导子，满足 $\Delta(L_{0,0})=\Delta(L_{1,0})=\Delta(L_{-1,1})=0$。则对所有 $x\in\mathcal{B}$，$\Delta(x)=0$。

证明. 任取一个固定的$x=\sum_{(\gamma,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+}\mu_{\gamma,k}L_{\gamma,k}\in\mathcal{B}$，满足$\mu_{\gamma,k}\in\mathbb{C}$。由 $\Delta(L_{0,0})=\Delta(L_{1,0})=\Delta(L_{-1,1})=0$以及引理 3.3 和 3.4 可得

$$\Delta(x)=\xi_x\sum_{(\gamma,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+}k\mu_{\gamma,k}L_{\gamma,k}, \tag{3.6}$$

$$D_{L_{p,0}+L_{-2p,2p},x}=\mathrm{ad}(\sum_{\substack{\alpha+i\in p\mathbb{Z}_+\\(\alpha,i)\neq(0,0)}}a_{\alpha,i}(L_{p,0}+L_{-2p,2p},x)L_{\alpha,i}),\quad p\in\mathbb{N},$$

其中 $\xi_x,a_{\alpha,i}(L_{p,0}+L_{-2p,2p},x)\in\mathbb{C}$。现在我们计算

$$\begin{aligned}\Delta(x)=&D_{L_{p,0}+L_{-2p,2p},x}(x)\\
=&\sum_{\substack{\alpha+i=0\\(\alpha,i)\neq(0,0)}}\sum_{(\gamma,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+}[a_{\alpha,i}(L_{p,0}+L_{-2p,2p},x)L_{\alpha,i},\mu_{\gamma,k}L_{\gamma,k}]\\
&+\sum_{\alpha+i\in p\mathbb{N}}\sum_{(\gamma,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+}[a_{\alpha,i}(L_{p,0}+L_{-2p,2p},x)L_{\alpha,i},\mu_{\gamma,k}L_{\gamma,k}]\\
=&-\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{(\gamma,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+}(i+1)(\gamma+k)a_{-i,i}(L_{p,0}+L_{-2p,2p},x)\mu_{\gamma,k}L_{-i+\gamma,i+k}\\
&+\sum_{\alpha+i\in p\mathbb{N}}\sum_{(\gamma,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+}((\alpha-1)(k+1)-(\gamma-1)(i+1))a_{\alpha,i}(L_{p,0}+L_{-2p,2p},x)L_{\alpha+\gamma,i+k}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

若 $\alpha+i\in p\mathbb{N}$，则令 p 充分大，并比较(3.6)和(3.7)中$L_{\alpha+\gamma,i+k}$ 的系数，可得$((\alpha-1)(k+1)-(\gamma-1)(i+1))a_{\alpha,i}(L_{p,0}+L_{-2p,2p},x)=0$。现在(3.6)和(3.7)变为

$$\begin{aligned}\Delta(x)=&\xi_x\sum_{(\gamma,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+}k\mu_{\gamma,k}L_{\gamma,k}\\
=&-\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{(\gamma,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+}(i+1)(\gamma+k)a_{-i,i}(L_{p,0}+L_{-2p,2p},x)\mu_{\gamma,k}L_{-i+\gamma,i+k}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

在 $\xi_x=0$ 的情况下，由 (3.8) 的第一个等式可立即得到 $\Delta(x)=0$。接下来考虑 $\xi_x\neq 0$ 的情况。如果对所有 $\gamma\neq -k$ 都有 $\mu_{\gamma,\ k}=0$，那么由第二个等式可得 $\Delta(x)=0$

(3.8)。现在假设对某个 $\gamma_0 \neq -k_0$ 有 $\mu_{\gamma_0,\ k_0} \neq 0$ 。对于任意 $i \in \mathbb{N}$，比较 (3.8) 中 $L_{-i+\gamma_0,\ i+k_0}$ 的系数，得到

$$\xi_x(k_0+i)\mu_{\gamma_0-i,k_0+i} = -(i+1)(\gamma_0+k_0)a_{-i,i}(L_{p,0}+L_{-2p,2p},x)\mu_{\gamma_0,k_0}. \tag{3.9}$$

因此，$a_{-i,i}(L_{p,0} + L_{-2p,2p}, x) = 0$ 对任意 $i \in \mathbb{N}$均成立。否则，假设对于某个 $i_0 \in \mathbb{N}$，有 $a_{-i_0,i_0}(L_{p,0} + L_{-2p,2p}, x) \neq 0$ 。于是由 (3.9) 可推得，对于所有$n \in \mathbb{Z}_+$，都有 $\mu_{\gamma_0-ni_0,\ k_0+ni_0} \neq 0$ ，这与集合 $\{(\gamma,k) \mid \mu_{\gamma,k} \neq 0\}$ 是有限集这一事实矛盾。因此，由 (3.8) 的第二个等式可得$\Delta(x) = 0$ 。至此，断言得证。□

现在我们可以陈述本节的主要结果。

定理 3。 **6.** 块型李代数 $\mathcal{B}$ 上的每个 *2*-局部导子都是导子 .

证明。 设 Δ 是 $\mathcal{B}$上的一个 2-局部导子。取一个导子$D_{L_{0,0},L_{1,0}}$ 使得

$$\Delta(L_{0,0}) = D_{L_{0,0},L_{1,0}}(L_{0,0}) \quad \text{and} \quad \Delta(L_{1,0}) = D_{L_{0,0},L_{1,0}}(L_{1,0}).$$

令$\Delta_1 = \Delta - D_{L_{0,0},L_{1,0}}$。于是 Δ_1 是一个 2-局部导子，且 $\Delta_1(L_{0,0}) = \Delta_1(L_{1,0}) = 0$。由引理 3.2 可知，存在某个$\xi_{L_{-1,1}} \in \mathbb{C}$，使得 $\Delta_1(L_{-1,1}) = \xi_{L_{-1,1}}L_{-1,1}$ 。现在令$\Delta_2 = \Delta_1 + \xi_{L_{-1,1}}\mathrm{ad}(L_{0,0}) + \xi_{L_{-1,1}}d$，则 Δ_2 是一个 2-局部导子，且

$$\begin{aligned}
\Delta_2(L_{0,0}) &= \Delta_1(L_{0,0}) + \xi_{L_{-1,1}}[L_{0,0},L_{0,0}] + \xi_{L_{-1,1}}d(L_{0,0}) = 0,\\
\Delta_2(L_{1,0}) &= \Delta_1(L_{1,0}) + \xi_{L_{-1,1}}[L_{0,0},L_{1,0}] + \xi_{L_{-1,1}}d(L_{1,0})\\
&= -\xi_{L_{-1,1}}L_{1,0} + \xi_{L_{-1,1}}L_{1,0} = 0,\\
\Delta_2(L_{-1,1}) &= \Delta_1(L_{-1,1}) + \xi_{L_{-1,1}}[L_{0,0},L_{-1,1}] + \xi_{L_{-1,1}}d(L_{-1,1})\\
&= \xi_{L_{-1,1}}L_{-1,1} - \xi_{L_{-1,1}}L_{-1,1} = 0.
\end{aligned}$$

由引理 3.5 可知，$\Delta_2 = \Delta_1 + \xi_{L_{-1,1}}\mathrm{ad}(L_{0,0}) + \xi_{L_{-1,1}}d \equiv 0$。因此，$\Delta = D_{L_{0,0},L_{1,0}} - \xi_{L_{-1,1}}\mathrm{ad}(L_{0,0}) - \xi_{L_{-1,1}}d$ 是一个导子，证明完毕。□

References

[1] M. Abdaoui，关于无限维李超代数上的2-局部超导子，*Commun. Algebra* **52(3)**，1124–1141（2024）。[2] S. Ayupov，K. Kudaybergenov，关于von Neumann代数上的2-局部导子，*Positivity* **19(3)**，445–455（2015）。[3] S. Ayupov，K. Kudaybergenov，A. Alauadinov，关于交换正则代数上的矩阵代数的2-局部导子，*Linear Algebra Appl.* **439(5)**，1294–1311（2013）。

[4] S. Ayupov，K. Kudaybergenov，I. Rakhimov，关于有限维李代数上的2-局部导子，Linear Algebra Appl. 474，1–11（2015）。[5] S. Ayupov，K. Kudaybergenov，B. Yusupov，关于广义Witt代数上的2-局部导子，Linear Multilinear A. 69(16)，3130–3140（2021）。[6] R. Block，关于无挠阿贝尔群和李代数，Proc. Amer. Math. Soc. 9(4)，613–620（1958年）。[7] Q. Chen，Y. He，关于平面伽利略共形代数上的2-局部导子，Int. J. Math. 34(5)，2350023（2023）。[8] M. Dilxat，S. Gao，D. Liu，关于超Virasoro代数和超W(2,2)代数上的2-局部超导子，Commun. Algebra 49(12)，5423–5434（2021）。[9] D. Dokovic，K. Zhao，广义Block代数的导子、同构与上同调，Al- gebra Colloq. 3，245–272（1996）。[10] V. Kac，A. Radul，圆周上的微分算子李代数的拟有限最高权模，Commun. Math. Phys. 157，429–457（1993）。[11] C. Li，J. He，Y. Su，无色散D型Drinfeld-Sokolov方程族的Block（或Hamiltonian）李对称，Commun Theor Phys. 61(4)，431–435（2014）。[12] C. Li，J. He，Y. Su，双分次Toda方程族的Block型对称，J Math Phys. 53(1)，013517（2012）。[13] O. Mathieu，Virasoro李代数上的Harish-Chandra模分类，Invent. Math. 107，225–234（1992）。[14] J. Osborn，K. Zhao，广义Block型无限维李代数，Proc. Amer. Math. Soc. 127(6)，1641–1650（1999）。[15] P. ˇSemrl， $B(H)$上的局部自同构与导子，Proc. Amer. Math. Soc. 125，2677–2680（1997）。[16] Y. Su，Block 型李代数的拟有限表示，J. Algebra 276(1)，117–128（2004）。[17] Y. Su，C. Xia，Y. Xu，与Block型相关的李代数的拟有限表示分类，J. Algebra 393，71–78（2013）。[18] Y.Su，X. Yue，Block型李代数上中间序列的 $\mathbb{Z}^2$-分次模的分类，Commun. Contemp. Math. 17(5)，1550059（2015）。[19] Y. Su，X. Yue，X. Zhu，Block型李超代数上的2-局部超导子，Linear Multilinear A. 70(21)，6425–6440（2022）。[20] X. Tang，W代数W(2,2)上的2-局部导子，J. Algebra Appl. 20(12)，2150237（2021）。[21] J. Tang，X. Tang，Block型李代数的双导子及其应用，Commun. Algebra 51(10)，4409–4417（2023）。[22] X. Tang，M. Xiao，P. Wang，Virasoro 类代数的局部性质，J. Geom. Phys. 186，104772（2023）。[23] Y. Wang，H. Chen，J. Nan，基本典型李超代数上的2-局部超导子，J Math. Res. Appl. 37(5)，527–534（2017）。

[24] C. Xia、W. Wang，Block 型李代数的导子与自同构，*Algebra Colloq.***20(1)**，173–180（2013）。[25] X. Xu，特征为 0 的域上 Cartan 型新广义单李代数，*J. Algebra***224(1)**，23–58（2000）。[26] Y. Yao、K. Zhao，Jacobson-Witt 代数的局部性质，*J. Algebra* **586**，1110–1121（2021）。[27] H. Zhang、K. Zhao，Virasoro 类代数及其 q 类比的表示，*Commun. Algebra***24(14)**，4361–4372（1996）。[28] Y. Zhao、Y. Chen、K. Zhao，Witt 代数上的 2-局部导子，*J. Algebra Appl.* **20(4)**，2150068（2021）。

Chen: Department of Mathematics, Shanghai Maritime University, Shanghai, 201306,China.

电子邮箱地址: chenqf@shmtu.edu.cn

Guo: Department of Mathematics, Shanghai Maritime University, Shanghai, 201306, China.

电子邮箱地址: 202531010005@stu.shmtu.edu.cn