arXiv:2602.09576v1 [cs.CC] 10 Feb 2026

关于 M-划分夹心问题的复杂性

Alexey Barsukov*[1] 和 Santiago Guzmán-Pro†[2]

[1]查理大学数学与物理学院，布拉格[2]德累斯顿工业大学代数研究所

2026-02-11

摘要

我们给出了由自反完全双色边图描述的 *constraint satisfaction problems*（约束满足问题，CSP）的结构分类。特别是，这一分类扩展了图同态问题的结构二分性，即 Hell–Nešetřil 定理（1990年）。我们的分类也具有高效性：我们可以在多项式时间内判定自反完全双色边图的 CSP 属于 P 类还是 NP 完全，而对于任意双色边图，这一判定任务是 NP 完全的。随后，我们将主要结果应用于 *matrix partition problems* 和 *sandwich problems*。首先，我们为一般类的矩阵分划问题提供了少数几种算法解法之一。其次，我们给出了矩阵划分夹心问题的 P 与 NP 完全性分类。

1 引言

一个< 스타일 id='1'>分裂图是这样一种图 $\mathbb{G}$：其顶点集可以划分为一个独立集和一个团。更一般地，如果一个图可以被划分为至多 k 个独立集和至多 ℓ 个团，则称其 $\mathbb{G}$ 具有一个（k，ℓ）-划分。矩阵划分是（k，ℓ）-划分的一种广义推广——除非另有说明，本文中的所有矩阵都是（$n \times n$）对称矩阵 M，其元素属于 m_{ij} $\{0, 1, *\}$。图 $\mathbb{G} = (V, E)$ 的一个 M-划分是一个函数 $f\colon V \to [n]$，满足对于任意一对不同的顶点 u，$v \in V$，如果$uv \in E$，则 $m_{f(u)f(v)} \in \{1, *\}$；如果 $uv \notin E$，则 $m_{f(u)f(v)} \in \{0, *\}$。因此，具有（2，0）-划分的图对应于二分图，而具有（1，1）-划分的图对应于分裂图；下面给出相应的 $\{0, 1, *\}$-矩阵。

$$M_B := \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix} \qquad M_S := \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 1 \end{pmatrix}$$

这个 M-划分问题以图 $\mathbb{G}$作为输入，任务是确定 $\mathbb{G}$ 是否存在一个M-划分。类似地，列表 M-划分问题以图 $\mathbb{G}$以及每个顶点 $v \in V$对应的索引列表$L(v) \subseteq [n]$ 作为输入，任务是判断是否存在一个满足列表要求的 M-划分 $f\colon V \to [n]$ 对 $\mathbb{G}$进行划分，即对于每个 $v \in V$，$f(v) \in L(v)$。显然，列表版本至少与无列表版本同样困难。

矩阵划分问题是图同态问题的一种自然推广，而后者具有优美的 P 与 NP 完全结构分类：如果 $\mathbb{H}$ 是二部图，或者含有自环，那么 $\mathbb{H}$-同态问题是多项式时间可解的；否则，$\mathbb{H}$-同态问题是 NP 完全的 [52]。（同态问题的精确定义见下文。）矩阵划分

*alexey.barsukov@matfyz.cuni.cz

†santiago.guzman pro@tu-dresden.de 本项目由欧洲研究委员会资助（POCOCOP项目，欧洲研究委员会协同资助项目 101071674）。然而，文中表达的观点和意见仅代表作者个人，并不一定反映欧盟或欧洲研究委员会执行局的立场。欧盟和资助机构均不对这些观点和意见承担责任。

问题成功吸引了广泛关注（例如参见 [25, 28, 29, 36, 39, 42, 43, 45, 53], ; 一份精彩的综述见 [50]），然而其复杂性分类仍悬而未决。事实上，大多数针对矩阵划分的算法解法都集中于特定的小矩阵 [25, 26, 28, 29, 36, 46], ，而针对一般矩阵族的高效算法则十分少见 [42, 44]

到约束满足问题的自然归约。 每个上述矩阵 M 都可以表示为一个双色边图 $\mathbb{M}$：将条目 $m_{ij} = 0$ 或 $m_{ij} = 1$ 编码为分别连接 i 和 j的红边或蓝边，并将条目 $m_{ij} = *$ 编码为 i 和 j之间的一条蓝边和一条红边。以下展示了如何将（上文引入的） M_B 和 M_S 表示为双色边图。



$\mathbb{M}_B$ 的表示形式



$\mathbb{M}_S$ 的表示形式

类似地，我们可以将图 $\mathbb{G}$ 表示为双色完全图 $\nu(\mathbb{G})$：将 $\mathbb{G}$中的边编码为蓝色边，并将 uv 中满足 $u \neq v$ 的非边对编码为红边。这些表示给出了从矩阵分划问题到双色边图同态问题的一种自然且众所周知的归约（例如参见 [46]）：图 $\mathbb{G}$ 存在一个 M-划分，当且仅当 $\nu(\mathbb{G})$ 同态映射到 $\mathbb{M}$（另见观察 8）。我们沿用约束满足理论中的记号，并将由 $\mathbb{M}$描述的同态问题记作 CSP（$\mathbb{M}$）。

因此，只要相应的 CSP 易解，这种归约便是为一般的矩阵划分问题族获得高效算法解法的自然工具。遗憾的是，在若干情况下， M-划分问题与 CSP($\mathbb{M}$) 之间存在很大的复杂度差距。例如，如果 M是一个 $\{0, 1\}$矩阵，那么 M-划分问题可在多项式时间内求解（甚至可用一阶逻辑 [40]求解），但由 $\mathbb{M}$描述的同态问题可能是 NP 完全的，例如当 M 是 $\mathbb{K}_3$的邻接矩阵时（即 3 个顶点上的完全图）。我们认为，要为矩阵划分问题获得一般性的高效解法，并由此理解其计算复杂性，一个自然的切入点是先弄清楚这种自然归约何时在算法上是高效的。

问题 1。 对满足以下条件的矩阵 M 进行结构性分类：由 $\mathbb{M}$描述的同态问题可在多项式时间内求解（假设 P $\neq$ NP）。

边染色图的同态。 边染色图的同态至少可以追溯到 [17]。此后，人们从组合学角度 [1, 51, 59, 61], 以及计算角度 [16, 18–20]对其进行了研究。当然，有限域 CSP 二分定理 [23, 63] 给出了边染色图同态问题的 P 与 NP 完全性分类。与 Hell–Ne˘set˘ril 定理不同，这一刻画具有代数性质，且验证起来是 NP 完全的 [27]。事实上，判断一个双色边图的同态问题是否易解，本身就已是 NP 完全的 [19]。因此，对这些同态问题进行任何高效的复杂性分类，都必须限于双色边图的某些子类。例如，在 [20] 中，作者研究了边染色圈；在 [13] 中，他们则考察了毛毛虫状结构。为了解决问题 1，我们考虑这样一类双色边图 $\mathbb{M}$：任意一对顶点之间至少有一条边；我们称之为自反完全 双色边图。因此，我们要问：是否存在针对自反完全 2双色边图同态问题复杂性的高效分类?

双色边图的同态问题也被用于建模图论中的其他问题。研究最多的方向涉及符号图的同态 [12, 14, 16, 19, 55, 60],；最近，双色边图的同态问题又在图夹心问题 [11]的背景下重新受到关注。

图夹心问题。 Golumbic、Kaplan 和 Shamir 在 [48] 中引入了图夹心问题。针对图性质 Π 的夹心问题（SP）是如下计算问题。输入是一对图 (V, E_1) 和 (V, E_2)，其中 $E_1 \subseteq E_2$；任务是判断是否存在一个边集 E，使得 $E_1 \subseteq E \subseteq E_2$，且图 (V, E) 满足 Π。特别地，针对 Π 的 SP 至少与以下问题一样难：

Π 的识别问题：(V, E) 满足 Π，当且仅当输入 $\big((V, E),\ (V, E)\big)$ 是针对 Π 的夹心问题的一个肯定实例。针对特定图类的夹心问题的复杂性分类，已经成为相当多文献研究的主题 [2, 30–34, 37, 48]。特别是，在 [30, 32, 34, 37, 48] 中，作者研究了由某些可容许划分定义的图类的 SP 复杂性。本文考虑矩阵划分的夹心问题 及其列表变体。尽管根据上下文这些定义或许显而易见，我们仍在此明确给出定义。

M-划分的夹心问题

INPUT: 一对图 (V, E_1) 和 (V, E_2)，其中 $E_1 \subseteq E_2$。QUESTION: 是否存在边集 E，使得 $E_1 \subseteq E \subseteq E_2$，并且 (V, E) 具有一个 M-划分?

M-划分的列表夹心问题

INPUT: 一对图 (V, E_1) 和 (V, E_2)，其中 $E_1 \subseteq E_2$，并且对每个 $v \in V$ 有一个列表 $L(v) \subseteq [n]$。QUESTION: 是否存在边集 E，使得 $E_1 \subseteq E \subseteq E_2$，并且 (V, E) 具有一个 M-划分 $f\colon\ V \to [n]$，使得对每个顶点 $v \in V$ 都有 $f(v) \in L(v)$?

在他们的开创性论文 [48], 中，Golumbic、Kaplan 和 Shamir 证明了分裂图的夹心问题是多项式时间可解的，并且在 [30], 中，作者对 (k, ℓ)-划分的夹心问题的复杂性进行了分类。如前所述，分裂图的夹心问题，以及更一般地 (k, ℓ)-划分的夹心问题，对应于某些M-划分的夹心问题，而对后者复杂性的分类是 [30] 的主题。另一个著名的矩阵划分问题是顽固划分 [25, 29, 35], ，即把顶点集划分为至多四个部分A、 B、 C 和 D，使得 A 和 B 是独立集， D 是一个团，并且来自 A 和 C 的顶点互不相邻。等价地，顽固划分是一个 M-划分，其中 M 是下面的矩阵。列表顽固夹心问题是 NP 完全的 [34], ，而原始列表版本属于 P 类 [29]。

$$\begin{pmatrix} 0 & * & 0 & * \\ * & 0 & * & * \\ 0 & * & * & * \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix}$$

Bodirsky 和 Guzm´an-Pro [11] 最近证明，对于许多自然的 SP问题，都存在一个多项式时间等价的双色边图同态问题。在他们研究的所有情形中，目标双色边图必然是无限的。我们将看到，对于矩阵划分的 SP问题，存在一个与之多项式时间等价的有限双色边图同态问题。利用这一联系，我们将解决以下问题；这是对 (k, ℓ)-划分的 SP问题分类 [30] 一种范围广泛但自然的推广。

问题 2。 对矩阵划分的 *SP*问题的复杂性进行分类。

贡献。 本文对由自反完全双色边图描述的同态问题的复杂性进行了结构性 分类（定理 46），扩展了 [52] 中给出的图同态问题复杂性分类。我们的刻画也高效（推论 47）：我们可以在多项式时间内判断自反完全双色边图的约束满足问题属于 P 类还是 NP 完全；而对于任意双色边图，这项任务是 NP 完全的 [19]。作为主要结果的应用，我们解决了问题 1 和问题 2，并给出了少数几个采用通用算法解决的矩阵划分问题一般类之一（定理 16）——“现有算法大多适用于具体的小型矩阵” [44]。

我们现在 简要概述主要结果证明中的核心思想和组成部分 lt.

- 齐性拼接（第 *3* 节）。这是双色边图 $\mathbb{H}$的一种特殊分解，其构件是双色边图中的齐次集（这一名称的灵感来自无色图的模分解中相关的齐性集概念 [49]）。我们发现，如果一个自反双色边图 $\mathbb{H}$ 可以通过迭代添加某种大小为二的齐性集（见定理 16）从一个二元素结构构造而成，那么 CSP($\mathbb{H}$)及其列表变体都可以在多项式时间内求解；事实上，还可以用 Datalog 求解。

• 遗传地进行 *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$ （第*5*节）。原始正构造是将一个 CSP 编码到另一个 CSP 中的特定方式。特别是，如果 $\mathbb{H}$对 $\mathbb{K}_3$进行 pp-构造，那么 CSP($\mathbb{H}$) 是 NP 完全的。受图同态问题 [52], 和光滑有向图的 CSP [4,7], 的结构化研究方法启发，我们提出一组“小型”的遗传困难双色边图 $\mathbb{F}$：也就是说，如果 $\mathbb{H}$ 包含 $\mathbb{F}$ 作为子结构（不一定是诱导子结构），那么 $\mathbb{H}$ 就对 $\mathbb{K}_3$进行 pp-构造。进而，我们通过构造*Siggers* 幂Sig($\mathbb{H}$)并建立结构条件来实现这一点；如果 Sig($\mathbb{H}$) 满足这些条件，就意味着 $\mathbb{H}$ 遗传地对 $\mathbb{K}_3$进行 pp-构造。

• 交替分量（第*6*节）。我们为双色边图引入一种连通性概念，其中交替分量对应于连通分量。我们观察到，交替分量会产生双色边图的典范分解，与齐性拼接相对应（观察30）。利用那些可遗传地 pp-构造 $\mathbb{K}_3$ 的“较小”图的集合 $\mathcal{F}$，我们发现，如果 $\mathbb{H}$ 不能 pp-构造 $\mathbb{K}_3$，那么每个交替分量的大小至多为四（命题 39）——这几乎与定理 16 中给出的可处理性充分条件相吻合。

• 再谈代数（第7节）。为弥合命题3 39与定理 16之间的差距，我们构造双色边图 $\mathbb{H}$的p-循环幂Cyc$_p$($\mathbb{H}$)。根据约束满足理论，如果 $\mathbb{H}$ 不能 pp-构造 $\mathbb{K}_3$，那么对于每个素数$p > |H|$，都存在一个同态 Cyc$_p$($\mathbb{H}$) $\to \mathbb{H}$ （定理 6 和引理 23）。最后，我们证明，若双色边图 $\mathbb{H}$ 存在命题3 39所述的分解，但不存在定理 16所述的分解，那么就不存在同态 Cyc$_p$($\mathbb{H}$) $\to \mathbb{H}$，因此 CSP($\mathbb{H}$) 是 NP 完全——由此弥合差距，并得出我们的主要结果（定理 46）。

值得指出的是，有限域约束满足问题的复杂性结构分类十分罕见。除了 Hell–Ne$\check{\text{s}}$et$\check{\text{r}}$il 定理之外，我们只知道光滑有向图 [7],半完全有向图 [3], 符号图 [21], 以及图的列表同态问题 [41]存在结构分类。如上所述，我们或许不应期待有限域约束满足问题能有如此优美而简单的结构分类，因为判定一个有限结构的约束满足问题 $\mathbb{A}$ 是否易解 [27] 是 NP 完全的（假设 P 类 $\neq$NP）。事实上，我们甚至不期待有向图约束满足问题能有这样的分类，因为这一问题族已经涵盖了所有有限域约束满足问题 [47, 定理 10]。反过来，2-边着色（无向）图的约束满足问题涵盖了所有有向图约束满足问题 [19],，因此几乎不可能为这一类约束满足问题找到优美的结构分类。

论文结构。 第 2 节介绍 CSP 的必要背景，并重新探讨矩阵分划问题与自反完全双色边图的 CSP 之间的联系。第 3–7 节的内容此前已介绍。最后，在第 8 节中，我们将主要结果应用于矩阵问题的 SP，从而解决问题 2。第 9 节总结全文并提出开放问题。

2 预备知识

我们假定读者熟悉初等一阶逻辑和一阶结构（参考资料见 [54]）。本文只考虑有限关系签名，且所有结构均为有限结构（除非另有说明），并采用以下约定。关系签名 τ 是关系符号的集合；对于每个关系符号 $S \in \tau$，我们关联一个称为其元数的正整数 s。我们用符号 $\mathbb{G}, \mathbb{H}, \ldots$表示结构，并用 $G, H, \ldots$ 表示其顶点集（定义域）。对于元数为 s 的每个关系符号 $S \in \tau$， S 在 τ-结构 $\mathbb{H}$ 中的解释是 H^s 的一个子集；我们将该集合记为 $S(\mathbb{H})$。

2.1 图和有向图

我们将有向图视为 $\{E\}$-结构，其中 E 是二元关系符号；将（无向）图视为有向图 $\mathbb{G}$，其中解释 $E(\mathbb{G})$ 是对称的。除这一约定外，我们遵循图论中的标准概念（例如参见 [15]）。特别地，我们用 uv 而非 (u, v) 表示（无向）图的边。我们用 $\mathbb{K}_n$ 表示具有 n 个顶点的完全图， $\mathbb{C}_n$ 表示具有 n 个顶点的（无向）圈， $\mathbb{P}_n$ 表示具有 n 个顶点的（无向）路径。类似地， $\vec{\mathbb{C}}_n$ 和 $\vec{\mathbb{P}}_n$ 分别表示具有 n 个顶点的有向环和有向路径。绘制图和有向图时，我们用黑色实线表示无向边 uv，用黑色实箭头表示有向边 (u, v)。

如果 $G \subseteq H$，且 $E(\mathbb{G}) = E(\mathbb{H}) \cap G^2$，则图 $\mathbb{G}$ 是 $\mathbb{H}$ 的诱导子图。类似地，如果由顶点集 $U \subseteq H$ 从 $\mathbb{H}$ 中诱导出的子图是图 $(U, E(\mathbb{H}) \cap U^2)$，我们有时会滥用记号并简写为 $(U, E(\mathbb{H}))$。

图 $\mathbb{G}$ 的围长是 $\mathbb{G}$中最短圈的长度。有向图 $\mathbb{D} := (D, E(\mathbb{D}))$ 的围长，是其边集为 $E(\mathbb{D})$ 的对称闭包的图的围长。

2.2 边着色图

在本文中，双色边图是一种 $\{R, B\}$ 结构，其中 R 和 B 是二元符号，且解释 $R(\mathbb{H})$ 和 $B(\mathbb{H})$ 是对称二元关系。我们遵循图论中的标准记号，分别用 $uv \in R(\mathbb{H})$ 和 $uv \in B(\mathbb{H})$ 代替 $(u, v) \in R(\mathbb{H})$ 和 $(u, v) \in B(\mathbb{H})$。我们将 $R(\mathbb{H})$ 中的元素 uv 称为红边，将 $B(\mathbb{H})$ 中的元素称为蓝色边；如果 $uv \in B(\mathbb{H}) \cap R(\mathbb{H})$，则称其为 $*$边（该名称源于将矩阵 M 编码为双色边图）。绘制双色边图时，我们用红色虚线边表示红边，用蓝色实线边表示蓝边。

我们称双色边图 $\mathbb{H}$ 为完全图，如果每一对不相等的顶点 $u, v \in H$ 之间都有边相连，记作 $uv \in R(\mathbb{H}) \cup B(\mathbb{H})$。回顾一下，在引言中我们定义了完全双色边图 $\nu(\mathbb{G})$，它由图 $\mathbb{G}$ 构造而成：将所有边涂成蓝色，并将所有非边 uv 涂成红色。

对于每个（无色）图 $\mathbb{G}$，我们关联一个自反完全双色边图 $\mathbb{G}^*$，其中$B(\mathbb{G}^*) = E(\mathbb{G})$，且 $R(\mathbb{G}^*) = \{uv\colon u, v \in G, uv \notin E(\mathbb{G})\}$。注意，$\nu(\mathbb{G})$对应于从 $\mathbb{G}$ 中移除所有自环后得到的结构。

给定一个自反完全双色边图 $\mathbb{H}$，我们用 $\mathbb{H}$ 表示 $\mathbb{H}$的对偶，也就是通过将蓝边改为红边、红边改为蓝边而得到的自反完全双色边图。图 1 展示了这些操作。

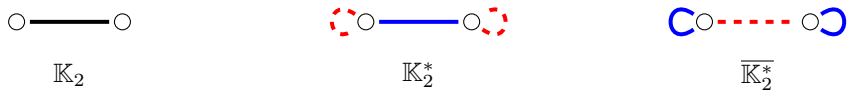


图 1：操作 $(\cdot)^*$ 和 $(\cdot)$ 的示意图，其结构为 $\mathbb{K}_2$、$\mathbb{K}_2^*$ 和 $\overline{\mathbb{K}_2^*}$。

我们称双色边图 $\mathbb{H}$ 的顶点 v 为蓝色顶点，如果 $vv \in B(\mathbb{H})$；称 v 为红色顶点，如果 $vv \in R(\mathbb{H})$。我们分别用 H_B 和 H_R 表示 $\mathbb{H}$ 的蓝色顶点子集和红色顶点子集。红色环、蓝色自环和 $*$-环 的定义与红边、蓝色边和 $*$-边类似。

诱导2-边着色子图 的定义与诱导子图类似。如上所述，w e 有时将写作 $(U, R(\mathbb{H}) B(\mathbb{H}))$ 表示由 $U \subseteq H$ 诱导的 $\mathbb{H}$ 的 2边着色子图。

自反完全双色边图的红色连通分量 $\mathbb{H}$ 是 $(H_B, R(\mathbb{H}_B))$ 的一个连通分量，也就是说，是由蓝色顶点诱导出的红边图的一个连通分量。蓝连通分量的定义类似。

2.3 同态与约束满足问题

考虑一对 τ-结构 $\mathbb{G}$ 和 $\mathbb{H}$。同态是一个函数 $f\colon G \to H$，满足：对于每个元数为 s 的关系符号 $S \in \tau$，以及每个属于 $\in S(\mathbb{G})$ 的元组 $(u_1, \ldots, u_s)$，元组 $(f(u_1) \ldots, f(u_s))$ 属于$S(\mathbb{H})$。特别地，(边着色)图之间的同态是一个顶点映射 $f\colon G \to H$，它保持邻接关系（及边颜色）。若存在这样的同态，我们记作 $\mathbb{G} \to \mathbb{H}$；否则，记作 $\mathbb{G} \not\to \mathbb{H}$。若一对结构 $\mathbb{G}$ 和 $\mathbb{H}$ 满足 $\mathbb{G} \to \mathbb{H}$ 且$\mathbb{H} \to \mathbb{G}$，则称它们同态等价。

以模板 $\mathbb{H}$ 为模板的约束满足问题 CSP($\mathbb{H}$)，其输入是一个结构 $\mathbb{G}$（具有与 $\mathbb{H}$ 相同的符号表），任务是判定 $\mathbb{G} \to \mathbb{H}$ 是否成立。例如，CSP($\mathbb{K}_3$) 就是著名的 3-可着色性问题。Erd˝os [38] 关于 k-可着色性的一个著名结果指出，对于每一对正整数 ℓ，k 都存在一个围长严格大于 ℓ 的图 $\mathbb{G}$，使得 $\mathbb{G}$ 不存在适当的 k-着色。该结果推广到任意关系结构，并称为稀疏不可比引理 [57, 定理 1.1]。下面我们陈述这一结果的一个著名推论，

为了遵循本文的讨论背景，我们考虑适用于双色边图的一个版本。双色边图 $\mathbb{H}$ 的围长在 $\mathbb{H}$ 含有自环时为 1；在不含自环但含有一条 $*$-边时为 2；否则， $\mathbb{H}$ 的围长等于边集为 $R(\mathbb{H}) \cup B(\mathbb{H})$ 的（无色）图的围长。

定理 3. 对于每个有限2-边着色图 $\mathbb{H}$ 以及每个正整数 ℓ，约束满足问题($\mathbb{H}$) 与限制在围长严格大于 ℓ的2-边着色图上的约束满足问题($\mathbb{H}$) 多项式时间等价。

2.4 原始正构造

一个原始正公式（pp-公式）是一个存在公式，其无量词部分是正原子公式的合取。例如， $\delta(x, y) := \exists z.\ E(x, z) \wedge E(y, z)$ 是一个 pp-公式，表明 x 与 y 由一条长度为二的游走连通。一个 r元关系 $S \subseteq H^s$ 是原始正可定义（pp-可定义）的，如果存在一个 pp-公式 $\phi(x_1, \ldots, x_s)$，使得$(u_1, \ldots, u_s) \in S$当且仅当 $\mathbb{H} \models \phi(u_1, \ldots, u_s)$。特别地，我们称顶点集 $S \subseteq H$ 是 pp-可定义的，如果 S 作为一元关系是 pp-可定义的。

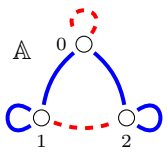
图（结构） $\mathbb{H}$的二元正合取幂[1] 是一个具有二元符号表$S_1, \ldots, S_k$的结构 $\mathbb{P}$ ，满足

- 其定义域 P $\mathbb{P}$ 为 H^d ，其中 d是某个正整数，并且
- 对于每个 $i \in [k]$ ，都存在一个 pp-公式 $\delta_i(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_d)$，使得$((u_1, \ldots, u_d), (v_1, \ldots, v_d)) \in S_i(\mathbb{P})$当且仅当 $\mathbb{H} \models \delta_i(u_1, \ldots, u_d, v_1, \ldots, v_d)$。

我们称结构 $\mathbb{H}$ 原始正构造 （*pp*-构造）结构 $\mathbb{B}$，如果 $\mathbb{B}$与 $\mathbb{H}$的某个正合取幂在同态意义下等价。原始正构造编码了某种特定类型的构件归约；这会导出对数空间归约——我们将在下述定理中陈述这一点，随后给出一个简单示例。

定理 4 [9,推论 3.5])。 如果结构 $\mathbb{H}$ *pp*-构造了结构 $\mathbb{H}'$，那么存在一个从 $\mathrm{CSP}(\mathbb{H}')$ 到 $\mathrm{CSP}(\mathbb{H})$的对数空间归约。

例 1. 考虑下方所示的双色边图 $\mathbb{A}$， 以及 pp-公式 $\delta(x, y) := \exists z.\ B(x, z) \wedge R(y, z)$。



注意，顶点集为 A、边为 (u, v)，且其中 $\delta(u, v)$ 为真时的图，是一个有三个顶点的完全图。因此， $\mathbb{A}$ pp-构造了 $\mathbb{K}_3$ （在这个简单情形下，正合取幂的顶点集为 A^1，且$\mathbb{K}_3$ 与 $\mathbb{H}$的一个正合取幂同构）。因此，根据定理 4（并且因为 3-可着色性是 NP 完全的）， CSP($\mathbb{A}$) 是 NP 完全的。

2.5 核

结构 $\mathbb{H}$ 的自同态 是一个同态 $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$。自同构 是双射的自同态。有限双色边图 $\mathbb{H}$是核 ，如果 $\mathbb{H}$ 的每个自同态都是一个自同构。众所周知，每个双色边图 $\mathbb{H}$都包含一个诱导子图 $\mathbb{G}$ ，该子图是一个核，并且与 $\mathbb{H}$同态等价。这种 $\mathbb{G}$ 在同构意义下是唯一的，称为 $\mathbb{H}$的核 。

核在研究约束满足问题的复杂性时很有用。首先，如果 $\mathbb{H}$是 $\mathbb{H}'$的核，那么 CSP($\mathbb{H}$) 和 CSP($\mathbb{H}'$) 是同一个问题。此外，“添加常量”不会改变一个核的约束满足问题的复杂性。也就是说，如果 $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$，那么 CSP($\mathbb{H}$) 和 CSP($\mathbb{H}$，$\{h_1\}$，……，$\{h_n\}$) 在对数空间下等价 [24]。从语义层面来说，CSP($\mathbb{H}$，$\{h_1\}$，……，$\{h_n\}$) 编码了由 $\mathbb{H}$ 描述的同态问题的预着色版本（即，输入 $\mathbb{G}$ 中的某些顶点 v 可能被限制为映射到某个固定元素 $h \in H$ ）。为简化记号，我们将用 ($\mathbb{H}$，h_1，……，h_n) 表示 ($\mathbb{H}$，$\{h_1\}$，……，$\{h_n\}$)，并且在适当时，我们将

[1]这个定义可以自然地推广到非二元幂（例如参见 [9]），但本研究并不需要它们。

假设 $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$，而不明确写出。我们常将 $(\mathbb{H},\ h_1,\ \ldots\ldots,\ h_n)$ 称为带常量的 $\mathbb{H}$。下面的陈述将从 pp-构造的角度解释 CSP($\mathbb{H}$) 与 CSP($\mathbb{H},\ h_1,\ \ldots\ldots,\ h_n$) 在对数空间下等价这一点。

定理 5 ([9, 引理 3。9])。 如果 $\mathbb{H}$ 是一个核，那么 $\mathbb{H}$ *pp*-构造$(\mathbb{H}, h_1, \ldots, h_n)$。

2.6 多态同态

一对双色边图的积 $\mathbb{G} \times \mathbb{H}$ 是一个结构，其顶点集为 $G \times H$；当且仅当 $gg' \in R(\mathbb{G})$ 和 $hh' \in R(\mathbb{H})$（分别是 $gg' \in B(\mathbb{G})$ 和$hh' \in B(\mathbb{H})$）成立时，$(g,h)(g',h')$ 是一条红边（分别是一条蓝边）。对于正整数 m，双色边图 $\mathbb{H}$ 的 m-次幂 $\mathbb{H}^m$ 递归定义为 $\mathbb{H}^m := \mathbb{H}^{m-1} \times \mathbb{H}$，其中 $\mathbb{H}^1 = \mathbb{H}$。

对于正整数 $m \geq 2$，双色边图 $\mathbb{H}$ 的一个 m元多态同态 是一个同态 $f\colon \mathbb{H}^m \to \mathbb{H}$。等价地，它是一个函数 $f\colon H^m \to H$，满足对于任意选取的蓝边$a_1b_1, \ldots, a_mb_m \in B(\mathbb{H})$ 和红边 $c_1d_1, \ldots, c_md_m \in R$，都有 $f(a_1, \ldots, a_m)f(b_1, \ldots, b_m) \in B(\mathbb{H})$，且 $f(c_1, \ldots, c_m)f(d_1, \ldots, d_m) \in R(\mathbb{H})$。我们用 Pol($\mathbb{H}$) 表示 $\mathbb{H}$ 的所有多态同态组成的集合。一个 m元多态同态 $f\colon \mathbb{H}^m \to \mathbb{H}$ 称为

- 循环的当且仅当对所有 $x_1, \ldots, x_m \in H$，它满足 $f(x_1, \ldots, x_m) = f(x_2, \ldots, x_m, x_1)$；
- 弱近一致性当且仅当对所有$x, y \in H$，它满足 $f(x, \ldots, x, y) = f(x, \ldots, x, y, x) = \cdots = f(y, x, \ldots, x)$;
- *Siggers*当 $m = 4$且对所有 $a, r, e \in H$，等式 $f(a, r, e, a) = f(r, a, r, e)$ 成立。

下述定理称为有限域 CSP 二分定理 [23, 63] （期刊版本见 [62]）。

定理 6. 对于每个有限结构 $\mathbb{H}$，以下情形之一成立：要么 $\mathbb{H}$ *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$，此时 $\mathrm{CSP}(\mathbb{H})$ 是 NP-完全的；要么以下等价陈述成立，在这种情况下$\mathrm{CSP}(\mathbb{H})$ 是多项式时间可解的：

- 对于每个素数 $p > |H|$，都存在一个 p 元循环多态函数 $f\colon \mathbb{H}^p \to \mathbb{H}$,
- 存在一个弱近一致性多态运算 $f\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}$，其对应某个正整数 $n \geq 2$，并且
- 存在一个 *Siggers* 多态 $f\colon \mathbb{H}^4 \to \mathbb{H}$。

对于集合 A和 $n \in \mathbb{N}$，映射 $f\colon A^n \to A$称为幂等 的，若对所有 $a \in A$，都有 $f(a, \ldots, a) = a$。以下结论可由定理 5 和定理 6 直接推出。

推论 7。 若 $\mathbb{H}$ 是一个核，则要么 $\mathbb{H}$ *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$，此时$\mathrm{CSP}(\mathbb{H})$ 是NP-完全的；要么以下等价命题成立，且在任何此类情况下$\mathrm{CSP}(\mathbb{H})$ 均为多项式时间可解：

- 对于每个素数 $p > |H|$，都存在一个 p 元幂等循环多态函数 $f\colon \mathbb{H}^p \to \mathbb{H}$，并且
- 存在一个幂等 *Siggers* 多态运算 $f\colon \mathbb{H}^4 \to \mathbb{H}$。

2.7 对约束满足问题的自然归约

如引言中所述，对于每个（$n \times n$）对称矩阵 M，我们构造一个自反完全双色边图 $\mathbb{M}$，使得 M-划分可自然归约到 CSP($\mathbb{M}$)。 $\mathbb{M}$ 的顶点集为$[n]$，蓝色边集为 $\{ij\colon\ m_{ij} \in \{1, *\}\}$，红边集为 $\{ij\colon\ m_{ij} \in \{0, *\}\}$。

观察 8. 对于每个矩阵 M，将 $\mathbb{G}$ 转换为非自反完全2-边着色<*style id='9'*} $\nu(\mathbb{G})$ 所定义的自然归约，是从 M-划分问题到$\mathrm{CSP}(\mathbb{M})$的对数空间归约。

复杂度差距的一个具体例子，体现在 M-划分问题与 CSP($\mathbb{M}$) 之间：与例 1 中的结构 $\mathbb{A}$ 相关联的矩阵M（即，若 $ij \in R(\mathbb{A})$，则 $m_{ij} = 0$；若 $ij \in B(\mathbb{A})$，则 $m_{ij} = 1$）。此时，$\mathbb{M} = \mathbb{A}$，因此根据例 1，CSP($\mathbb{M}$) 是 NP 完全的。然而，对于每个 $\{0, 1\}$-矩阵 M'，M'-划分问题都可在多项式时间内求解，且属于一阶逻辑 [40]。

显然，映射 $M \mapsto \mathbb{M}$是在 $\{0, 1, *\}$上的对称矩阵与自反完全双色边图之间的一一对应。因此，根据观察 8 和有限域二分定理（定理 6），问题 1 可归结为以下问题。

问题 9. 给出自反完全2双色边图 $\mathbb{H}$ 的结构刻画，这些图不能 *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$，因而约束满足问题$(\mathbb{H})$ 可在多项式时间内求解。

用于求解那些不能 pp-构造 $\mathbb{K}_3$ [23,63] 的结构的约束满足问题的已知算法非常复杂，因此我们也将提出更简单的算法作为目标，以求解那些不能 pp-构造 $\mathbb{K}_3$ 的自反完全双色边图的约束满足问题。我们首先在第 3 节介绍这类算法。

3 可处理性与齐次集

本节介绍一种结构性质 Π：如果一个自反完全双色边图 $\mathbb{H}$满足该性质 Π，那么 CSP($\mathbb{H}$) 可以在多项式时间内求解（定理 13）。

给定一个自反双色边图 $\mathbb{H}$，我们称集合 $S \subseteq H$ 为齐性的，如果每个顶点$h \in H \setminus S$ 与 $s \in S$ 之间有蓝边当且仅当 $ss \in B$，且有红边当且仅当 $ss \in R$。如果 $\{u\}$ 是齐性集，我们称顶点 $u \in H$ 为齐性顶点；如果 $\{u, v\}$ 是齐性集，我们称 $*$-边 $uv \in B \cap R$为齐性 $*$-边。

我们将证明，若 $\mathbb{H}$ 包含一个齐性顶点或一条齐性 $*$-边，则约束满足问题 $\mathbb{H}$ 的列表版本可在多项式时间内归约到约束满足问题 $\mathbb{H}'$ 的列表版本，其中 $\mathbb{H}'$ 是从 $\mathbb{H}$ 中分别移除该齐性顶点或齐性 $*$-边后得到的。

观察 10. 设 $\mathbb{H}$ 是一个自反的完全 2-双色边图。若 $\mathbb{H}$ 包含一个齐性顶点 h，则 约束满足问题 $(\mathbb{H})$ 的列表版本可在多项式时间内归约到 约束满足问题 $(\mathbb{H} \setminus \{h\})$ 的列表版本。

证明。 该结论显而易见，我们在算法 1 中给出一个归约。 □

算法 1：当 h 是一个齐性顶点时，从约束满足问题 $\mathbb{H}$ 到约束满足问题 $\mathbb{H} \setminus \{h\}$ 的列表版本的归约。

输入：一个双色边图 $\mathbb{G}$，以及每个 $v \in G$ 对应的列表 $L(v) \subset H$。令 $S = G$。若 $hh \in B(\mathbb{H})$：

对每个 $u \in G$ 执行：从 $L(u)$ 中移除 h。若 u 与某条红边关联，则从 S 中移除 u。若 $h \in L(u)$ 且 u 不与 $\mathbb{G}$ 中的任何红边关联。若 $hh \in R(\mathbb{H})$：对每个 $u \in G$ 执行：从 $L(u)$ 中移除 h。若 u 与某条蓝边关联，则从 S 中移除 u。若 $h \in L(u)$ 且 u 不与 $\mathbb{G}$ 中的任何蓝边关联。返回：更新后的列表 $L(u)$ 对应的 $\mathbb{G}[S]$。

回顾一下，双色边图 $\mathbb{H}$ 的红色连通分量 是 $(H_B,\ R)$ 的一个连通分量，而蓝连通分量 是 $(H_R,\ B)$ 的一个连通分量。

引理 11. 设 $\mathbb{H}$ 是一个自反完全2双色边图。若 $\mathbb{H}$ 含有一条齐性 $*$-边 h_1h_2，其中 $h_1h_1, h_2h_2 \in B(\mathbb{H})$ 或 $h_1h_1, h_2h_2 \in R(\mathbb{H})$，则CSP$(\mathbb{H})$ 的列表版本可在多项式时间归约到CSP$(\mathbb{H} \setminus \{h_1, h_2\})$的列表版本。

证明。对于 $h_1h_1, h_2h_2 \in B(\mathbb{H})$，我们在算法 2 中给出一个归约—— $h_1h_1, h_2h_2 \in B(\mathbb{H})$ 的情形是对称的。该归约的一致性可由以下简单观察得出。对于一个双色边图 $\mathbb{G}$，存在同态 $f\colon \mathbb{G} \to \mathbb{H}$，且 $f(g) = h_i$，其中某些 $g \in G$ 和 $i \in [2]$，当且仅当 f 将 g 的红色连通分量映射到 $\{h_1, h_2\}$（因为 $H \setminus \{h_1, h_2\}$ 中的所有顶点都通过蓝边与 h_1 和 h_2 相连）。为证明正确性，假设存在一个同态 $f\colon \mathbb{G} \to \mathbb{H}$，且尊重每个 $v \in G$ 的列表。注意，若存在一个部分同态 f'，将某个 $u \in G$ 的红色连通分量 $\mathbb{C}$ 映射到 $\mathbb{H}[h_1, h_2]$，则映射 $f''\colon G \to H$ 确实是一个同态 $f''\colon \mathbb{G} \to \mathbb{H}$；其中对每个 $c \in C$，令 f'' 由 f' 定义，在其他位置令其由 f 定义（因为每个 $c \in C$ 只通过蓝色顶点与 $H \setminus C$ 中的顶点相连，并且 h_1 和 h_2 通过蓝边与 $\mathbb{H}$ 中的所有顶点相连）。

□

算法 2： 当 h_1h_2 是齐性的 $*$-边且 $h_1h_1,\ h_2h_2 \in B(\mathbb{H})$ 时，从约束满足问题的列表版本 CSP($\mathbb{H}$) 到约束满足问题的列表版本 CSP($\mathbb{H} \setminus \{h_1, h_2\}$) 的归约。**输入：** 一个双色边图 $\mathbb{G}$，以及每个 $v \in G$ 对应的列表 $L(v) \subseteq H$。令 $S = G$**对每个** 红色连通分量 $\mathbb{C}$ 属于 $\mathbb{G}$**执行**从 S 中移除 C **若**存在同态 $\mathbb{C} \to \mathbb{H}[h_1, h_2]$，对每个 $c \in C$，该同态尊重列表 $L(c) \cap \{h_1, h_2\}$。**否则**，对每个 $b \in C$，从 $L(c)$ 中移除 h_1 和 h_2。**返回：** $\mathbb{G}[S]$及更新后的列表 $L(u)$。

最后，当 $\mathbb{H}$ 包含一个满足 $h_1h_1 \in B(\mathbb{H})$和 $h_2h_2 \in R(\mathbb{H})$的齐性 $*$-边时，我们给出一种归约。交替路径是双色边图 $\mathbb{G}$ 中的一条路径，其中没有一对连续的边同色。对于顶点 $g \in G$，我们用 $A_R(g)$表示所有满足以下条件的顶点 u的集合：存在一条以红边开始的交替 gu-路径。g 到 u在 $A_R(g)$中的交替距离 是以红边开始的最短交替 gu-路径的长度。我们类似地定义 $A_B(g)$以及 g 到 u 在 $A_B(g)$中的交替距离。

引理 12. 设 $\mathbb{H}$ 是一个自反的完全2-双色边图。如果 $\mathbb{H}$ 包含一条满足 $h_1h_1 \in B(\mathbb{H})$ 和 $h_2h_2 \in R(\mathbb{H})$的齐性 $*$-边 h_1h_2，那么CSP($\mathbb{H}$) 的列表版本可在多项式时间内归约到CSP($\mathbb{H} \setminus \{h_1, h_2\}$)的列表版本。

证明。 我们在算法 3 中给出一个归约。与之前类似，该归约的一致性可由一个简单观察得到：对于一个双色边图 $\mathbb{G}$，存在同态 f: $\mathbb{G} \to \mathbb{H}$，且 $f(g) = h_1$，其中某个 $g \in G$，当且仅当 f 将 $A_R(g)$ 映射到 $\{h_1, h_2\}$。由于 h_1 在 $\mathbb{H}$ 中的唯一红色邻点是 h_2，且 h_2 在 $\mathbb{H}$ 中的唯一蓝色邻点是 h_1，对 $u \in A_R(g)$ 的上述观察可通过对以红边开始的最短交替 gu-路径的长度进行简单归纳论证得出。正确性同样可沿用引理 11 证明中的类似论证，利用 $A_R(g)$ 的定义；并且对于每个 $h \in H$，在 $\mathbb{H}$中都有一条蓝边 h_1h 和一条红边 h_2h。

□

算法 3：当 h_1h_2 是一个齐性 $*$-边，且满足 $h_1h_1 \in B(\mathbb{H})$ 和 $h_2h_2 \in R(\mathbb{H})$ 时，将约束满足问题 $\mathbb{H}$ 的列表版本归约为约束满足问题 $\mathbb{H} \setminus \{h_1, h_2\}$ 的列表版本。输入：一个双色边图 $\mathbb{G}$，以及列表 $L(v) \subseteq H$，每个 $v \in G$ 对应一个列表。令 $S = G$。当存在 $g \in S$ 满足 $h_1 \in L(g)$ 时，执行以下操作：从 S 中移除 $A_R(g)$，如果映射 $u \mapsto h_1$（当从 g 到 u 的交替距离为偶数时；否则为 $u \mapsto h_2$）对于每个 $u \in A_R(g)$ 都满足列表 $L(u)$，且它定义了一个同态 $\mathbb{G}[A_R(g)] \to H[h_1, h_2]$。否则，从 $L(g)$ 中移除 h_1。当存在 $g \in S$ 满足 $h_2 \in L(g)$ 时，执行以下操作：从 S 中移除 $A_B(g)$，如果映射 $u \mapsto h_2$（当从 g 到 u 的交替距离为偶数时；否则为 $u \mapsto h_1$）对于每个 $u \in A_B(g)$ 都满足列表 $L(u)$，且它定义了一个同态 $\mathbb{G}[A_B(g)] \to \mathbb{H}[h_1, h_2]$。否则，从 $L(g)$ 中移除 h_2。返回：带有更新后列表 $L(u)$ 的 $\mathbb{G}[S]$。

3.1 齐次拼接

我们在双色边图上引入以下运算。给定一对双色边图 $\mathbb{H}$和 $\mathbb{A}$，齐次拼接 $\mathbb{H} \lhd_h \mathbb{A}$ 是从不交并 $\mathbb{H} + \mathbb{A}$ 得到的结构：在 H 和 A 之间添加边，使得 A 是 $\mathbb{H} \lhd_h \mathbb{A}$中的一个齐性集。也就是说，对于 $h \in H$ 和 $a \in A$，若 $aa \in B(\mathbb{A})$，则存在一条蓝边 $ha \in B(\mathbb{H} \lhd_h \mathbb{A})$；若 $aa \in R(\mathbb{A})$，则存在一条红边。

由于顶点数至多为 2 的每个双色边图的列表版本都能在多项式时间内求解，因此可通过递归调用算法 1、2 和 3 得出下一个结论。

定理 13。 $\mathrm{CSP}(\mathbb{H})$ 的列表版本可在多项式时间内求解，只要 $\mathbb{H}$ 是一个允许进行如下分解的自反完全2双色边图

$$\mathbb{H} := \mathbb{A}_1 \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_k,$$

其中 $\mathbb{A}_1$ 是一个2元素结构，而 $\mathbb{A}_i$ 是一个单顶点（带有一个环），或者对于每个$2 \leq i \leq k$， $*$是一个自反边。

对于一个自反完全双色边图 $\mathbb{H}$，可以高效地检查 $\mathbb{H}$ 的核是否允许进行定理 13 中所述的分解。

命题 14。 对于每个自反完全双色边图 $\mathbb{H}$，可以在关于 $|H|$ 的多项式时间内检查 $\mathbb{H}$ 的核是否允许进行形式为 $\mathbb{A}_1 \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_k$的分解，其中 $\mathbb{A}_1$ 是一个至多包含两个元素的结构，并且对于每个 $2 \leq i \leq k$，每个 $\mathbb{A}_i$ 都是一个单顶点（带有一个环），或者是一个自反的 $*$边。

证明。 如果 $\mathbb{H}$ 包含一个 $*$环，我们就直接接受，因为它的核是一个恰好包含一个元素的结构，并且显然允许进行这样的分解。现在假设 $\mathbb{H}$ 没有 $*$环。我们将使用以下事实：(1) 可以在多项式时间内检查 $\mathbb{H}$的核的大小是否至多为二（因为每个至多包含两个顶点的自反完全双色边图的 CSP 都可以在多项式时间内求解）；类似地，(2) 可以在多项式时间内检查 $\mathbb{H}$ 的核是否为一条 $*$边或一个单顶点。

现在，该算法相当简单。对于输入 $\mathbb{H}$，我们计算一个按包含关系极小的非空齐性集 $S \subseteq H$。为此，对于每个 $v \in H$，计算包含 v 的极小齐性集 S_v：首先，将 v 加入 S_v；然后，只要存在 $u \in S_v$ 和 $w \in H \setminus S_v$，使得有一条边连接 uw（其颜色与自环 uu 的颜色不同），就将 w 加入 S_v。在所有齐性集 S_v 中选取一个极小的，并将其记为 S。如果 $S \neq H$，检查由 S 诱导的子结构 $\mathbb{H}[S]$ 是否为单顶点或一条 $*$-边。如果不是，则拒绝；否则，从 H 中移除 S，并重复此过程，直到得到最小的齐性集 $S = H$。此时，检查 $\mathbb{H}$ 的核的大小是否至多为 2。若是，则接受；否则拒绝。显然，整个过程可以在多项式时间内完成。

□

3.2 Datalog

许多读者可能已经注意到，算法 1–3 的核心思想是某种一致性检查。此外，熟悉*Datalog*的读者可能也已经注意到，这些算法可以编码为 Datalog 程序。Datalog 是约束满足理论和数据库理论中常用的一种框架，其中包含了局部一致性检查的具体概念。特别是，Datalog 程序可在多项式时间内运行；与多项式时间算法不同，已知 Datalog 程序无法解决所有约束满足问题（例如，Datalog 无法解决 CSP($\mathbb{K}_3$)，也无法解决有限域上的线性方程 [47,定理31]）。

现在，我们通过证明定理 13 涵盖范围内每个结构 $\mathbb{H}$ 的约束满足问题都可以由 Datalog 程序解决，重新证明（并改进）定理 13。不过，我们不会正式介绍 Datalog，也不会将算法 1–3 改写为 Datalog 程序，而是以约束满足问题的代数方法为基础，并采用以下定理作为有限域约束满足问题可由 Datalog 解决的定义——关于可由 Datalog 解决的约束满足问题的详细介绍，请参阅 [6, 8]。

定理 15 ([5, 6, 56], 另见 [8])。 对于任意有限结构 $\mathbb{H}$，以下条件等价：

1. CSP($\mathbb{H}$) 可由 Datalog 求解；
2. $\mathbb{H}$ 具有一个三元 *WNU* 多态 f_3 和一个四元 *WNU* 多态 f_4，使得

$$f_3(y, x, x) = f_4(y, x, x, x) \tag{1}$$

注记 1。 CSP($\mathbb{H}$) 的列表版本对应于 $(\mathbb{H}, \{U_X\}_{\varnothing \neq X \subseteq H})$ 的 CSP，即 $\mathbb{H}$再加上针对 H 的每个非空子集 X 的一个一元谓词（另见 [22]）。显然，多态 f: $\mathbb{H}^m \to \mathbb{H}$

是 $(\mathbb{H}, \{U_X\}_{\varnothing \neq X \subseteq H})$ 的多态，当且仅当 f 是保守的，即对于每个 $(x_1, \ldots, x_m) \in H^m$，$f(x_1, \ldots, x_m) \in \{x_1, \ldots, x_m\}$。因此，当且仅当 $\mathbb{H}$ 具有满足方程 (1) 的三元 WNU 保守多态函数 f_3 和一个保守的四元 WNU 多态 f_4 时，CSP($\mathbb{H}$) 的列表版本可由 Datalog 求解

定理 16. 设 $\mathbb{H}$ 是一个自反的完全2边着色图。如果 $\mathbb{H}$ 具有分解

$$\mathbb{H} := \mathbb{A}_1 \triangleleft_h \cdots \triangleleft_h \mathbb{A}_k,$$

其中 $\mathbb{A}_1$ 是一个2元素结构，且对于每个$2 \leq i \leq k$，每个 $\mathbb{A}_i$ 都是一个单顶点（带有自环）或一条自反的 $*$边，那么CSP$(\mathbb{H})$ 的列表版本可由 *Datalog* 求解。

证明。 根据定理 15 和注记 1，只需找到一对满足条件 (1) 的 WNU 保守多态函数 f_3, f_4。令 $m \in \{3, 4\}$ 表示这些多态函数的元数。若存在某个 $i \in [k]$使得 $\bar{a} \in A_i^m$成立，则称元组 $\bar{a} \in H^m$ 为合一元组。否则，称该元组为分散元组。

对于每个属于某个 $i \in [k]$的合一元组 $\bar{a} \in A_i^m$，令 $f_3(\bar{a})$ 在 A_i上充当唯一的多数函数，并令 $f_4(\bar{a})$ 在至少有三个相同项的元组上充当近一致函数（即 $f_4(y, x, x, x) = \cdots = f(x, x, x, y) = f(x, x, x, x)$），否则令其为第一坐标上的投影函数。显然，这已经足以使f_3, f_4 满足条件 (1) 对合一元组的限制。

对于每个 $\bar{a} \in H^m$，令 $\max(\bar{a})$ 表示最大可能的 $j \in [k]$，使得 $\bar{a}$ 包含来自 A_j 的一个坐标，即对某个 $i \in [m]$ 有 $a_i \in A_j$。对于每个分散元组 $\bar{a} \in H^m$，令 $f_m(\bar{a})$ 等于 a_i，其中$i \in [m]$ 是使得 $a_i \in A_{\max(\bar{a})}$ 成立的第一个坐标。由 f_3 和 f_4 在分散元组上的定义可知，它们在分散元组上也满足 (1)。由于 (y, x, x) 是联合的（相应地，分散的）当且仅当 (y, x, x, x) 是联合的（相应地，分散的），我们得出 f_3 和 f_4 满足 (1)。注意 f_3, f_4 两者都是保守的。

剩下证明 f_3 和 f_4 是 $\mathbb{H}$ 的多态同态。令 $\bar{a}, \bar{b} \in B(\mathbb{H}^m)$（分别地，属于 $R(\mathbb{H}^m)$），则 $f_m(\bar{a})f_m(\bar{b}) \in B(\mathbb{H})$（分别地，属于 $R(\mathbb{H})$）。考虑以下分类讨论：根据 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$ 是分散还是联合，以及 $\max(\bar{a})$ 与 $\max(\bar{b})$ 之间的关系来区分情形。

- 我们先讨论所有满足 $i = \max(\bar{a}) > \max(\bar{b})$的情形。令 $j \in [m]$ 为 $\bar{a}$ 中满足 $a_j \in A_i$的第一个坐标。由于 A_i 在 $\mathbb{A}_1 \triangleleft_h \cdots \triangleleft_h \mathbb{A}_i$中是齐性的，且 $b_j \in A_{i'}$ 对于某个 $i' < i$成立，因此 a_j 必定通过 $\mathbb{H}$中的至多一种边类型与 b_j 连通。此外，这种边类型取决于 $a_j a_j \in B(\mathbb{H})$还是 $a_j a_j \in R(\mathbb{H})$。不失一般性，假设 $a_j a_j \in B(\mathbb{H})$，于是 $\bar{a}\bar{b} \in B(\mathbb{H}^m)$ 且 $\bar{a}\bar{b} \notin R(\mathbb{H}^m)$。还要注意，根据 $\mathbb{A}_i$的齐次性，a_j 通过一条蓝边与 b的每个条目 $b_{j'}$ 相连。

  – **假设 $\bar{a}$ 是联合的**。在这种情况下，$\bar{a}$ 的每个坐标 $a_{j'}$ ($j' \in [m]$) 都属于 A_i；根据前面类似的论证，$a_{j'}$ 在 $\mathbb{H}$ 中通过蓝边与 b 的每个项 $b_{j''}$ 相连。由于 $f(\bar{a})$ 等于 $\bar{a}$ 的某个项，而 $f(b)$ 是 b的某个项，因此我们得出结论：$f(\bar{a})$ 与 $f(b)$ 在 $\mathbb{H}$中通过蓝边相连。

  – **假设 $\bar{a}$ 是分散的**。由于 $j \in [m]$ 是满足 $a_j \in A_i$的第一个坐标，因此$f(\bar{a}) = a_j$。我们已经论证过，对于 $j' \in [m]$，a_j 通过蓝边与每个 $b_{j'}$ 相连；又由于对于某个 $j' \in [m]$，$f(b) = b_{j'}$，因此 $f(\bar{a})f(b) \in B(\mathbb{H})$。这表明 f 保持了连接元组的边类型 $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{H}^m$ 只要 $\max(\bar{a}) > \max(\bar{b})$，而 $\max(\bar{a}) < \max(\bar{b})$ 的元组则可由对称论证得出。

- 现在我们考虑 $\max(\bar{a}) = \max(\bar{b})$ 的情形，并区分两者均为联合、两者均为分散，或一个为联合而另一个为分散元组。

  – 假设 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$ 是联合的。对于这样的元组，f_3 定义为多数多态性，并且每个分量 $\mathbb{A}_i$ 都在该多态性下保持不变，因此 f_3 保持这些元组之间的边类型。对于 f_4，我们证明总存在某个坐标 $i \in [4]$，使得 $f_4(\bar{a}) = a_i$ 且 $f_4(b) = b_i$，因此可得 f_4 也保持连接 $\bar{a}$ 和 b的边类型。当每个 $\bar{a}$和 b都有至少 3 个相同的项时，这一点显然成立（例如，$\bar{a} = (a, a, a, a')$ 和 $b = (a', a', a, a')$）。如果$\bar{a}$ 至少有 3 个相同的项，而 b 至多有 2 个相同的项，那么 $f_4(b) = b_1$。在这种情况下，要么

$f_4(\bar{a}) = a_1$，于是证毕；要么 $\bar{a} = (a', a, a, a)$。由于 b 是联合的，且没有三个坐标取值相同，因此等式 $b_i = b_1$ 恰好对一个 $i \in \{2,3,4\}$ 成立。由此可得，对于某个 $i \in \{2,3,4\}$，$(f_4(\bar{a}) f_4(b)) = (a, b_1) = (a_i, b_i)$。如果 $\bar{a}$ 和 b 都至多有 2 个相同的项，那么 f_4 可作为第一坐标上的投影函数，于是证毕。

– 假设 $\bar{a}$ 和 b 是分散的。令 $i = \max(\bar{a}) = \max(b)$。注意，由于 $\bar{a}$ 和 b 是分散的，因此 $i > 1$。若对于某个 $j \in [m]$，a_j 和 b_j 都是首次属于 $\mathbb{A}_i$ 的元素，那么我们就完成了，因为 $f_m(\bar{a}) = a_j$ 且 $f_m(b) = b_j$。否则，假设 $a_j = f_m(\bar{a})$ 是 $\bar{a}$ 中第一个属于 $\mathbb{A}_i$ 的元素，而对于每个 $j' \le j$，$b_{j'}$ 都属于 $A_{i'}$，其中某个 $i' < i$ 成立。不失一般性，假设 $a_j a_j \in B(\mathbb{H})$。那么，根据齐次性，$a_j b_j \in B(\mathbb{H})$ 且 $a_j b_j \notin R(\mathbb{H})$，因此，$\bar{a}$ 和 b 之间有一条蓝边，而没有红边。现在，如果 $f_m(b) = f_m(\bar{a}) = a_j$，那么 $f_m(\bar{a}) f_m(b) \in B(\mathbb{H})$。或者，$f_m(b) \in A_i \setminus \{a_j\}$，所以 $|A_i| = 2$；又由于 $i > 1$，必然有 $\mathbb{A}_i$ 是一条自反的 $*$-边。特别地，有一条红边和一条蓝边连接在 A_i 中的两个不同顶点，因此 $f(\bar{a}) f(b) \in B(\mathbb{H})$。

– 假设 $\bar{a}$ 是分散的，且 b 是联合的。设 $i = \max(\bar{a}) = \max(b)$，并设 $a_j = f_m(\bar{a})$ 为第一个位于 A_i 中的坐标。由于 $\bar{a}$ 是分散的，我们有 $i > 1$，因此 $\mathbb{A}_i$ 由一个单顶点或一条自反的 $*$-边组成。此外，对某个 $j' \in [m]$，我们有 $a_{j'} \in A_{i'}$ 对于 $i' < i$，这意味着边 $a_{j'} b_{j'}$ 要么属于 $B(\mathbb{H})$，要么属于 $R(\mathbb{H})$，但不能同时属于两者。我们假设不失一般性地有 $a_{j'} b_{j'} \in B(\mathbb{H})$。注意，若 $a_j a_j \in B(\mathbb{H})$，或者若 $f(\bar{a}) \ne f(b)$，则 $f(\bar{a}) f(b) \in B(\mathbb{H})$：事实上，若 $f(b) = f(\bar{a}) = a_j$，则 $f(\bar{a}) f(b) = a_j a_j \in B(\mathbb{H})$；若 $f(\bar{a}) \ne f(b)$，则 $\mathbb{A}_i$ 必须包含由一条 $*$-边连通的两个元素，并且 $f(\bar{a}) f(b) \in B(\mathbb{H})$。因此，只需证明：若 $a_j a_j \in R(\mathbb{H})$，则 $f(\bar{a}) \ne f(b)$。回顾 $a_{j'} b_{j'} \in B(\mathbb{H})$，并且由于 $a_{j'} \in A_{i'}$ 对某个 $i' < i$ 成立，由 A_i 的齐次性可得 $b_{j'} b_{j'} \in B(\mathbb{H})$，从而 $b_{j'} \ne a_j$。此外，由于 $a_j b_j \in B(\mathbb{H})$ 且 $a_j a_j \in R(\mathbb{H})$，必有 $b_j \ne a_j$。由 j 与 j' 的定义，我们知道 $j \ne j'$，这意味着 b 至少包含两个不同于 a_j 的分量。最后，由于每个 a_ℓ 都通过一条蓝边与 b_ℓ 连通，并且若 $\ell < j$，则 $a_\ell \in A_{i'}$ 对某个 $i' < i$ 成立，于是 $b_\ell b_\ell \in B(\mathbb{H})$。所有这些观察合在一起表明 $b_1 \ne a_j$，并且 b 至少包含两个不同于 a_j 的分量。现在由 f_3 与 f_4 的定义可知，它们要么充当 b 上的近一致函数，要么充当第一坐标上的投影函数，并且在任一情形下都有 $f(b) = b_1$，以及 $b_1 \ne a_j$。

□

4 全同态

在这一简短小节中，我们应用定理 13，得到全同态夹心问题复杂性的 P 与 NP 完全性分类。从图 $\mathbb{G}$ 到图 $\mathbb{H}$ 的满同态是一个顶点映射 $f\colon\ G \to H$，使得对每个 $u, v \in G$，$uv \in E(\mathbb{G})$ 当且仅当 $f(u) f(v) \in E(\mathbb{H})$。注意，若 M 是 $\mathbb{H}$ 的邻接矩阵，则 $\mathbb{G}$ 存在 M-划分当且仅当 $\mathbb{G}$ 存在到 $\mathbb{H}$ 的满同态。

图 $\mathbb{G}$ 是**点决定**的，如果对每一对不同的顶点 u 和 v，都存在顶点 w，使得 $uw \in E$ 与 $vw \notin E$，或反之亦然。$\mathbb{G}$ 的一对不同顶点 i 和 j 是**孪生点**，如果对每个 $w \in V$，$\mathbb{G}$ 中存在边 uw 当且仅当 $\mathbb{G}$ 中存在边 vw；因此，$\mathbb{G}$ 是点决定的当且仅当它不含孪生顶点。我们称 $\mathbb{G}'$ 是 $\mathbb{G}$ 的**膨胀**，如果 $\mathbb{G}'$ 可由 $\mathbb{G}$ 通过迭代添加孪生点得到。注意，$\mathbb{G}$ 存在到 $\mathbb{H}$ 的满同态当且仅当 $\mathbb{G}$ 是 $\mathbb{H}$ 的某个诱导子图 $\mathbb{H}'$ 的膨胀。

观察 17. 图 $\mathbb{G}$ 存在到 $\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2$ 的满同态，当且仅当 $\mathbb{G}$ 是一个无 $\{\mathbb{K}_3, 2\mathbb{K}_2, \mathbb{P}_4\}$ 的图。

证明。显然，如果 $\mathbb{G}$ 是 $\mathbb{H}$ 的诱导子图，且 $\mathbb{H}$ 存在到 $\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2$ 的满同态，那么 $\mathbb{G}$ 也存在到 $\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2$ 的满同态。因此，反向结论成立，因为 $\mathbb{K}_3$、$2\mathbb{K}_2$、和 $\mathbb{P}_4$ 都不存在到 $\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2$ 的满同态。现在假设 $\mathbb{H}$ 是 $\{\mathbb{K}_3, 2\mathbb{K}_2, \mathbb{P}_4\}$-自由的。特别地，$\mathbb{H}$ 是余图，因为它是 $\mathbb{P}_4$-自由的，因此 $\mathbb{H}$ 要么是两个更小余图的联，要么是它们的不交并。在前一种情况下，由于 $\mathbb{H}$ 是无三角形的，$\mathbb{H}$ 是两个独立集的联，因此

它存在到 $\mathbb{K}_2$ 的满同态（因此也存在到 $\mathbb{K}_1+\mathbb{K}_2$ 的满同态）。在后一种情况下，当 $\mathbb{H}$ 是更小余图 $\mathbb{H}_1$、.....、$\mathbb{H}_k$ 的不交并时，由 $\mathbb{H}$ 的 $2\mathbb{K}_2$-自由性可知，这些 $\mathbb{H}_i$ 中至多一个包含边。如果不存在这样的 i，那么 $\mathbb{H}$ 就是空图，即 $\mathbb{K}_1$ 的膨胀；如果存在这样的 i，我们便可像之前一样推知 $\mathbb{H}_i$ 是 $\mathbb{K}_2$ 的膨胀，因此 $\mathbb{H}$ 是 $\mathbb{K}_1+\mathbb{K}_2$ 的膨胀。

□

双色边图的满同态定义方式类似：满同态 $f\colon \mathbb{G}\to\mathbb{H}$是一个顶点映射 $f\colon G\to H$，使得对于每一对顶点 $u,v\in G$， $uv\in B(\mathbb{G})$ 当且仅当 $f(u)f(v)\in B(\mathbb{H})$，并且 $uv\in R(\mathbb{G})$ 当且仅当 $f(u)f(v)\in R(\mathbb{H})$。

引理 18。 设 $\mathbb{G}$ 和 $\mathbb{H}$ 是2双色边图。若存在满同态 $f\colon \mathbb{G}\to\mathbb{H}$，则CSP$(\mathbb{G})$ 的列表版本可在多项式时间内归约到CSP$(\mathbb{H})$的列表版本。

证明。 将输入 $\mathbb{I}$与列表 $L(i)\subseteq G$（对每个 i）关联起来，并将输入 $\mathbb{I}$与列表 $L'(i)=\{f(g)\colon g\in G\}$关联起来。由此得到从 CSP$(\mathbb{G})$ 的列表版本到 CSP$(\mathbb{H})$ 的列表版本的多项式时间归约。

□

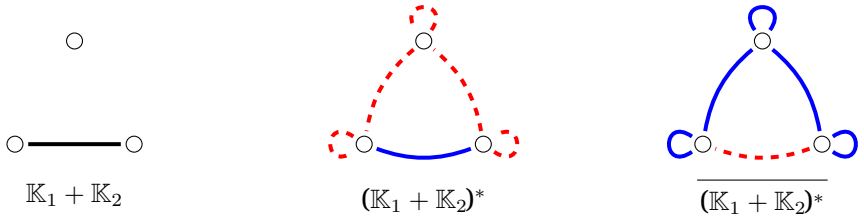


图2：左侧是（未着色的）图 $\mathbb{K}_1+\mathbb{K}_2$。中间和右侧是由 $\mathbb{K}_1+\mathbb{K}_2$ 得到的两个双色边图：前者将边着为蓝色、非边着为红色；后者将边着为红色、非边着为蓝色。

命题 19. 设 $\mathbb{H}$ 是一个自反完全2双色边图，没有 $*$环，并且所有顶点都关联一个红色自环（分别地，关联一个蓝环）。如果 $\mathbb{H}$不能 *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$，那么 $\mathbb{H}$存在一个满同态$(\mathbb{K}_1+\mathbb{K}_2)^*$（分别地，存在到$(\mathbb{K}_1+\mathbb{K}_2)^*$的满同态）；见图2。在这种情况下，CSP$(\mathbb{H})$ 的列表版本可在多项式时间内求解。

证明。我们采用逆否命题进行证明，并假设 $\mathbb{H}$ 不存在到$(\mathbb{K}_1+\mathbb{K}_2)^*$的满同态。根据观察 17，可知以下结构之一是诱导子结构： $\mathbb{K}_3^*$、$(2\mathbb{K}_2)^*$ 或 $\mathbb{P}_4^*$。现在考虑以下 pp-定义： $\delta_E(x,y):=\exists z.\ R(x,z)\wedge B(y,z)$。由于 $\mathbb{H}$ 没有 $*$边，因此有向图(H,E)（其中$(x,y)\in E$ 当且仅当 $\mathbb{H}\models\delta_E(x,y)$）是无环有向图。在每种情况下，$(H,E)$都包含一个不能同态映射到有向环的光滑有向图。因此，根据定理 20，我们得出(H,E) pp-构造 $\mathbb{K}_3$。由于 $\mathbb{H}$pp-定义了(H,E)，我们得出 $\mathbb{H}$ 也 pp-构造 $\mathbb{K}_3$。根据引理 18，如果 $\mathbb{H}$ 存在到$(\mathbb{K}_1+\mathbb{K}_2)^*$的满同态，那么 CSP$(\mathbb{H})$ 的列表版本可在多项式时间内归约到 CSP$((\mathbb{K}_1+\mathbb{K}_2)^*)$ 的列表版本。根据定理 13，后者可在多项式时间内求解，因为$(\mathbb{K}_1+\mathbb{K}_2)^*$ 可由一个含两个顶点的自反完全双色边图$(\mathbb{K}_2^*)$添加一个齐性顶点构造而成。

□

5 遗传 pp-构造

本节的目的是得到较小的双色边图 $\mathbb{H}$，使得只要自反完全双色边图 $\mathbb{H}'$ 包含 $\mathbb{H}$ 作为（不必是导出的）子结构，则 $\mathbb{H}$ pp- 构造 $\mathbb{K}_3$。

遗传困难有向图 由 Bang-Jensen、Hell 和 MacGillivray 在 [4] 中进行了研究。有向图 $\mathbb{D}$ 是遗传困难的，如果约束满足问题$(\mathbb{D})$是 NP 完全的，并且只要 $\mathbb{H}$ 是满足 $\mathbb{D}\to\mathbb{H}$ 的无环有向图，约束满足问题$(\mathbb{H})$ 也是 NP 完全的。特别地，奇长度无向环是遗传困难的。

要使遗传困难性成为一个有意义的定义，必须假设 P ≠NP。本文不采用复杂性理论假设，因此考虑以下变体。若有向图 $\mathbb{D}$遗传地 *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$，则 $\mathbb{D}$ pp-构造 $\mathbb{K}_3$；并且对于任何满足 $\mathbb{D}\to\mathbb{H}$ 的无环有向图 $\mathbb{H}$，都有 $\mathbb{H}$ pp-构造 $\mathbb{K}_3$。以下定理直接推论自光滑有向图的二分性 [7]。

定理 20。 对于每个光滑有向图 $\mathbb{D}$，以下陈述之一成立：

- 要么 $\mathbb{D} \to \vec{\mathbb{C}}_n$（长度为 n 的有向环），其中 n 为某个正整数，并且在这种情况下 $\mathbb{D}$ 并不遗传地 *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$；
- 否则， $\mathbb{D}$ 遗传地 *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$。

在此我们考虑双色边图的一个类似概念。我们称一个双色边图 $\mathbb{H}$遗传地 *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$，如果 $\mathbb{H}$ pp-构造 $\mathbb{K}_3$，并且每当 $\mathbb{H} \to \mathbb{H}'$ 且 $\mathbb{H}'$不包含 $*$-自环时， $\mathbb{H}'$ pp-构造 $\mathbb{K}_3$。例如，假设 $\mathbb{H}$包含一个 $*$-奇圈，即一列顶点h_1，.....，h_{2n+1}，使得对每个 $i \in [2n]$都有 $h_1h_{2n+1} \in R \cap B$且 $h_ih_{i+1} \in R \cap B$。在任何这种情况下，如果 $\mathbb{H}$是无环的，则 $\mathbb{H}$ 遗传地 pp-构造 $\mathbb{K}_3$：事实上，如果 $\mathbb{H} \to \mathbb{H}'$ 且 $\mathbb{H}'$ 没有 $*$-环，则公式$\delta_E(x,\ y) := R(x,\ y) \wedge B(x,\ y)$ pp-定义一个无环非二分图，并且任何无环非二分图都 pp-构造 $\mathbb{K}_3$。

观察21。 设 $\mathbb{H}$是一个没有 $*$自环的2边着色图。如果 $\mathbb{G}$ 中存在一个红色奇圈（分别为蓝色奇圈） $v_1, \ldots,$ v_{2n+1}，使得对于每个 $i \in [2n+1]$，都有 $v_iv_i \in B$（分别为 $v_iv_i \in R$），那么 $\mathbb{H}$ 遗传地 *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$。

证明。 假设 $\mathbb{H} \to \mathbb{H}'$，且 $\mathbb{H}'$ 没有 $*$自环。根据关于 $\mathbb{H}$ 的假设，无向图（H', E）是一个非二分图，其中 E是满足 pp-公式 $B(x,x) \wedge B(y,y) \wedge R(x,y)$的数对（$x, y$）的集合。因此， $\mathbb{H}'$ pp-构造了一个无环非二分图，从而 pp-构造 $\mathbb{K}_3$。

□

现在我们考虑由 Siggers 恒等式定义在顶点四元组上的等价关系 $\sim_S$，即包含 $\sim'$ 的最小等价关系，其中

$$(x,y,z,w) \sim' (x',y',z',w') := (x,y,z,w) = (a,r,e,a) \text{ and } (x',y',z',w') = (r,a,r,e).$$

给定一个双色边图 $\mathbb{H}$，我们将 $\mathbb{H}$ 的商图 $\mathbb{H}^4/\sim_S$ 定义为其 ***Siggers*** 幂 Sig($\mathbb{H}$)，即将 $\mathbb{H}$ 的四次幂按 Siggers 恒等式所定义的等价关系取商。因此，Siggers 多态是一个同态 f: Sig($\mathbb{H}$) $\to \mathbb{H}$。

引理 22. 如果 $\mathbb{H}$ 没有 $*$-自环，且$\mathrm{Sig}(\mathbb{H})$ 包含一个 $*$-自环或一个 $*$-奇圈，那么 $\mathbb{H}$ 遗传地 *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$。

证明. 设 g: $\mathbb{H} \to \mathbb{H}'$。为导出矛盾，假设 $\mathbb{H}'$ 不包含 $*$-自环，且 $\mathbb{H}'$ 不 pp-构造 $\mathbb{K}_3$。由定理 6 可知， $\mathbb{H}'$ 有一个 Siggers 多态，即同态 f: Sig($\mathbb{H}'$) $\to \mathbb{H}'$。由于 $\mathbb{H} \to \mathbb{H}'$，Sig($\mathbb{H}$) $\to$ Sig($\mathbb{H}'$) 也成立（逐分量应用 g 所得映射 g': Sig($\mathbb{H}$) $\to$ Sig($\mathbb{H}'$) 是一个同态）。这意味着 $\mathbb{H}'$ 要么包含一个 $*$-自环，要么包含一个 $*$-奇圈；又由于 $\mathbb{H}'$ 没有 $*$-自环，我们得出 $\mathbb{H}'$通过 $E(x,y) := R(x,y) \wedge B(x,y)$ pp-定义了一个无环非二分图。这意味着 $\mathbb{H}'$ pp-构造$\mathbb{K}_3$，与我们的假设矛盾。

□

类似地，对于正整数 $p \geq 2$，我们定义等价关系 $\sim_p$ 为包含 $\sim'_p$ 的最小等价关系，其中

$$(x_1,\ldots,x_p) \sim'_p (y_1,\ldots,y_p) \Leftrightarrow x_2 = y_1, \ldots x_p = y_{p-1} \text{ and } x_1 = y_p.$$

给定一个双色边图 $\mathbb{H}$，我们将 p-循环幂 Cyc^p($\mathbb{H}$) 定义为 $\mathbb{H}$ 的商图 $\mathbb{H}^p/\sim_p$。通过与上述类似的论证，可以证明以下引理。

引理 23. 若 $\mathbb{H}$ 没有 $*$-自环，且 $\mathrm{Cyc}^p(\mathbb{H})$ 包含一个 $*$-自环或某个素数 $p > |H|$ 对应的 $*$-奇圈，则 $\mathbb{H}$ 是一个遗传困难的双色边图。

我们应用引理 22 来证明，图3中的双色边自反图（及其对偶图）可遗传地 pp-构造 $\mathbb{K}_3$。

引理 24。 若 $\mathbb{H}$ 是图*3*中的一个2-边染色图，则 $\mathbb{H}$ 及其对偶图 $\mathbb{H}$ 可遗传地进行 *pp*-构造$\mathbb{K}_3$。

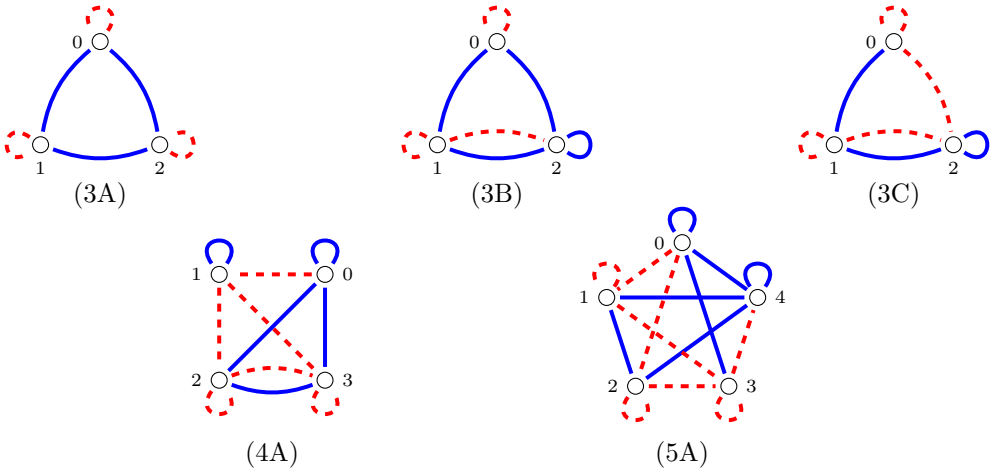
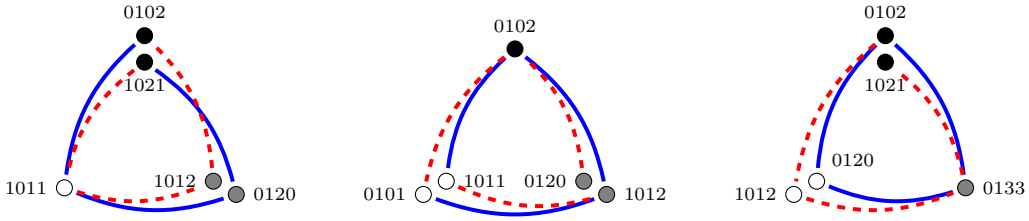


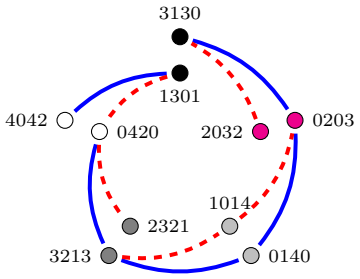
图3：一些极小的遗传困难自反完全双色边图 .

证明。 我们证明图3中 $\mathbb{H}$ 的情形；其对偶图的情形可通过对称论证得出。$\mathbb{H}$ 为 3A 的情形已由观察21涵盖。对于其余情形，我们证明 Sig($\mathbb{H}$) 包含一个 $*$-三角形，因此由引理 22 可得结论。现在，我们分别为 $\mathbb{H} \in \{3B, 3C, 4A\}$ 展示 Sig($\mathbb{H}$) 中的一个 $*$-三角形：序列 $abcd$ 表示元组 (a, b, c, d)，边表示 $\mathbb{H}^4$ 中的边，而 $\sim_S$-等价类则由顶点颜色类（黑、白和灰）表示。



Sig(3B) 中的 $*$-三角形　　Sig(3C) 中的 $*$-三角形　　Sig(4A) 中的 $*$-三角形

按照前面的图示中相同的约定，我们描绘了 Sig(5A) 中长度为五的 $*$-圈。



Sig(5A) 的5元素子图

□

该引理的一个简单结构性推论是：只要双色边图 $\mathbb{H}$ 包含图4中的任意一个图，它就能 pp-构造 $\mathbb{K}_3$。事实上，无论这些路径中连接端点的边属于哪种边类型，我们都能在 $\mathbb{H}$中找到图 3B、3C 或它们的任意一个对偶图作为子图。

推论25。 设 $\mathbb{H}$ 是一个没有 $*$ 自环的自反完全2双色边图。如果 $\mathbb{H}$ 不 *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$，那么 $\mathbb{H}$ 不包含图*4*中的任一图作为子图。

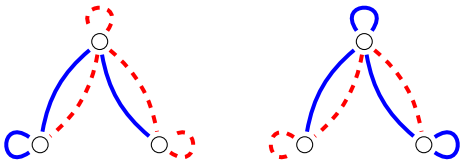


图4：两个各有三个顶点的路径；若自反完全双色边图 $\mathbb{H}$ 包含其中任意一个作为子图，则 $\mathbb{H}$ pp-构造 $\mathbb{K}_3$。

受限的遗传 pp-构造

利用上述结果，我们证明图5中的三元素双色边图在自反双色边图类中遗传地 pp-构造 $\mathbb{K}_3$ 。也就是说，如果 $\mathbb{G}$ 是一个没有 $*$ 自环且满足 $\mathbb{H}_3 \to \mathbb{G}$ 的自反双色边图，那么 $\mathbb{G}$ pp-构造 $\mathbb{K}_3$。

我们采用的技术与上述类似。我们通过反证法进行论证，并注意到，如果 $\mathbb{H}_3 \to \mathbb{G}$ 和 $\mathbb{G}$具有 Siggers 多态，那么 Sig($\mathbb{H}_3$) $\to \mathbb{G}$。接着，我们利用 $\mathbb{G}$ 是自反图这一事实，观察到这意味着存在图 $\mathbb{H}$（取自图3或其对偶图之一），它遗传地 pp-构造$\mathbb{K}_3$，且满足 $\mathbb{H} \to \mathbb{G}$。由此即可证明我们的结论。

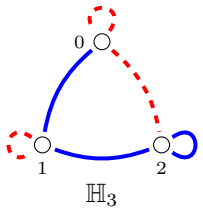
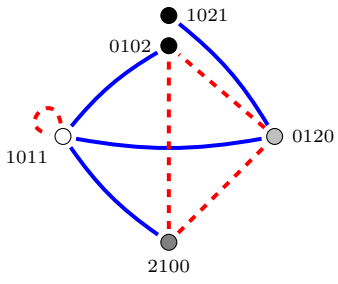


图5：一个有三个顶点的双色边图 $\mathbb{H}_3$ ，它对于自反双色边图这一类是遗传困难的。

引理26. 设 $\mathbb{G}$ 是一个没有 $*$环的自反2-边着色图。若 $\mathbb{H}_3 \to \mathbb{G}$，则 $\mathbb{G}$ *pp*-构造$\mathbb{K}_3$。

证明。 我们证明，若 $\mathbb{G}$ 存在 Siggers 多态，则图3中存在一个结构 $\mathbb{H}$ ，使得 $\mathbb{H} \to \mathbb{G}$，因此该结论由引理 24 得出。由于 $\mathbb{H}_3 \to \mathbb{G}$，若 Sig($\mathbb{G}$) $\to \mathbb{G}$，则 Sig($\mathbb{H}_3$) $\to \mathbb{G}$。我们考察 Sig($\mathbb{H}_3$) 中诱导出的以下 4 元结构，其中边表示 $(\mathbb{H}_3)^4$, 中的边，颜色类表示 $\sim_S$-等价类。为简化记号，我们用 $abcd$ 代替 $(a,\ b,\ c,\ d)$。



Sig($\mathbb{H}_3$) 的 4 元子图

设 f: Sig($\mathbb{H}_3$) $\to \mathbb{G}$ 是一个同态。为简化记号，我们用 $f(abcd)$ 表示 $(a,\ b,\ c,\ d)$ 的等价类在映射下的像，记作 $f(abcd) := f([(a,\ b,\ c,\ d)]_{\sim_S})$。由于 $\mathbb{G}$是自反的，f(1021)、 f(2100) 和 f(0120) 均与某个自环关联；下面我们根据这些自环的颜色进行分类讨论。

- 如果 f(0102) 和 f(0120) 与红色自环关联，则 3A$\to \mathbb{G}$;

- 如果 f(0102) 和 f(0120) 与不同颜色的环关联，则 3C$\to \mathbb{G}$;
- 若 f(0102) 与 f(0120) 关联蓝色自环，且 f(2100) 亦如此，则 3A $\to \mathbb{G}$;
- 若 f(0102) 与 f(0120) 关联蓝色自环，且 f(2100) 关联红色自环，则 4A $\to \mathbb{G}$。

显然，这些情形涵盖了所有可能情形。因此，我们借助引理 24 得出：若 $\mathbb{G}$ 不包含 $*$-自环，则 $\mathbb{G}$ pp-构造 $\mathbb{K}_3$。 □

推论27. 设 $\mathbb{H}$ 为自反的完全 2-边着色图，且 $\mathbb{C}$为(H_R, B) 的连通分量（相应地，为 (H_B, R)的连通分量）。若 $\mathbb{H}$ 不 *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$，则每个蓝色顶点 $v \in H_B$ （相应地，红色顶点$b \in H_R$）以相同的边类型与每个 $c \in C$ 连通（要么为红色，要么为蓝色，但不能两者皆是）。

证明。 只需证明，对于连接红色顶点的 $\mathbb{H}$ 中的每条蓝边 uv ，每个蓝色顶点 b 与 u 和 v 之间要么由蓝边连接，要么由红边连接，但不能两者兼有。首先，如果 b 通过一条 $*$边与 u 或 v 相连，那么存在从 3C 或 3D 到 $\mathbb{H}$ 的同态，这表明 $\mathbb{H}$ pp-构造 $\mathbb{K}_3$（引理 24）。如果 b 通过不同类型的边分别与 u 和 v 相连，那么我们可以找到从 $\mathbb{H}_3$ （图5）到 $\mathbb{H}$的同态，并由此得出 $\mathbb{H}$ pp-构造 $\mathbb{K}_3$ （引理26）。 □

6 交替分量

本节首先介绍自反完全双色边图 $\mathbb{H}$的交替有向图*Alt()* ，并利用该有向图介绍 $\mathbb{H}$的交替分量。随后，我们利用第5节的结果，给出一系列结构性质 Π ； 如果 $\mathbb{H}$的交替分量 $\mathbb{A}$ 不满足 Π，那么 $\mathbb{H}$ pp-构造 $\mathbb{K}_3$。

Alt($\mathbb{H}$) 的顶点集为 H；若 $xx \in B(\mathbb{H})$ 且 $xy \in R(\mathbb{H})$，或 $xx \in R(\mathbb{H})$ 且 $xy \in B(\mathbb{H})$，则存在一条弧 (x, y)。等价地，Alt($\mathbb{H}$) 的弧集由以下量词无关正公式定义：

$$\alpha(x, y) := (B(x, x) \wedge R(x, y)) \vee (R(x, x) \wedge B(x, y)). \tag{2}$$

我们进一步将 Alt($\mathbb{H}$) 视为一个顶点着色有向图，其中若 $h \in H_B$，则顶点 h 着蓝色；若 $h \in H_R$，则着红色。也就是说，若 h 在 $\mathbb{H}$ 中关联一条蓝色（分别为红色）自环，则其着蓝色（分别为红色）。特别地，若弧 (u, v) 中的 u 和 v 具有相同的顶点颜色，则称其为单色弧。

注 2. 若 $\mathbb{H}$ 是自反完全双色边图，则对于一个蓝色顶点 b 和一个红色顶点 r ，(b, r) 或 (r, b) 至少有一个是 Alt($\mathbb{H}$) 中的弧；当且仅当 rb 是 $\mathbb{H}$ 中的一条 $*$ 边时，两者都是弧。此外，对于 $\mathbb{H}$ 的任意子结构 $\mathbb{H}'$ ，有向图 Alt($\mathbb{H}'$) 同构于 Alt($\mathbb{H}$) 中由顶点集 H' 诱导的子有向图。

顶点 h 在 $\mathbb{H}$ 中的交替分量 是 h 在 Alt($\mathbb{H}$)中的强连通分量，也就是说，它是包含 h 的极大子集 $H' \subseteq H$ ，且对于其中任意一对顶点 u， $v \in \mathbb{H}$ ，在 Alt($\mathbb{H}$)中都存在一条从 u 到 v 以及一条从 v 到 u 的有向路径。特别地，每条 $*$-边都包含在 $\mathbb{H}$的某个交替分量中。

观察 28。 设 $\mathbb{H}$ 是一个自反完全的2-边染色图，且 $\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{H}$的一个交替分量。若 f： $\mathbb{A} \to \mathbb{A}$ 是 $\mathbb{A}$的一个自同态，则以下映射是 $\mathbb{H}$的一个自同态

$$g(h) = \begin{cases} f(h) & \text{if } h \in A, \\ h & \text{otherwise.} \end{cases}$$

观察 29。 设 $\mathbb{H}$ 是一个自反完全的2-边染色图，且 $\mathbb{A}$是 $\mathbb{H}$的一个交替分量。若 f： $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 是 $\mathbb{H}$的一个自同构，则 $f[\mathbb{A}]$ 是 $\mathbb{H}$的一个交替分量。

回顾一下，有向图 $\mathbb{D}$ 的强连通分量的拓扑排序 $\mathbb{D}_1 \leq \cdots \leq \mathbb{D}_k$是一种线性序，使得每当存在一条从 $u \in \mathbb{D}_i$ 到 $v \in \mathbb{D}_j$ 的弧时，就有 $i \leq j$。当我们讨论双色边图 $\mathbb{H}$ 的交替分量的拓扑排序时，指的是 Alt($\mathbb{H}$) 的强连通分量的拓扑排序。根据

Alt($\mathbb{H}$) 的弧集的定义，很容易得出：如果 $\mathbb{A}_1 \leq \cdots \leq \mathbb{A}_k$ 是 $\mathbb{H}$的交替分量的拓扑排序，那么 A_k 就是 $\mathbb{H}$ 中的齐性集。通过归纳应用这一论证，我们得到以下观察，它将第3.1节中的齐性拼接概念与交替分量联系起来。

观察30. 设 $\mathbb{H}$ 为一个自反的完全 2-双色边图。若 $\mathbb{A}_1 \leq \cdots \leq \mathbb{A}_k$ 是 $\mathbb{H}$ 的交替分量的拓扑排序，则 $\mathbb{H} = \mathbb{A}_1 \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_k$。

在本节的其余部分，我们研究不能 pp-构造 $\mathbb{K}_3$ 的双色边图的交替分量的结构。我们从以下断言开始，其中 A_B 与 A_R 分别表示某个顶点集 A 中蓝色顶点与红色顶点的集合。

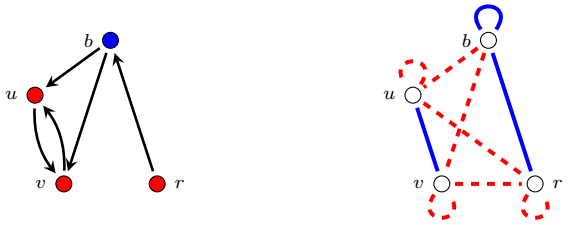
引理 31. 设 $\mathbb{H}$ 为一个自反的完全 2-双色边图，并设 $\mathbb{A}$为$\mathbb{H}$的一个交替分量。若 $\mathbb{H}$不能 *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$，则下列情形之一成立

- $A = A_R$，且 (A, B) 是 (H_R, B) 的一个二部连通分量，
- $A = A_B$，且 (A, R) 是 (H_B, R) 的一个二部连通分量，或者
- A_R 诱导出一个不含蓝边的自反红团，而 A_B 诱导出一个不含红边的自反蓝团。

证明。 假设 $A = A_R$，并注意，在这种情况下，对于 $a, b \in A$，存在弧 (a, b) 当且仅当在 $\mathbb{H}$ 中有一条连接 a 和 b 的蓝边。因此，(A, B) 是 (H_R, B) 的一个连通分量。由观察 21 可知，它是二部的，因为 $\mathbb{H}$ 不会 pp-构造 $\mathbb{K}_3$。根据对称论证， $A = A_B$ 的情形也成立。

为了证明列出的三个情形中恰有一个成立，我们将论证：如果第三种情形不成立，那么前两种情形之一必定成立。利用颜色对称性，只需证明：若 $\mathbb{A}$ 包含一对顶点 u 和 v，使得 $uv \in B(\mathbb{A})$，且 $uu, vv \in R(\mathbb{A})$，那么 $A = A_R$。令 $\mathbb{C}$ 为 (H_R, B) 中 u 和 v 所在的连通分量。显然， $C \subseteq A$；结合推论27以及 Alt($\mathbb{H}$) 的定义可知，对于每个蓝色顶点 b，要么对所有 $c \in C$，(b, c) 都是一条弧，要么对所有 $c \in C$，(c, b) 都是一条弧，但两者不能同时成立。根据 C 的定义还可知，如果 r 是一个不属于 C 的红色顶点，那么在 Alt($\mathbb{H}$) 中不存在一条弧将 r 连接到某个 $c \in C$。特别地，如果某个红色顶点 $r \in H_R \setminus C$ 到达 u，那么该路径必须是长度至少为 2 的有向路径。现在我们证明，如果 r 到达 u，那么 r 就能通过一条长度恰为 2 的有向路径到达 u。我们还证明， u 在 H_B 中的每个出邻点都是 r 的出邻点，而 r 在 H_B 中的每个入邻点都是 u 的入邻点。

为此，我们首先证明：当存在一条从 r 到 u 的长度为 2 的有向路径时， $b' \in H_B$ 的每个出邻点都是 r 的出邻点。由此可得到 Alt($\mathbb{H}$)（左侧）和 $\mathbb{H}$（右侧）中的以下结构；其中 u、 v 和 r 已在前文引入，而 b 是一个顶点，它证明在 Alt($\mathbb{H}$) 中存在一条从 r 到 u （以及到 v）的长度为 2 的有向路径。



假设存在一个顶点 $b' \in H_B$，使得 b' 通过一条蓝边与 u 连通（因此也与v连通），而 b' 通过一条红边与 r 连通。考虑以下两种可能的情况：要么 bb' 是一条红边，要么 bb' 是一条蓝边。在前一种情况下，存在一个从 $\mathbb{H}_3$ （见图5）到由 b'、b 和 r诱导的子结构的同态。在后一种情况下，存在一个从 5A（见图3）到由 $\{u, v, r, b, b'\}$诱导的子结构的同态。根据引理24和26，这两种情况中的任意一种都意味着 $\mathbb{H}$ pp-构造 $\mathbb{K}_3$，这与我们的假设矛盾。因此，每个通过蓝边与 u 连通的蓝色顶点 b' 也都通过蓝边与 r 连通；若 b' 通过红边与 r 连通，那么它也通过红边与 u 连通。转换回 Alt($\mathbb{H}$) 后，这意味着 Alt($\mathbb{H}$) 中 u的蓝色出邻点

是 r的出邻点，并且 r 的每个入邻点 $b' \in H_B$ 都是 u的入邻点。根据后一事实可知，若存在一条从某个红色顶点 r' 到 u （等价地，到某个 $c \in C$）的有向路径，那么就存在一条长度为二的有向路径。确实，设 $r' = r_1$、b_1、 ...、r_{k-1}、b_{k-1}、$r_k = u$ 是从r' 到 u 的一条最短路径——我们假设这条路径在蓝色顶点和红色顶点之间交替，因为否则就能找到一个从 $\mathbb{H}_3$ 或从 $\mathbb{H}_3$ 到 $\mathbb{H}$ 的同态，这与引理26以及 $\mathbb{H}_3$ 不会 pp-构造 $\mathbb{K}_3$的假设矛盾。根据前面的论证可知， r_{k-1} 的每个入邻点都是 u的入邻点，因此，若 $k > 2$, 我们就能找到一条更短的路径 r'、b_1、 ...、r_{k-2}、b_{k-2}、u，这与从 r'到 u的路径选择矛盾。

最后，为了证明 u 的交替分量 $\mathbb{A}$ 等于 $\mathbb{C}$ ，我们区分以下情形，而其中每一种都将导致矛盾。

- 假设存在另一个红色顶点 $r \in A \setminus C$。我们可以选择 $r \in A \setminus C$ ，使得存在一条长度为2的有向ub-路径 ubr ，其中 $b \in H_B$。由上述论证，由于 r 也能到达 u， r的每个蓝色入邻点都是 u的入邻点。因此，(u， b)和(b， u)都是Alt($\mathbb{H}$)的弧，这与注释2矛盾，因为(u， v)是Alt($\mathbb{H}$)的一条单色弧。

- $A_R = C$，在这种情况下，根据注释2，所有蓝色顶点都通过一条出弧或一条入弧与每个 $c \in C$ 连通，但不能两者兼有。因此，Alt($\mathbb{H}$)中必定存在一条弧，将 C 的蓝色出邻点与 C的蓝色入邻点连接起来。这就产生了一条连接蓝色顶点的单色弧，从而与注释2矛盾。

□

命题 32. 设 $\mathbb{H}$ 是一个自反完全的2边着色图，且是一个核； $\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{H}$ 的一个交替分量。若 $\mathbb{H}$ 不 *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$，且 $\mathbb{A}$ 含有一条 $*$边，则 $|A| = 2$。

证明。 利用引理 31 和观察 28。 □

6.1 单色分量

如果交替分量 $\mathbb{A}$ 中的所有顶点都关联着颜色相同的自环，我们就称 $\mathbb{A}$ 为单色的。本小节将证明：如果 $\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{H}$ 的一个单色交替分量，且 $\mathbb{H}$ 是一个不能 pp- 构造 $\mathbb{K}_3$ 的核，那么 $\mathbb{A}$ 至多有两个顶点。

引理 33. 设 $\mathbb{H}$ 是一个自反完全的2边着色图，且是一个核；设 $\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{H}$ 的一个单色交替分量。若 $\mathbb{H}$ 不能 *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$，则($\mathbb{H}$、h_1、...、h_n) *pp*-定义集合 A。

证明。 对于蓝色连通分量和红色连通分量，均可通过对称论证证明该结论。我们证明蓝色连通分量 $\mathbb{A}$ 的情形，并注意到，如果对于某个 $i \in [n]$ 有 $A = \{h_i\}$ ，那么 $x = h_i$ pp-定义 A。此外，如果 $\mathbb{A}$ 是唯一蓝色交替连通分支，那么 B(x， x) pp-定义 A。因此，我们假设 $|A| \geq 2$，并且 $\mathbb{A}$ 不是 $\mathbb{H}$ 的唯一蓝色交替连通分支。

不失一般性，假设顶点 h_1、.....、h_k 是蓝色顶点，顶点h_{k+1}、.....、h_n 是红色顶点。根据推论27，我们假设对于每个红色顶点 h_j，都有一种唯一的边类型将 h_j 与 $\mathbb{A}$ 中的每个顶点相连。我们用 $E_j \in \{R, B\}$ 表示将 h_j 与（已固定的分量） $\mathbb{A}$ 中的顶点相连的唯一边类型。由于 $|A| > 2$ ， A 中的每个顶点都关联着一条红边。我们声称 A 可由公式 pp-定义

$$\delta(x) := B(x,x) \wedge (\exists y.\, R(x,y) \wedge B(y,y)) \wedge \bigwedge_{i \leq k} B(x, b_i) \wedge \bigwedge_{k \leq j \leq n} E_j(x, h_j).$$

由所有当前假设可知，对于每个 $c \in A$， $\mathbb{H} \models \delta(a)$。现在我们看到，如果 $\mathbb{H} \models \delta(h)$，那么 $h \in A$。显然， h 属于至少含两个顶点的蓝色连通分支（前两个合取项保证了这一点）。还要注意，如果 $\mathbb{C}$ 是一个至少含两个顶点且没有 $*$-边的蓝色连通分量，那么对于每个 $u \in C$ ，都存在某个 $i \leq k$ ，使得 $h_i \in C$ ，并且 $uh_i \in R$ 和 $uh_i \notin B$ （只需选择 h_i 为 $\mathbb{C}$ 中一个通过红边与 u 相连的顶点）。因此， h 属于 $\mathbb{A}$ ，或者属于一个至少含两个顶点且包含一条 $*$-边的蓝色连通分量 $\mathbb{C}$ 。为完成证明，我们证明存在某个红色顶点 h_j ，使得连接 h_j 与 $\mathbb{C}$ 的边的颜色不同于

连接 h_j 与 $\mathbb{A}$的边的颜色。首先，由推论27（第二项）可知， $\mathbb{C}$ 是一条 $*$-边，其顶点关联着蓝色自环。由于 (A, R) 是二部的，存在一个同态 $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{C}$；又由于 $\mathbb{H}$ 是一个核，在 $H \setminus A$ 上作用为恒等映射的 f 的扩张 f 不是自同态。由于每个顶点 $c \in A \cup C$ 在 $H_B \setminus (A \cup C)$ 中仅通过蓝色边与所有蓝色顶点相连，因此必定存在某个红色顶点 r_j，满足 $k \leq j \leq n$，使得 r_j 与 A 中的顶点相连的边类型不同于将 v 与 C 中的顶点相连的边类型（否则， $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 是一个非满同态）。这表明，如果 $c \in C$，那么 $\mathbb{H} \not\models E_j(c, h_j)$，因此 $\mathbb{H} \not\models \delta(c)$。综上可知，如果 $\mathbb{H} \models \delta(h)$，那么 $h \in A$，从而 $(\mathbb{H}, h_1, \ldots, h_n)$ pp-定义交替集 A。

□

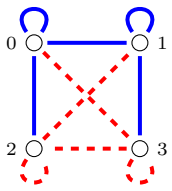
推论 34. 设 $\mathbb{H}$ 是一个自反的完全 2 边着色图，且它是一个核； $\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{H}$ 的一个单色交替分量。如果 $\mathbb{H}$ 不 *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$，那么 $|A| \leq 2$。

证明. 当 $\mathbb{A}$ 包含一条 $*$-边时，由推论27可得结论，因此我们假设 $\mathbb{A}$ 不包含 $*$-边。由于 $\mathbb{H}$ 是一个核，它 pp-构造 $(\mathbb{H}, h_1, \ldots\ldots, h_n)$。因此，由引理 33， $\mathbb{H}$ pp-构造 $\mathbb{A}$。不失一般性，假设 $\mathbb{A}$ 中的所有顶点都关联一条红色自环。由于 $\mathbb{H}$ 不 pp-构造 $\mathbb{K}_3$， $\mathbb{A}$ 也不能 pp-构造 $\mathbb{K}_3$，因此由命题 19 可知， $\mathbb{A}$ 存在到 $(\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2)^*$ 的满同态。由于 $\mathbb{A}$ 是一个单色交替分量，(A, R) 是连通的，因此 $\mathbb{A}$ 必须存在到 $\mathbb{K}_2^*$ 的满同态。最后，由于 $\mathbb{H}$ 是一个核，且 $\mathbb{A}$ 的每个自同态都可扩展为 $\mathbb{H}$ 的一个自同态（推论27），我们得出结论： $\mathbb{A}$ 同构于 $\mathbb{K}_1^*$ 或 $\mathbb{K}_2^*$。

□

6.2 双色分量

本小节的目标是证明：如果 $\mathbb{H}$ 是一个不能 pp-构造 $\mathbb{K}_3$的核，且 $\mathbb{A}$是 $\mathbb{H}$的交替双色分量，那么 $\mathbb{A}$ 要么是连接一个蓝色顶点和一个红色顶点的 $*$-边，要么就是图 6 所示的结构。



(4Alt)

图 6：一种双色交替分量。

观察 35。 设 $\mathbb{H}$ 是一个作为核的自反完全2-边着色图，且 $\mathbb{A}$是 $\mathbb{H}$ 的一个不含 $*$-边的交替双色分量。如果 $|A_B| = 2$ 或 $|A_R| = 2$，那么 $\mathbb{A}$ 同构于 *4Alt*（图 *6*），或者 $\mathbb{H}$ *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$。

证明。 假设 $\mathbb{H}$不能 pp-构造 $\mathbb{K}_3$。由于 $\mathbb{A}$ 是一个双色分量， A_B中的顶点之间没有红边相连，且 A_R 中的顶点之间没有蓝边相连（引理 31）。因此，如果 $A_R = \{u, v\}$，那么每个顶点 $a \in A_B$ 都通过蓝边与 A_R 中的一个顶点相连，并通过红边与 A_R 中的一个顶点相连（否则， a 将是 Alt($\mathbb{A}$)中的汇点或源点，这与 Alt($\mathbb{A}$)为强连通的假设矛盾）。由于 $\mathbb{A}$ 没有 $*$-边，我们可以将 A_B 划分为 $A_B^1 :=\{a \in A_B :\ au \in B(\mathbb{H})$ $av \in R(\mathbb{H})$，以及 $A_B^2 :=\{a \in A_B :\ au \in R(\mathbb{H})$ $av \in B(\mathbb{H})$。因此，将 A_B^1 和 A_B^2 分别收缩为一个顶点后，得到 $\mathbb{A}$的一个自同态。由于 $\mathbb{A}$ 的每个自同态都可以扩展为 $\mathbb{H}$ 的一个自同态（观察 28），且 $\mathbb{H}$ 是一个核，因此必有 $|A_B^1| = 1$， $|A_R^1| = 1$，从而 $\mathbb{A}$ 同构于图 6 中的 4Alt。

□

引理 36. 设 $\mathbb{H}$ 是一个自反的完全双色边着色图，且为核； $\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{H}$ 的一个双色交替分量。若 $\mathbb{H}$ 不 *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$，则 $(\mathbb{H}, h_1, \ldots, h_n)$ *pp*-定义一对集合 S_B 和 S_R，使得，

- $A_B \subseteq S_B$ 和 $A_R \subseteq S_B$，并且
- 没有顶点 $s \in S_B$（分别是 $s \in S_R$）关联到一条 $*$-边 sv，其中 $v \in H_R$（分别是 $v \in H_B$）。

证明。我们证明这样的集合 S_B 存在，而 S_R 的存在性可通过对称论证得到。令 $r_1, \dots, r_k$ 为 $H_R \setminus A_R$中顶点的一个枚举。我们首先注意到，对于每个 $i \in [k]$，恰有一种边类型 E_i（蓝色或红色，但不能两者兼有）连接 r_i 与 A_B中的任意顶点。反设存在顶点 $a, b \in A_B$，使得 $r_i a \in B$（$\mathbb{H}$）且 $r_i b \in R$（$\mathbb{H}$）。因此，Alt($\mathbb{H}$)中存在弧 (b, r_i) 和 (r_i, a)；由于 a 和 b 属于 Alt($\mathbb{H}$)中的同一个强连通分量，r_i 也属于该分量，这与 $r_i \in H_R \setminus A_R$的选取相矛盾。我们断言，由以下公式 pp-定义的子集 S_B满足此引理的结论

$$\sigma(x) := B(x,x) \wedge \bigwedge_{i \in [k]} E_i(r_i, x).$$

根据上述论证可知，每个顶点 $a \in A_B$ 都满足 $\sigma(x)$，且位于 $\mathbb{H}$中。现在证明，若对于某个 $h \in H_B$，有$\mathbb{H} \models \sigma(h)$，则不存在 $h' \in H_R$ 使得 hh' 是一条 $*$-边。考虑映射f：$A \to \{h, h'\}$，其定义为：若 $a \in A_B$，则 $f(a) = h$；若 $a \in A_R$，则 $f(a) = h'$。由于 $\mathbb{H}$不能 pp-构造 $\mathbb{K}_3$，根据引理 31， A_R和 A_B会诱导出单色自反团，因此 f：$\mathbb{A} \to \mathbb{H}[\{h, h'\}]$是一个同态。由于 $\mathbb{H}$ 是一个核，推论25保证 $\mathbb{H}[\{h, h'\}]$ 是 $\mathbb{H}$的一个交替分量。现在，运用与前面类似的论证，例如交替分量和 σ的定义，可以看出，通过将 f'定义为在 $H \setminus A$上取恒等映射、在 A上取 $f' = f$，f可扩展为 $\mathbb{H}$的一个自同态。这与 $\mathbb{H}$是一个核的假设矛盾，因此结论成立。

□

回顾一下，有向图 $\mathbb{D}$ 是光滑的，当且仅当每个顶点的入度和出度都为正。此外，$\mathbb{D}$ 是半完全有向图，当且仅当对于每对顶点 u，$v \in D$，至少存在一条弧 (u, v) 或 (v, u)，且这条弧属于 $\mathbb{D}$。

引理 37。设 $\mathbb{H}$ 是一个自反完全的2边染色图，且它是一个核；$\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{H}$ 的一个双色交替分量。若 $\mathbb{H}$ 不能 *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$，且 $|A_B| \geq 3$，那么有向图

$$\mathbb{D} := (A_B, \{(x,y) \colon \exists z \in H.\ R(z,z) \wedge B(x,z) \wedge R(y,z)\})$$

是一个半完全光滑有向图，其中至少包含两个有向圈。

证明。由引理 31 可知，A_B 诱导一个自反蓝团。根据交替分量的定义，每个顶点 $a \in A_B$ 仅通过蓝边与每个顶点 $b \in H_B \setminus A_B$ 相连。由于 $\mathbb{H}$ 是核，将顶点 $a \in A_B$ 映射到顶点 $b \in A_B \setminus \{a\}$ 无法扩展为 $\mathbb{H}$ 的自同态。这意味着，对于任意两个不同的顶点 a、$b \in A_B$，存在某个顶点 $c \in H_R$，使得 $ac \in R$($\mathbb{H}$) 且 $bc \in B$($\mathbb{H}$)。因此，$\mathbb{D}$ 是一个半完全有向图。由假设可知 $\mathbb{D}$ 是光滑的，因为$\mathbb{A}$ 是一个交替分量（若 $\mathbb{D}$ 有源点或汇点 v，那么 v 在 Alt($\mathbb{A}$) 中也会是源点或汇点，这意味着 Alt($\mathbb{A}$) 不是强连通的）。不难看出，所有至少有四个顶点的光滑半完全有向图都至少包含两个有向圈。考虑 $|A_B| = 3$ 的情形，并设 v_1、v_2、v_3 是其顶点集的一种枚举。由于 $\mathbb{D}$ 是光滑的，它必定包含一个有向 3-圈，因此不妨设 (v_1, v_2)、(v_2, v_3)、$(v_3, v_1) \in E$($\mathbb{D}$)。根据 $\mathbb{D}$ 的定义，我们可以找到三个顶点 u_1、u_2、$u_3 \in H_R$，使得 v_1u_1、v_2u_2、$v_3u_3 \in B$($\mathbb{H}$) 且 u_1v_2、u_2v_3、$v_3u_1 \in E$($\mathbb{H}$)。现在，若$v_1u_2 \in B$($\mathbb{H}$)，则 $(v_1, v_3) \in E$($\mathbb{D}$)；若 $v_1u_2 \in R$($\mathbb{H}$)，则 $(v_2, v_1) \in \mathbb{D}$。两种情况下，我们都能在 $\mathbb{D}$ 中找到一个有向 2- 圈和一个有向 3- 圈，因此 $\mathbb{D}$ 满足本引理的结论。

□

命题 38. 设 $\mathbb{H}$ 是一个自反的完全2边着色图，且为核；设 $\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{H}$ 的一个交替双色分量。如果 $\mathbb{H}$ 不能 *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$，那么 $\mathbb{A}$ 是一条 $*$ 边，连接 H_B 中的一个顶点与 H_R 中的一个顶点；或者 $\mathbb{A}$ 与 *4Alt* 同构（图 *6*）。

证明。根据观察 35，只需证明：如果 $\mathbb{A}$ 不是一条 $*$-边，那么 $|A_B| = 2$ 或 $|A_R| = 2$成立。我们证明，如果 $|A_B| \geq 3$，那么 $\mathbb{H}$可 pp-构造 $\mathbb{K}_3$；又因为 $\mathbb{H}$是一个核，只需证明 $(\mathbb{H}, h_1, \dots, h_n)$ 可 pp-构造 $\mathbb{K}_3$。设 S_B是 $(\mathbb{H}, h_1, \dots, h_n)$ 中 pp-定义的一个集合，它包含 A_B，且没有顶点 $v \in S_B$属于满足 $w \in H_R$ 的 $*$-边 vw（引理 36）。现在考虑由下式 pp-定义的二元关系 E

$$E(x,y) := \exists z.\ R(z,z) \wedge B(x,z) \wedge R(y,z).$$

我们断言，$(S_B,\ E)$ 是一个无环有向图，其中包含一个不能同态映射到某个有向环的光滑有向图（因此，根据定理 20，我们得出 $(\mathbb{H},\ h_1,\ \dots,\ h_n)$ 可 pp-构造 $\mathbb{K}_3$）。首先，根据假设，没有顶点 $v \in S_B$ 属于一个 $*$-边 vw 其中 $w \in H_R$。为了找到一个不能同态映射到有向环的光滑子有向图，我们首先利用 $A_B \subseteq S_B$ 这一事实，然后通过引理 37 得出结论。 □

6.3 齐性拼接

定理 13 保证，如果 $\mathbb{H}$ 具有由某些齐性拼接构成的特定类型的分解，那么约束满足问题 $\mathbb{H}$ 的列表版本可以在多项式时间内求解。基于本节前面的结果，我们得到以下关于不能 pp-构造 $\mathbb{K}_3$ 的双色边图的分解结果。

命题 39. 设 $\mathbb{H}$ 是一个自反的完全2双色边图。如果 $\mathbb{H}$不能 *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$，那么$\mathbb{H}$ 存在一个分解

$$\mathbb{H} := \mathbb{A}_1 \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_k$$

其中每个 $\mathbb{A}_i$ 都是 $\mathbb{H}$ 的一个交替分量，并且对于每个$i \in [k]$，$\mathbb{A}_i$ 或其对偶 $\mathbb{A}_i$ 是图 7 中的一个结构。

证明。 结合观察30、推论 34 和命题 38。 □

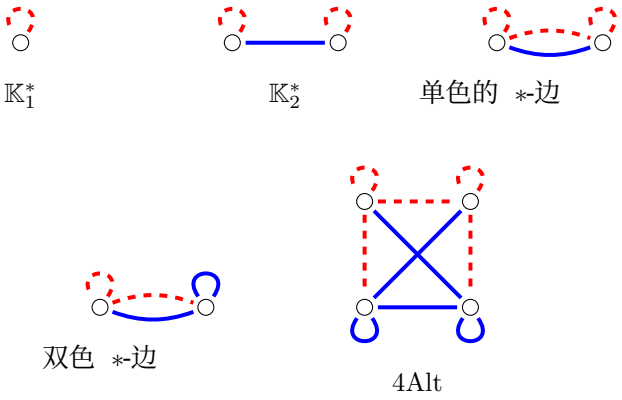


图 7：命题 39 中的可容许构造分量

7 结构分类

本节旨在弥合定理 13 与命题 39 之间的差距。为此，我们将使用以下众所周知的事实（例如，参见 [10, 命题 1.2.11]）。

命题 40. 设 $\mathbb{H}$ 是一个核2-边着色图。若 $O \subseteq H$ 是某个 $h \in H$的轨道，则 O 在 $\mathbb{H}$中是 *pp*-可定义的。

7.1 4Alt 情形

引理 41. 设 $\mathbb{H}$ 是一个自反的完全2-边着色图，且为核。假设 $\mathbb{H}$不能 *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$，并令 $\mathbb{H}:= \mathbb{A}_1 \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_k$如命题 *39* 所述。若对于某个$j \in [k]$，$\mathbb{A}_j$同构于 *4Alt*，则 $\mathbb{H}$*pp*-定义集合 $A_1 \cup \cdots \cup A_j$。

证明。 首先注意，来自 $\mathbb{A}_j$ 的两个蓝色顶点 $A_j \cap H_B$ 在 $\mathbb{H}$ 中属于同一个轨道 O_B，而两个红色顶点 $A_j \cap H_R$ 属于同一个轨道 O_R。我们先证明，如果 $O_R = A_j \cap H_R$ 和 $O_B = A_j \cap H_B$,

那么 $\mathbb{H}$ pp-定义集合 $A_1 \cup \cdots \cup A_j$。利用 O_B 和 O_R 是 pp-可定义的这一事实（命题 40），考虑以下 pp-定义，

$$\delta(x) := \exists y, z.\, (y \in O_B \wedge B(x, y)) \wedge (z \in O_R \wedge R(x, z)).$$

显然，在 $\mathbb{H}$ 中，每个顶点 $a \in A_j$ 都满足 $\delta(x)$。由于 A_j 是 $\mathbb{A}_1 \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_k$ 中的齐性集，因此在 $\mathbb{H}$ 中，每个顶点 $a \in A_1 \cup \ldots A_{j-1}$ 也都满足 $\delta(x)$。现在，假设对于某个 $\ell > j$，有 $a \in A_\ell$。根据 A_ℓ 在 $\mathbb{A}_1 \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_\ell$ 中的齐次性可再次推出：若 $aa \in R(\mathbb{H})$，则对每个 $y \in O_B$，都有 $ya \in R(\mathbb{H})$；若 $aa \in B(\mathbb{H})$，则对每个 $z \in O_R$，都有 $za \in B(\mathbb{H})$。因此，若 $O_R = A_j \cap H_R$ 且 $O_B = A_j \cap H_B$，则 $\mathbb{H}$ pp-定义集合 $A_1 \cup \cdots \cup A_j$。

为完成证明，我们证明 $O_R = H_R \cap A_j$（对称的证明可得 $O_B = H_B \cap A_j$）。反设结论不成立，则存在某个 $r \in O_R \setminus (H_R \cap A_j)$。根据观察 29，我们看到存在某个 $i \neq j$，使得 $\mathbb{A}_j \cong \mathbb{A}_i \cong 4\text{Alt}$ 且 $A_i \cup A_j \subseteq O_R$。考虑有向图 $\mathbb{D} := \big(O_R, \{(x, y) : xz \in B(\mathbb{H})\ yz \in R(\mathbb{H})$ 对某个 $z \in H\}\big)$ 成立。由于 O_R 在 $\mathbb{H}$ 中 pp-可定义，因此 $\mathbb{D}$ 可在 $\mathbb{H}$ 中 pp-构造。我们通过证明 $\mathbb{D}$ pp-构造 $\mathbb{K}_3$ 得出矛盾。为此，首先注意到 $\mathbb{D}$ 是无环有向图：这由交替分量的定义可知，因此没有 $a \in A_j$ 与一条 $*$-边关联，从而没有 $h \in O_R$ 与一条 $*$-边关联。现在我们观察到，$(A_i \cup A_j) \cap O_R$ 在 $\mathbb{D}$ 中诱导出一个完全（对称）图。令 $A_i \cap O_R = \{a_i, b_i\}$ 和 $A_j \cap O_R = \{a_j, b_j\}$。首先，很容易看出 (a_i, b_i) 和 (b_i, a_i) 是 $\mathbb{D}$ 的弧：只需将 $O_B \cap A_i$ 中的顶点用作 z 的见证。类似地，我们看到 (a_j, b_j) 和 (b_j, a_j) 是 $\mathbb{D}$ 的弧。其次，由于 $a_i b_i \in B(\mathbb{H})$，且 $a_j b_i \in R(\mathbb{H})$（因为 a_j 和 b_i 属于不同的交替分量），我们看到 (a_i, b_j) 是 $\mathbb{D}$ 的一条弧。用类似的论证可知，对每个 $a \in A_i \cap O_R$ 和 $b \in A_j \cap O_R$，(a, b) 和 (b, a) 都是 $\mathbb{D}$ 的弧。因此，$\mathbb{D}$ 是一个包含 $\mathbb{K}_4$ 的无环有向图，故 $\mathbb{D}$ pp-构造 $\mathbb{K}_3$（例如，参见定理 20），而 $\mathbb{H}$ 也 pp-构造 $\mathbb{K}_3$。 □

在本节余下部分，我们将研究双色边图 $\mathbb{H}$ 的循环幂 $\mathrm{Cyc}^p(\mathbb{H})$（该图在引理 23 之前的段落中介绍）。$\mathrm{Cyc}^p(\mathbb{H})$ 的顶点是 H^p 中等价关系 $\sim_p$ 的等价类。为简化记号，我们将 $\sim_p$ 的一个等价类 X 记作一个词 $x_1 \ldots x_p$，其中（x_1，…，x_p）$\in H^p$ 是 X 的任意代表元。此外，对于正整数 n，我们用 x^n 表示由 x 重复 n 次组成的词。

命题 42。设 $\mathbb{H}$ 是一个自反的完全2双色边图。如果 $\mathbb{H}$ 不 *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$，那么 $\mathbb{H}$ 具有如下分解

$$\mathbb{H} := \mathbb{A}_1 \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_k$$

其中每个 $\mathbb{A}_i$ 都是 $\mathbb{H}$ 的一个交替分量，并且对每个 $i \in [k]$ 都有 $|A_i| \leq 2$。

证明。根据命题 39，$\mathbb{H}$ 具有分解 $\mathbb{H} := \mathbb{A}_1 \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_k$，其中每个 $\mathbb{A}_i$ 都是 $\mathbb{H}$ 的一个交替分量，并且对于每个 $i \in [k]$，$\mathbb{A}_i$ 或其对偶 $\mathbb{A}_i$ 是图 7 中的一个结构。因此，只需证明：如果某个 $\mathbb{A}_i$ 同构于 4Alt，那么 $\mathbb{H}$ pp-构造 $\mathbb{K}_3$；根据引理 41，我们可以假设 k 是满足 $\mathbb{A}_i \cong 4\text{Alt}$ 的第一个指标 i。

注意，如果 $\mathbb{H}$ 不包含 $*$-边，那么 $\mathbb{H}$可 pp-构造 $\mathbb{K}_3$：考虑 pp-可定义二元关系 $E(x, y) := \exists z.\, B(x, z) \wedge R(z, y)$；通过与之前类似的论证，读者可以发现 (H, E) 是一个无环自反有向图，而由 A_k 诱导的子有向图是一个光滑有向图，且不能同态映射到有向环（由定理 20 得出）。

现在我们声称，存在某个 $\ell \in [k-1]$，使得 $\mathbb{A}_\ell$ 是一个大小为 2 的单色分量，并且对于每个 $\ell < j < k$，$\mathbb{A}_j$ 都是一个大小为 1 的单色分量。根据上一段，我们知道对于某个 $i < k$，$\mathbb{A}_i$ 是一条 $*$-边，因此，如果对于某个 $i < k$，没有 $\mathbb{A}_i$ 是双色 $*$-边，那么我们的断言显然成立。于是，假设存在某个 $i \in [k-1]$，使得 $\mathbb{A}_i$ 是一条双色 $*$-边。那么，对于某个 $\ell \in \{i+1, \ldots, k-1\}$，分量 $\mathbb{A}_\ell$ 是单色的且大小为 2，即它是 $\mathbb{K}_2^*$、$\mathbb{K}_2^*$ 或一条单色 $*$-边；否则，所有分量 $\mathbb{A}_{i+1}$、……、$\mathbb{A}_k$ 都会收缩到 $\mathbb{A}_i$，这与 $\mathbb{H}$ 是一个核相矛盾。因此，从现在起，我们固定一个 $\ell \in [k-1]$，使得 $\mathbb{A}_\ell$ 是一个大小为 2 的单色分量，并且对于 $j \in \{\ell+1, \ldots, k-1\}$，每个 $\mathbb{A}_j$ 都只含一个顶点。

将 4Alt 拷贝的顶点标为 0，1，2，3，使得 00，11，01，02，$13 \in B(\mathbb{H})$ 和 22，33，23，12，$03 \in R(\mathbb{H})$（该标号对应图 6）。不失一般性，假设 $\mathbb{A}_\ell$ 是大小为 2 的红色连通分量，即其定义域为 r_ℓ，r'_ℓ，其中 $r_\ell r_\ell$，$r'_\ell r'_\ell \in R(\mathbb{H})$ 和 $r_\ell r'_\ell \in B(\mathbb{H})$（并且可能

$r_\ell r'_\ell \in R(\mathbb{H})$）。对于每个 $j \in \{\ell+1,\dots,k-1\}$，令 b_j（分别）表示 $\mathbb{A}_j$的顶点，当 $b_jb_j \in B(\mathbb{H})$（分别为 $r_jr_j \in R(\mathbb{H})$）时。

用反证法，假设 $\mathbb{H}$ 不能 pp-构造 $\mathbb{K}_3$。因此，根据引理 23，对于每个素数 $p > |H|$，都存在一个同态 $f\colon \mathrm{Cyc}^p(\mathbb{H}) \to \mathbb{H}$。设 $p > |H|$ 是一个素数，使得对于某个正整数 m，$p = 4m+1$。由于 $\mathbb{H}$ 是一个核，我们假设对于每个 $x \in H$，$f(x,\dots,x) = x$。

考虑元素 $a := a_0 = 0^{2m+1}r_\ell^{2m} \in \mathrm{Cyc}^p(\mathbb{H})$、$a_1 = 1^{2m+1}r_\ell'^{2m}$、$a_2 = 2^{2m+1}(r'_\ell)^{2m}$ 和 $a_3 = 3^{2m+1}r_\ell^{2m}$。根据 $\sim_p$ 的定义以及 $\mathbb{H}$ 的结构分解，我们看到 $a_0a_0, a_1a_1 \in B(\mathrm{Cyc}^p(\mathbb{H}))$，且 $a_2a_2, a_3a_3 \in R(\mathrm{Cyc}^p(\mathbb{H}))$（因此 $f(a_0)\ f(a_1) \in H_B$，并且 $f(a_2)\ f(a_3) \in H_R$）。此外，a_0a_3 是一条红边，a_3a_1 是一条蓝边，a_1a_2 是一条红边，a_2a_0 是一条蓝边。因此，f 将 $\{a_0,a_1,a_2,a_3\}$ 映射到 $\mathbb{H}$ 的一个双色交替分量 $\mathbb{A}_i$。现在注意到，在 $\mathrm{Cyc}^p(\mathbb{H})$ 中，a_0 通过一条蓝边与 $(r'_\ell)^p$ 相连；由于 $f((r'_\ell)^p) = r_\ell$，必有 $\mathbb{A}_i$ 是 $\mathbb{A}_\ell$ 上方的一个交替分量，即 $i > \ell$。根据 ℓ 的选取，任何满足 $\ell < i < k$ 的交替分量 $\mathbb{A}_i$ 都是单色分量，因此 $i = k$。这意味着 $f(a)\ f(a_1) \in \{0,1\}$，并且 $f(a_2)\ f(a_3) \in \{2,3\}$。

设 $b = 0^{m+1}r_\ell^m1^{2m}$ 和 $c = r_\ell^{m+1}1^{3m}$。与我们证明 $f(a) \in \{0,1\}$ 的方法类似，可以证明 $f(b)\ f(c) \in \{0,1\}$，例如证明 f将元素 $b_0 = b$、$b_1 = 1^{m+1}r_\ell'^m0^{2m}$、$b_2 = 2^{m+1}r_\ell'^m3^{2m}$ 和 $b_3 = 3^{m+1}r_\ell^m2^{2m}$ 映射到 $\mathbb{A}_k$。

运用之前类似的论证，可以注意到 $\{0,1\}$，并且 $\{2,3\}$ 在 $(\mathbb{H}, h_1, \dots, h_n)$ 中是 pp-可定义的。由于 f是幂等的，因此对于所有 $i \in [p]$，只要$x_i \in \{2,3\}$，就必有 $f(x_1 \dots x_p) \in \{2,3\}$。最后，考虑元素 $u_0 = 3^p$、$u_1 = 3^{2m+1}2^{2m}$、$u_2 = 3^{m+1}2^{3m}$ 和 $u_3 = 2^p$。注意到 $u_0a, au_1, u_1b, bu_2, u_2c, cu_3 \in R(\mathrm{Cyc}^p(\mathbb{H}))$；又由于 $f(u_0) = f(3^p) = 3$，必有 $f(a) = f(b) = f(c) = 1$，且 $f(u_1) = f(u_2) = f(u_3) = f(u_0) = 3$。特别地，$f(2^p) = f(u_3) = 3$，这与 f 的幂等性矛盾。因此，不存在幂等循环多态函数 $f\colon \mathbb{H}^p \to \mathbb{H}$，故 $\mathbb{H}$ pp- 构造 $\mathbb{K}_3$。

□

7.2 $\mathbb{K}_2^*$ 和$\mathbb{K}_2^*$ 情形

现在证明：如果 $\mathbb{H}$ 存在分解 $\mathbb{H} := \mathbb{A}_1 \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_k$，且对于某个 $2 \le i \le k$，$\mathbb{A}_i$与 $\mathbb{K}_2^*$或 $\mathbb{K}_2^*$同构，那么 $\mathbb{H}$ 可 pp-构造 $\mathbb{K}_3$。

引理 43. 设 $\mathbb{H} := \mathbb{A}_1 \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_k$是一个自反的完全2边染色图的分解，且该图是一个核。若存在一对 $i, j \in [k]$ 满足 $i < j$，使得 $\mathbb{A}_i$ 和 $\mathbb{A}_j$ 与 $\mathbb{K}_2^*$同构，并且每个 $\mathbb{A}_\ell$ 都是 $i \le \ell \le j$的红色交替分量，则 $\mathbb{H}$ 可 *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$。

证明。设 O 是某个 $a \in A_i$的轨道，显然 $A_i \subseteq O$。显然存在一个自同构，将 $\mathbb{A}_i$ 映射到 $\mathbb{A}_j$、将 $\mathbb{A}_j$ 映射到 $\mathbb{A}_i$，并固定 $\mathbb{H}$的其余部分，因此 $A_i \cup A_j \subseteq O$。此外，每个$h \in O$ 都与一个红色自环关联；由 O 诱导的图中没有 $*$-边，因为 a 不与任何 $*$-边关联（这由 $\mathbb{A}_i$的选取以及交替分量的定义可知）。因此，O 诱导出一个符合命题 19条件的结构；又因为 $A_i \cup A_j$ 诱导出$(\mathbb{K}_2 + \mathbb{K}_2)^*$的一个拷贝，我们得出$\mathbb{H}[O]$ 不能满同态到$(\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2)^*$（观察 17）。由命题 19可知，由 O 诱导的子结构可 pp-构造 $\mathbb{K}_3$；又因为 O 在 $\mathbb{H}$中 pp-可定义，所以 $\mathbb{H}$ 可 pp-构造$\mathbb{K}_3$。

□

引理 44。设 $\mathbb{H}$ 是一个自反的完全2边双色图，且它是一个核。如果 $\mathbb{H}$ 不能 *pp*-构造$\mathbb{K}_3$，那么 $\mathbb{H}$ 具有定理 *13* 所述的分解，或者 $\mathbb{H}$ 的一个子结构 $\mathbb{H}'$ 具有分解 $\mathbb{H}' := \mathbb{A}_1 \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_\ell$，使得

- $(\mathbb{H}$、h_1、.....、$h_n)$ *pp*-定义并集 $A_1 \cup \cdots \cup A_\ell$，
- A_ℓ 是满足 $\mathbb{A}_i$ 与 $\mathbb{K}_2^*$ 或 $\mathbb{K}_2^*$同构的第一个指标 $i \ge 2$，
- 且 $A_{\ell-1}$ 包含一个顶点 a，它与一个颜色和该自环相反的自环相关联 $\mathbb{A}_\ell$中的 s。

证明。根据命题 42，我们假设 $\mathbb{H} := \mathbb{A}_1 \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_k$，其中 $|A_i| \le 2$ 对每个 $i \in [k]$都成立。注意，如果存在某个 $i \in [k]$，使得 $\mathbb{A}_i$ 和 $\mathbb{A}_{i+1}$ 是颜色相同的单色分量，那么 $\mathbb{H}$ 可以等价地分解为

$$\mathbb{H} := \mathbb{A}_1 \lhd_h \dots \mathbb{A}_{i+1} \lhd_h \mathbb{A}_i \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_k.$$

我们选择一个分解 $\mathbb{H} := \mathbb{A}_1 \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_k$，使得如果 $\mathbb{A}_i$ 和 $\mathbb{A}_{i+1}$ 是颜色相同的单色分量，且其中一个是自环，那么 $\mathbb{A}_{i+1}$ 是自环。注意，如果对于 $i > 2$，每个 $\mathbb{A}_i$ 都是 $*$-边或自环，那么 $\mathbb{H}$ 存在一个定理 13 中所述的分解。如果情况并非如此，令 $i > 2$ 为满足 $\mathbb{A}_i$ 同构于$\mathbb{K}_2^*$ 或 $\mathbb{K}_2^*$的最小整数，并且不失一般性地假设 $\mathbb{A}_i \cong \mathbb{K}_{2\circ}^*$

我们首先假设断言 1（如下）成立，即 $(\mathbb{H},\ h_1,\ \ldots\ldots,\ h_n)$ pp-定义 $A_1 \cup \cdots \cup A_{i\circ}$ 我们证明A_{i-1} 包含一个满足 $aa \in B(\mathbb{H})$ 的顶点 a。否则，$\mathbb{A}_{i-1}$ 就是一个红色交替分量。由于 $\mathbb{H}$ 是一个核，$\mathbb{A}_{i-1}$ 不是一条 $*$-边（否则，将 $\mathbb{A}_i$ 合并到 $\mathbb{A}_{i-1}$ 中会得到 $\mathbb{H}$的一个非满射自同态）。此外，根据引理 43，$\mathbb{A}_{i-1} \ncong \mathbb{K}_2^*$，因此 $\mathbb{A}_{i-1}$ 是一个红色自环 aa。但这与分解$\mathbb{A}_1 \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_k$的选择矛盾。因此，只需证明以下断言即可得出本引理。

断言 1. $(\mathbb{H},\ h_1,\ \ldots\ldots,\ h_n)$ pp-定义并集 $A_1 \cup \cdots \cup A_{i\circ}$

断言 *1* 的证明。由于 A_k 是 $\mathbb{H}$ 中的齐性集，每个同态 $f\colon \mathbb{A}_1 \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_{k-1} \to \mathbb{A}_1 \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_{k-1}$ 都可以通过在 A_k 上作用为恒等映射，扩展为同态 $f'\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$。特别地，如果 $\mathbb{H}$ 是核，那么 $\mathbb{A}_1 \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_{k-1}$ 也是核。因此，只需证明 $(\mathbb{H},\ h_1,\ \ldots\ldots,\ h_n)$ pp-定义集合 $A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}$，由此对 $i < k-1$ 作有限归纳即可得出该断言。现在考虑以下（无聊的）分类讨论。

- $|A_k| = 1$，且不失一般性，假设 $\mathbb{A}_k$ 诱导出一个蓝色自环 $aa \in B(\mathbb{H})$。在这种情况下，a 不关联任何红边，而所有不在 A_k 中的其他顶点都必须有一个红色邻点，因为 $\mathbb{H}$ 是核。因此，$\exists z.\, R(x,\ z)$ pp-定义 $A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}$，以及 $i \le k-1$。
- $\mathbb{A}_k$ 诱导一个单色的 $*$-边，并且我们假设 $\mathbb{A}_k = \{a, b\}$，其中 $aa,\ bb,\ ab \in B(\mathbb{H})$和$ab \in R(\mathbb{H})$。由于 $\mathbb{H}$ 是一个核，$\mathbb{A}_{k-1}$ 可以是$\mathbb{K}_1^*$、$\mathbb{K}_2^*$、一个红色单色 $*$-边，或一个双色 $*$-边。在前 3 种情况下，A_{k-1} 是 pp-可定义的（引理 33），因此公式 $\exists z.\, z \in A_j \wedge R(x,\ z)$ pp-定义 $A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1\circ}$ 在最后一种情况下，令 c为 $\mathbb{A}_{k-1}$的红色顶点，则公式 $R(x,\ c)$ pp-定义 $A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1\circ}$
- $\mathbb{A}_k \cong \overline{\mathbb{K}_{2\circ}^*}$ 由于 $\mathbb{H}$ 不 pp-构造 $\mathbb{K}_3$，由引理 43 可得 $\mathbb{A}_{k-1} \ncong \mathbb{K}_{2\circ}^*$ 由于 $\mathbb{H}$ 是一个核，$\mathbb{A}_{k-1}$ 不是连接 H_R中顶点的 $*$-边。根据分解的选取，$\mathbb{A}_{k-1}$ 不是红色自环。因此，$\mathbb{A}_{k-1}$ 可以是$\mathbb{K}_1^*$、$\mathbb{K}_2^*$、一个红色单色 $*$-边，或一个双色 $*$-边；于是，沿用前一种情况中的相同论证，我们可知 $A_1 \cup \ldots A_{k-1}$ 是 pp-可定义的。
- $\mathbb{A}_k \cong \mathbb{K}_{2\circ}^*$ 通过与前一种情况相同的对称论证即可得出。
- $\mathbb{A}_k$ 是一个双色的 $*$-边 $br \in B(\mathbb{H}) \cap R(\mathbb{H})$，其中 $bb \in B(\mathbb{H})$ 且 $rr \in R(\mathbb{H})$。利用$\mathbb{H}$ 是核这一事实，我们可知 $\mathbb{A}_k$ 不是双色的 $*$-边，也不是自环。因此，$\mathbb{A}_{k-1}$ 要么是单色的 $*$-边，$\mathbb{K}_2^*$，要么是 $\mathbb{K}_{2\circ}^*$ 根据引理 33，集合 A_{k-1} 在 $(\mathbb{H}, h_1, \ldots, h_n)$ 中是 pp-可定义的。不妨假设 $A_{k-1} \subseteq H_{R\circ}$ pp-公式 $\exists z.\, z \in A_{k-1} \wedge R(x, z)$ pp-定义集合 $A_1 \cup \ldots A_{k-1} \cup \{r\}$，而由该集合诱导的子结构存在分解 $\mathbb{A}_1 \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_{k-1} \lhd \mathbb{A}'_k$，其中 $A'_k = \{r\}$。因此，采用与第一种情况类似的论证，$\mathbb{A}_1 \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_{k-1} \lhd \mathbb{A}'_k$ pp-定义 $A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}$；通过复合 pp-定义，我们得出 $(\mathbb{H}, h_1, \ldots, h_n)$ pp-定义$A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1\circ}$

这些涵盖了所有可能的情况，因为每个 $\mathbb{A}_i$ 至多包含两个顶点，因此断言 1 和本引理得证。

□

引理 45。设 $\mathbb{H}$ 是一个自反的完全2边颜色图，且为核。若 $\mathbb{H}$ 不对$\mathbb{K}_3$进行 *pp*-构造，则 $\mathbb{H}$ 可按定理 *13* 进行分解。

证明。根据引理 44，只需证明：只要 $\mathbb{H}$ 具有一个分解，$\mathbb{H}$ 就对 $\mathbb{K}_3$ 进行 pp-构造

$$\mathbb{H} := \mathbb{A}_1 \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_k,$$

其中 k 是第一个满足以下条件的指标：$i \ge 2$ $\mathbb{A}_i$ 与 $\mathbb{K}_2^*$ 或 $\mathbb{K}_2^*$同构，并且 A_{k-1}包含一个顶点 a，该顶点关联着一个自环，其颜色与 $\mathbb{A}_k$中的环颜色相反。利用颜色对称性，我们还可以进一步假设$\mathbb{A}_k \cong \mathbb{K}_2^*$，因此 A_{k-1} 包含一个蓝色自环。首先考虑 $\mathbb{A}_{k-1}$ 是一个包含两个顶点 a 和 b的蓝色单色分量的情况。特别地，对于每个 $c \in A_k$，$ab \in R(\mathbb{H})$ 且 $cb \in R(\mathbb{H})$。此外，对于每个 $c \in H \setminus (A_k \cup \{a\})$，$cb \notin R(\mathbb{H})$，因此 $R(x,\ b)$ pp-定义子集 $A_k \cup \{a\}$。显然

可以看出，二元关系 $E(x,\ y) := \exists z \in A_k \cup \{a\}.\ B(x,\ z) \wedge R(z,\ y)$ 是$A_k \cup \{a\}$中的不等关系。换言之，$(A_k \cup \{a\},\ E) \cong \mathbb{K}_3$，因此 $(\mathbb{H},\ h_1,\ \ldots,\ h_n)$ pp-定义 $\mathbb{K}_3$，所以 $\mathbb{H}$ pp-构造$\mathbb{K}_3$。

从现在起，我们假设 $\mathbb{A}_{k-1}$ 要么是一个蓝色自环，要么是一条双色 $*$-边。我们用 0 和 1 表示 A_k 中的顶点，用 2 表示 A_{k-1} 中唯一一个与蓝色自环关联的顶点。特别地，$22 \in B(\mathbb{H})$ 中诱导出 01，而 $\mathbb{H}(12 \in R)$ 中诱导出 00、11、02（且没有其他边）。反设 $\mathbb{H}$ 不能 pp-构造 $\mathbb{K}_3$。因此，根据引理 23，存在一个同态 $f\colon \mathrm{Cyc}_p(\mathbb{H}) \to \mathbb{H}$，其中 p 是一个大于 $|H|$ 的素数。我们进一步选取 p，使其模 4 同余于 1，并令 m 满足 $p = 4m + 1$。我们沿用命题 42 之前段落中引入的记号。在证明余下部分中，我们固定 $\mathrm{Cyc}_p(\mathbb{H})$ 中的以下元素：$a := (0212)^m 0$、$b = (1202)^m 1$，以及 $c = (0110)^m 0$。由定义 $\sim_p$ 可知，aa、bb、ac、$bc \in R(\mathrm{Cyc}_p(\mathbb{H}))$，以及 $ab \in B(\mathrm{Cyc}_p(\mathbb{H}))$。由于 A_k 在 $(\mathbb{H}, h_1, \ldots, h_n)$ 中是 pp-可定义的，因此必有 $f(c) \in \{0,1\}$。现在，考虑以下分类讨论。

- 每个单色红分量 $\mathbb{A}_j$ 与 $j < k$ 都只包含一个顶点。在这种情况下，由于aa，$bb \in R(\mathrm{Cyc}_p(\mathbb{H}))$、$ab \in B(\mathrm{Cyc}_p(\mathbb{H}))$，而且 $\mathbb{A}_k$ 是唯一带有蓝边的红色交替分量，因此必定有 $\{f(a)\ f(b)\} = \{0,1\}$。利用 ac，$bc \in R(\mathbb{H})$这一事实，以及 $f(c) \in \{0,1\}$，我们得出结论：0 和 1 在 $\mathbb{H}$中由一条红边连接。这与$\mathbb{A}_k \cong \mathbb{K}_2^*$的假设矛盾。

- 存在某个红色单色分量 $\mathbb{A}_j$，其中有 $j < k$ 和 $|A_j| = 2$。令 ℓ 为满足 $\mathbb{A}_j$是红色交替分量的最大整数 $j < k$。令 $A_\ell = \{3,4\}$。特别地，33、$44 \in R(\mathbb{H})$和 $34 \in B(\mathbb{H})$。令 $S \subseteq H$为由 $B(x, 2) \wedge \exists z.\ z \in A_\ell \wedge B(x, z)$定义的子集。由于$(\mathbb{H}, h_1, \ldots, h_n)$ pp-定义了子集 A_ℓ，集合 S在$(\mathbb{H}, h_1, \ldots, h_n)$中是 pp-可定义的。采用与前面类似的论证（例如，利用 $\mathbb{A}_j$在 $\mathbb{A}_1 \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_j$中的齐次性），可得 $S = \{2,3,4\} \cup \{u \in H_B \cap A_j :\ \ell < j < k-1\}$。令 $d := (2323)^m 2 \in \mathrm{Cyc}_p(\mathbb{H})$，显然 $dd \in B(\mathrm{Cyc}_p(\mathbb{H}))$。由于$33$、$44 \in R(\mathbb{H})$，且 S在$(\mathbb{H}, h_1, \ldots, h_n)$中是 pp-可定义的，并且$2$、$3 \in S$，像 $f(d)$属于 $S \setminus \{3,4\}$。类似地，d' 的像：$= (2424)^m 2$ 属于 $S \setminus \{3,4\}$。最后，考虑元素 $e := (0303)^m 0$ 和$e' := (1414)^m 1$。很容易得出 de、$d'e' \in R(\mathrm{Cyc}_p(\mathbb{H}))$和 $ee' \in B(\mathrm{Cyc}_p(\mathbb{H}))$。由于对于某个 j，$f(d) \in A_j$且 $f(d') \in A_{j'}$，并且 $f(d)$和 $f(d')$与蓝色自环关联，因此必定有 $f(e)\ f(e') \in \{0,1\}$，因为 $de, d'e' \in R(\mathrm{Cyc}_p(\mathbb{H}))$。现在，利用 $ee' \in B(\mathrm{Cyc}_p(\mathbb{H}))$这一事实，我们看到 $\{f(e)\ f(e')\} = \{0,1\}$。回想 $f(c) \in \{0,1\}$（参见分类讨论之前的讨论），并注意到 $ce, ce' \in R(\mathbb{H})$，便可得出矛盾。事实上，这意味着 $01 \in B(\mathbb{H}) \cap R(\mathbb{H})$，但 $\mathbb{A}_k \cong \mathbb{K}_2^*$。

□

7.3 非结构性二分

我们的主定理现在可由定理 13 和引理 45 得出。

定理 46. 对于每个自反的完全2边着色图 $\mathbb{H}$，以下结论之一成立：

- 要么 $\mathbb{H}$ 的核存在一个分解

$$\mathbb{A}_1 \lhd_h \cdots \lhd_h \mathbb{A}_k,$$

其中 $\mathbb{A}_1$ 是一个至多包含两个元素的结构，而 $\mathbb{A}_i$ 是一个单顶点（带有一个自环），或者是一个自反的对每个 $2 \le i \le k$ 都有 $*$-边——在这种情况下，$\mathrm{CSP}(\mathbb{H})$ 可在多项式时间内求解；或者

- $\mathbb{H}$ *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$，且 $\mathrm{CSP}(\mathbb{H})$是 NP-完全的。

以下结论可由该定理和命题 14 推出。

推论 47. 对于自反完全的2-边染色图 $\mathbb{H}$，可以在多项式时间内判断$\mathrm{CSP}(\mathbb{H})$ 属于P 类还是 *NP* 完全问题。

8 图 Sandwich Problems 的约束满足问题方法

最近，Bodirsky 和 Guzm´an-Pro 提出了一种将约束满足问题（CSP）用于图夹心问题 [11] 的方法。他们注意到，对于若干图类 $\mathcal{C}$，$\mathcal{C}$ 的夹心问题可以自然地建模为无限定义域的约束满足问题。我们现在观察到，矩阵划分的夹心问题也属于这一范畴。

在第 4 节中，我们介绍了孪生点和膨胀的概念。若一对不同的顶点 u 和 v 属于 $\mathbb{G}$，且 $uv \in E(\mathbb{G})$，并且对于每个 $w \in G$，$\mathbb{G}$ 中存在边 uw 当且仅当 $\mathbb{G}$ 中存在边 vw，则称它们为共孪生点。若 $\mathbb{G}'$ 可以通过迭代添加共孪生点从 $\mathbb{G}$ 得到，则称 $\mathbb{G}'$ 是 $\mathbb{G}$ 的共膨胀。现在，考虑 G 的一个划分（I，C）（其中一部分可以为空）。相对于（I，C），$\mathbb{G}$ 的分裂膨胀是指通过迭代地将顶点 $u \in I$ 替换为一组孪生点，并将顶点 $v \in C$ 替换为一组共孪生点（因此 I 表示“独立”，因为顶点 $v \in I$ 会膨胀为一个独立集，而 C 表示“完全”）而从 $\mathbb{G}$ 得到的图 $\mathbb{G}'$。若对于 $\mathcal{C}$ 中的每个图 G，其顶点都存在一个划分（I，C）（其中一部分可以为空），使得相对于（I，C）对 G 作出的任何分裂膨胀也属于 $\mathcal{C}$，则称类 $\mathcal{C}$ 在分裂膨胀下封闭。

不难观察到，对于每个矩阵 M，允许进行 M-划分的图类在分裂膨胀下保持不变。此外，它对诱导子图封闭，并具有联合嵌入性质，即如果 $\mathbb{G}$ 和 $\mathbb{H}$ 允许进行 M-划分，那么存在一个图 $\mathbb{F}$，其包含作为诱导子图的 $\mathbb{G}$ 和 $\mathbb{H}$，且 $\mathbb{F}$允许进行 M-划分。因此，根据 [11]中的命题3，关于 M-划分的夹心问题是一个双色完全图 $\mathbb{M}$的约束满足问题。在此，我们论证这些夹心问题与 CSP($\mathbb{M}$) 在多项式时间内等价。

考虑类 $\mathcal{C}$的夹心问题的以下等价表示。输入是一个三元组 (V, E, N)，其中 N 是非边的集合，而 $E \cap N = \varnothing$。任务是找到一个边集 E'，使得 $E \subseteq E'$，即$E' \cap N = \varnothing$，并且 (V, E') 属于 $\mathcal{C}$。不难观察到，这一定义下的夹心问题与引言中所采用的定义等价（另见 [48]）。在此设定下，我们将 (V, E, N) 视为一个双色边图，其中 E 是蓝色边集，而 N 是红色边集。

引理 48. 对于每个定义在 $\{0, 1, *\}$ 上的对称矩阵 M，以下陈述成立。

1. 关于 M-划分的夹心问题与约束满足问题($\mathbb{M}$)多项式时间等价。*2.* 关于列表 M-划分的夹心问题与以下问题的列表版本多项式时间等价：约束满足问题($\mathbb{M}$)。

证明。容易看出，若 (V, E, N) 是关于 M-划分的夹心问题的一个输入，则 (V, E, N) 是肯定实例，当且仅当双色边图 $\mathbb{H} := (V, R(\mathbb{H}) = N, B(\mathbb{H}) = E)$ 同态映射到 $\mathbb{M}$。此外，注意这是一种一一归约，其像是没有 $*$-边的无环双色边图类。因此，若 (V, R, B) 是一个没有 $*$-边的无环双色边图，则 $(V, E = B, N = R)$ 是关于 M-划分的夹心问题的肯定实例，当且仅当 $(V, B, R) \to \mathbb{M}$。最后，由稀疏不可比引理（定理 3）可知，约束满足问题($\mathbb{M}$)与限制在围长至少为 3 的实例上的约束满足问题($\mathbb{M}$)多项式时间等价；这些实例即没有 $*$-边的无环双色边图。这证明了第一项结论，采用类似论证也可证明第二项结论。

□

由定理 6 可知，矩阵分划的夹心问题呈现 P 与 NP 完全二分定理。此外，定理 46 为这一类问题给出了结构二分。

推论 49。 矩阵分划的夹心问题呈现 P 与NP完全二分性（另见定理 *46*）。

8.1 全同态

如第 4 节所述，矩阵分划问题的一个自然子类对应于全同态问题。以下陈述是观察 17、命题 19 和引理 48 的直接推论。

推论 50。 对于每个无环图 $\mathbb{H}$，以下陈述之一成立：

- $\mathbb{H}$ 存在到 $\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2$ 的满同态；在这种情况下，到 $\mathbb{H}$ 的满同态问题 *SP* 及其列表变体均为多项式时间可解；

- 否则， $\mathbb{H}$ 包含 $\mathbb{K}_3$、 $2\mathbb{K}_2$、 $\mathbb{P}_4$ 之一作为诱导子图；在这种情况下，到 $\mathbb{H}$ 的全同态问题 *SP* 是NP-完全的。

事实证明，我们可以将先前对无环图的满同态 SP问题所作的结构分类扩展到任意图。这一结构分类与阈值图密切相关。阈值图有若干个等价定义 [58]。特别地，无环图 $\mathbb{H}$ 是阈值图，当且仅当 $\mathbb{H}$ 可以从一个单顶点开始，通过反复添加一个独立顶点或一个支配顶点来构造。

对于可能带有自环的图 $\mathbb{H}$，如果一个顶点 v 满足支配自环 $vv \in E(\mathbb{H})$，并且对于每个$u \in H$ 都有一条边 $uv \in E(\mathbb{H})$，则称其为支配自环。回顾一下，每个图 $\mathbb{H}$ 都包含一个诱导子图 $\mathbb{H}'$（在同构意义下唯一），使得 $\mathbb{H}'$ 是点决定的，并且存在一个从 $\mathbb{H}$ 到 $\mathbb{H}'$ 的满同态（反之亦然）。我们称 $\mathbb{H}'$ 为 $\mathbb{H}$的点决定核 。我们用 $\mathbb{L}$ 表示由一个与自环关联的顶点组成的图。

推论 51. 对于每个点决定核为 $\mathbb{H}'$ 的图 $\mathbb{H}$ （可能含有环），以下陈述之一成立：

- 要么 $\mathbb{H}'$ 可以从一个单顶点、 $2\mathbb{L}$ 或 $\mathbb{K}_2$ 出发，通过反复添加无环孤立顶点或支配自环构造而成——在这种情况下，针对 $\mathbb{H}$ 的满同态问题 *SP*（及其列表版本）可在多项式时间内求解；要么

- 否则，针对 $\mathbb{H}$ 的满同态问题 *SP*（及其列表版本）是 NP-完全的。

证明。令 $\mathbb{M}$ 和 $\mathbb{M}'$ 分别为与 $\mathbb{H}$ 的邻接矩阵以及其点决定核 $\mathbb{H}'$ 的邻接矩阵相关联的双色边图。由于 $\mathbb{M}$ 没有 $*$边，非列表版本的二分性可由定理 46 和引理 48 得出。第二项中所述列表版本的困难性，源于非列表版本的困难性。最后，第一项中所述列表版本的可处理性由定理 13 和引理 18 得出，因为 $\mathbb{M}$ 存在到 $\mathbb{M}'$的满同态。 □

8.2 列表版本

注意到，定理 13 与定理 46 也对矩阵划分 SP 的列表版本给出了复杂性分类，前提是相应结构 $\mathbb{M}$ 是一个核。特别地，我们得到以下推论。

推论 52. 对于每个满足 $\mathbb{M}$ 为核的矩阵 M，*M*-划分的 *SP* 与其列表变体在多项式时间内等价。

以下推论由引理 48 和有限域二分定理（定理 6）得出。

推论 53. 对于每个矩阵 M， M-划分问题的列表版本要么属于 P 类，要么是 NP 完全。

然而，定理 46 并未对自反完全双色边图的 CSP 列表版本（即矩阵划分问题的 SP 列表版本）给出复杂性分类。事实上，我们从该结果中只能得知：如果 $\mathbb{M}$ 是一个可以进行定理 46 所述分解的核，那么 M-划分的 SP 列表版本可在多项式时间内求解；此外，如果 $\mathbb{M}$ 的核无法进行此类分解，那么 M-划分的 SP 列表版本是 NP 完全。然而，对于所有 $\mathbb{M}$ 不是核、但其核可以进行此类分解的情形，定理 46 都无法涵盖。

问题 54。 对自反完全2双色边图的约束满足问题列表版本的复杂性进行结构分类。等价地，对矩阵划分的夹心问题列表版本的复杂性进行分类。[2]

[2]请注意，当 $\mathbb{M}$ 没有 $*$-边也没有 $*$-环时，问题已由推论 51 解决。

9 结论与开放问题

本文从结构上阐明了将矩阵划分自然归约为自反完全双色边图的约束满足问题所具有的算法能力。为此，我们对后者这一类问题的复杂性进行了结构分类。作为这一结果的副产品，我们对矩阵划分问题的夹心问题进行了复杂性分类。一个自然的研究方向是进一步对所有双色边图的约束满足问题进行结构复杂性分类。然而，对于每个有向图约束满足问题，都存在一个与之多项式时间等价的双色边图约束满足问题 [19, 定理 3。1]。因此，对双色边图的约束满足问题给出结构二分，可能与对有向图约束满足问题进行结构分类一样困难（目前看来，这仍遥不可及）。另一方面，我们相信，我们的结构分类可以推广到（不一定自反的）完全双色边图，或许还可以推广到自反的（不一定完全的）双色边图。

问题55. 给出完全双色边图的约束满足问题的P 类 与NP-完全结构分类 $\mathbb{H}$。

问题56. 给出自反的双色边图的约束满足问题的P 类与NP-完全结构分类 $\mathbb{H}$。

我们还将 M-划分问题的SP列表版本的复杂性分类留作开放问题（问题54）。最后，类似于刻画遗传困难有向图的研究计划（始于 [4]„ 并作为 [7]的一项应用而结束），我们将所有遗传地进行pp-构造 $\mathbb{K}_3$ 的双色边图的分类留待未来研究（更多小型例子见附录A）。

参考文献

[1] N. Alon 和 T. H. Marshall。边着色图与考克斯特群的同态。*J. AlgebraicComb.*，8(1):5–13，1998年7月。[2] J. Alvarado、S. Dantas 和 D. Rautenbach。缺少四阶两种成分的夹心。《运筹研究年鉴》，280:47–63，2019年。[3] J. Bang-Jensen、P. Hell 和 G. MacGillivray。由半完全有向图着色的复杂性。《*SIAM*离散数学杂志》，1(3):281–298，1988年。[4] J. Bang-Jensen、P. Hell 和 G. MacGillivray。遗传困难的 h-着色问题。《离散数学》，138(1):75–92，1995年。第14届英国组合数学会议。[5] L. Barto。有界宽度层级的坍缩。《逻辑与计算杂志》，26(3):923–943，2016年。[6] L. Barto 和 M. Kozik。通过局部一致性方法可解的约束满足问题。*ACM* 杂志，61(1):3:1–3:19，2014年。[7] L. Barto、M. Kozik 和 T. Niven。对于没有源点和汇点的有向图，约束满足问题二分定理成立（对 Bang-Jensen 和 Hell 的猜想作出肯定回答）。《*SIAM*计算杂志》，38(5)，2009年。[8] L. Barto、A. A. Krokhin 和 R. Willard。多态同态及其用法。载于《约束满足问题：复杂性与可近似性》，第1–44页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik，2017年。[9] L. Barto、J. Oprˇsal 和 M. Pinsker。《反射的奇境》。《以色列数学杂志》，223(1):363–398，2018年。[10] M. Bodirsky。无限域约束满足问题的复杂性。《逻辑讲义》（52）。剑桥大学出版社，英国剑桥；美国纽约，2021年。[11] M. Bodirsky 和 S. Guzm´an-Pro。图夹心问题的 CSP 方法。载于*2026*年*ACM-SIAM*离散算法年会（*SODA*）论文集，第2403–2418页。

[12] J. Bok、R. Brewster、T. Feder、P. Hell 和 N. Jedliˇckov´a。符号树的列表同态问题。《离散数学》，346(3):113257，2023年。[13] J. Bok、R. Brewster、T. Feder、P. Hell 和 N. Jedliˇckov´a。符号图的列表同态问题。载于 J. Esparza 和 D. Kr´al' 编，第四十五届国际数学基础研讨会（MFCS 2020），第170卷《莱布尼茨国际信息学会议论文集》（LIPIcs），第20:1–20:14页，德国达格施图尔，2020年。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik。[14] J. Bok、R. Brewster、T. Feder、P. Hell 和 N. Jedliˇckov´a。到可分符号图的列表同态。《理论计算机科学》，1001:114580，2024年。[15] J. A. Bondy 和 U. S. R. Murty。《图论》。施普林格，2008年。[16] R. Brewster。对称关系系统着色的复杂性。《应用离散数学》，49(1):95–105，1994年。优化观点特刊。[17] R. Brewster 等。边着色图的顶点着色。1993年。[18] R. Brewster、A. Kidner 和 G. MacGillivray。m-边着色图上可切换 h-着色的二分定理。《图论杂志》，110(2):200–208，2025年。[19] R. C. Brewster、F. Foucaud、P. Hell 和 R. Naserasr。符号图与边着色图同态的复杂性。《离散数学》，340(2):223–235，2017年。[20] R. C. Brewster 和 P. Hell。关于到边着色圈的同态。《电子版离散数学札记》，5:46–49，2000年。[21] R. C. Brewster 和 M. Siggers。符号 H-着色的复杂性二分。《离散数学》，341(10):2768–2773，2018年。[22] A. A. Bulatov。可解的保守约束满足问题。载于计算机科学逻辑研讨会（LICS）论文集，第321–330页，加拿大渥太华，2003年。[23] A. A. Bulatov。非统一 CSP 的二分定理。载于第58届 IEEE 年度计算机科学基础研讨会，FOCS 2017，美国加利福尼亚州伯克利，10月15日至17日，第319–330页，2017年。[24] A. A. Bulatov、A. A. Krokhin 和 P. G. Jeavons。利用有限代数对约束的复杂性进行分类。《SIAM计算杂志》，34:720–742，2005年。[25] K. Cameron、E. M. Eschen、C. T. Ho`ang 和 R. Sritharan。图的列表划分问题。载于第十五届 ACM-SIAM 年度离散算法研讨会论文集（SODA '04），第391–399页，美国，2004年。工业与应用数学学会。[26] K. Cameron、E. M. Eschen、C. T. Ho`ang 和 R. Sritharan。图的列表划分问题的复杂性。《SIAM离散数学杂志》，21(4):900–929，2007年。引用次数：29。[27] H. Chen 和 B. Larose。提出约束可解性中的元问题。TOCT，9(3):11:1–11:27，2017年。[28] K. Cook、S. Dantas、E. M. Eschen、L. Faria、C. M. de Figueiredo 和 S. Klein。 $2k_2$ 将顶点集划分为非空部分。《离散数学》，310:1259–1264，2010年。[29] M. Cygan、M. Pilipczuk、M. Pilipczuk 和 J. O. Wojtaszczyk。顽固问题不再顽固（3-相容着色和顽固列表划分问题的多项式算法）。载于2011年 ACM-SIAM 离散算法研讨会（SODA）论文集，第1666–1674页，2011年。[30] S. Dantas、C. M. de Figueiredo 和 L. Faria。(k,l)-余图上的刻画、探测问题和夹心问题。《应用离散数学》，143:155–165，2004年。

[31] S. Dantas、C. M. de Figueiredo、M. C. Golumbic、S. Klein 和 F. Maffray。链图夹心问题。《运筹学年鉴》，188:133–139，2011年。[32] S. Dantas、C. M. de Figueiredo、F. Maffray 和 R. B. Teixeira。禁用子图夹心问题与偏斜划分夹心问题的复杂性。应用离散数学，182:15–24，2015年。[33] S. Dantas、C. M. de Figueiredo、P. Petito 和 R. B. Teixeira。禁用诱导子图夹心问题 NP 完全性的一般方法。《理论计算机科学电子札记》，346:393–400，2019年。[34] S. Dantas 和 L. Faria。关于顽固图夹心问题。2007年国际全球信息技术计算多会议（ICCGI'07），第46–46页，2007年。[35] S. Dantas、L. Faria、C. M. H. de Figueiredo、S. Klein、L. T. Nogueira 和 F. Protti。列表顽固问题的进展。载于 T. Viglas 和 A. Potanin 编，《2010年计算理论会议》，CATS 2010，澳大利亚布里斯班，2010年1月，第109卷 CRPIT，第65–70页。澳大利亚计算机学会，2010年。[36] C. M. de Figueiredo、S. Klein、Y. Kohayakawa 和 B. A. Reed。高效寻找偏斜划分。《算法杂志》，37:505–521，2000年。[37] C. M. de Figueiredo、S. Klein 和 K. Vuˇskovi´c。1-连接组合的图夹心问题是 NP 完全的。应用离散数学，121:73–82，2002年。[38] P. Erd˝os。图论与概率。《加拿大数学杂志》，11:34–38，1959年。[39] T. Feder 和 P. Hell。完美图的矩阵划分。离散数学，306:2450–2460，2006年。[40] T. Feder 和 P. Hell。关于点确定图的实现以及完全同态的障碍。《离散数学》，308(9):1639–1652，2008年。[41] T. Feder、P. Hell 和 J. Huang。双弧图与列表同态的复杂性。《图论杂志》，42(1):61–80，2003年。[42] T. Feder、P. Hell、S. Klein 和 R. Motwani。列表划分。《SIAM离散数学杂志》，16(3):449–478，2003年。[43] T. Feder、P. Hell、S. Klein、L. T. Nogueira 和 F. Protti。弦图的列表矩阵划分。理论计算机科学，349:52–66，2005年。[44] T. Feder、P. Hell、D. Kr´al 和 J. Sgall。一般列表矩阵划分的两种算法。载于《第十六届 ACM-SIAM离散算法年会论文集》，SODA '05，第870–876页，美国，2005年。工业与应用数学学会。[45] T. Feder、P. Hell、D. G. Schell 和 J. Stacho。树结构三图列表同态问题的二分性。应用离散数学，159(12):1217–1224，2011年。[46] T. Feder、P. Hell 和 K. Tucker-Nally。有向图矩阵划分与三图同态。应用离散数学，154(17):2458–2469，2006年11月。[47] T. Feder 和 M. Y. Vardi。单调单子SNP与约束满足的计算结构：通过 Datalog 和群论进行研究。《SIAM计算杂志》，28:57–104，1999年。[48] M. Golumbic、H. Kaplan 和 R. Shamir。图夹心问题。《算法杂志》，19:449–473，1995年。[49] M. Habib 和 C. Paul。模分解算法方面综述。《计算机科学评论》，4:41–59，2010年。

[50] P. Hell。具有指定模式的图划分。*European Journal of Combinatorics*，35:335–353，2014年。[51] P. Hell、A. Kostochka、A. Raspaud 和 E. Sopena。关于优美图。离散数学，234(1):39–51，2001年。[52] P. Hell 和 J. Neˇsetˇril。H-着色的复杂性。组合理论杂志 *B*辑，48:92–110，1990年。[53] P. Hell 和 J. Neˇsetˇril。图与同态。牛津大学出版社，牛津，2004年。[54] W. Hodges。更简明的模型论。剑桥大学出版社，剑桥，1997年。[55] H. Kim 和 M. Siggers。迈向符号图列表切换同态问题的二分定理。*Kyungpook Mathematical Journal*，63(3)，2023年。[56] M. Kozik、A. Krokhin、M. Valeriote 和 R. Willard。若干 Maltsev 条件的刻画。*Algebra universalis*，73(3):205–224，2015年。[57] G. Kun。约束、MMSNP 与扩展子关系结构。*Combinatorica*，33(3):335–347，2013年。[58] N. V. R. Mahadev 和 U. N. Peled。阈值图及相关主题，第56卷《离散数学年刊》 阿姆斯特丹：爱思唯尔，1995年。[59] A. Montejano、P. Ochem、A. Pinlou、A. Raspaud 和 ´Eric Sopena。双色边图的同态。应用离散数学，158(12):1365–1379，2010年。LAGOS'07第四届拉丁美洲算法、图与优化研讨会论文集，瓦拉斯港，2007年。[60] R. Naserasr、E. Rollov´a 和 E. Sopena。符号图的同态。图论杂志，79(3):178–212，2015年。[61] P. Ochem、A. Pinlou 和 S. Sen。无三角形平面双色边图的同态。图论杂志，85(1):258–277，2017年。[62] D. Zhuk。CSP 二分猜想的证明。*ACM* 杂志，67(5):30:1–30:78，2020年。[63] D. N. Zhuk。CSP 二分猜想的证明。载于第*58*届*IEEE*计算机科学基础年会，*FOCS 2017*，美国加利福尼亚州伯克利，*10*月*15*日至*17*日，第331–342页，2017年。https://arxiv.org/abs/1704.01914。

A 四个更多的 $\mathbb{K}_3$ 遗传 pp-构造示例

我们应用引理 22 来证明，图 8 中的双色边图（及其对偶图）遗传地 pp-构造 $\mathbb{K}_3$。

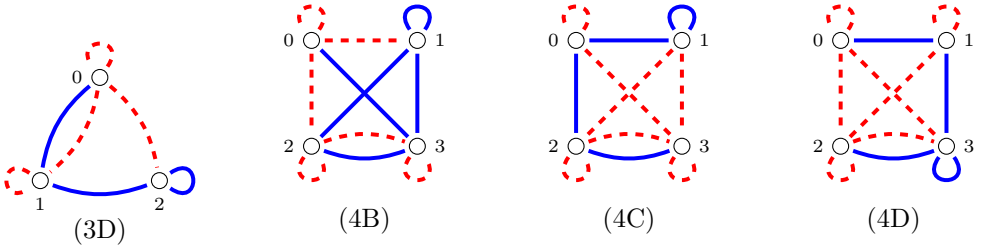
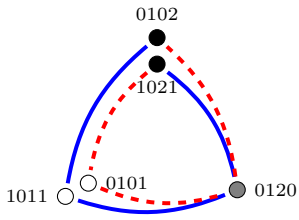


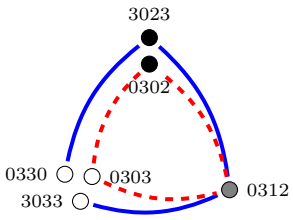
图 8：一些顶点数至多为四的极小遗传困难自反完全双色边图。

引理 57. 若 $\mathbb{H}$ 是图 *8* 中的一个2边双色图，则 $\mathbb{H}$ 和 $\mathbb{H}$ 可遗传地 *pp*-构造 $\mathbb{K}_3$。

证明。 我们采用与引理 24 的证明类似的方法：证明对于每个 $\mathbb{H} \in \{3\mathrm{D}, 4\mathrm{B}, 4\mathrm{C}, 4\mathrm{D}\}$，Siggers 幂 Sig($\mathbb{H}$) 都含有一个 $*$-奇圈，然后由引理 22 得出结论。下图分别描绘了 Sig(3D) 和 Sig(4B)；其中边表示 $\mathbb{H}^4$ 中的边，颜色类表示 $\sim_S$-等价类。为简化记号，我们用 $abcd$ 代替 (a, b, c, d)。

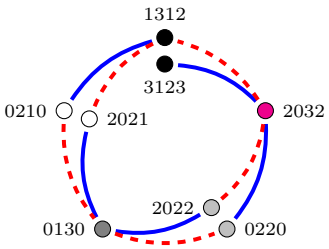


Sig(3D) 中的 $*$-三角形

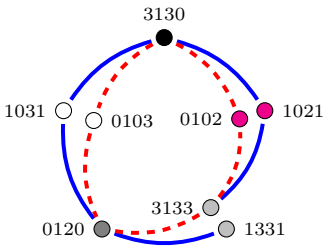


Sig(4B) 中的 $*$-三角形

最后，按照前面的图示中的相同约定，我们描绘了 Sig(4C) 和 Sig(4D) 中长度为五的 $*$-圈。



Sig(4C) 中的 $*$-5-圈



Sig(4D) 中的 $*$-5-圈

□