奇匹配重构的更高难度结果

Joseph Dorfer ✉ 格拉茨工业大学，奥地利

摘要

我们研究组合图的奇匹配重构。奇匹配是覆盖图中除一个顶点外所有顶点的匹配。重构步骤（或称翻转）是一种操作：匹配孤立顶点，因而使另一个顶点变为孤立顶点。奇匹配的翻转图是一个图，其顶点为某个图的所有奇匹配；如果两个顶点所对应的匹配可以通过一次翻转相互转换，则这两个顶点之间有一条边。

我们证明，计算奇匹配翻转图的直径是 Π_2^p -困难的。这补充了 Wulf 最近的一项结果 [FOCS25]：计算完美匹配翻转图的直径是 Π_2^p -困难的；在该翻转图中，一次翻转沿着一个大小无界的单个环交换匹配边。

此外，我们证明，计算奇匹配翻转图的半径是 Σ_3^p -困难的。直径和半径对应的判定问题也分别在多项式层次的相应层级中是完备的。这表明，除非多项式层次坍缩，否则计算奇匹配翻转图的半径可证明比计算其直径更难。

最后，我们将集合覆盖归约到寻找最短翻转序列的问题。由此，我们证明了该问题具有 log-APX-困难性，且无法在次对数因子内近似。通过这一结果，我们回答了 Aichholzer、Brenner、Dorfer、Hoang、Perz、Rieck 和 Verciani [GD25]提出的一个问题。

2012年ACM主题分类 计算机科学中的数学 →离散数学、组合学、组合问题

关键词与短语 图重构问题、翻转图、多项式层次、APX-困难性

资助 *Joseph Dorfer*：奥地利科学基金会（FWF）10.55776/DOC183

致谢 首先，我要感谢 Lasse Wulf，他向我介绍了多项式层次与翻转图直径计算之间的关系。此外，我还要感谢 Oswin Aichholzer、Sofia Brenner、Hung Hoang、Daniel Perz、Christian Rieck 和 Francesco Verciani，感谢我们此前在奇匹配方面的合作。最后，我要感谢各位审稿人提出的许多有益意见，这些意见帮助改进了论文中的论证。

arXiv:2602.09573v1 [cs.CC] 10 Feb 2026

1 引言

重构 描述的是将一种结构转变为另一种结构的过程。这个过程通常通过一系列小的、可逆的步骤来完成，这些步骤称为翻转。重构在优化 [16]或枚举 [6, 19]等领域有许多应用。有关重构的其他应用，参见以下综述 [20, 24]。最近，重构还为研究多胞体直径计算的复杂度提供了重要见解 [21, 22], ，其突出成果是证明计算多胞体的组合直径是 Π_2^p -难的 [26]。值得注意的是，近期所有关于多胞体直径的研究都探讨了完美匹配的重构。

我们研究图的奇匹配重构这一相关问题。图 G 的奇匹配是由 G 的边组成的匹配，其中 G 的所有顶点都被匹配，唯有一个孤立顶点除外。两个奇匹配之间的翻转操作，是将第一个匹配中的孤立顶点 v 与另一个顶点 w 匹配。随后，之前与 w 共用一条边的顶点将成为新的孤立顶点。图 G 的奇匹配翻转图是一个图，其顶点集由 G 的所有奇匹配组成；当两个匹配可以通过一次翻转相互转换时，它们之间便有一条边。初始匹配 M_{in} 与目标匹配 M_{tar} 之间的翻转序列，是一系列匹配 $M_{in} = M_0$、 M_1、.....、 M_{k-1}、$M_k = M_{tar}$，其中相邻匹配之间仅相差一次翻转。从翻转图的角度看，翻转序列就是两个匹配之间的一条路径。下标 k 表示翻转序列的长度。两个奇匹配 M_{in} 和 M_{tar} 之间的翻转距离记为 $d(M_{in}, M_{tar})$，它是所有满足存在一条长度为 k 、连接 M_{in} 与 M_{tar} 的翻转序列的 k 中的最小值。这可以解释为翻转图中的最短路径长度。翻转图的直径定义为 $\max_{M_1,M_2} d(M_1, M_2)$，表示翻转图中任意一对奇匹配之间的最大翻转距离。类似地，半径定义为 $\min^{M_1} \max_{M_2} d(M_1, M_2)$，表示匹配 M_2 到某个中心 M_1 的最大距离的最小值。显然，翻转图的直径至少为其半径，且至多为其半径的两倍。关于许多概念的示意，请参见图1。

1.1 相关工作

奇匹配奇匹配的重构最初由 [2] 引入，研究的是几何奇匹配情形，即在平面上一般位置的点之间以线段为边、且无交叉的奇匹配。作者证明，在这种情形下，翻转图始终连通，且直径为 $O(n^2)$，其中 n 是点的数量。 [1] 研究了组合奇匹配。作者给出了一个完整且可在多项式时间内检验的刻画，说明图 G 上奇匹配的翻转图何时连通，并证明翻转图的任一连通分量的直径都与 G 的大小呈线性关系。同一篇论文还证明，在几何情形和组合情形下，判定给定的两个奇匹配之间是否存在长度为特定值的翻转序列，是 NP 完全的。在组合情形下，对于实心矩形网格图，翻转距离问题已经是 NP 困难的。奇匹配重构也出现在滑块游戏 Gourds [14, 18] 中，其底层图为三角网格图，边的端点带有颜色或标签。每次翻转时，新增边会继承被移除边的颜色或标签。

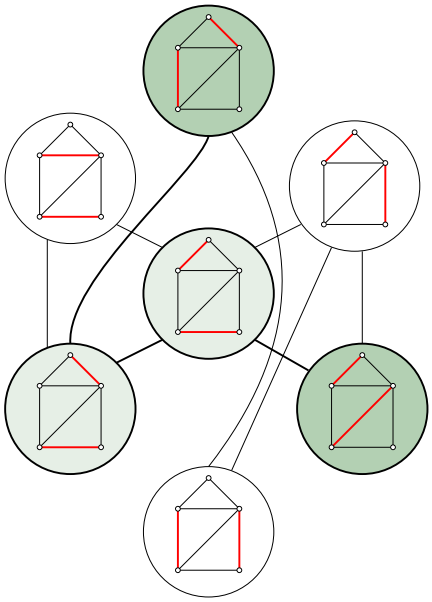


图1 奇匹配翻转图示意图，其中突出显示了长度为 3 的翻转序列。

完美匹配对于完美匹配的重构，移除并添加一条边无法得到另一个完美匹配。因此，匹配中的一次翻转 M 如下进行：选取一个环，使其上的边交替地属于 M 和不属于 M。随后，翻转会移除环上属于 M 的所有边，并添加环上不属于 M 的边。我们可以允许环的长度任意，也可以对环的长度加以限制。当将环的长度限制为 4 时，每次翻转都会从 M 中移除两条边并添加两条新边；研究表明，在组合情形下，判定给定的一个匹配能否通过翻转变为另一个匹配是 PSPACE 完全的 [8]。在几何情形下，一个长期未解的问题是：当只允许沿 4-环翻转时，任意点集上的任意完美匹配是否都能变换为同一点集上的任意另一个匹配。迄今为止，甚至还没有已发表的证明表明，任意点集上的完美匹配都允许进行这种形式的有效翻转。此外，研究还表明，在几何情形下，判定是否存在长度为特定值的翻转序列是 NP 困难的 [7]。

然而，如果允许沿着大小不受限的交替环进行翻转，那么在几何情形下，翻转图是连通的 [15]。在组合情形下，已有研究表明，判断两个完美匹配之间的翻转距离是否至多为 k 是 NP 完全的，即使对于 $k = 2$ [3, 17] 也是如此。人们还特别关注组合情形下计算完美匹配翻转图直径的复杂度 [21, 22, 26]，相关研究的高潮是证明计算该直径是 Π_2^p -完全的 [26]。这项研究的动机在于其对计算多胞体直径的复杂度所产生的影响 [10]。

翻转图中的中心结构计算今年的 CG:SHOP 挑战围绕在并行翻转操作 [4] 下，寻找三角剖分的翻转图中的中心结构展开。问题的表述要求，在输入所给的一组有限三角剖分中（其规模相对于翻转图较小），找出翻转图中的一个中心结构。该问题属于 NP，也可以理解为尝试近似寻找整个翻转图的中心和半径。

1.2 我们的贡献

在这篇论文中，我们针对组合奇匹配的重构，给出了三项关于其更高复杂度的新结果。

首先，我们通过证明以下结果补充了 [26] 中的主要结果：对于给定的图 G 和参数 $k \in \mathbb{N}$，判定 G 的奇匹配翻转图的直径是否至多为 k，是一个 Π_2^p -完全问题。我们直接从Π_2^p -完全问题 $\forall\exists$-SAT 归约得到该结果。

▶ **定理 1.** 给定图 G 和参数 $k \in \mathbb{N}$。判定 G 的奇匹配翻转图的直径是否至多为 k，是一个 Π_2^p -完全问题。

作为第二个结果，我们研究了计算翻转图半径这一相关问题。我们证明，对于给定的图 G，判定 G 的奇匹配翻转图的半径是否至多为某个值 k，是一个 Σ_3^p -完全问题。我们直接从 Σ_3^p -完全问题 $\exists\forall\exists$-SAT 归约得到该结果。

▶ **定理 2**。给定图 G 和参数 $k \in \mathbb{N}$，判定 G 的奇匹配翻转图的半径是否至多为 k 是 Σ_3^p -完全的。

通过证明该问题是 Σ_3^p -完全的，我们给出了一个自然出现的、在此复杂度类中完全的问题。正如 [13],中所讨论的，这一复杂度类中的问题研究得并不充分，且该类的完全问题数量也不多。

尽管直径和半径的概念看起来非常相似，我们得出结论：除非多项式层次坍缩，否则计算半径可以证明比计算直径更难。

[1] 的作者证明，计算奇匹配之间的最短翻转序列是 NP 困难的，并由此提出了是否存在近似算法的问题。

作为最后一项结果，我们证明，计算两个奇匹配之间的翻转距离是对数 APX 困难的[1]，通过从集合覆盖进行归约 [12]。

▶**定理 3.** 给定一个图 G 以及其中的两个奇匹配 M_{in} 和 M_{tar} G。计算 M_{in} 与 M_{tar} 之间的翻转距离是log-APX-困难的。特别地，若近似因子优于 $\Theta(log(n))$，则计算翻转距离是 *NP* 困难的。

标记为（⋆）的陈述的完整技术细节和证明将见论文的完整版。

[1] 直到提交本文终稿后，我们才发现了论文 [9]，该文讨论了一种称为令牌跳跃的操作。作者研究了一种将一个匹配变为另一个匹配的重构操作。这些匹配不必是完美匹配、近乎完美匹配，甚至也不必是按包含关系极大的匹配。一个重构步骤会删除一条边并添加另一条边，使所得边集仍然是一个匹配。对于含有一个孤立顶点的匹配，这种情形与我们论文中的情形一致。在 [9] 中，作者证明，除非 P=NP，否则无法在次对数因子范围内高效近似最短重构序列的长度。该证明从集合覆盖归约而来，并使用了与我们类似的构件。不过，证明中的匹配每个集合对应一个孤立顶点，而且 [9]中的归约不保持PTAS，因此不能推出（log-）APX-困难性。

2 预备知识

2.1 奇匹配的并

设 M_1 和 M_2 是同一图 G 上的两个奇匹配，则它们的并集 $M \cup M'$ 具有以下连通分量：

- 一条偶数长度（可能为零）的交替路径，连接M_1 和 M_2 的孤立顶点，并在 M_2 和 M_1 的边之间交替；偶数长度的环，在 M_1 和 M_2之间交替；以及属于 $M_1 \cap M_2$的边，称为快乐边。

上述划分有助于论证翻转序列长度的下界。如果翻转序列需要在某个连通分量中执行相应次数的翻转，我们就称为将翻转计入某个分量。以下是一些简单的观察：(1) 如果交替路径中 k 条边各属于 M_1 和 M_2，那么至少将 k 次翻转计入该路径；(2) 如果交替环中 k 条边各属于 M_1 和 M_2，那么至少将 $k+1$ 次翻转计入该环；要翻转其中 M_2 的所有边，并额外翻转一次以将孤立顶点放到该环上，我们将这些步骤称为切换一个环；(3) 对于快乐边，要么完全不计入翻转，要么至少计入两次，因为如果移除快乐边，就需要将其加回来。

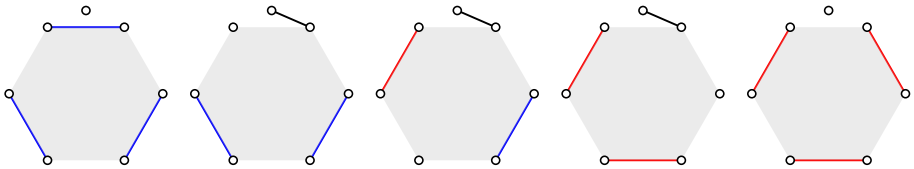


图 2 通过四次翻转切换一个包含三条匹配边的环。

2.2 多项式层次

多项式层次由 Stockmeyer [23] 提出，为比较 NP 困难性之外的问题复杂度提供了一种方法。复杂度类是递归定义的。最低层是 $\Sigma_0^p = \Pi_0^p = P$。接着，Σ_k^p 对于 $k \geq 1$ 定义为这样一类问题：借助针对复杂度类 Σ_{k-1}^p的预言机，可以在非确定性多项式时间内判定这些问题。进一步地，$\Pi_k^p = co\text{-}\Sigma_k^p$。特别地，$\Sigma_1^p$ =NP 和 $\Pi_1^p = co$-NP。

关于多项式层次的一种定义更适用于我们的情形，参见 [25]。语言 是一个集合 $L \subseteq \{0,1\}^*$。若存在某个多项式时间可计算函数 V，使得对于所有 $w \in \{0,1\}^*$，在适当的m_1, $m_2 \leq poly$条件下，(|w|)成立，则语言 L 包含于 Π_2^p：

$$w \in L \Leftrightarrow \forall y_1 \in \{0,1\}^{m_1} \exists y_2 \in \{0,1\}^{m_2} : V(w, y_1, y_2) = 1$$

类似地，语言 L 包含于 Σ_3^p，如果存在某个多项式时间函数 V，使得对所有 $w \in \{0,1\}^*$，对于某个合适的 $m_1, m_2, m_3 \leq poly$(|w|)：

$$w \in L \Leftrightarrow \exists y_3 \in \{0,1\}^* \forall y_2 \in \{0,1\}^{m_2} \exists y_3 \in \{0,1\}^{m_3} : V(w, y_1, y_2, y_3) = 1$$

在 [25] 问题中，给出了多项式层次相应层级的完全问题。由所有关于变量 $x_1, ..., x_{m_1}$ and 的布尔公式 ϕ 所构成的 $\forall\exists$-SAT 问题

$y_1, ..., y_{m_2}$，满足对于 $x_1, ..., x_{m_1}$ 的所有赋值，都存在 $y_1, ..., y_{m_2}$ 的一个赋值，使得 $\phi(x_1, ..., x_{m_1}, y_1, ..., y_{m_2}) = 1$ 是 Π_2^p-完全的。此外，由所有关于变量 $x_1, ..., x_{m_1}, y_1, ..., y_{m_2}, z_1, ..., z_{m_3}$ 的布尔公式 ψ 所构成的 $\exists\forall\exists$-SAT 问题，满足存在 $x_1, ..., x_{m_1}$ 的一个赋值，使得对于 $y_1, ..., y_{m_2}$ 的所有赋值，都存在 $z_1, ..., z_{m_3}$ 的一个赋值，使得 $\psi(x_1, ..., x_{m_1}, y_1, ..., y_{m_2}, z_1, ..., z_{m_3}) = 1$ 是 Σ_3^p-完全的。我们不妨假设所有布尔公式均以合取范式（CNF）给出。

2.3 APX-困难性

有关这些概念的详细介绍，请参见 [11]。令 APX 表示所有允许常数因子近似的 NP 问题的集合。此外，令 log-APX 表示允许近似因子为输入规模对数的问题类。如果存在从 APX 中每个问题到该问题的 *PTAS*归约，则该问题是 APX-困难 的。从问题 A 到 B 的 PTAS归约是一组三个函数 f、g、α；对于固定的 ε，这些函数均可在多项式时间内计算，且满足：

- 函数 f 将 A 的一个实例映射为 B 的一个实例。函数 g 接收 A 的一个实例 x 以及 $f(x)$ 的一个近似解（位于 B 中），并计算 x 的一个近似解。函数 α 将 A 中问题的误差参数映射为 B 中问题的相应参数。如果解 y 是 $f(x)$ 的一个 $1+\alpha(\varepsilon)$-近似解，那么 $g(x, y, \varepsilon)$ 就是 x 的一个 $1+\varepsilon$ 解。

特别地，如果不存在针对 A 的多项式时间近似方案，且 B 可 PTAS 归约到 A，那么针对 B 也不存在多项式时间近似方案；如果 A 无法在某个因子 $1+\varepsilon$ 内近似，那么 B 无法在因子 $1+\alpha(\varepsilon)$内近似。

如果还存在一个常数 β，使得每当 y是 $f(x)$的一个 r近似时，$g(x, y, \varepsilon)$就是 x的一个 $1+\beta(r-1)$近似，那么这种 PTAS 归约称为 *AP*-归约 。如果进一步地，f 和 g 不依赖于 ε 的选择，那么该 AP 归约保留 log-APX 成员资格。如果存在一种 AP 归约，使得从 log-APX 中任意问题到所述问题的归约中，f 和 g 均不依赖于 ε，则称该问题为 log-APX 困难。

2.4 集合覆盖

考虑从 1 到 n 的整数，以及一组集合 $S = \{s_1, \ldots, s_t\}$，满足$s_i \subseteq \{1, \ldots n\}$ 且 $\bigcup_{i=1}^{t} s_i = \{1, \ldots, n\}$。集合覆盖问题要求判断：给定整数 k，是否存在一个子集 $S' \subseteq S$，使得 $|S'| = k$ 且 $\bigcup_{s_i \in S'} s_i = \{1, \ldots, n\}$。已知集合覆盖是 log-APX 困难的。此外，除非 P= NP，否则通常无法以次对数因子 [12],近似能够覆盖$\{1, \ldots, n\}$ 中所有整数的最小集合 S^* 的大小。

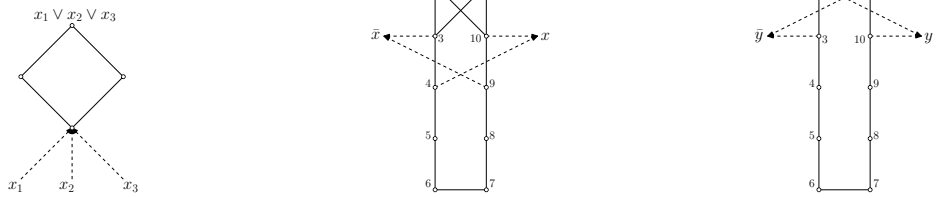
3 计算直径是 Π_2^p -完全问题

我们直接从 $\forall\exists$-SAT 规约到计算翻转图的直径。我们将介绍用于子句以及每种变量类型的构件。

总体而言，翻转序列的目标是：通过以一种使孤立顶点位于子句构件旁边的方式切换所有变量构件中的环，来切换所有子句构件中的环。根据从中心顶点 v 通向该构件的两条边中使用哪一条，$\exists$-构件中的交替环可以通过两种方式进行切换

以进入该构件。切换的每个方向都将根据孤立顶点所处相邻位置的子句，对应于该变量的一种赋值。在 ∀-构件中，从 v进入该构件只有一种方式，因此环的切换方式是固定的。如果图示中的环不发生交叉，则孤立顶点将被放置在包含正文字的子句的构件旁边；如果环发生交叉，则将被放置在包含负文字的子句旁边。

现在我们将更详细地介绍归约中的所有构件。该归约将围绕一个前文提到的中心顶点 v 构建。



(a) 子句构件。 **(b)** ∀-构件 **(c)** ∃-构件

图 3 归约中的构件

子句构件（图 3a）： 子句构件是一个 4-环，其中一个顶点与之后引入的变量构件相连。其构造思路是：强制该环在初始匹配中采用一种完美匹配，在目标匹配中采用另一种完美匹配，从而使变量构件中的所有交替环都必须在某个时刻进行切换。

∀-构件（图 3b）： 对于给定的变量 x，变量构件由一个长度为十二的环组成，环上的顶点依次标记为1 至12 ，此外还有两条对角线，分别连接顶点2 和顶点10 ，以及顶点3 和顶点11 ，这两条对角线在环中交叉，如图 3b 所示。标记为1 的顶点有一条边与中心顶点相连 v。两个标记为3 和9的顶点，与所有对应于包含 x的子句的子句构件都有边相连。两个标记为4 和10的顶点，则与所有对应于包含 x的子句的子句构件都有边相连。如果 $M_{in} \cup M_{tar}$ 在一个 ∀-构件上包含一个交替环，那么该环可以包含引入的交叉，也可以不包含。交叉环和未交叉环见图 4。这两种情况将编码相应变量的真值。

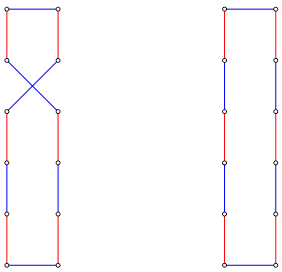


图 4 左： ∀-构件中的交叉交替环；右：未交叉交替环。

∃-构件（图 3c）： 对应于变量 ∃的 y -构件由一个包含十二条边的环组成，环上的顶点依次标记为1 至12 。两个相邻顶点，标记为1和12 ，各有一条边与顶点相连 v。两个标记为2 和10 的顶点，与所有包含 y的子句所对应的构件都有边相连。同样，两个标记为3 和11的顶点，与包含 $\bar{y}$的子句所对应的构件相连。如果并集 $M_{in} \cup M_{tar}$ 在一个 ∃-构件上包含一个交替环，那么可以通过使用与 v 关联的两条边中的任意一条来切换该环，从而得到两种不同的方式。这两种选择将编码相应变量的两个真值。

固定孤立顶点的位置：如果令 s 表示所有子句构件、 ∀-构件和 ∃-构件中的顶点总数，根据 [1, 定理 10] ，我们得知所构造图的奇匹配翻转图中，任意连通分量的直径至多为常数 c 乘以 $c \cdot (s+1)$。我们将一条长度为 $\ell = 2c \cdot (s+1)$ 的路径 P 连接到 v （见图 5）。如果至少一个匹配的孤立顶点位于 P 中距离 v最远的顶点 w ，那么沿路径翻转边就需要 $\frac{\ell}{2}$ 次翻转；这至少与对两个奇匹配进行重配置所需的次数相同（当它们的孤立顶点都位于某个子句构件、 ∀-构件或∃-构件上时）。

归约：现在，设 ϕ 是关于变量 $x_1,...,x_{m_1}$ 和 $y_1, ..., y_{m_2}$的一个布尔公式。我们按如下方式构造图 G ：从单个顶点 v开始。对于每个 x_i ，引入一个∀-构件，并按照上文所述将其连接到 v 。对于每个 y_i ，引入一个 ∃-构件，并按所述方式将其连接到 v 。此外，对于 ϕ中的每个子句 C ，引入一个子句构件，并将每个子句构件连接到该子句中各变量所对应的所有变量构件。根据 $x \in C$ 或 $\bar{x} \in C$ （分别为 y 或 z），连接方式采用上文所述的两种方式之一。然后，在 v 处添加一条长度为 ℓ 的路径，得到最终的图 G'。

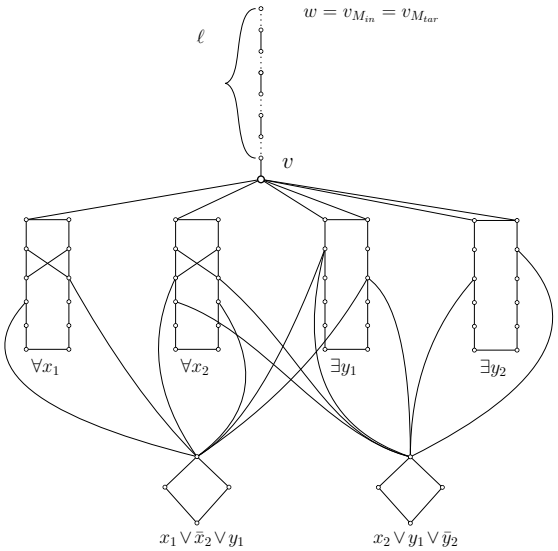


图 5 量化公式的实例图 $\forall x_1$、 x_2 $\exists y_1$、 y_2： $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee y_1) \wedge (x_2 \vee y_1 \vee \bar{y}_2$)

首先，我们需要确保在这种情况下直径是有定义的。

▶**命题 4** (⋆)。 G' 的奇匹配翻转图是连通的。

我们通过证明 G' 满足来自 [1,定理 3]的关于翻转图连通的图的刻画，来证明命题 4。

从现在起，我们将满足条件 $d(M_{in}, M_{tar})$ 等于翻转图直径的匹配对 M_{in} 和 M_{tar} 称为最大化对。我们将对最大化对的结构特征进行观察。此外，令 $v_{M_{in}}$ 和 $v_{M_{tar}}$ 分别表示 M_{in} 和 M_{tar}的孤立顶点。

▶**引理 5** (⋆)。 设 M_{in} 和 M_{tar} 是最大化对。那么：
(1) $v_{M_{in}} = v_{M_{tar}}$ 是 P 中 w 距离 v最远的顶点。**(2)** $M_{in} \cup M_{tar}$ 在每个子句构件上都包含一个交替环。**(3)** $M_{in} \cup M_{tar}$ 在每个 ∃-构件上都包含一个交替环。**(4)** $M_{in} \cup M_{tar}$ 在每个 ∀-构件上都包含一个交替环。

▶ **定理 1.** 给定一个图 G 和一个参数 $k \in \mathbb{N}$。判定 G 的奇匹配的翻转图的直径是否至多为 k 是 Π_2^p -完全的。

证明。 包含于 Π_2^p 根据 Π_2^p 的定义可知；并且，对于每一对匹配都需要解决的底层翻转距离问题包含于 Π_2^p NP中。

设 ϕ 是关于变量 $x_1, ..., x_{m_1}$ 和 $y_1, ..., y_{m_2}$ 以及子句 $C_1, ..., C_K$ 的一个 ∀∃-SAT 实例，并设 G' 是如上构造的图。

▷ 断言 6. 若 ϕ 是 ∀∃-SAT 的一个是实例，则 G' 的奇匹配的翻转图的直径至多为 $\ell + 7(m_1 + m_2) + 3K$。

证明。假设 ϕ 是一个是实例。为了给 G' 的奇匹配的翻转图的直径设定上界，只需考虑满足引理 5 条件的匹配对。设 M_{in} 和 M_{tar} 是具有这些性质的一对匹配。对于某个变量 x_i，我们考察每个 ∀-构件上的 $M_{in} \cup M_{tar}$。如果它们构成一个未交叉圈，则考察 x_i的正赋值；否则，考察负赋值。由于 ϕ 是 ∀∃-SAT 的一个是实例，对于给定的 x_i 赋值，存在一个 y_i 的满足赋值，使得 $\phi(x_1, ..., x_{m_1}, y_1, ..., y_{m_2}) = 1$。我们可以根据 $y_1, ..., y_{m_2}$的赋值，构造从 M_{in} 到 M_{tar}的翻转序列。

翻转序列首先将孤立顶点从 w 移动到 v。然后，翻转序列切换属于 ∀-构件的所有环；如果孤立顶点被放置在一个尚未切换的子句构件旁边，翻转序列也会切换该环。之后，翻转序列切换所有 ∃-构件。如果将 y_i 赋予正值（分别为负值），则翻转序列遍历该构件，使孤立顶点被放置在包含 y_i（分别为 $\bar{y_i}$）的子句构件旁边。由于 ϕ（x_1、……、x_{m_1}、y_1、……、y_{m_2}）$= 1$，每个子句构件最终都会被切换。翻转序列最后将孤立顶点从v 移回 w。在 w 和 v之间移动孤立顶点需要进行 ℓ 次翻转，每个变量构件需要七次翻转，每个子句构件需要三次翻转，因此翻转序列的长度正如所需。◁

▷ 断言 7。 ϕ 是一个 ∀∃-SAT 的是实例，当且仅当 G' 的奇匹配翻转图的直径至多为 $\ell + 7(m_1 + m_2) + 3K$。

证明。假设奇匹配的翻转图的直径至多为 $\ell+7(m_1+m_2)+3K$。给定 $x_1, \ldots, x_{m_1}$的一个赋值，我们构造一对匹配 M_{in}和 M_{tar}。如果 x_i以正形式出现， $M_{in} \cup M_{tar}$ 在与 x_i对应的 $\forall$-构件中有一个未交叉圈；否则 $M_{in} \cup M_{tar}$ 有一个交叉圈。此外， $M_{in} \cup M_{tar}$ 在所有 $\exists$构件和子句构件上有一个交替环，并且 $v_{M_{in}} = v_{M_{tar}} = w$。

由于存在一个从 M_{in}到 M_{tar}、长度至多为 $\ell+7(m_1+m_2)+3K$ 的翻转序列，因此每个变量构件中恰好执行七次翻转，每个子句构件中恰好执行三次翻转。翻转次数更少，无法切换相应构件中的环；翻转次数更多，则会超出翻转序列的长度。这意味着，在某个切换每个变量构件一次的翻转序列中，某个时刻每个子句构件旁边都放置着一个孤立顶点。我们根据遍历相应变量构件时孤立顶点所在的位置，构造一个关于 $y_1, \ldots, y_{m_2}$ 的赋值。该赋值满足 $\phi(x_1, \ldots, x_{m_1}, y_1, \ldots, y_{m_2}) = 1$。对 $x_1, \ldots, x_{m_1}$ 的所有赋值重复这一过程，便可证明 ϕ 是 $\forall\exists$-SAT 的一个是实例。◁

该定理由这两个断言结合得出。 ◀

4 计算半径是 Σ_3^p -完全的

我们将 $\exists\forall\exists$-SAT 归约为计算翻转图的半径。现在介绍归约中用到的所有构件；它们同样都围绕一个中心顶点 v 构造。

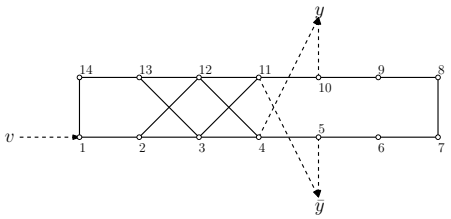


图 6 $\forall$-构件：将 $\exists\forall\exists$-SAT 归约为计算半径

子句构件（图 3a）： 该子句构件与第 3 节中的相同。
首个 $\exists$-构件（图 3b）： 首个 $\exists$-构件与第 3 节的 $\forall$-构件相同。
$\forall$-构件（图 6）：对应变量 y 的 $\forall$-构件由一个包含 14 条边的环组成，环上的顶点沿环依次标记为 1 到 14；此外还有四条对角线，分别连接环上的顶点 2 和 12、3 和 11、4 和 12、3 和 13，它们形成图 6 中的两个交叉。两个顶点 4 和 10 分别通过边连接到包含正文字 y 的子句；另两个顶点 5 和 11 分别通过边连接到包含负文字 $\bar{y}$ 的子句；顶点 1 则有一条边连接自顶点 v。
第二个 $\exists$-构件（图 3c）： 第二个存在量词构件与 $\exists$-构件（见第 3 节）相同。在符号表示上，现在将对应于这些构件的变量称为 z，而非 y。

强制孤立顶点的位置：我们通过将两条路径连接到 v 来完成构造。令 s 为子句构件和变量构件中的顶点数。我们设定$\ell = 2c \cdot (s+1)$，其中 c 根据 [1, 定理 10] 选取，使得 ℓ 大于 v 上奇匹配翻转图以及子句构件和变量构件的翻转图直径的两倍。我们添加一条长度为 ℓ 的路径 p，将其一端连接到 v，并在另一端连接一个四环 Z。此外，令 $L = 2c \cdot (s+\ell+1)$，并添加一条长度为 L 的路径 P，将 P 的一端连接到 v。无论翻转图中心的匹配 M_{in} 是什么样

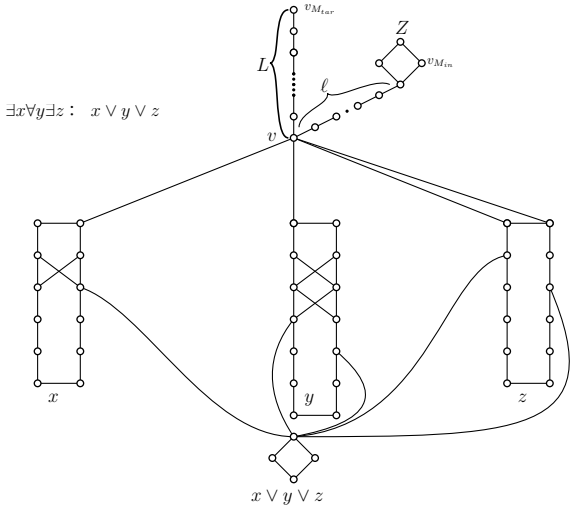


图 7 量化公式 $\exists x \ \forall y \ \exists z: \ x \vee y \vee z$的实例图。

，匹配 M_{tar} 都可以通过在 $v_{M_{tar}}$ 处放置一个孤立顶点、使其位于 P 中未连接到 v 的端顶点，并在 Z 上与 M_{in} 不同，从而最大化与 M_{in} 的距离。这样一来，任何翻转序列都必然经过 p 和 P。反过来，将 M_{in} 的孤立顶点放置在 Z 上，就能保证翻转序列只经过 p 一次，而不是两次。

归约：现在，设 ψ是关于变量 x_1,...,x_{m_1}, y_1, ..., y_{m_2}和z_1, ..., z_{m_3}的布尔公式。我们按如下方式构造图 G：从单个顶点 v开始。对于每个 x_i，引入一个第一 ∃-构件，并按上述方式将其连接到 v 。对所有 y_i 和∀-构件以及所有 z_i 和第二个 ∃-构件重复此过程。此外，对于 ψ 中的每个子句 C，引入一个子句构件，并将该构件连接到与子句中变量对应的所有变量构件。连接方式有上述两种，具体取决于 $x \in C$ 还是 $\bar{x} \in C$ （分别为 y 或 z）。然后按上述方式添加路径 p 和 P，得到最终的图 G''。同样，我们需要确保在此情形下半径定义良好。

▶**命题 8** ($\star$)。 G'' 上的奇匹配翻转图是连通的。

再次，我们通过检验 [1,定理 3]中的刻画来验证这一点。

我们将再次给出匹配对的刻画，以确定半径。我们将论证，不失一般性，我们无需考虑其他所有匹配对，只需考虑一组候选匹配对。从较高层面来看，我们确保在候选匹配对中，无法在单个构件内对 M_{tar} 进行局部修改来增大到 M_{in} 的翻转距离；同时，即使对 M_{in} 的修改引发了对 M_{tar} 的局部响应，也无法立即在单个构件内对 M_{in} 进行修改来减小翻转距离。

▶**引理 9** ($\star$)。 不失一般性，为了确定翻转图的半径，只需考虑满足以下性质的匹配对 M_{in} 和 M_{tar} ：
(1) $v_{M_{tar}}$ 是 P 上距离 v最远的顶点。**(2)** $v_{M_{in}}$ 位于 Z上。**(3)** $M_{in} \cup M_{tar}$ 在每个子句构件上都包含一个交替环。**(4)** $M_{in} \cup M_{tar}$ 在每个变量构件上都包含一个交替环。

12 奇数匹配重构的更高难度结果

结合引理 9，我们将介绍 M_{in}、 M_{tar} 和最短翻转序列的高层策略：

由于所有子句构件都包含交替环，最短翻转序列必须通过进入变量构件来切换所有这些环。构件的邻接关系对应于变量在子句中的包含关系。

对于第一个 ∃-构件，在切换一个未交叉圈时，孤立顶点会与包含正文字的子句构件相邻；否则，若该圈交叉，则可以切换包含负文字的子句。另请注意， M_{in} 可以决定该圈是否交叉。若某个变量的取值无关紧要， M_{in} 可以选择不控制交叉是否存在。

对于 ∀-构件，在切换该环时，如果该环交叉两次或完全不交叉，孤立顶点就与包含正文字的子句相邻；但如果该环交叉一次，孤立顶点则位于包含负文字的子句旁。 M_{in} 可以控制是否在该环中添加一次交叉，而第二次交叉是否存在则始终由 M_{tar} 控制。

对于第二个 ∃构件，若将交换M_{in} 与 M_{tar}视为等同，则交替环只有一种选择。随后，遍历方向由翻转序列根据与 v 相关联的两条边中选择哪一条进入该构件来决定。遍历方向进而决定孤立顶点将被放置在带有正文字还是负文字的子句旁边。

▶ **定理 2.** 给定一个图 G 和一个参数 $k \in \mathbb{N}$。判定 G 的奇匹配翻转图的半径是否至多为 k 是 Σ_3^p -完全的。

证明。 包含于 Σ_3^p 可由 Σ_3^p 的定义以及如下事实得出：对每个匹配都必须求解的底层翻转距离问题 M_{tar} 包含于NP。

设 ψ 为定义在变量 x_1，……， x_{m_1}、 y_1，……， y_{m_2} 以及 z_1，……， z_{m_3} 和子句 C_1，……， C_K 上的一个∃∀∃-SAT实例，且 G'' 为按上述方式构造的图。

▷ 断言 10. 如果 ψ 是 ∃∀∃-SAT 的是实例，那么 G'' 的奇匹配翻转图的半径至多为 $\frac{L+\ell}{2} + 7(m_1 + m_3) + 8m_2 + 3K + 2$。

证明。 我们根据 x_1、……、 x_{m_1} 的真值赋值构造 M_{in}，该赋值是 ψ的一个解的一部分。若 x_i 具有正真值，则对其对应的变量构件进行匹配，使得匹配补全为交替环的任意方式都是非交叉的。若 x_i 具有负真值，则对变量构件进行匹配，使环有一次交叉。将孤立顶点放在 Z 上，并将其余顶点匹配，形成任意一个完美匹配。命题 8 的证明中展示了此类完美匹配的存在性。

现在，对于任意一个使到 M_{in}的距离最大的 M_{tar} ，我们考察 ∀-构件。根据引理 9，我们知道 $M_{in} \cup M_{tar}$ 在 ∀-构件上形成一个交替环。如果构件中通向某个 y_i 的环交叉零次或两次，我们就将其转换为 y_i的正赋值；如果交叉一次，则将其转换为 y_i的负赋值。

由于 ψ 是一个 ∃∀∃-SAT 是实例，因此存在对 $z_1, ..., z_{m_3}$ 的赋值，使其与 $x_1, ..., x_{m_1}$ 的初始赋值以及 $y_1, ..., y_{m_2}$ 的转换后赋值结合后，满足 $\psi(x_1, ..., x_{m_1}, y_1, ..., y_{m_2}, z_1, ..., z_{m_3}) = 1$。我们围绕 z_i 的赋值来构造 M_{in} 与 M_{tar} 之间的翻转序列。

从 M_{in} 到 M_{tar} 的翻转序列如下：进行翻转，使匹配在 Z 上重合，最多需要两次翻转（因为孤立顶点已经放置在 Z 上）。沿着 p 将孤立顶点移动到 v ，需要 $\frac{\ell}{2}$ 次翻转。使用七次翻转切换所有前 ∃ 个构件；如果孤立顶点恰好位于一个尚未切换的子句构件旁边，则用三次翻转切换它

。使用每个构件八次翻转切换所有 $\forall$ 构件；如果孤立顶点恰好位于一个尚未切换的子句构件旁边，则用三次翻转切换它。对于每个对应于某个 z_i 的 $\exists$ 构件，切换 $\exists$ 构件，使得如果 z_i 取正真值，孤立顶点就位于包含正文字 z_i 的子句旁边。然而，如果 z_i 取负真值，孤立顶点就应位于包含负文字 $\bar{z}_i$ 的子句旁边。每次切换一个 $\exists$ 构件仍需要七次翻转。最后，沿着 P 移动孤立顶点，需要 $\frac{L}{2}$ 次翻转。

翻转序列的总长度为 $\frac{L+\ell}{2} + 7(m_1 + m_3) + 8m_2 + 3K + 2$。 ◁

▷断言 11。只要奇匹配的翻转图的半径至多为 $\frac{L+\ell}{2} + 7(m_1 + m_3) + 8m_2 + 3K + 2$，$\psi$ 就是一个 $\exists\forall\exists$-SAT 是实例。——

证明。设 M_{in} 是 G''的匹配翻转图的中心。特别地，从 M_{in} 到 G'' 的任何其他奇匹配的翻转距离至多为该半径。

考虑对应于 x_1、……、x_{m_1} 的第一组变量构件，看看它们是如何匹配的。如果对应于 x_i 的构件以这样的方式匹配：任何补全成一个交替环的方式都是非交叉的，就给 x_i赋予正真值；如果任何补全成一个交替环的方式都是交叉的，就赋予负真值。匹配有可能既能补全成交叉交替环，也能补全成未交叉交替环；在这种情况下，任意赋予一个真值。

现在，任取 y_1、……、y_{m_2} 的一个真值赋值。我们基于该赋值构造 M_{tar}。在每个 $\forall$-构件中，将 M_{in} 补全为一个交替环：如果对应的 y_i 取正赋值，则该环有零个或两个交叉；否则，如果 y_i 取负赋值，则该环有一个交叉。对于所有其他构件，任意将 M_{in} 补全为一个交替环。令 M_{tar} 在 Z 上有一个完美匹配，使得 M_{tar} 和 M_{in}在 Z上不同。令 M_{tar} 的孤立顶点位于 P 的最末端，并用 P 和 p剩余部分上的一个完美匹配补全 M_{tar}。

现在，取一个从 M_{in}到 M_{tar}、长度至多为 $L+\ell+7(m_1+m_3)+8m_2+3K+2$ 的翻转序列。根据我们对下界的观察可知，该翻转序列必须在每个 $\exists$-构件上恰好进行七次翻转，在每个 $\forall$ 构件上进行八次翻转，并在每个子句构件上进行三次翻转。我们根据相应构件的切换方式，重构出 z_1、……、z_{m_3} 的一个赋值。由于每个子句构件都在该翻转序列中进行了翻转，因此每个子句至少包含一个文字，其真值与我们构造的赋值所赋予的真值一致。因此，$\psi(x_1、\ldots\ldots、x_{m_1}、y_1、\ldots\ldots、y_{m_2}、z_1、\ldots z_{m_3}) = 1$。由于对于 y_1、……、y_{m_2} 的任意赋值，我们都可以这样做，这说明 ψ 是 $\exists\forall\exists$-SAT 的一个是实例。◁

由这两个断言即可得出该定理。 ◀

5 计算翻转距离是对数-APX-hard

从集合覆盖到寻找最小翻转序列的归约如图 8 所示。对于集合覆盖实例中 S 的每个集合，我们向图 G''' 添加一条含 $\ell = 6n + 1$ 个顶点的路径。我们构造 M_{in} 和 M_{tar}，使它们构成这些路径的完美匹配。对于从 1 到 n 的每个整数（表示集合内的元素），我们向 G''' 添加一个 4-环，使得 M_{in} 和 M_{tar} 交替覆盖该环。最后，我们向 G''' 添加一个单独的顶点，使该顶点在 M_{in} 和 M_{tar} 中均为孤立顶点。对于 S中对应于集合 s_i 的每条路径，我们从路径的一端向孤立顶点添加一条边，并从另一端向所有对应于 s_i 中所含整数的构件添加边。翻转序列的策略是遍历一个集合构件，以便

14 奇数匹配重构的更高难度结果

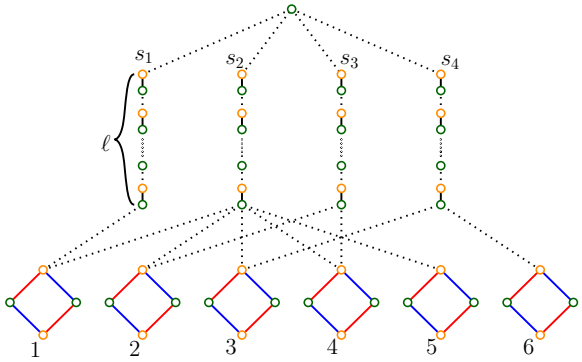


图 8 困难性证明的实例。将一个集合覆盖实例缩减为 $n = 6$, $s_1 = \{1\}, s_2 = \{1,2,3,4,5\}$, $s_3 = \{2,4\}$, 和 $s_4 = \{3,6\}$。 $M_{in} \setminus M_{tar}$ 中的边涂成红色，从 $M_{tar} \setminus M_{in}$ 出发的边涂成蓝色， $M_{in} \cap M_{tar}$ 中的边涂成黑色。

能够翻转该集合所含整数的整数构件。此后，翻转序列必须沿该集合构件返回初始孤立顶点。由于 G'''是二分的（见图 8 中的绿色/橙色划分），不存在可跳过集合构件遍历的捷径。

▶ **命题 12.** 存在一个大小为 c 的集合覆盖，当且仅当 $d(M_{in}, M_{tar}) \leq c \cdot \ell + 3 \cdot n$.

证明。 假设存在一个大小为 c的集合覆盖。要将 M_{in} 转换为 M_{tar} 对应于从 1到 n 的整数的所有环都需要切换。切换此类环的唯一方法是沿着对应于集合 s_i 且与 e 相邻的路径进行翻转，将孤立顶点移至整数构件旁，然后切换该环。最后，将对应于 s_i 的路径中的所有边加回到孤立顶点。如果对集合覆盖中的所有顶点 s_i 重复此过程，最终整数构件中的所有环都会被切换，我们便得到 M_{tar}。沿集合构件添加和移除快乐边需要 ℓ次翻转。切换一个整数构件需要三次翻转。因此，翻转序列的总长度为 $c \cdot \ell + 3 \cdot n$。

对于反方向，我们首先需要确认，确实必须绕道返回孤立顶点。注意， G''' 是一个二分图。在图 8 中，我们用橙色和绿色对 G''' 进行二着色。因此，孤立顶点只能放置在绿色顶点上。这使翻转序列无法在构件之间抄近路：离开整数构件时，不能将孤立顶点直接放到另一条路径上。

现在假设存在一个翻转序列，从 M_{in} 到 M_{tar}，长度至多为 $c \cdot \ell + 3 \cdot n$。整数构件中的所有环都已切换。特别地，在翻转序列的某个时刻，每个环旁边都曾放置过孤立顶点。令 S^* 为这样一个集合的集合：其中每个集合所对应的构件，都曾在某个时刻将孤立顶点放置在整数构件旁边。 S^* 显然是一个集合覆盖。根据我们最初的观察，要将孤立顶点放置在整数构件旁边的集合构件中，至少需要为该集合构件计入 ℓ 次翻转。因此，我们得到 $|S^*| \leq \frac{c \cdot \ell + 3 \cdot n - 3 \cdot \ell}{n} = c$ ◀

▶**定理 3.** 给定一个图 G 以及其上的两个奇匹配 M_{in} 和 M_{tar}。计算 M_{in} 与 M_{tar} 之间的翻转距离是 log-APX-困难的。特别地，以优于 $\Theta(log(n))$的因子近似翻转距离是 *NP* 困难的。

证明。 假设我们可以将最短翻转序列的长度近似到 r倍以内。那么，我们可以在 $d \leq rd^*$ 多项式时间内计算出一个长度为 d^*

表示最优翻转序列的长度。此外，令 c^* 表示最优集合覆盖的大小。根据命题 12，我们可以得到一个大小为

$$c = \left\lfloor \frac{d - 3n}{\ell} \right\rfloor \leq \frac{rd^* - 3n}{\ell} = \frac{rd^* - 3r \cdot n + 3r \cdot n - 3n}{\ell} = rc^* + \frac{r}{2}$$

接下来，我们需要重写上述表达式，使其符合 AP-归约的定义，即 $c \leq c^*(1 + \beta(r-1))$。

首先，假设 $(r-1) \geq \frac{1}{2c^*+1^\circ}$ 我们估计（使用 $\beta = 4$）：

$$\begin{aligned} c^* + \frac{r}{2} &= c^* + \frac{1}{2} + (r-1)c^* + \frac{r-1}{2} + (r-1)(3c^* - 3c^*) \\ &= c^* + 4(r-1)c^* + \frac{1}{2} - (r-1)(3c^* - \frac{1}{2}) \leq c^*(1 + \beta(r-1)) \end{aligned}$$

我们继续讨论第二种情况，即 $(r-1) < \frac{1}{2c^*+1^\circ}$ ——

$$rc^* + \frac{r}{2} = c^* + \frac{1}{2} + (r-1)c^* + \frac{r-1}{2} < c^* + (r-1)(c* + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} < c^* + 1$$

在第二种情况下，我们恢复最优解。在第一种情况下，该估计满足 AP-归约的要求。◀

6 开放问题

我们证明，计算组合奇匹配翻转图的直径是 Π_2^p -完全的，而计算该翻转图的半径是 Σ_3^p -完全的。由此，我们提供了两个自然出现且属于这些复杂度类的问题。此外，通过将集合覆盖归约到求奇匹配之间最短翻转序列的问题，我们证明该问题是对数 APX 困难的，并且不存在任何全局常数因子近似。

我们的结果引出了以下开放问题：

1. 由于匹配重构与多胞体中的复杂度结果密切相关，我们提出这样一个问题：计算多胞体的组合半径/中心是否是 Σ_3^p -困难的？我们指出，[26] 中关于翻转图直径的结果使用了一种所谓的典范结构，也就是说，这种结构可以通过数量合理的翻转从任意其他结构到达。于是，从任意初始结构翻转到典范结构，再翻转到目标结构，即可得到直径的上界。因此，计算半径时也就隐式地计算出了翻转图的一个中心。这意味着目前只证明了计算半径是 Π_2^p -困难的。

2. 关于计算直径和半径的复杂度，能否在几何情形下也证明类似结果？在组合情形下，我们可以控制哪些边属于输入图 G ，哪些不属于；而在几何情形下，平面上任意两点之间的边理论上都可能出现在 M_{in}、 M_{tar} 或任何中间匹配中，因此构造时唯一的自由度就是点的位置。

参考文献

1 Oswin Aichholzer、Sofia Brenner、Joseph Dorfer、Hung P. Hoang、Daniel Perz、Christian Rieck 和 Francesco Verciani。《几何与组合情形下的奇匹配翻转》。载于 Vida Dujmović 和 Fabrizio Montecchiani 编，第三十三届国际图绘制与网络可视化研讨会（GD 2025），莱布尼茨国际信息学论文集（LIPIcs）第 357 卷，12:1–12:18 页，德国达格施图尔，2025 年。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik。 doi:10.4230/LIPIcs.GD.2025.12。2 Oswin Aichholzer、Anna Brötzner、Daniel Perz 和 Patrick Schnider。《奇匹配中的翻转》。计算几何，129:102184，2025 年。 doi:10.1016/j.comgeo.2025.102184。3 Oswin Aichholzer、Jean Cardinal、Tony Huynh、Kolja Knauer、Torsten Mütze、Raphael Steiner 和 Birgit Vogtenhuber。《图定向之间的翻转距离》。Algorithmica，83(1):116–143，2021 年。 doi:10.1007/s00453-020-00751-1。4 Oswin Aichholzer、Joseph Dorfer、Sándor Fekete、Phillip Keldenich、Peter Kramer、Dominik Krupke 和 Stefan Schirra。《Cg:shop 2026：并行翻转操作下的中心三角剖分》，2025 年。网址： https://cgshop.ibr.cs.tu-bs.de/competition/cg-shop-2026/#problem-description。5 Paola Alimonti 和 Viggo Kann。《三次图的一些 APX 完全性结果》。Theoretical Computer Science，237(1):123–134，2000 年。 doi:10.1016/S0304-3975(98)00158-3。6 David Avis 和 Komei Fukuda。《用于枚举的反向搜索》。离散应用数学，65(1-3):21–46，1996 年。 doi:10.1016/0166-218X(95)00026-N。7 Carla Binucci、Fabrizio Montecchiani、Daniel Perz 和 Alessandra Tappini。《匹配翻转是困难的》，2025 年。 arXiv:2503.02842。8 Marthe Bonamy、Nicolas Bousquet、Marc Heinrich、Takehiro Ito、Yusuke Kobayashi、Arnaud Mary、Moritz Mühlenthaler 和 Kunihiro Wasa。《完美匹配重配置问题》。载于国际计算机科学数学基础研讨会（MFCS），80:1–80:14 页，2019 年。 doi:10.4230/LIPICS.MFCS.2019.80。9 Nicolas Bousquet、Tatsuhiko Hatanaka、Takehiro Ito 和 Moritz Mühlenthaler。《匹配的最短重配置》。载于国际计算机科学图论概念研讨会，162–174 页。施普林格，2019 年。10 Vašek Chvátal。《与图相关的某些多胞体》。组合理论杂志 B 辑，18(2):138–154，1975 年。 doi:10.1016/0095-8956(75)90041-6。11 Pierluigi Crescenzi。《保持近似性的归约简明指南》。IEEE 计算机协会。 doi:10.1109/ccc.1997.612321。12 Irit Dinur 和 David Steurer。《并行重复的分析方法》。载于第四十六届 ACM 计算理论研讨会论文集（ STOC ’14），624–633 页，美国纽约州纽约市，2014 年。计算机协会。 doi:10.1145/2591796.2591884。13 Christoph Grüne 和 Lasse Wulf。《双层优化和鲁棒优化中许多自然问题在多项式层次中的完全性》，2024 年。 arXiv:2311.10540。14 Joep Hamersma、Marc J. van Kreveld、Yushi Uno 和 Tom C. van der Zanden。《Gourds：一种带转向功能的滑块拼图》。载于国际算法与计算研讨会（ISAAC），33:1–33:16 页，2020 年。 doi:10.4230/LIPICS.ISAAC.2020.33。15 Michael E. Houle、Ferran Hurtado、Marc Noy 和 Eduardo Rivera-Campo。《三角剖分图与完美匹配》。图与组合，21:325–331，2005 年。 doi10.1007/s00373-005-0615-2。16 Takehiro Ito、Erik D. Demaine、Nicholas J. A. Harvey、Christos H. Papadimitriou、Martha Sideri、Ryuhei Uehara 和 Yushi Uno。《论重配置问题的复杂性》。Theoretical Computer Science，412(12-14):1054–1065，2011 年。 doi:10.1016/J.TCS.2010.12.005。17 Takehiro Ito、Naonori Kakimura、Naoyuki Kamiyama、Yusuke Kobayashi 和 Yoshio Okamoto。《通过交替环实现完美匹配的最短重配置》。SIAM 离散数学杂志，36(2):1102–1123，2022 年。 doi:10.1137/20M1364370。

18 Naonori Kakimura 与 Yuta Mishima。三角网格图中带标签匹配的重构。载于国际算法与计算研讨会（ISAAC），第 43:1–43:16 页，2024。 doi:10.4230/LIPICS.ISAAC.2024.43。19 Torsten Mütze。组合灰码——最新综述。《组合学电子期刊》，2024。动态综述。 doi:10.37236/11023。20 Naomi Nishimura。重构引言。《算法》，11(4):52，2018。 doi:10.3390/A11040052。21 Christian Nöbel 与 Raphael Steiner。经由完美匹配的多面体直径复杂度。载于 2025 年 ACM-SIAM 离散算法年会（SODA）论文集，第 2234–2251 页。SIAM，2025。 doi:10.1137/1.9781611978322.74。22 Laura Sanità。分数匹配多面体的直径及其困难性推论。载于 2018 年 IEEE 第 59 届计算机科学基础年度研讨会（FOCS），第 910–921 页。IEEE，2018。 doi:10.1109/FOCS.2018.00090。23 Larry J. Stockmeyer。多项式时间层次。《理论计算机科学》，3(1):1–22，1976。 doi:10.1016/0304-3975(76)90061-X。24 Jan van den Heuvel。变化的复杂性。载于《组合学综述》2013，伦敦数学会讲义系列第 409 卷，第 127–160 页。2013。 doi:10.1017/CBO9781139506748.005。25 Celia Wrathall。完全集与多项式时间层次。《理论计算机科学》，3(1):23–33，1976。26 Lasse Wulf。计算多面体直径甚至比 NP 困难更难（即便仅就完美匹配而言），2025。 arXiv:2502.16398。

7 第 3 节省略的细节

▶**命题 4** ($\star$). G' 的奇匹配翻转图是连通的。

证明。 根据 [1, 定理 3] 的奇匹配翻转图 连通，当且仅当对于每条边 $e \in E$（G'）以下条件之一成立：

- G' 的每个奇匹配都包含 e。 G' 的奇匹配都不包含 e。设 u_1 和 u_2 为与 e关联的顶点。
- $G' - u_1$ 或 $G' - u_2$ 包含一个完美匹配。
-

我们将通过分类讨论证明第三个条件对每条边都成立。

情况 1： e 包含 v： $G' - v$ 可以划分为子句构件、 $\forall$ 构件、 $\exists$ 构件和 P。它们都具有完美匹配。因此， $G' - v$ 具有完美匹配。情况 2： e 完全位于 P上：取一个奇匹配 M，使 v 为其孤立顶点¯，并在 G' 中取一条路径 P，该路径从 v ¯到 u_1交替经过 M 中的边和不属于 M 的边。不失一般性地， P 为偶长度。否则，将 P 延长或缩短一条边，以得到一条从 v 到 u_2的偶长度路径。然后，取对称¯差 $M \Delta E(P)$，所得为一个以 u_1 为孤立顶点的奇匹配。

情况 3： e 完全位于一个变量构件上：取一个奇匹配 M，它以 v 作为其孤立顶点。包含 e 的变量构件是一个其上具有完美匹配的偶圈。我们执行一个翻转序列，以切换该变量构件的匹配。沿着该翻转序列，按环的顺序，构件中每隔一个顶点都会成为孤立顶点。因此，该翻转序列中存在一个中间匹配，使得 e 的某个顶点是孤立的。

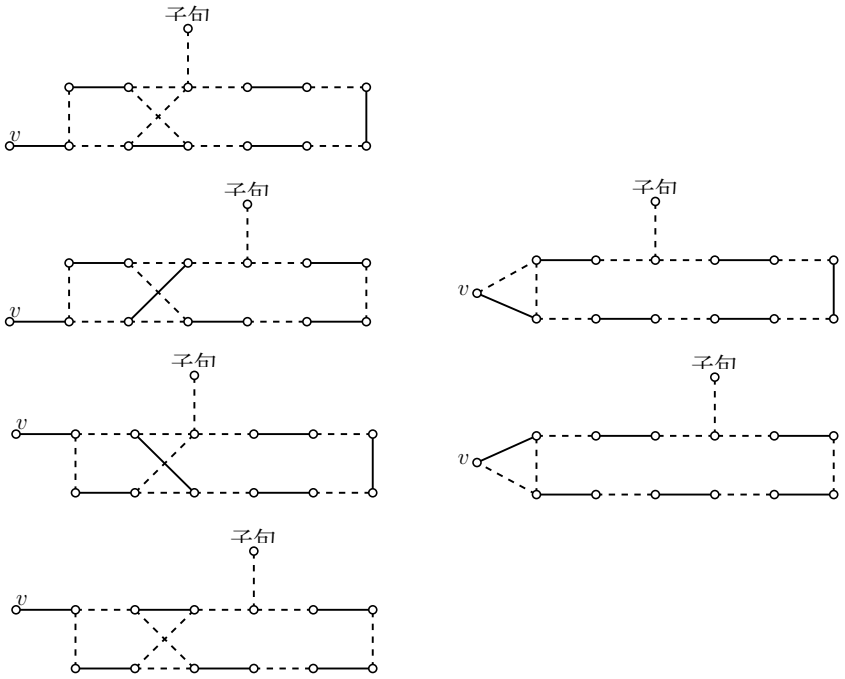


图 9 在移除子句构件旁的任意顶点后，完成变量构件匹配的一种可能方法。左侧：一边是 $\forall$-构件，右侧： $\exists$-构件。

情形 4： e **连接一个变量构件的顶点与一个子句构件的顶点：** 令 u_1为 e 中属于某个变量构件的顶点。 $G' - u_1$ 包含一个完美匹配，该匹配在所有子句构件上、以及除包含 u_1 的那个之外的所有变量构件上导出一个完美匹配，并且在 P上有一个完美匹配。包含 u_1 的变量构件的所有变体均涵盖于图 9。

情形5： e **完全位于一个子句构件上：** 取一个奇匹配 M，其孤立顶点位于一个变量构件的顶点上，该变量构件邻接按情形 4 构造的子句构件。包含 e 的子句构件是一个带有完美匹配的偶圈。我们执行一段翻转序列，以切换变量构件的匹配。在这段翻转序列中，沿环的顺序，构件中每隔一个顶点都会是孤立的。因此，翻转序列中存在一个中间匹配，使得 e 的一个顶点是孤立的。

◀

▶**引理 5** ($\star$)。 设 M_{in} 和 M_{tar} 是一个最大化对。那么：
(1) $v_{M_{in}} = v_{M_{tar}}$ 是 P 中距离 v最远的顶点 w 。**(2)** $M_{in} \cup M_{tar}$ 在每个子句构件上都包含一个交替环。**(3)** $M_{in} \cup M_{tar}$ 在每个 $\exists$-构件上都包含一个交替环。**(4)** $M_{in} \cup M_{tar}$ 在每个 $\forall$-构件上都包含一个交替环。

证明。**(1)** 假设 $v_{M_{in}}$ 和 $v_{M_{tar}}$ 都不位于 P 上，特别是它们在 P 上的匹配相同。我们考虑 $G' - P$ 上奇匹配的翻转图。在 $G' - P$ 上，从 $M_{in} \setminus E(P)$ 到 $M_{tar} \setminus E(P)$ 的任意翻转序列，都可以嵌入为 G' 中从 M_{in} 到 M_{tar} 的翻转序列。 $G' - P$ 上奇匹配的翻转图直径至多为 $c \cdot |V(G' - P)| = c \cdot (s + 1)$，因此 $d(M_{in}, M_{tar}) \leq c \cdot (s + 1)$。根据长度 ℓ 的选取，仅将孤立顶点从 v 移到 w 所需的翻转次数就更多。因此，M_{in} 和 M_{tar} 不可能构成极大对。如果两个匹配中只有一个将孤立顶点置于 P 上，那么将孤立顶点移离 P 至多需要 $c \cdot (s+1)$ 次翻转。而将孤立顶点从 v 移到 w 再移回，至少需要 $2c \cdot (s + 1)$ 次翻转。由此可知，两个匹配都将孤立顶点置于 P 上。此外，例如，如果 M_{in} 将孤立顶点置于 P 上，但不在 w 处，那么一个在所有变量构件和子句构件上都与 M_{in} 相同、但孤立顶点更靠近 w 的匹配，要将孤立顶点移到 v 就需要严格更多的翻转。

(2) 由于根据 (1)， M_{in} 和 M_{tar} 的孤立顶点都位于 w，因此这两个匹配在每个子句构件中都包含该构件顶点的一个完美匹配。请注意，如果我们通过在某个时刻于变量构件和子句构件之间添加一条边，将孤立顶点放到子句构件上，那么移除这条边后，孤立顶点会再次回到同一个变量构件中。若从一个翻转序列中删除所有会修改含有快乐边的子句构件的翻转，就会得到一个更短、初始匹配和目标匹配均相同的翻转序列。取相同的匹配 M_{in} 和 M_{tar} ，只改变其中一个匹配在子句构件上的部分，使之形成交替环，将导致更大的翻转距离。对于改变后的匹配，任何最短翻转序列都需要在子句构件上额外进行三次翻转。若改变后的匹配之间存在更短的翻转序列，那么它必定在某个其他构件上局部做得更好，因此会在同一个构件中使用 M_{in} 和 M_{tar}中的同一组边。

(3) 图10展示了 $M_{in} \cup M_{tar}$ 在 $\exists$-构件上的所有可能形态。左上角和右下角所示的交替环可以通过七次翻转进行切换。根据添加的、从 v 连至构件的边，孤立顶点将被放置在

与包含 y_i 正文字形的子句构件相邻的位置，或与包含 y_i 负文字形的子句构件相邻的位置。

然而，如果变量构件包含六条快乐边，我们可以通过移除两条快乐边，将孤立顶点放在包含 y_i 或 $\bar{y_i}$ 的子句旁边。再次，出现哪一个值取决于添加 v 中的哪条边以进入该构件。在这种情况下，我们只需将总共四次翻转计入该构件，就能到达相同的子句构件；此前我们需要七次翻转才能到达这些构件。

由此可得，对于每一对在 ∃ 构件中存在交替环的匹配，与一对在同一个变量构件中具有快乐边的匹配相比，前者可以少用三次翻转，变为后者。

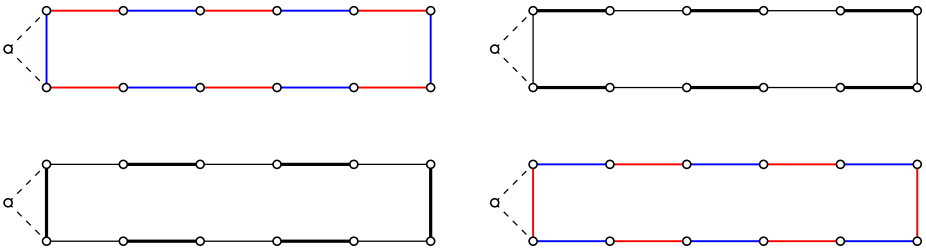


图10 ∃构件中 $M_{in} \cup M_{tar}$ 并集的所有可能状态。来自 $M_{in} \setminus M_{tar}$ 的边为蓝色，来自 $M_{tar} \setminus M_{in}$ 的边为红色，来自 $M_{in} \cap M_{tar}$ 的边为黑色。

(4) 在图 11 中，我们展示了与 x_i 对应的 ∀ 构件上 $M_{in} \cup M_{tar}$ 的所有可能状态。如果 $M_{in} \cup M_{tar}$ 构成一个有十二条边的大型交替环，则切换该构件需要七次翻转。如果该环没有交叉，孤立顶点将被放在包含正文字 x_i 的子句构件旁边。如果该环有交叉，孤立顶点将被放在包含负文字 $\bar{x_i}$ 的子句构件旁边。由此可得，我们可以通过七次翻转到达具有两种真值赋值之一的子句。将孤立顶点放在具有另一种真值的子句构件旁边，则还需多两次翻转，也就是九次翻转。

对于 $M_{in} \cup M_{tar}$ 与十二条快乐边构成匹配的每一种情形，都存在一种方法：移除两条快乐边，从而将孤立顶点置于某一真值的子句构件旁边。此外，我们可以再移除一条快乐边，将孤立顶点置于另一真值的子句构件旁边。我们得出结论：可以在四次翻转内到达某一真值的子句，并在6次翻转内到达具有两种真值的子句。

在最后几种情形中，$M_{in} \cup M_{tar}$ 由四条快乐边和一个小交替环组成，我们需要先移除一条快乐边，然后再切换长度为四的环。在此过程中，孤立顶点将被置于所有包含任意文字 x_i 或 $\bar{x_i}$的子句构件旁边。在这些情形中，我们将五次翻转计入该变量构件。

我们得出结论，极端情形是 $M_{in} \cup M_{tar}$ 构成一个大的交替环的情形。无论我们想要通过较少的翻转到达能够到达的子句构件，还是通过较多的翻转到达能够到达的子句构件，抑或是到达具有两种真值的子句构件，在这三种情形下，这个大的交替环都需要最多的翻转。

◀

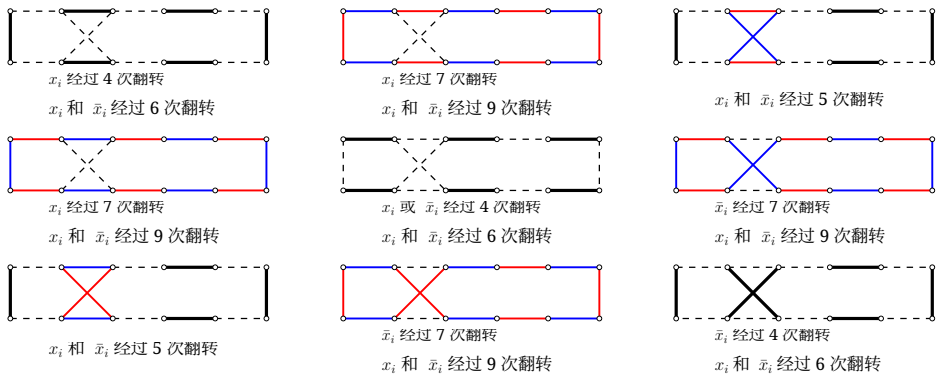


图 11 M_{in}（蓝色）和 M_{tar}（红色）在一个 $\forall$-构件中的所有可能状态。

8 第 4 节中省略的细节

▶**命题 8** ($\star$)。 奇匹配的翻转图在 G'' 上是连通的。

证明。 证明过程与命题 4 的证明基本相同。唯一的变化是，在情形 4 中，构件也可以是新的 $\forall$-构件。在图 12 中，对于子句构件旁边每个被移除的顶点，我们都可以得到一个完美匹配。翻转图的连通性再次由 [1, 定理 3]得出。

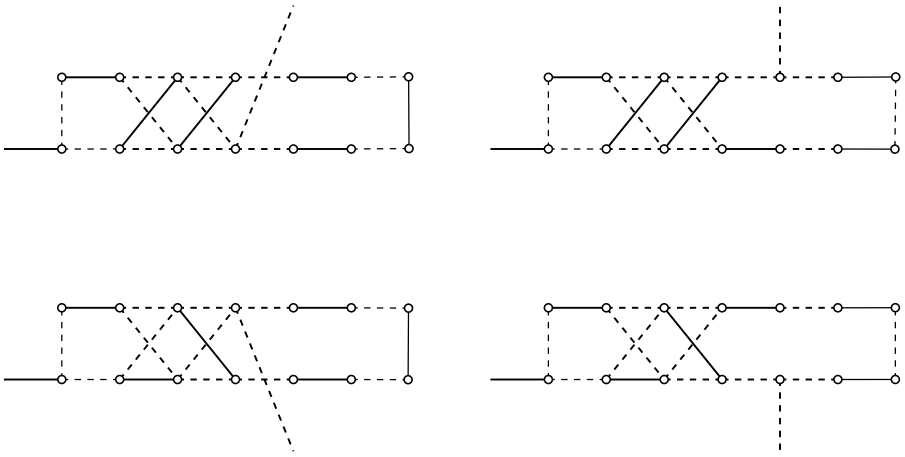


图 12 当一个顶点被孤立时，如何将 $\forall$-构件补全为完美匹配。

◀

▶**引理 9** ($\star$). 不失一般性，为了确定翻转图的半径，只需考虑满足以下性质的匹配对 M_{in} 和 M_{tar}：
(1) $v_{M_{tar}}$ 是 P 上距离 v最远的顶点。**(2)** $v_{M_{in}}$ 放置在 Z上。**(3)** $M_{in} \cup M_{tar}$ 在每个子句构件上都包含一个交替环。**(4)** $M_{in} \cup M_{tar}$ 在每个变量构件上都包含一个交替环。

证明。 **(1)** 如果 $v_{M_{tar}}$位于 P上，那么考虑 $G'' - P$的奇匹配翻转图。从 $M_{in} \setminus E(P)$ 到 $M_{tar} \setminus E(P)$ 在 $G'' - P$上的任意翻转序列都可以嵌入到一个

22 奇数匹配重构的更高难度结果

在 G''中从 M_{in} 到 M_{tar} 的翻转序列。奇匹配翻转图的直径至多为 $c\cdot|V(G''-P)|=c\cdot(s+\ell+1)$，因此为 $d(M_{in},M_{tar})\leq c\cdot(s+\ell+1)$。根据长度 L 的选取，仅将孤立顶点从 P 的一端移到另一端所需的翻转次数就超过了该上界。因此， M_{tar} 仅通过将其孤立顶点移至 M_{in} 所在处，就会增大与 M_{in} 的距离。因此， M_{tar} 的孤立顶点位于 P上。此外，如果 M_{tar} 的孤立顶点位于 P上，但并未处于距 v最远的位置，那么存在一个匹配，它在所有变量构件和子句构件上都与 M_{tar} 一致，但其孤立顶点离 v 更远，并且它与 M_{in}的距离更大。

(2) $v_{M_{in}}$ 不会被放置在 P 上，因为如果 M_{tar} 在任何子句构件或变量构件上与 M_{in} 不同，那么翻转序列就必须先将孤立顶点放到 v 上；而一开始不把孤立顶点放在 P 上，就能避免这种情况。其次，如果 $v_{M_{in}}$ 不在 p 上，且 M_{tar} 在 Z 上与 M_{in} 不同，那么翻转序列就必须沿着 p 移动孤立顶点，以切换 Z 并将其切回，这两个方向各需要总共 $\frac{\ell}{2}$ 次翻转。根据 $\frac{\ell}{2}$ 的选择，这需要的翻转次数比两个方向上将所有 $\bar{G''-P-p}$ 一起翻转还多。因此，为了节省 ℓ 次翻转， $v_{M_{in}}$ 不会被放置在 p之外。此外，如果 M_{in} 的孤立顶点位于 p 上，却不在 Z 上，那么，与 M_{in} 在所有变量构件和子句构件上都一致、但孤立顶点更靠近 Z 的匹配，到任意一个与 M_{in}距离最大的 M_{tar} 的距离都更短。

(3) 与引理 5 中的情况 (2) 类似。为了解释这一点，请注意，首先固定了 M_{in} ，然后才选取 M_{tar} ，以使其与 M_{in} 的距离最大。

(4) 对于第二个 ∃-构件，我们参见图10以及引理 5 中情况 (3) 的相关分析。 M_{in} 将选择该构件的一种完美匹配，而 M_{tar} 将选择另一种完美匹配，从而使任何最短翻转序列都要为该构件计入七次翻转，而不是仅计入四次翻转。第一个 ∃-构件也是如此；借助图 11，我们已在引理 5 的情况 (4) 中对其进行了分析。

剩下需要分析的是 ∀-构件。 M_{in} 和 M_{tar} 的所有可能并集均绘于图 13 中。顶行展示了所有恰好含有一个交叉的交替环。切换这些交替环需要八次翻转，在此过程中，孤立顶点将被放置在包含否定文字 $\bar{y}$ 的子句旁边。此外，再额外花费两次翻转，我们可以到达包含 y 的子句。第二行展示了所有含有零个或两个交叉的交替环。切换这些交替环需要八次翻转，在此过程中，孤立顶点将被放置在包含正文字 y 的子句旁边。此外，再额外花费两次翻转即可到达 $\bar{y}$ 。

底行展示了所有 $M_{in}\cup M_{tar}$ 仅由快乐边组成的情况。在所有这些情况下，孤立顶点都可以放在包含文字 y 或 $\bar{y}$ 的子句旁边，这需要进行四到六次翻转。同样，再进行两次翻转，就可以到达包含真值不同的变量的子句。还要注意，选择M_{tar} 不会改变哪些子句可以切换，只会改变所需的翻转次数。因此，在实现该半径的一对匹配中不会出现底行的状态，因为与前两行中的状态相比，这些状态所需的翻转次数更少，同时在变量赋值方面提供了更多选择。

第三行包含所有 $M_{in}\cup M_{tar}$ 由四条快乐边和一个交错四环组成的情况。在所有这些情况下，孤立顶点既可以放在包含文字 y 的子句旁边，也可以放在包含文字 $\bar{y}$ 的子句旁边，这需要五到七次翻转：两次用于移除和添加一条快乐边，三次用于切换该环，可能还需两次用于移除和添加另一条快乐边。再额外进行两次翻转，或者完全不进行额外翻转，我们也可以将孤立顶点放在包含其他真值文字的子句旁边。还要注意， M_{tar} 的选择不会改变哪些子句可以切换。它

只会改变完成切换所需的翻转次数。因此，第三行中的状态也不会出现在实现该半径的一对匹配中，因为与前两行中的状态相比，它们所需的翻转次数更少，同时在变量赋值方面提供了更多选择。

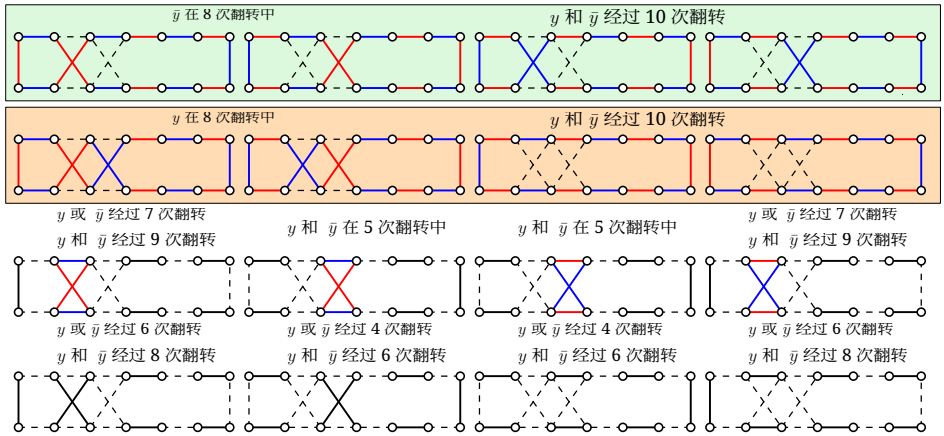


图 13 ∀-构件的所有状态。