arXiv:2602.09559v1 [math.RA] 10 Feb 2026

Ore 环与齐次扩张

Tomasz Brzeziński 和 A.T.M. West

摘要。本文推导了将结合 $\mathbb{F}$代数 R 上的斜导子 (δ_R, α_R)扩张为扩张 S 上的斜导子 (δ_S, α_S) 的充分必要条件，其中 S 是由 $\mathbb{F}$ 扩张 R 所得；也推导了将其扩张为齐次扩张 S 上的斜导子的充分必要条件，其中 S 是由 $\mathbb{F}$ 扩张 R 所得。随后证明，这将得到 Ore 扩张 $R[x; \alpha_R, \delta_R]$ 的唯一扩张（其中 δ_R]由 $\mathbb{F}$ 扩张 R 所得），且该扩张嵌入 Ore 扩张 $S[x; \alpha_S, \delta_S]$；后者是由扩张后的斜导子将 S 扩张而成。

1. 引言

全文中，$\mathbb{F}$ 表示一个域或整数环 $\mathbb{Z}$，而 R 是一个结合（但不一定含幺或交换的） $\mathbb{F}$-代数（因此，在域 $\mathbb{Z}$ 上的代数情形下，它就是一个结合环）。我们考虑如下代数同态的正合序列

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\iota} S \xrightarrow{\pi} \mathbb{F} \longrightarrow 0. \tag{1.1}$$

换言之，S 是由 $\mathbb{F}$ 扩张 R 所得的代数扩张。[1] 必然，$\iota(R)$ 是 S 中的一个理想，我们将R 与 $\iota(R)$等同。如文献 [**1**], 所示，这类扩张为阿贝尔堆 [**15**] 提供了一种等价（但纯粹基于环论的）描述：阿贝尔堆上带有一种可分配且满足结合律的乘法，称为桁架 [**3**], [**4**] ，它连接了环与（双边）*brace* [**17**], [**6**]。我们的首要目标是探讨以下问题。设 $\alpha_R: R \to R$是一个代数自同态，且 δ_R 是 R上的一个 α_R-导子或斜导子，也就是说，它是 R 的一个线性自同态，并且对所有 $a, b \in R$,

$$\delta_R(ab) = \delta_R(a)b + \alpha_R(a)\delta_R(b), \tag{1.2}$$

（我们将这些数据编码为（α_R, δ_R））。确定何时可以将 α_R 扩张为 S 的代数自同态α_S，并将 δ_R 扩张为 S 的 α_S-导子 δ_S，使得

$$\alpha_S\iota = \iota\alpha_R \quad \text{and} \quad \delta_S\iota = \iota\delta_R. \tag{1.3}$$

我们在第 2 节讨论这一问题，并在命题 2.4 和命题 2.5 中彻底解决了它。特别地，我们注意到，（α_R, δ_R）的扩张分为两个不同的类别，其特征在于标量 ς分别等于 0 或 1（在前一种情况下，这是将零端同态扩张为零端同态的必要条件；在后一种情况下，这是将恒等映射扩张为恒等映射的必要条件）。我们通过若干示例说明这一扩张问题的解法。

实现第一个目标后，我们将在第 3 节讨论由扩展的斜导子确定的 S 的 Ore 扩张。特别地，在定理 3.1 和命题 3.3 中，我们证明，若 (α_R, δ_R) 可扩展为一个满足 $\varsigma = 1$ 的斜导子 (α_S, δ_S)，则存在一个由 Ore 扩张$R[x$给出的 $\mathbb{F}$ 的（唯一）扩张；α_R, $\delta_R]$ 嵌入于 R 的 Ore 扩张 $S[x; \alpha_S, \delta_S]$，从而得到以下交换图

[1]在某些语境中，尤其是在同调代数中，人们更愿意说，在这种情况下，S 是 R 的 $\mathbb{F}$ 扩张。我们采用 [**16**]的术语。

其代数映射组成正合行:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & R[x;\alpha_R,\delta_R] & \xrightarrow{\tilde{\iota}} & \tilde{S} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \mathbb{F} & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & R[x;\alpha_R,\delta_R] & \xrightarrow{\iota'} & S[x;\alpha_S,\delta_S] & \xrightarrow{\pi'} & \mathbb{F}[x] & \longrightarrow & 0, \end{array} \tag{1.4}$$

其中最后一个纵向映射是标量嵌入。

2. 扩张斜导子

受 Everett [7], Rédei [16], Mac Lane [13]和 Petrich[14], 开创性工作的启发，文献 [1] 说明，扩张 (1.1) 可以用齐次数据来等价且更明确地描述，我们现在给出其定义。

定义 2.1（双齐次映射）。设 $\sigma = (\overleftarrow{\sigma}, \overrightarrow{\sigma})$ 是 R 上的一个双算子，即一对线性自同态

$$\overrightarrow{\sigma} : R \to R, \quad a \mapsto \sigma a, \qquad \overleftarrow{\sigma} : R \to R, \quad a \mapsto a\sigma.$$

那么，对于所有 $a, b \in R$，若 σ 满足以下条件，则称其为双乘法 [13] :

$$\sigma(ab) = (\sigma a)b, \quad (ab)\sigma = a(b\sigma), \quad \text{and} \quad a(\sigma b) = (a\sigma)b. \tag{2.1}$$

双乘法 σ 是一个双齐次映射 [16] ，如果对所有 $a \in R$,

$$\sigma(a\sigma) = (\sigma a)\sigma. \tag{2.2}$$

双乘法在 [14], 中也称为双平移，在 [9] 中也称为乘子（或主要在泛函分析中称为乘子） [10], [5]。(2.1) 中的第一个条件可改写为 $\overrightarrow{\sigma}(ab) = \overrightarrow{\sigma}(a)b$ ，因此这意味着 $\overrightarrow{\sigma}$是一个右 R-线性映射。类似地，(2.1) 中的第二个条件意味着 $\overleftarrow{\sigma}$是一个左 R-线性映射。双乘法构成一个含幺结合代数，其乘积由左R-线性映射的反向复合与右 R-线性映射的复合给出，也就是说，对于 $\sigma_1 = (\overleftarrow{\sigma}_1, \overrightarrow{\sigma}_1)$ 和 $\sigma_2 = (\overleftarrow{\sigma}_2, \overrightarrow{\sigma}_2)$，有 $\sigma_1\sigma_2 = (\overleftarrow{\sigma}_2 \circ \overleftarrow{\sigma}_1, \overrightarrow{\sigma}_1 \circ \overrightarrow{\sigma}_2)$。这个代数称为 A 的乘子代数，记作 $M(A)$。双齐次映射也称为自可交换乘法 [13]。

对于任意 $a \in R$，由左侧和右侧乘以 a 所构成的映射是一个双齐次映射，记作$\bar{a}$，也就是说，对于所有 $b \in R$

$$\bar{a}b = ab \quad \text{and} \quad b\bar{a} = ba.$$

这称为内齐次映射。

定义 2.2（齐次数据）。若一对 (σ, s) 中的 $s \in R$ 和 σ 是一个双齐次映射，则称其为齐次数据 ，条件是

$$\sigma s = s\sigma \quad \text{and} \quad \sigma^2 = \sigma + \bar{s}. \tag{2.3}$$

给定一个代数 R 和一组齐次数据 (σ, s)，扩张 $R(\sigma, s)$（由 R 扩张 $\mathbb{F}$ ）按如下方式构造。代数 $R(\sigma, s)$ 是一个 $\mathbb{F}$- 模，其乘法定义为

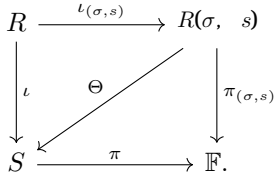
$$(a, \xi)(b, \zeta) = (ab + \zeta a\sigma + \xi\sigma b + \xi\zeta s, \xi\zeta), \tag{2.4}$$

对于所有 $a, b \in R$和 $\xi, \zeta \in \mathbb{F}$。代数 $R(\sigma, s)$ 构成扩张图 (1.1),

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\iota_{(\sigma,s)}} R(\sigma, s) \xrightarrow{\pi_{(\sigma,s)}} \mathbb{F} \longrightarrow 0, \tag{2.5}$$

带有显然的包含映射 $\iota_{(\sigma,s)} : a \mapsto (a, 0)$ 和满射 $\pi_{(\sigma,s)} : (a, \xi) \mapsto \xi$。如 [1, 定理 3.6],所述，由于任何形如 (1.1) 的序列作为 $\mathbb{F}$-模的序列都是分裂正合的，因此它导出一个（唯一的）

齐次数据，使得扩张 (1.1) 等价于 (2.5)，也就是说，存在一个环同构Θ： $R(\sigma,s) \to S$，使下图交换



鉴于这一等价关系，今后我们将考虑如（2.5）中的 $\mathbb{F}$ 的 R 的齐次扩张。

注 2.3. 顺便指出，齐次数据条件（σ， s）意味着，可以将 $R(\sigma, s)$解释为代数 $R \oplus \mathbb{F}\sigma$，其乘法由 $\mathbb{F}$-双线性诱导，即

$$(a+\xi\sigma)(b+\zeta\sigma) = ab + \xi\sigma b + \zeta a\sigma + \xi\zeta\sigma^2 = ab + \xi\sigma b + \zeta a\sigma + \xi\zeta s + \xi\zeta\sigma.$$

换言之，对于所有 $a \in R$， σ 可以形式化地视为 $R(\sigma, s)$的一个附加生成元 $\boldsymbol{\sigma}$，并满足以下规则

$$a\boldsymbol{\sigma} = \overleftarrow{\sigma}(a), \quad \boldsymbol{\sigma}a = \overrightarrow{\sigma}(a), \quad \boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{\sigma} + s, \quad \boldsymbol{\sigma}s = s\boldsymbol{\sigma}. \tag{2.6}$$

在下文中，我们将使用 $a + \xi\boldsymbol{\sigma}$ 作为 $R(\sigma, s)$中（a， ξ）更具启发性的记号，并将ι 与 R 到 $R \oplus \mathbb{F}\boldsymbol{\sigma}$ 的典范嵌入 $a \mapsto a + 0\boldsymbol{\sigma}$ 等同，将 π 与典范投影 $a + \xi\boldsymbol{\sigma} \mapsto \xi$等同。

命题 2.4. 设 R 是带有齐次数据 (σ, s)的代数。那么， R 上的代数自同态α_R 可扩张为 $R(\sigma, s)$ 上的代数自同态，且满足 (1.3) 中的第一个条件，当且仅当存在 $w \in R$，使得对所有 $a \in R$，

(i) $\alpha_R(s) - \varsigma s = w^2 + \varsigma w\sigma + \varsigma\sigma w - w$,
(ii) $\alpha_R(a\sigma) = \alpha_R(a(\varsigma\sigma + w)$, *(iii)* $\alpha_R(\sigma a) = (\varsigma\sigma + w)\alpha_R(a)$,

其中 ς 是一个等于 *0* 或 *1* 的标量。

证明。根据 (1.3)，存在 $w \in R$ 和 $\varsigma \in \mathbb{F}$，使得

$$\alpha_S(a + \xi\boldsymbol{\sigma}) = \alpha_R(a) + \xi w + \xi\varsigma\boldsymbol{\sigma}, \tag{2.7}$$

对所有 $a \in R$ 和 $\xi \in \mathbb{F}$。 $\mathbb{F}$-线性端同态 $R(\sigma, s)$ 是代数自同态，当且仅当

$$\begin{aligned}\alpha_R(ab) + \zeta\alpha_R(a\sigma) + \xi\alpha_R(\sigma b) + \xi\zeta(\alpha_R(s) + w) + \xi\zeta\varsigma\boldsymbol{\sigma} &= \alpha_R(a)\alpha_R(b) + \zeta(\alpha_R(a)w + \varsigma\alpha_R(a)\sigma) \\ &\quad + \xi(w\alpha_R(b) + \varsigma\sigma\alpha_R(b)) + \xi\zeta(w^2 + \varsigma w\sigma + \varsigma\sigma w + \varsigma^2 s) + \xi\zeta\varsigma^2\boldsymbol{\sigma},\end{aligned} \tag{2.8}$$

对于所有 a， $b \in R$和 ξ， $\zeta \in \mathbb{F}$。当且仅当 ς是幂等元时，对所有 ξ， ζ， $\boldsymbol{\sigma}$处的坐标都相等，因此 $\varsigma = 0$或 $\varsigma = 1$。在 $(\xi, \zeta) = (0, 1)$，$(1, 0)$ 处比较 (2.8) 两边，得到条件 (ii)-(iii)；考虑这些条件后，再在 $(\xi, \zeta) = (1, 1)$ 处比较两边，得到 (i)。反向显然。□

根据命题 2.4，存在两种扩张类型，具体取决于参数 ς。为表明所取的参数，我们将扩张后的端同态记为 α_S^ς。注意， $R(\sigma, s)$ 上的恒等端同态必然是 R 上类型 1 的恒等端同态的扩张，而零映射则是类型 0 的（零映射的）扩张。

命题 2.5。 设 R 是一个带有齐次数据 (σ, s) 的代数，且设 α_R 是 R 的代数端同态， $w \in R$ 满足命题 2.4 的条件，因此存在相应的端同态α_S^ς，其作用于 $R(\sigma, s)$。 R上的一个 α_R-斜导子 δ_R 可扩张为 $R(\sigma, s)$ 上的一个 α_S^ς-斜导子 $\delta_S^{\mu(\varsigma)}$，并满足条件 (1.3)，当且仅当存在 $e \in R$，使得对所有 $a \in R$，

(a) $\delta_R(s) - \mu(\varsigma)s = e\sigma + \varsigma\sigma e + we + \mu(\varsigma)w\sigma - e$.
(b) $\delta_R(a\sigma) = \delta_R(a)\sigma + \alpha_R(a)(e + \mu(\varsigma)\sigma)$, *(c)* $\delta_R(\sigma a) = (w + \varsigma\sigma)\delta_R(a) + (e + \mu(\varsigma)\sigma)a$,

其中 $\mu(1) = 0$ 而 $\mu(0)$ 是任意标量。

证明。设 δ_S 是 $R(\sigma,s)$ 上满足 (1.3) 的 α_S^ς-斜导子，因此对所有 $a\in R$， $\delta_S(a)=\delta_R(a)$，于是存在 $e\in R$ 和 $\mu(\varsigma)\in\mathbb{F}$，使得

$$\delta_S(a+\xi\boldsymbol{\sigma})=\delta_R(a)+\xi e+\xi\mu(\varsigma)\boldsymbol{\sigma}, \tag{2.9}$$

对所有 $a\in R$ 和 $\xi\in\mathbb{F}$均成立。任取 $a+\xi\boldsymbol{\sigma}$， $b+\zeta\boldsymbol{\sigma}\in R(\sigma,\ s)$，先计算，

$$\delta_S\left((a+\xi\boldsymbol{\sigma})(b+\zeta\boldsymbol{\sigma})\right)=\delta_R(ab)+\zeta\delta_R(a\sigma)+\xi\delta_R(\sigma b)+\xi\zeta(\delta_R(s)+e)+\xi\zeta\mu(\varsigma)\boldsymbol{\sigma}, \tag{2.10}$$

然后

$$\begin{aligned}\delta_S(a+\xi\boldsymbol{\sigma})(b+\zeta\boldsymbol{\sigma})+\alpha_S(a+\xi\boldsymbol{\sigma})\delta_S(b+\zeta\boldsymbol{\sigma})&=\delta_R(a)b+\alpha_R(a)\delta_R(b)+\xi\zeta(e+\mu(\varsigma)w)\sigma+\varsigma\sigma e+\mu(\varsigma)s+we)\\&+\xi(eb+\mu(\varsigma)\sigma b+w\delta_R(b)+\varsigma\sigma\delta_R(b))+\zeta(\delta_R(a)\sigma+\alpha_R(a)(e+\mu(\varsigma)\sigma))+\xi\zeta\mu(\varsigma)(1+\varsigma)\boldsymbol{\sigma}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

映射 δ_S 是一个 $\alpha_S^{\mu(\varsigma)}$ -斜导子，当且仅当对于所有 a， b， ξ， ζ，式 (2.10) 的右端等于式 (2.11) 的右端。比较 $\boldsymbol{\sigma}$ 处的系数可得约束条件 $\varsigma\mu(\varsigma)=0$，因此必有 $\mu(1)=0$，而对 $\mu(0)$ 没有限制条件。考虑到这一点，通过比较 a， $b=0$，$(\xi,\ \zeta)=(1,\ 1)$ 时方程 (2.10) 和 (2.11) 的右端，以及 $(\xi,\ \zeta)=(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$ 时的右端，即可得到条件 (a)-(c)。逆向显然成立。□

定义 2.6. 给定代数 R 上的齐次数据 (σ,s)，若斜导子 (α_R,δ_R) 与 $w,e\in R$ 满足命题 2.4 中的条件 (i)-(iii) 以及命题 2.5 中的条件 (a)-(c)，则称其为 (σ,s)-相容的斜导子。我们将涉及的所有数据记为五元组 $(\alpha_R,w;\delta_R,e,\mu(\varsigma))$。

由 命题 2.4 和命题 2.5 的证明立即可得以下推论 .

推论 2.7. 设 δ_S 是代数 R 的齐次扩张 $R(\sigma,s)$ 上的一个 α_S-斜导子。若 α_S 限制为映射 $\alpha_R:R\to R$，且 δ_S 限制为映射 $\delta_R:R\to R$，则 α_R 是代数同态， δ_R 是一个 α_R-导子，并且存在 w, $e\in R$ 以及 $\varsigma,\mu(\varsigma)\in\mathbb{F}$，使得命题 2.4 中的条件 *(i)-(iii)* 以及命题 2.5 中的条件 *(a)-(b)* 均成立。

证明。由于对所有 $a\in R$， $\alpha_R(a)=\alpha_S(a)$ 且 $\delta_R(a)=\delta_S(a)$，显然 α_R 是代数同态，而 δ_R 是 α_R-导子，作用于 R。参数 w， e， ς， $\mu(\varsigma)$ 由下式确定

$$w+\varsigma\boldsymbol{\sigma}=\alpha_S(\boldsymbol{\sigma})\quad\text{and}\quad e+\mu(\varsigma)\boldsymbol{\sigma}=\delta_S(\boldsymbol{\sigma}),$$

因此 α_S 由 (2.7) 给出， δ_S 由 (2.9) 给出，从而满足 (1.3)。由命题 2.4 和命题 2.5 可得所述结论。□

例 2.8（齐次导子）。对于 $R(\sigma,\ s)$ 中的任意元素 $b+\zeta\boldsymbol{\sigma}$，都可以关联一个内$\alpha_S$-斜导子。若 α_S 限制为 R 到 α_R 的端同态，即对于某个 $w\in R$，有 $\alpha_S(a+\xi\boldsymbol{\sigma})=\alpha_R(a)+\xi w+\xi\varsigma\boldsymbol{\sigma}$，且满足命题 2.4 中的条件 (i)–(iii)，则相应的内导子为

$$\begin{aligned}\delta_S^{b+\zeta\boldsymbol{\sigma}}(a+\xi\boldsymbol{\sigma})&=\alpha_S(a+\xi\boldsymbol{\sigma})(b+\zeta\boldsymbol{\sigma})-(b+\zeta\boldsymbol{\sigma})(a+\xi\boldsymbol{\sigma})\\&=\alpha_R(a)b-ba+\zeta(\alpha_R(a)\sigma-\sigma a)+\xi(\varsigma\sigma b-b\sigma+wb)+\xi\zeta(w\sigma+(\varsigma-1)s)+\xi\zeta(\varsigma-1)\boldsymbol{\sigma}.\end{aligned}$$

$\delta_S^{b+\zeta\boldsymbol{\sigma}}$ 对 R 的限制给出了 R的相应导子

$$\delta_R^{b+\zeta\boldsymbol{\sigma}}(a)=\alpha_R(a)b-ba+\zeta(\alpha_R(a)\sigma-\sigma a). \tag{2.12}$$

特别地， δ_R^b 是内 α_R-斜导子，而

$$\delta_R^{\boldsymbol{\sigma}}(a)=\alpha_R(a)\sigma-\sigma a, \tag{2.13}$$

则不是。我们将导子 (2.13) 称为齐次斜导子。顺便指出，即使 σ 仅仅是一个双乘法， $\delta_R^{\boldsymbol{\sigma}}(a)$仍然是一个斜导子。

进一步注意到

$$\delta_S^{b+\zeta\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma})=\varsigma\sigma b-b\sigma+wb+\zeta(w\sigma+(\varsigma-1)s)+\zeta(\varsigma-1)\boldsymbol{\sigma}.$$

Set

$$e=\varsigma\sigma b-b\sigma+wb+\zeta(w\sigma+(\varsigma-1)s),\quad\mu(\varsigma)=\zeta(\varsigma-1).$$

直接但繁琐的计算表明，利用 w 满足命题 2.4 中条件 (i)–(iii) 这一事实，可以确认 e 满足关于方程 (2.12) 的 α_R-导子 $\delta_R^{b+\zeta\boldsymbol{\sigma}}$ 的命题 2.5 中条件 (a)–(c)（从而确认推论 2.7 的一般性陈述在此情形下成立）。此外， $\mu(1)=0, \mu(0)=-\zeta$。因此，内层 α_S-导子 $\delta_S^{b+\zeta\boldsymbol{\sigma}}$ 扩张了 α_R-导子 $\delta_R^{b+\zeta\boldsymbol{\sigma}}$。

例 2.9（零乘法环的扩张）。设 R 是一个零乘法环。如 [1, 定理 6.5], 所示，在（弱）等价意义下， R 的齐次环扩张与阿贝尔群 $R=A_1\oplus A_2\oplus A_3\oplus A_4$的有序四重直和分解一一对应。设与该直和分解对应的正交满射和单射分别为 $\pi_i:\ R\to A_i$ 和 $\omega_i: A_i\to R$，即

$$\pi_i\omega_j=\begin{cases}\mathrm{id}: A_i\to A_i, & i=j,\\ 0 & i\neq j.\end{cases} \tag{2.14}$$

对于元素 $a\in R$，我们将写作 $a=a_1+a_2+a_3+a_4$，其中 $a_i\in A_i$。如 [1, 注 6.4]所述，不失一般性，可以选择与分解（A_1、 A_2、 A_3、 A_4）对应的齐次数据（σ、 s），其中 $s=0$，并且

$$\overrightarrow{\sigma}=\omega_1\pi_1+\omega_3\pi_3,\qquad \overleftarrow{\sigma}=\omega_2\pi_2+\omega_3\pi_3. \tag{2.15}$$

按此选择， $R(\sigma,\ 0)=R\oplus\mathbb{Z}$ 中的乘法为

$$(a+k\boldsymbol{\sigma})(b+l\boldsymbol{\sigma})=kb_1+la_2+la_3+kb_3+kl\boldsymbol{\sigma}.$$

R 上的任意加法自同态 α 既是环自同态，也是扭导子，并且可完全由十六个加法映射 $\alpha_{ij}=\pi_j\alpha\omega_i$ 描述: $A_i\to A_j$, $i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4$。换言之，$\alpha=\sum_{i,\ j}\omega_j\alpha_{ij}\pi_i$。命题 2.4 中的条件 (i) 等价于

$$(1-\varsigma)w_1+(1-\varsigma)w_2+(1-2\varsigma)w_3+w_4=0,$$

这可解为 $w=\varsigma(w_1+w_2)$。性质 (ii) 和 (iii) 得出

$$\alpha\omega_2\pi_2+\alpha\omega_3\pi_3=\varsigma\left(\omega_2\pi_2\alpha+\omega_3\pi_3\alpha\right)\quad\text{and}\quad\alpha\omega_1\pi_1+\alpha\omega_3\pi_3\ =\varsigma\left(\omega_1\pi_1\alpha+\omega_3\pi_3\alpha\right).$$

鉴于正交条件 (2.14)，可得

$$\delta_{2i}\alpha_{2j}+\delta_{3i}\alpha_{3j}=\varsigma\left(\delta_{2j}\alpha_{i2}+\delta_{3j}\alpha_{i3}\right)\quad\text{and}\quad\delta_{1i}\alpha_{1j}+\delta_{3i}\alpha_{3j}=\varsigma\left(\delta_{1j}\alpha_{i1}+\delta_{3j}\alpha_{i3}\right),$$

对所有 $i,\ j=1,\ \ldots,\ 4$。因此,

$$\alpha=\varsigma\sum_{i=1}^{4}\omega_i\alpha_{ii}\pi_i+(1-\varsigma)\sum_{j=1}^{4}\omega_j\alpha_{4j}\pi_4,$$

或者按分量表示，令 $a_{ij}\in A_j$ 表示 $\alpha_{ij}(a_i),\ \ a_i\in A_i$,

$$\alpha(a_1,a_2,a_3,a_4)=(\varsigma a_{11}+(1-\varsigma)a_{41},\varsigma a_{22}+(1-\varsigma)a_{42},\varsigma a_{33}+(1-\varsigma)a_{43},a_{44}).$$

这些是一般端同态 R 可扩张为 $R(\sigma,\ 0)$ 的环自同态 α_S^{ς} 的充要条件，并且，对于所有 $a\in R$ 和 $k\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\alpha_S^{\varsigma}(a+k\boldsymbol{\sigma})&=\varsigma\sum_{i=1}^{4}\omega_i\alpha_{ii}\pi_i(a)+(1-\varsigma)\sum_{j=1}^{4}\omega_j\alpha_{4j}\pi_4(a)+k\varsigma(w_1+w_2)+k\varsigma\boldsymbol{\sigma}\\&=(\varsigma(a_{11}+kw_1)+(1-\varsigma)a_{41},\varsigma(a_{22}+kw_2)+(1-\varsigma)a_{42},\varsigma a_{33}+(1-\varsigma)a_{43},a_{44})+k\varsigma\boldsymbol{\sigma}.\end{aligned}$$

如果 δ 是 R 的 α-斜导子（即 R 的任意加法自同态），我们记作 $d_{ij}=\pi_j\delta\omega_i:\ A_i\to A_j$。命题 2.5 中的条件 (a) 得出 $e=\varsigma e_1+e_2+(1-\varsigma)e_3$。条件 (b)、(c) 则为

$$\begin{aligned}\delta\omega_2\pi_2+\delta\omega_3\pi_3&=\omega_2\pi_2\delta+\omega_3\pi_3\delta+\mu(\varsigma)\left(\omega_2\pi_2\alpha+\omega_3\pi_3\alpha\right),\\ \delta\omega_1\pi_1+\delta\omega_3\pi_3&=\varsigma\left(\omega_1\pi_1\delta+\omega_3\pi_3\delta\right)+\mu(\varsigma)\left(\omega_1\pi_1+\omega_3\pi_3\right).\end{aligned}$$

这些条件可以按照命题 2.4 中 (ii)–(iii) 的类似方法求解，得到

$$\begin{aligned}\delta = {} & \omega_2 d_{22}\pi_2 + \omega_4 d_{44}\pi_4 + \varsigma(\omega_1 d_{11}\pi_1 + \omega_3 d_{33}\pi_3) \\ & + (1-\varsigma)\,(\omega_3 d_{23}\pi_2 + \omega_1 d_{41}\pi_4) + \mu(\varsigma)(\omega_1\pi_1 + \omega_3\pi_3 - \omega_2\alpha_{42}\pi_4 - \omega_3\alpha_{43}\pi_4).\end{aligned}$$

因此，具体而言，若我们写作 $a^\delta_{ij} = d_{ij}(a_i)$，则扩展导子的分量为 rea ds

$$\delta_S^{\mu(\varsigma)}\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix} + k\boldsymbol{\sigma}\right) = \begin{pmatrix}\varsigma(a^\delta_{11}+ke_1) + (1-\varsigma)a^\delta_{41} + \mu(\varsigma)a_1\\ a^\delta_{22} - \mu(\varsigma)a_{42} + ke_2\\ \varsigma a^\delta_{33} + (1-\varsigma)(a^\delta_{23}+ke_3) + \mu(\varsigma)(a_3 - a_{43})\\ a^\delta_{44}\end{pmatrix} + k\mu(\varsigma)\boldsymbol{\sigma}.$$

例 2.10（非退化代数 $\urcorner_n$）。若代数 A 满足：对于所有 $a \in A$，$aA = 0$ 蕴含 $a = 0$，且 $Aa = 0$ 蕴含 $a = 0$，则称其为非退化。换言之，代数 A 非退化，当且仅当它具有零湮灭子，即

$$\mathfrak{a}(A) := \{a \in A \mid ab = ba = 0, \text{ for all } b \in A\} = 0.$$

非退化代数在 C^*-代数理论中尤为重要。注意，对于非退化代数，映射

$$A \longrightarrow M(A), \qquad a \longmapsto \bar{a},$$

是代数单态射。该映射的像 A 是 $M(A)$ 中的一个理想，商代数 $M(A)/A$称为 A的冠代数。

如 [**1**, 第 7], 节所示，非退化代数的每个乘子自动都是双齐次映射；并且在等价意义下， A的齐次扩张与 A的冠代数中的幂等元一一对应。

下面的例子基于 [**18**, 例 1.20] 中对乘子代数的描述。令$\urcorner_n$ 表示由 $n \times n$ 单位矩阵 e_{1i}, e_{in}, $i = 1, \ldots, n-1$生成的代数，即由来自 $\mathbb{F}$ 的元素构成的$n \times n$-矩阵的子代数，其形式为

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_{1i} + \sum_{i=2}^n \xi^i e_{in} = \begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_{n-1} & \xi_n\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \xi^2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \xi^n\end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

其中 $\xi_i, \xi^i \in \mathbb{F}$。该代数是非退化的，因为如果

$$0 = e_{11}x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_{1i},$$

那么对所有 $i = 1, \ldots, n$ 都有 $\xi_i = 0$; 如果 $0 = e_{1i}x = \xi^i e_{1n}$, 那么 $\xi^i = 0$。因此，代数 $\urcorner_n$ 是左非退化的。右非退化性可通过类似的论证得到。

由于 $\urcorner_n$ 满足 [**1**, 定理 7.2], 的假设， $\urcorner_n$的齐次扩张的等价类由其幂等乘子确定。对于任意 $k = 2, \ldots, n-1$, 令 ε_k 表示通过e_{kk}进行的乘法。因此，对于方程（2.16）中的所有 x ，

$$\varepsilon_k x = \xi^k e_{kn}, \qquad x\varepsilon_k = \xi_k e_{1k}.$$

显然， ε_k 是幂等乘子，它们在 $\urcorner_n$ 的冠代数中给出非零且彼此不同的元素。容易验证，该映射

$$x + \xi\boldsymbol{\varepsilon}_k \mapsto x + \xi e_{kk},$$

是 $\urcorner_n(\varepsilon_k, 0)$ 与 $\urcorner_n \oplus \mathbb{F}e_{kk} \subset M_n(\mathbb{F})$ 的代数同构，也就是说，它是由 e_{1i}, e_{in}, $i = 1$, ..., n 和 e_{kk} 生成的 $M_n(\mathbb{F})$ 的子代数。特别地，对于 $n = 3$, $\urcorner_3(\varepsilon_2, 0)$ 是 $\urcorner_3$ 的乘子代数（或与之同构），如 [**18**, 例 1.20] 所述。由于 ε_2 是 $\urcorner_3$ 唯一的非内双同伦， $\urcorner_3$ 的所有齐次扩张都等价于 $\urcorner_3(\varepsilon_2, 0)$。对于 $n > 3$，齐次扩张 $\urcorner_n(\varepsilon_k, 0)$ 是 $M(\urcorner_n)$ 的真子代数。

例2.11（零端同态到 $\mathcal{T}_n(\varepsilon_k,\ 0)$ 的扩张）。作为命题 2.4 的例证，我们可以考察 $\mathcal{T}_n$ 上的零端同态到 $\mathcal{T}_n(\varepsilon_k,\ 0)$ 的同态 θ^{ς} 的扩张。条件 (ii)–(iii) 自动满足，因此所有扩张都由条件 (i)（其中 $s=0$）确定。在 $\varsigma=0$ 的情形下，条件 (i) 仅意味着 w 是一个幂等元，因此

$$\theta^0(e_{kk})=pe_{11}+qe_{nn},\qquad (p,q)\in\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}. \tag{2.17}$$

在情形 $\varsigma=1$ （因而 $\mu(\varsigma)=0$）下，令

$$w=\sum_{i=1}^{n}\upsilon_i e_{1i}+\sum_{i=2}^{n}\upsilon^i e_{in},$$

以及共较于 $\mathcal{T}_n$ 的基（单位矩阵）的元素，条件(i)给出

$$\upsilon_i=\upsilon_i\upsilon_1,\quad \upsilon^j=\upsilon^j\upsilon^n,\quad \upsilon_k\upsilon_1=\upsilon^k\upsilon^n=0,\quad \upsilon_n=\upsilon_1\upsilon_n+\sum_{j=2}^{n}\upsilon_j\upsilon^j, \tag{2.18}$$

对所有 $i=1,\dots,k,k+1,\dots,n-1$ 以及 $j=2,\dots,k,k+1,\dots,n$。特别地，(2.18)中前两个等式蕴含 $\upsilon_1=0$,1与 $\upsilon^n=0,1$。因此对 $\varsigma=1$ 而言，也存在$\mathcal{T}_n(\varepsilon_k$,0)的四个可能的端同态族，它们在 $\mathcal{T}_n$上的限制为0。它们如下:

$$\theta^1(e_{kk})=\upsilon e_{1k}+e_{kk}, \tag{2.19a}$$

$$\theta^1(e_{kk})=e_{11}+\sum_{j=2}^{n}\upsilon_j e_{1j}+e_{kk}, \tag{2.19b}$$

$$\theta^1(e_{kk})=\upsilon_n e_{1n}+\sum_{j=2}^{n-1}\upsilon^j e_{jn}+e_{kk}, \tag{2.19c}$$

$$\theta^1(e_{kk})=e_{11}+\sum_{j=2,\,j\neq k}^{n-1}(\upsilon_j e_{1j}-\upsilon_j\upsilon^j e_{1n}+\upsilon^j e_{jn})+e_{nn}+e_{kk}. \tag{2.19d}$$

当然，对所有 $i=1,\dots,n$，有 $\theta^{\varsigma}(e_{1i})=\theta^{\varsigma}(e_{in})=0$。

例2.12（将右 $\mathcal{T}_n$-线性自同态扩张为 $\mathcal{T}_n(\varepsilon_k$,0) 上的 θ^0-导子）。由于 R 的右 R-模自同态与 R 的 0-斜导子相同，因此可以应用命题 2.5 来计算它们向 S 的扩张。容易发现， $\mathcal{T}_n$ 的任意右 $\mathcal{T}_n$-模自同态必定具有如下形式

$$\delta_R(e_{1i})=\gamma_1 e_{1i},\qquad \delta_R(e_{jn})=\gamma_j e_{jn}, \tag{2.20}$$

对所有 $i=1,\ \dots n$、 $j=2$、.....、n 以及 $\gamma_i\in\mathbb{F}$ 均成立。

设 $w=pe_{11}+qe_{nn}$ 如例2.11中的 (2.17)。由于 $\varsigma=0$、 $s=0$ 和 $k\neq 1,\ n$，命题 2.5 中的条件 (a) 化简为

$$e=ee_{kk}+(pe_{11}+qe_{nn})e,$$

求解可得

$$e=p\sum_{i=1,i\neq k}^{n}\nu_i e_{1i}+(1+p)\nu_k e_{1k}+q\nu^n e_{nn}, \tag{2.21}$$

其中 $e=\sum_i^n\nu_i e_{1i}+\sum_{j=2}^n\nu^j e_{jn}$。参数 ν_i,ν^n 由条件 (c) 确定（条件 (b) 对 (2.20) 中的 δ_R 自动成立）。记 $\mu:=\mu(0)$，容易得出

$$p\nu_i=\begin{cases}-p\gamma_1-\mu & i=1,\\ -\mu & i\in\{2,\dots,n-1\},\ i\neq k,\\ 0 & i=n\end{cases}\quad (1-p)\nu_k=\gamma_k-\mu,\quad q\nu^n=-q\gamma_n-\mu.$$

注意，在 p 特别地，每当 $pq = 0$ 时便有 $\mu = 0$。将这些等式代入 (2.21)，我们从而得到

$$\delta_S^\mu(a + \xi\boldsymbol{\sigma}) = \delta_R(a) + \xi \begin{cases} -p\gamma_1 e_{11} + \gamma_k e_{1n} - q\gamma_n e_{nn} & \text{if } pq = 0, \\ -(\gamma_1 + \mu)e_{11} - \mu \sum_{j=2, j\neq k}^{n-1} e_{1j} + (\gamma_k - \mu)e_{1k} - (\gamma_n + \mu)e_{nn} & p = q = 1 \end{cases} + \mu\xi\boldsymbol{\sigma}.$$

3. Ore 扩张与齐次扩张

尽管含幺环的 Ore 扩张理论已得到广泛研究，如今也已相当成熟（例如参见 [**12**], [**8**]），但非含幺环的 Ore 扩张却鲜少有人探究。据我们所知，对此类扩张的首次全面研究尝试见于 [**2**] 和 [**11**]。

设 δ_R 是 α_R-斜导子，定义在 $\mathbb{F}$-代数 R上。那么自由左 R-模

$$R \oplus \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} Rx^i = \{a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x^i | n \geq 1, a_i \in R\}, \tag{3.1}$$

可以赋予结合代数结构，使典范嵌入 $R \hookrightarrow R \oplus \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} Rx^i$, $a \mapsto a \oplus \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} 0x^i$成为代数单态，并且其乘法如下，对所有 a, $b \in R$, n, $m > 0$

$$a(bx^n) = abx^n, \quad (ax^m)(bx^n) = \sum_{i=0}^{m} a\Gamma[\alpha_R, \delta_R]_i^m(b)x^{n+i}, \quad (ax^m)b = \sum_{i=0}^{m} a\Gamma[\alpha_R, \delta_R]_i^m(b)x^i, \tag{3.2}$$

其中 $\Gamma[\alpha_R, \delta_R]_i^m$: $R \to R$ 表示由 i个 α_R 与 $m - i$ 个 δ_R的所有可能复合之和所得到的线性映射。所得代数称为 R 的 ***Ore*** 扩张，记作 $R[x; \alpha_R, \delta_R]$。

现在有必要作几点说明。首先，请注意，由于 R 不一定是含幺代数，生成元 x^i 不一定是 $R[x; \alpha_R, \delta_R]$ 中的元素。尽管如此，记号 x^i 暗示着在 $R[x; \alpha_R, \delta_R]$中对 x 取幂；认真采用对 x^i 的这种解释，同时牢记上述限定条件，便可从单一规则推导出 (3.2) 中后两条规则：

$$axb = a\alpha_R(b)x + a\delta_R(b).$$

其次，尽管 x 不一定是 $R[x; \alpha_R, \delta_R]$中的元素，但从左侧和右侧乘以 x 都是定义良好的运算，它们合起来构成一个双齐次映射

$$ax^n\bar{x} = ax^{n+1}, \qquad \bar{x}ax^n = xax^n = \alpha_R(a)x^{n+1} + \delta_R(a)x^n,$$
$$a\bar{x} = ax, \qquad \bar{x}a = xa = \alpha_R(a)x + \delta_R(a),$$

对于一个 ll $a \in R$。第三，最后，为了使记号更加直观，我们将 ax^0 写作 a.

定理 3.1。 设 (σ, s) 是代数 R上的齐次数据，且 $(\alpha_R, w;\ \delta_R, e, \mu(1))$ 是一个相容的类型 ***1*** 斜导子。则数据 (σ, s) 可扩张为 ***Ore*** 扩张 $R[x;\ \alpha_R, \delta_R]$ 上的唯一齐次数据 $(\tilde{\sigma}, s)$，使得

$$\tilde{\sigma} = \sigma \quad and \quad \bar{x}\tilde{\sigma} = (\bar{w} + \tilde{\sigma})\bar{x} + \bar{e}, \tag{3.3}$$

在 R上。

证明。在构造齐次数据 $(\tilde{\sigma},\ s)$ 时，我们紧密遵循 [**1**, 定理 3.6] 的证明。考虑线性映射

$$\begin{aligned} &\iota' : R[x; \alpha_R, \delta_R] \longrightarrow R(\sigma, s)[x; \alpha_S, \delta_S], && ax^n \longmapsto ax^n, \\ &\pi' : R(\sigma, s)[x; \alpha_S, \delta_S] \longrightarrow \mathbb{F}[x], && (a + \zeta\boldsymbol{\sigma})x^n \longmapsto \zeta x^n. \end{aligned} \tag{3.4}$$

容易验证，由于 $\mu(1) = 0$，即 $\delta_S(\boldsymbol{\sigma}) = 0$，两者都是代数同态；显然，$\iota'$ 是单射，而 π' 是满射。此外，$\pi'(\sum_n (a_n + \zeta_n\boldsymbol{\sigma})x^n) = 0$ 当且仅当 $\sum_n \zeta_n x^n = 0$，也就是说，所有 ζ_n 都为零。由此得到以下代数的短正合列：

$$0 \longrightarrow R[x; \alpha_R, \delta_R] \xrightarrow{\iota'} R(\sigma, s)[x; \alpha_S, \delta_S] \xrightarrow{\pi'} \mathbb{F}[x] \longrightarrow 0. \tag{3.5}$$

序列 (3.5) 作为 $\mathbb{F}$-模的序列分裂，其分裂映射为

$$\begin{aligned} &p : R(\sigma, s)[x; \alpha_S, \delta_S] \longrightarrow R[x; \alpha_R, \delta_R], \qquad (a + \zeta\boldsymbol{\sigma})x^n \longmapsto ax^n, \\ &j : \mathbb{F}[x] \longrightarrow R(\sigma, s)[x; \alpha_S, \delta_S], \qquad \zeta x^n \longmapsto \zeta\boldsymbol{\sigma}x^n. \end{aligned}$$

定义双算子 $\tilde{\sigma}$ 在 $R[x$上； α_R， $\delta_R]$ 规定为

$$\tilde{\sigma}ax^n = p(\boldsymbol{\sigma}\iota'(ax^n)), \qquad ax^n\tilde{\sigma} = p(\iota'(ax^n)\boldsymbol{\sigma}).$$

仿照 [1, 定理 3.6]的证明可得，由于 $\boldsymbol{\sigma} \in \pi'^{-1}(1)$ 且 (3.5) 是 $\mathbb{F}$-模的分裂正合序列，

$$\iota'(\tilde{\sigma}ax^n) = \boldsymbol{\sigma}\iota'(ax^n), \qquad \iota'(ax^n\tilde{\sigma}) = \iota'(ax^n)\boldsymbol{\sigma}.$$

注意，在推导这一结论时，序列 (3.5) 在 $R(\sigma$， $s)[x; \alpha_S$， $\delta_S]$ 处分裂这一事实起着关键作用。代数映射 ι' 的单射性表明 $\tilde{\sigma}$ 是双齐次映射。又由于 $\boldsymbol{\sigma}^2 - \boldsymbol{\sigma} = s$， s补足 $\tilde{\sigma}$ ，从而构成齐次数据 $(\tilde{\sigma}$， $s)$。

注意

$$\tilde{\sigma}ax^n = p(\boldsymbol{\sigma}ax^n) = p(\sigma ax^n) = \sigma ax^n,$$

而,

$$a\tilde{\sigma} = p(a\boldsymbol{\sigma}) = p(a\sigma) = a\sigma,$$

因此 $\tilde{\sigma}\,|_R = \sigma$。此外，利用命题 2.4 中的陈述 (iii) 和命题 2.5 中的 (c)

$$\begin{aligned} \bar{x}\tilde{\sigma}ax^n &= x(\sigma a)x^n = \alpha_R(\sigma a)x^{n+1} + \delta_R(\sigma a)x^n \\ &= (w + \sigma)\alpha_R(a)x^{n+1}(w + \sigma)\delta_R(a)x^n + eax^n \\ &= ((w + \sigma)x + e)ax^n = ((\bar{w} + \sigma)\bar{x} + \bar{e})ax^n. \end{aligned}$$

最后,

$$a\bar{x}\tilde{\sigma} = p(ax\boldsymbol{\sigma}) = p(a(w + \boldsymbol{\sigma})x) + ae = awx + a\sigma x + ae = a((\bar{w} + \sigma)\bar{x} + \bar{e}),$$

因此 $\tilde{\sigma}$ 确实满足性质 (3.3)。 □

注 3.2。注意,

$$ax^n\tilde{\sigma} = p(ax^n\boldsymbol{\sigma}) = a\sigma x^n + ap(x^n\boldsymbol{\sigma}) = a\sigma x^n + ap\left(\sum_{i=0}^{n}\Gamma[\alpha_S, \delta_S]_i^n\boldsymbol{\sigma}x^i\right).$$

这导出了关于 $R[x$； α_R， $\delta_R]$ 的以下形式交换规则,

$$\bar{x}^n\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}\bar{x}^n + \sum_{i=0}^{n}\bar{\Gamma}[\alpha_S, \delta_S]_i^n\bar{x}^i, \tag{3.6}$$

¯其中 $\Gamma[\alpha_S, \delta_S]_i^n$表示由元素 $p\,(\Gamma[\alpha_S, \delta_S]_i^n\boldsymbol{\sigma})$ 诱导的双乘法。容易发现，例如,

$$\bar{\Gamma}[\alpha_S, \delta_S]_n^n = \sum_{i=0}^{n}\alpha_R^i(w) \quad \text{and} \quad \bar{\Gamma}[\alpha_S, \delta_S]_0^n = \delta_R^{n-1}(e).$$

鉴于命题 2.5 和定理 3.1，给定一个齐次数据和一个相容的斜导子，可以考虑 R 的两种连续扩张的组合：一种是齐次扩张的 Ore 扩张，另一种是 Ore 扩张的齐次扩张。它们之间的关系由下面的命题描述。

命题 *3.3*。设 (σ, s) 是代数 R 上的齐次数据，且 $(\alpha_R, w; \delta_R, e, \mu(1))$ 是一个类型 *1* 的相容斜导子。设 (α_S, δ_S) 是命题 *2.5* 中将 $(\alpha_R, w; \delta_R, e, \mu(1))$ 扩张到 $R(\sigma, s)$ 所得的扩张，并设 $(\tilde{\sigma}, s)$ 是定理 *3.1* 中定义在 $R[x; \alpha_R, \delta_R]$ 上的齐次数据。那么，存在

一个代数单态 $\varphi:\ R[x;\ \alpha_R,\delta_R]\ (\tilde{\sigma},s)\ \longrightarrow R\ (\sigma,s)\ [x;\ \alpha_S,\delta_S]$，使得以下具有正合行的代数映射图表交换，

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & R[x;\alpha_R,\delta_R] & \xrightarrow{\tilde{\iota}} & R[x;\alpha_R,\delta_R](\tilde{\sigma},s) & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \mathbb{F} & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow\varphi & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & R[x;\alpha_R,\delta_R] & \xrightarrow{\iota'} & R(\sigma,s)[x;\alpha_S,\delta_S] & \xrightarrow{\pi'} & \mathbb{F}[x] & \longrightarrow & 0, \end{array} \tag{3.7}$$

其中，$\tilde{\iota}$、$\tilde{\pi}$ 是确定齐次扩张的典范映射，ι'、π' 定义于(3.4)中，而最后一个竖直映射是标量嵌入。

证明。考虑线性单态

$$\varphi: R[x;\alpha_R,\delta_R](\tilde{\sigma},s)\longrightarrow R(\sigma,s)[x;\alpha_S,\delta_S],\qquad a+\xi\boldsymbol{\sigma}\mapsto\iota'(a)+\xi\boldsymbol{\sigma}.$$

φ适合交换图（3.7）是显然的，因此只需检验 φ 的乘法性。注意，$\varphi\mid_{R(\sigma,s)}$ 是恒等映射。另请注意，对于所有的 $m,\ n\in\mathbb{N}$、$a\in R$ 和 $\eta\in\mathbb{F}$，

$$\varphi(ax^{m+n}+\eta\boldsymbol{\sigma})=\varphi(ax^m)x^n+\eta\boldsymbol{\sigma}.$$

在整个证明过程中，$a,\ b\in R$ 和 $\eta,\ \xi\in\mathbb{F}$ 均为任意元素。

我们将 从单项式的次数着手，通过归纳法证明乘法性 h

$$\begin{aligned}\varphi(ax+\eta\boldsymbol{\sigma})\varphi(b+\xi\boldsymbol{\sigma}) &= ax(b+\xi\boldsymbol{\sigma})+\eta\boldsymbol{\sigma}(b+\xi\boldsymbol{\sigma})\\ &= a(\alpha_R(b)+\xi w+\xi\boldsymbol{\sigma})x+a(\delta_R(b)+\xi e)+\eta\sigma b+\eta\xi s+\eta\xi\boldsymbol{\sigma}\\ &= (a\alpha_R(b)+\xi aw+\xi a\sigma)x+a\delta_R(b)+\xi ae+\eta\sigma b+\eta\xi s+\eta\xi\boldsymbol{\sigma}\\ &= a\alpha_R(b)x+\xi awx+\xi a\sigma x+a\delta_R(b)+\xi ae+\eta\sigma b+\eta\xi s+\eta\xi\boldsymbol{\sigma}\\ &= a\alpha_R(b)x+\xi ax\tilde{\sigma}+a\delta_R(b)+\eta\sigma b+\eta\xi s+\eta\xi\boldsymbol{\sigma}=\varphi((ax+\eta\boldsymbol{\sigma})(b+\xi\boldsymbol{\sigma})),\end{aligned}$$

此处，除了 φ 的定义外，我们还用到了 (α_S,δ_S) 的定义、Ore 扩张 $R(\sigma,s)[x$ 中乘法的定义；$\alpha_S,\delta_S]$，以及关系式 (3.3)。

接下来，归纳假设

$$\varphi(ax+\eta\boldsymbol{\sigma})\varphi(bx^n+\xi\boldsymbol{\sigma})=\varphi((ax+\eta\boldsymbol{\sigma})(bx^n+\xi\boldsymbol{\sigma})).$$

然后，利用 $R(\sigma,s)$ 和 $R[x;\ \alpha_R,\delta_R]$ 中的乘法规则，我们得到

$$\begin{aligned}\varphi(ax+\eta\boldsymbol{\sigma})\varphi(bx^{n+1}+\xi\boldsymbol{\sigma}) &= \varphi(ax+\eta\boldsymbol{\sigma})(\varphi(bx^n)x+\xi\boldsymbol{\sigma})\\ &= \varphi((ax+\eta\boldsymbol{\sigma})bx^n)x+\varphi(\xi(ax+\eta\boldsymbol{\sigma}))\boldsymbol{\sigma}\\ &= \varphi(a\alpha_R(b)x^{n+1}+a\delta_R(b)x^n+\eta\sigma bx^n)x+\varphi(\xi ax\tilde{\sigma}+\eta\xi s+\eta\xi\boldsymbol{\sigma})\\ &= \varphi(a\alpha_R(b)x^{n+2}+a\delta_R(b)x^{n+1}+\eta\sigma bx^{n+1}+\xi ax\tilde{\sigma}+\eta\xi s+\eta\xi\boldsymbol{\sigma})\\ &= \varphi(axbx^{n+1}+\eta\sigma bx^{n+1}+\xi ax\tilde{\sigma}+\eta\xi s+\eta\xi\boldsymbol{\sigma})=\varphi((ax+\eta\boldsymbol{\sigma})(bx^{n+1}+\xi\boldsymbol{\sigma})).\end{aligned}$$

因此，对所有 $n\in\mathbb{N}$，φ 在 $ax+\eta\boldsymbol{\sigma}$ 与 $bx^n+\xi\boldsymbol{\sigma}$的乘积上具有乘法性。最后，归纳地假设存在 $m\in\mathbb{N}$，使得对所有 $n\in\mathbb{N}$，

$$\varphi(ax^m+\eta\boldsymbol{\sigma})\varphi(bx^n+\xi\boldsymbol{\sigma})=\varphi((ax^m+\eta\boldsymbol{\sigma})(bx^n+\xi\boldsymbol{\sigma})).$$

Then

$$\begin{aligned}\varphi(ax^{m+1}+\eta\boldsymbol{\sigma})\varphi(bx^n+\xi\boldsymbol{\sigma}) &= (\varphi(ax^m)x+\eta\boldsymbol{\sigma})\varphi(bx^n+\xi\boldsymbol{\sigma})\\ &= \varphi(ax^m)x(bx^n+\xi\boldsymbol{\sigma})+\varphi(\eta\boldsymbol{\sigma})(bx^n+\xi\boldsymbol{\sigma})\\ &= \varphi(ax^m)(\alpha_R(b)x^{n+1}+\delta_R(b)x^n+(\xi w+\xi\tilde{\sigma})x+\xi e)+\varphi(\eta\sigma bx^n+\eta\xi s+\eta\xi\boldsymbol{\sigma})\\ &= \varphi(ax^m)\varphi(\alpha_R(b)x^n)x+\varphi(ax^m)\varphi(\delta_R(b)x^n+\xi wx+\xi e+\xi\tilde{\sigma}x)+\varphi(\eta\sigma bx^n+\eta\xi s+\eta\xi\boldsymbol{\sigma})\\ &= \varphi(ax^m\alpha_R(b)x^{n+1}+ax^m\delta_R(b)x^n+\xi ax^mwx+\xi ax^me+\xi ax^m\tilde{\sigma}x+\eta\sigma bx^n+\eta\xi s+\eta\xi\boldsymbol{\sigma})\\ &= \varphi(ax^{m+1}bx^n+\xi ax^{m+1}\tilde{\sigma}+\eta\sigma bx^n+\eta\xi s+\eta\xi\boldsymbol{\sigma})=\varphi((ax^{m+1}+\eta\boldsymbol{\sigma})(bx^n+\xi\boldsymbol{\sigma})).\end{aligned}$$

在此，关键的第五个等式中使用了归纳假设。这就完成了 φ的乘法性的证明。□

注 3.4. 目前尚不清楚如何放宽定理 3.1 和命题 3.3 中对 ς 的限制。虽然通常可以通过令 $\pi'((a+\zeta\boldsymbol{\sigma})x^n) = \zeta(\varsigma x+\mu(\varsigma))^n$，来定义代数映射 $\pi'\colon\ R(\sigma,s)[x;\alpha_S,\delta_S] \to \mathbb{F}[x]$，使得 $\pi'\iota' = 0$，但当 $\varsigma = 0$ 时，此映射并非满射。另一方面，即使在 $\varsigma = 0$ 的情形下，将 π' 限制到其像 $\mathbb{F}$ 所得的核中也包含不属于 ι' 的元素，因为 $0 = \sum_n \zeta_n\mu(0)^n = \pi'(\sum_n \zeta_n x^n)$ 并不一定意味着 $\zeta_n = 0$ 对所有 n 都成立。目前，定理 3.1 和命题 3.3 的结果能否推广到 $\varsigma = 0$ 的情形，仍是一个开放问题。

例 3.5. 为了说明定理 3.1，我们考察方程 (2.19) 中将 $\urcorner_n$ 上的零映射扩张到 $\urcorner_n(\varepsilon_k,\ 0)$ 的端同态 θ^1，以及方程 (2.20) 中将导子 δ_R 扩张的情形。在 (2.19a) 中，$w = ve_{1k}$ 的情况下，命题 2.5 的条件 (a) 将可能的元素 e 限制为 $e = u_1e_{1k}+u_2e_{kn}+vu_2e_{1n}$ 的形式。条件 (b) 则没有给出任何约束，而条件 (c) 给出 $u_2 = 0$ 和 $u_1 = -\gamma_k v$。因此，(2.19) 中的每个映射 δ_R 以及当 θ^1 时，都可以扩张为 $\urcorner_n(\varepsilon_k,\ 0)$ 上的 θ^1-斜导子 δ_S，其中 $e = -\gamma_k ve_{1k}$，使得$\delta_S(e_{kk}) = -\gamma_k ve_{1k}$。由定理 3.1，齐次映射 ε_k 可扩张为 $\urcorner_n[x$ 上的齐次映射 $\tilde{\varepsilon}_k;\ \theta^1,\ \delta_R]$，

$$(e_{1i}x)\tilde{\varepsilon}_k = (v\delta_{1i}+\delta_{ik}e_{1k})x - \delta_{1i}\gamma_k ve_{1k},\quad (e_{jn}x)\tilde{\varepsilon}_k = 0,\quad \tilde{\varepsilon}_k(e_{1i}x) = 0,\quad \tilde{\varepsilon}_k(e_{jn}x) = \delta_{jk}e_{kn}x,$$

对于所有 $i = 1,\dots,n$ 以及 $j = 2,\dots,n$。

对于要扩张到 δ_S 而言，θ^1（见 (2.19a)）或 δ_R 都没有限制条件，但对于如 (2.19b) 中的 θ^1，情况则有所不同。由于 $w = e_{11}+\sum_{j=2}^n v_je_{1j}$，命题 2.5 中的条件 (a) 迫使 e 具有如下形式

$$e = \sum_{i\neq k} u_ie_{1i} + u_ke_{kn},$$

前提是 $u_kv_k = 0$。与前面一样，(b) 不会产生任何限制条件，而 (c) 则意味着 $u_1 = -\gamma_1,u_k = 0,\ u_i = -\gamma_iv_1$，$i = 2,\dots k-1,k+1,\dots,n$ 和 $\gamma_kv_k = 0$。因此，若 $\gamma_kv_k = 0$，则 δ_R 可以扩张为 θ^1-导子 δ_S，使得

$$\delta_S(e_{kk}) = -\gamma_1e_{11} - \sum_{i=2,i\neq k}^{n} \gamma_iv_ie_{1i}. \tag{3.8}$$

若 $\gamma_kv_k \neq 0$，则不存在扩张。与导子 (3.8) 对应的扩展双齐次映射为 $\tilde{\varepsilon}_k$ 作用于 $\urcorner_n[x;\ \theta^1,\ \delta_R]$，

$$(e_{1i}x)\tilde{\varepsilon}_k = \left(\delta_{1i}(e_{11}+\sum_{j=2}^n v_je_{1j})+\delta_{ik}e_{1k}\right)x - \delta_{1i}(\gamma_1e_{11}+\sum_{j=2,j\neq k}^n \gamma_jv_je_{1j}),$$
$$(e_{jn}x)\tilde{\varepsilon}_k = 0,\qquad \tilde{\varepsilon}_k(e_{1i}x) = 0,\qquad \tilde{\varepsilon}_k(e_{jn}x) = \delta_{jk}e_{kn}x,$$

对所有 $i = 1,\dots,n$ 和 $j = 2,\dots,n$。

在情形 (2.19c) 和 (2.19d) 中也会出现限制条件。在前一种情形中，若对所有 $j \neq k$ 都有 $v_n\gamma_n = v^j\gamma_n = 0$，则存在扩张；此时 $\delta_S(e_{kk}) = -v^k\gamma_ne_{kn}$，从而得到由下式给出的双重齐次映射 $\tilde{\varepsilon}_k$

$$(e_{1i}x)\tilde{\varepsilon}_k = \left(\delta_{1i}v_ne_{1n}+(1-\delta_{1i})(1-\delta_{in})v^ie_{1n}+\delta_{ik}e_{1k}\right)x - \delta_{ik}v^k\gamma_ne_{1n},$$

并且采用与前述情形相同的公式。

对于 (2.19d) 中的 θ^1，若对所有 $j = 2,\dots,k-1,\ k+1,\ \dots n-1$ 都有 $\gamma_nv_jv^j = 0$，则存在 δ_R 的扩张。若这些条件成立，则

$$\delta_S(e_{kk}) = -\left(\gamma_1e_{11}+\sum_{j=2,j\neq k}^{n-1}(\gamma_jv_je_{1j}+\gamma_nv^je_{jn})+\gamma_ne_{nn}\right).$$

双重齐次映射 $\tilde{\varepsilon}_k$ 的形式留给读者推导。

值得注意的是，只要它们存在，右 $\urcorner_n$-模映射 δ_R (2.20)到 $\urcorner_n(\varepsilon_k,0)$的$\theta^1$-导子的扩张在每种情形下都是唯一的。

致谢

Tomasz Brzeziński的研究部分得到波兰国家科学中心通过WEAVE-UNISONO资助（编号2023/05/Y/ST1/00046）的支持。

参考文献

[1] R.R. Andruszkiewicz, T. Brzeziński, B. Rybołowicz, 《理想环扩张与桁架》, J. Algebra 600 (2022), 237–278。[2] P. Bäck, J. Richter & S. Silvestrov, 《Hom-结合奥尔扩张与弱单位化》, Int. Electron. J. Algebra 24 (2018), 174–194。[3] T. Brzeziński, 《桁架：介于 brace 与环之间》, Trans. Amer. Math. Soc. 372 (2019), 4149–4176。[4] T. Brzeziński, 《桁架：拟理想、理想与模》, J. Pure Appl. Algebra 224 (2020), 106258。[5] R.B. Busby, 《 C^*-代数的双中心化子与扩张》, Trans. Amer. Math. Soc. 132 (1968), 79–99。[6] F. Cedó, E. Jespers & J. Okniński, 《brace 与杨–巴克斯特方程》, Commun. Math. Phys. 327 (2014), 101–116。[7] C.J. Everett, 《环的扩张理论》, Amer. J. Math. 64 (1942), 363–370。[8] K.R. Goodearl & R.B. Warfield, 《非交换诺特环导论》（第2版）, 伦敦数学学会学生文本丛书, 第61卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2004。[9] G. Hochschild, 《结合代数的上同调与表示》, Duke Math. J. 14 (1947), 921–948。[10] S. Helgason, 《巴拿赫代数的乘子》, Ann. Math. 64 (1956), 240–254。[11] P. Lundström, J. Öinert & J. Richter, 《非单位奥尔扩张》, Colloq. Math., 172 (2023), 217–229。[12] J. McConnell & J.C. Robson, 《非交换诺特环》（修订版）, Grad. Stud. Math., 30, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗德岛州, 2001。[13] S. Mac Lane, 《环的扩张与障碍》, Illinois J. Math. 2 (1958), 316–345。[14] M. Petrich, 《环的理想扩张》, Acta Math. Hung., 45 (1985), 263–283。[15] H. Prüfer, 《阿贝尔群理论 I：基本性质》, Math. Z. 20 (1924), 165–187。[16] L. Rédei, 《施赖尔扩张理论的推广》, Acta Sci. Math. Szeged, 14 (1952), 252–273。[17] W. Rump, 《brace、根环与量子杨–巴克斯特方程》, J. Algebra 307 (2007), 153–170。[18] A. Van Daele & J. Vercruysse, 《乘子代数与局部单位》, arXiv:2507.08769 (2025)

斯旺西大学数学系，法比安路，斯旺西 SA1 8EN，英国。比亚韦斯托克大学数学学院，K. Ciołkowskiego 1M，15-245 比亚韦斯托克，波兰电子邮箱地址：T.Brzezinski@swansea.ac.uk

斯旺西大学数学系，法比安路，斯旺西 SA1 8EN，英国电子邮箱地址：a.t.m.west@swansea.ac.uk