arXiv:2602.09579v1 [math.FA] 10 Feb 2026

迹类上有界线性算子与交换子的 Arazy 型分解定理

Jinghao Huang、Fedor Sukochev 和 Zhizheng Yu

Abstract. 经典的 Arazy 分解定理为研究可分算子理想 $\mathcal{C}_E$ 中的序列（以及其上的同构）提供了强有力的工具；该理想是可分无限维希尔伯特空间 H 上所有有界线性算子所构成的代数 $\mathcal{B}(H)$ 的算子理想。本文将 Arazy 分解定理推广并强化至一般有界线性算子作用于 $\mathcal{B}(H)$ 的可分（拟巴拿赫）算子理想 $\mathcal{C}_E$ 这一情形。我们还给出了若干应用，包括研究 $\mathcal{C}_E$-严格奇异算子、代数$\mathcal{B}(\mathcal{C}_E)$（即 $\mathcal{C}_E$ 上所有有界线性算子构成的代数）中的最大真理想，以及可补齐次巴拿赫空间等。我们的分解定理版本为非交换推广提供了工具；这一推广涉及 Brown 和 Pearcy、Apostol，以及 Dosev、Johnson 和 Schechtman 关于 ℓ_p 和 L_p, $1 \leq p < \infty$上算子的深刻交换子定理。我们能够刻画沙滕–冯·诺伊曼类 $\mathcal{C}_p$, $1 \leq p < \infty$上的交换子。对于关键情形 $p = 1$，我们证明，算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_1)$ 是交换子，当且仅当 T 不能写成某个 $\lambda \neq 0$ 与 $\mathcal{C}_1$-严格奇异算子 K的形式$\lambda I + K$。

Contents

1. 引言 2 1.1. 巴拿赫空间上的交换子 2 1.2. Arazy分解定理及其应用 3 2. 预备知识 5 2.1. $\mathcal{B}(H)$中的拟巴拿赫对称算子理想 6 2.2. 拟巴拿赫空间上有界算子的扰动 9 3. $\mathcal{B}(H)$中的块序列 11 4. $\mathcal{C}_E$ 17上算子的分解4.1. $\mathcal{C}_E$ 17上算子的Arazy 型分解定理4.2. 应用 42 5. $\mathcal{C}_p$ 上算子的Arazy 型分解定理及其应用 51 5.1. $\mathcal{C}_p$ 51上算子的分解5.2. $\mathcal{C}_1$ 是 1^+-可补齐次 59 6. $\mathcal{B}(\mathcal{C}_E)$中的最大真理想 61 7. $\mathcal{C}_1$ 66上交换子的结构7.1. 每个 $T \in \mathcal{M}_{\mathcal{C}_1}$都是交换子 66 7.2. $\mathcal{C}_1$ 68上交换子的刻画致谢 70 附录 A. $\mathcal{C}_E$ 70中的σ-弱零序列附录 B. 拟巴拿赫空间中的两个标准结果 78 参考文献 80

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47B47, 46L52, 47B37.*Key words and phrases.* 算子理想；交换子；严格奇异算子。J. Huang 获中国国家自然科学基金资助（项目编号：12031004、12301160 和 12471134）。F. Sukochev 获澳大利亚研究理事会资助。

1. Introduction

1.1. **巴拿赫空间上的交换子**。本文以Wintner的一个著名结果为出发点 [63]:

定理1.1. 含幺巴拿赫代数中的单位元不是交换子。

因此，巴拿赫代数 $\mathcal{A}$ 中，形如 $\lambda I + K$ 的元素都不是交换子，其中 K 属于 $\mathcal{A}$ 的范数闭真理想 $\mathcal{I}$，而 $\lambda \neq 0$ 是标量。

我们用 $\mathcal{B}(X)$ 表示巴拿赫空间 X 上所有有界线性算子构成的巴拿赫代数。当 $\dim(X) = n < \infty$ 时， $\mathcal{B}(X)$ 没有非平凡理想，但 Shoda [57] 证明，对于任意 $n \times n$ 矩阵 A，它是交换子当且仅当其迹为零。另一方面，当 $\dim(X) = \infty$ 时，情况大不相同： $\mathcal{B}(X)$ 至少有一个非平凡闭理想，例如 X 上的紧算子理想 $\mathcal{K}(X)$。Brown 和 Pearcy [16] 证明，算子 $T \in \mathcal{B}(\ell_2)$ 不是交换子，当且仅当 T 可表示为 $\lambda I + K$，其中 K 是紧算子且满足 $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$。后来，Apostol [2,3] 对 ℓ_p、$1 < p < \infty$ 和 c_0 得到了类似的刻画。35 年后，Dosev [22], 解决了 ℓ_1 的剩余情形；另见 [23]，其中讨论了各种巴拿赫空间上的交换子结果。值得注意的是，ℓ_∞ 上交换子的情况发生了巨大变化。具体而言，Apostol 证明，若 $T \in \mathcal{B}(\ell_\infty)$ 是紧算子，则它是交换子 [2]。后来，Dosev 和 Johnson [23], 将这一结果推广，证明 $T \in \mathcal{B}(\ell_\infty)$ 不是交换子，当且仅当 T 具有 $\lambda I + S$ 的形式，其中[1] S 是严格奇异算子，且 $\lambda \neq 0$。事实上，Dosev 等人 [22, 23] 提炼了早期工作的关键思想，并得到一系列重要工具（例如 [22, 推论12、定理 16] 以及 [23, 定理3.2、推论5.4]）。这些工具使得我们能够考察巴拿赫空间上的交换子表示，并将研究范围扩展到经典序列空间之外，例如 ℓ_p （当 $1 < p < \infty$ 时）和 c_0。

我们称巴拿赫空间 X 为 Wintner 空间，若 $\mathcal{B}(X)$ 中每个非交换子都具有 $\lambda I + K$ 的形式，其中 $\lambda \neq 0$ 和 K 属于 $\mathcal{B}(X)$ 的一个真理想。考虑以下野猜想 [18]是很自然的:

每个无限维巴拿赫空间都是 *Wintner* 空间。

然而，Dosev、Johnson 和 Schechtman [24] 借助 Tarbard [61], 构造的一个不满足 Pe-lczy´nski 分解[2]的例子，推翻了这一猜想。他们还认识到，Pe-lczy´nski 分解在研究 Wintner 空间时起着关键作用，由此提出了以下猜想。

猜想 1.2. 设 X 是一个巴拿赫空间，使得 $X \approx (\sum X)_p$, $1 \leq p \leq \infty$，或 $p = 0$。假设 $B(X)$ 具有一个最大非平凡理想 $\mathcal{M}$。那么， $T \in \mathcal{B}(X)$ 不是交换子，当且仅当$T = \lambda I + K$ 对某个 $K \in \mathcal{M}$ 和 $\lambda \neq 0$ *[23]* 成立（另见 *[18, 19, 24, 64]*）。

Dosev、Johnson 和 Schechtman 证明了 $T \in \mathcal{B}$（L_p（0，1））， $1 \leq p < \infty$不是交换子，当且仅当它可以写成 $T = \lambda I + K$，其中 K 是 L_p（0，1）-严格奇异的，而 $\lambda \neq 0$ [24]。特别地，这表明猜想1.2 对于 L_p（0，1）， $1 \leq p < \infty$成立。对于

$$X = \left(\sum \ell_q\right)_p, \ 1 \leq q, p < \infty$$

在 [18, 64] 中建立了类似的结果。

一类值得关注且具有 Pe-lczy´nski 分解性质的巴拿赫空间是 Schatten–von Neumann p-类 $\mathcal{C}_p$, $1 \leq p < \infty$ [5]。在 [19], 中， $1 < p < \infty$ 给出了代数 $\mathcal{B}(\mathcal{C}_p)$ 中交换子的刻画。特别是，当 $1 < p < \infty$ 时，猜想 1.2 对 $\mathcal{C}_p$ 成立；当 $1 \leq p < \infty$时，下三角部分 $\mathcal{T}_p$ 也成立。然而， [19] 中的证明依赖于在 $1 < p < \infty$ [4, 时 $\mathcal{C}_p$ 与 $\mathcal{T}_p$ 之间存在线性同构，这一点由定理 4.7], 给出；而在 $p = 1$ 的情形下，这一结论不成立（也就是说， $\mathcal{C}_1$ 与 $\mathcal{T}_1$不同构）。本文的主要动机是

[1]若算子 $T\colon X \to X$ 对 T 到 X 的任意无限维子空间的限制 [49, 不是同构，则称算子 T 为严格奇异算子。定义 2.c.2].[2]若巴拿赫空间 X 满足 Pe-lczy´nski 分解，则称其满足 Pe-lczy´nski 分解，即 X 线性同构于 $(\sum X)_0 := \{(x_k)_{k=1}^\infty \in X^{\mathbb{Z}^+} : \|(x_k)_{k=1}^\infty\| := \|(\|x_k\|)_{k=1}^\infty\|_{c_0} < \infty\}$ 或同构于 $(\sum X)_p := \{(x_k)_{k=1}^\infty \in X^{\mathbb{Z}^+} : \|(x_k)_{k=1}^\infty\| := (\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|^p)^{1/p} < \infty\}$，其中 $p \in [1, \infty)$。

为迹类上的交换子建立一个表示定理 $\mathcal{C}_1$，而这一问题在 [19]中尚未得到处理。特别是，这表明猜想 1.2 对迹类成立。

定理 1.3。 所有 $\mathcal{C}_1$-严格奇异算子构成的代数（见下文定义 *4.30* ）在 $\mathcal{C}_1$中是最大的非平凡理想 $\mathcal{B}(\mathcal{C}_1)$。算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_1)$ 是交换子，当且仅当$T - \lambda I$ 对所有标量 $\mathcal{C}_1$都不是 $\lambda \neq 0$-严格奇异算子。

研究巴拿赫空间 X 上 $\mathcal{B}(X)$ 中的最大非平凡理想本身就很有意义；例如参见 [14, 40, 41, 45, 46, 48]。

1.2. **Arazy分解定理及其应用**。 回顾所谓的 Calkin 对应，它建立在（不一定可分的）（拟）巴拿赫对称序列空间 E 与（拟）巴拿赫算子理想 $\mathcal{C}_E$ 之间，其中后者位于可分希尔伯特空间 H上所有有界线性算子构成的 $*$-代数 $\mathcal{B}(H)$ 中。准确地说，

$$E := \{x \in \ell_\infty : \mu(x) = s(a) \text{ for some } a \in \mathcal{C}_E\},\ \|x\|_E = \|a\|_{\mathcal{C}_E},$$

and

$$\mathcal{C}_E := \{a \in \mathcal{B}(H) : s(a) \in E\},\ \|a\|_{\mathcal{C}_E} = \|s(a)\|_E,$$

是在（准）巴拿赫对称序列空间与（准）巴拿赫对称算子理想 $\mathcal{C}_E$ (或 $\mathcal{C}_E(H)$) 之间的一一对应关系，其中 $\mathcal{B}(H)$ [39,50,56,59],中， $\mu(x)$（分别地， $s(a)$）表示 $|x|$, $x \in \ell_\infty$ （分别地， $a \in \mathcal{B}(H)$ 的奇异值）的递减重排。

Arazy [7] 的经典定理断言，可分算子理想$\mathcal{C}_E$ 中的每个基本序列都包含一个可嵌入 $\ell_2 \oplus E$的子序列。这一深刻结果证明中所用的思想可追溯至 Friedman [26], Holub [31], Arazy 和 Lindentrauss [12], , 以及 Arazy [5] 关于 $\mathcal{B}(H)$中特定算子理想的早期研究。Arazy分解定理是研究算子理想几何的有用工具（例如参见 [8,9,13,35]及其中的参考文献）。此外， [7]还建立了可分算子理想之间线性同构的分解定理。

在研究H上的算子理想 $\mathcal{C}_E$ 时，自然要在 H中固定两组标准正交基 $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$和 $\{\eta_i\}_{i=1}^\infty$，并考虑 $\mathcal{C}_E$ 中元素相对于这些基的矩阵表示，其对应关系为

$$x \in \mathcal{C}_E \to \big((x\eta_j|\xi_i)\big)_{i,j=1}^\infty.$$

然而，由于本文将频繁更换希尔伯特空间的基，我们引入另一种术语（见第3节）。为了研究本文所讨论的问题，并使内容更易读且自成一体，我们用本文的术语重新表述 Arazy 的若干结果 [7] （针对可分拟巴拿赫算子理想）（见附录A）。

在本文中，我们将 Arazy分解定理推广到可分拟Banach算子理想上有界线性算子的情形（参见第 4 节的主要结果，例如定理 4.14、4.17 和 4.24）。非正式地说，设 E 和 F 是两个可分拟巴拿赫对称序列空间，满足 c_0、 $\ell_2 \not\hookrightarrow E$，并设 T 是从 $\mathcal{C}_F$ 的下三角部分 $\mathcal{T}_F$ （见下文记号 2.7）到 $\mathcal{C}_E$的有界线性算子。则存在 H的两个闭子空间K和 L，使得 $\mathcal{C}_F(L,K)$ 的下三角部分 $\mathcal{T}_F(L,K)$ 包含于 $\mathcal{T}_F$ 中，并且~ ~限制 $T|_{\mathcal{T}_F(L,K)}$ 可延拓为一个从 $\mathcal{C}_F(L,K)$ 到 $\mathcal{C}_E$的算子 T，使得 T具有一种“良好”的表示（即通过小扰动得到的表示）。注意， $\mathcal{C}_E$ 上三角投影的有界性（例如，当 E 是满足 $\mathcal{C}_E \approx \mathcal{T}_E \oplus \mathcal{T}_E$的巴拿赫对称序列空间时）使得我们能够分别考虑下三角部分和上三角部分上的扰动。然而，当 $\mathcal{C}_E$ 上的三角投影无界时，为 $\mathcal{C}_E$ 建立一个“整体”结果总是很困难，而其证明本身也具有独立的意义。另一方面，由于在一般的拟巴拿赫算子理想中，无法保证对角投影（见（2.5））和三角投影（见（2.11））的有界性，因此在下面的一些证明中，我们必须避免使用对角投影/三角投影（例如见第 4.1 节）；这些证明不同于 [7]中的证明。这些结果对于随后研究拟巴拿赫算子理想之间的同构嵌入尤其有用，见 [27]（巴拿赫算子理想的情形见 [7, 35] ）。

下面，我们介绍这一结果的若干重要推论，以及研究 $\mathcal{C}_1$上交换子时所需的重要要素；这些内容本身也具有独立的意义：

- $\mathcal{T}_E$ 与 $\mathcal{C}_E$之间的同构。设 E 是一个可分巴拿赫对称序列空间。众所周知，当且仅当 $\mathcal{T}_E$ 在 $\mathcal{C}_E$ 中不是可补的， $\mathcal{T}_E$ 才不同构于 $\mathcal{C}_E$ （例如参见 [4]）。对于 E 是一个不包含 c_0 和 ℓ_2 的可分（拟）巴拿赫空间这一情形，我们通过证明 $\mathcal{T}_E$ 不同构于 $\mathcal{C}_E$ ，当且仅当 $\mathcal{T}_E$ 不同构于 $\mathcal{C}_E$的一个可补子空间，推广了这一结果（见下文定理 4.33）。特别地， $\mathcal{C}_1$ 的下三角部分 $\mathcal{T}_1$ 不同构于 $\mathcal{C}_1$的一个可补子空间，这加强了 Kwapien 和 Pelczynski [43], 以及 Arazy [4]的一个经典结果。这是证明$\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{C}_1$ 是 Wintner 空间（见定理 7.12）的关键一步。

- **算子在** $\mathcal{C}_E$上的局部表示。经过小扰动，我们得到从 $\mathcal{T}_E$ （分别是 $\mathcal{C}_E$）到 $\mathcal{C}_E$ 的有界算子的局部表示，其中 $c_0 \not\hookrightarrow E$（分别是 c_0, $\ell_2 \not\hookrightarrow E$），参见定理 4.14、4.17 和 4.24。特别地，对于任意从 T 到 $\mathcal{C}_p$ 的有界算子 $\mathcal{C}_p$， $0 < p \leq 1$，存在两个严格递增序列 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{j_k\}_{k=1}^{\infty}$ （由正整数组成），以及两个算子 a、$b \in \mathcal{C}_p$，满足 $\|a\|_{\mathcal{C}_p} = 1$，使得经过小扰动并通过适当的张量积表示后，有

$$T(a \otimes e_{i_{2k+1},i_{2l}}) = b \otimes e_{j_{2k+1},j_{2l}} \qquad \text{for every } k, l \geq 1,$$

其中 $\{e_{i,j}\}_{i,\ j=1}^{\infty}$ 表示 $\mathcal{C}_p$中的标准矩阵单位，参见下文的定理 5.14 （关于 5.5、5.7 和 5.11 中的相关结果，另见 $\mathcal{T}_p$， $0 < p < \infty$）。当 T 是 $\mathcal{C}_E$ 的同构嵌入时，Arazy [7]此前已证明了这一特殊情形下的类似结果。

- $\mathcal{C}_E$-严格奇异算子和 $\mathcal{T}_E$-严格奇异算子。众所周知，当 E 具有平凡的 Boyd 指数时， $\mathcal{C}_E$ 与其下三角部分 $\mathcal{T}_E$ 不同构（特别是， $\mathcal{C}_1$ 与其下三角部分 $\mathcal{T}_1$不同构，参见例如 [4]），这给研究 $\mathcal{C}_1$上的交换子结构带来了障碍。我们关于 $\mathcal{C}_E$ 上算子的表示定理的一个推论见下文定理 5.15，该定理指出，只要 E 不包含 c_0 和 ℓ_2的副本， $\mathcal{C}_E$ 上的算子 T 是 $\mathcal{C}_E$-严格奇异的，当且仅当它是 $\mathcal{T}_E$-严格奇异的（见定理 4.32）。结合定理 1.3，这意味着算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_1)$是交换子，当且仅当对每个标量 $\lambda \neq 0$，算子$T - \lambda I$ 都不是 $\mathcal{T}_1$-严格奇异算子。

- $\mathcal{C}_1$-严格奇异算子的刻画。设 $1 \leq p < \infty$。众所周知， $\mathcal{K}(\ell_p)$，即 ℓ_p上所有紧算子的集合，是唯一的非平凡闭理想，因此它自动是 $\mathcal{B}(\ell_p)$中的最大真理想（见 [25]），且与严格奇异算子理想相同（例如见 [42] 和 [62, 定理 6.2]）。这类巴拿赫空间（ℓ_p, $1 \leq p < \infty$）称为具有 Kato 性质（即，其上的每个严格奇异自同态必为紧算子 [29]）。然而， $\mathcal{K}(L_p)$并非 $\mathcal{B}(L_p)$中的最大理想；后者由所有 L_p-严格奇异算子构成（例如见 [24, 定理 1.3]）。Dosev、Johnson 和 Schechtman 证明了，对于 $1 \leq p < 2$，以下结论成立：给定任意一个 L_p-严格奇异算子 T 以及L_p 中与 L_p同构的任意子空间 X ，都存在一个更小的子空间 $Y \subset X$，它也与 L_p同构，且限制 $T|_Y$ 是紧算子，其范数足够小（见 [24, 定理 1.3 和引理 3.7]）。这一性质是证明 $B(L_p)$中的每个 L_p-严格奇异算子都是交换子的关键工具。本文中，我们证明，对于 $0 < p < \infty$，所有 $\mathcal{C}_p$-严格奇异（分别为 $\mathcal{T}_p$-严格奇异）算子构成 $\mathcal{B}(\mathcal{C}_p)$（分别为 $\mathcal{B}(\mathcal{T}_p)$）中的最大真理想（见注 5.16 和第 6 节）。此外，

(1) 设 $0 < p \leq 1$。则 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_p)$ 是 $\mathcal{C}_p$-严格奇异的，当且仅当 T 是 $\mathcal{T}_p$-严格奇异的（见下文定理 5.15 ）。

(2) 设 $0 < p < \infty$。则 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_p)$ 是 $\mathcal{C}_p$-严格奇异的，当且仅当对于每个子空间 X 中的 $\mathcal{C}_p$，满足 $X \approx \mathcal{C}_p$ 且对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在一个子空间 $Y \subset X$使得 $Y \approx \mathcal{C}_p$ 且 $\|T|_Y\| < \varepsilon$ [3] (见下文推论 5.18）。

(3) 设 $0 < p < \infty$。则 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{T}_p)$ 是 $\mathcal{T}_p$-严格奇异的，当且仅当对于每个子空间 X，$\mathcal{T}_p$ 满足 $X \approx \mathcal{T}_p$ 且对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在一个子空间 $Y \subset X$使得 $Y \approx \mathcal{T}_p$ 且 $\|T|_Y\| < \varepsilon$（见下文定理 5.17）。

- 可补齐次巴拿赫空间。可补齐次巴拿赫空间这一概念在巴拿赫空间上交换子的研究中起着关键作用。文献 [5, 7] 证明了，当 E 不包含 c_0 和 ℓ_2 的副本时，每个巴拿赫对称算子理想 $\mathcal{C}_E$ 都是可补齐次的（见下文定义 5.20）。此外，已知 Schatten p 类的下三角部分 $\mathcal{T}_p$，即 $1 \le p < \infty$，是 2^+-可补齐次的（见定义 5.22）。我们改进了这些结果，证明当 E 不包含 c_0 和 ℓ_2 的副本时，每个拟巴拿赫对称算子理想 $\mathcal{C}_E$ 都是可补齐次的（见定理 4.28）。此外，在第 5.2 节中，$\mathcal{T}_p$（$1 \le p < \infty$）和 $\mathcal{C}_1$ 被证明是 1^+-可补齐次的。值得注意的是，目前尚无判定对称序列空间是否可补齐次的标准。

2. Preliminaries

我们用 $[x_n]_{n=1}^\infty$ 表示拟巴拿赫空间 X中张成空间($\{x_n\}_{n=1}^\infty$)的闭包。某个拟巴拿赫空间中的基本序列$\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 称为等价于另一拟巴拿赫空间中的另一基本序列$\{y_n\}_{n=1}^\infty$（记作 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \sim \{y_n\}_{n=1}^\infty$），如果存在 $1 \le \lambda < \infty$，使得对每一标量序列 $\{t_n\}_{n=1}^\infty$,

$$\lambda^{-1}\Big\|\sum_n t_n y_n\Big\| \le \Big\|\sum_n t_n x_n\Big\| \le \lambda\Big\|\sum_n t_n y_n\Big\|.$$

若 $\lambda = 1$，则基本序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 与 $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ 称为等距等价（记作 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \simeq \{y_n\}_{n=1}^\infty$）。

设 $\lambda \ge 1$ 为正数。我们称（拟）巴拿赫空间 X 的子空间 Y 在 X 中是λ-可补的，如果存在从 X 到 Y 上的投影 P，满足 $\|P\| \le \lambda$ [53, p.131]。对于两个拟巴拿赫空间 X 与 Y，我们称 X 与 Y 是 λ-同构的，如果存在从 X到 Y上的线性同构 T，使得 $\|T^{-1}\| \cdot \|T\| \le \lambda$。记号 $X \approx Y$表示 X 线性同构于 Y，而 $X \cong Y$表示 X 线性等距于 Y。若 X线性同构（相应地，不线性同构）于 Y 的某个子空间，则记作$X \hookrightarrow Y$（相应地，$X \not\hookrightarrow Y$）。我们用 $\mathcal{B}(X,Y)$表示从 X 到 Y的有界线性算子空间。本文中，“算子”指有界线性算子，“同构”指线性同构。本文中，若 Z 是 Y 的子空间，且$T\colon X \to Y$ 与 $S\colon X \to Z$ 是两个算子，对所有 $x \in X$满足 $T(x) = S(x)$，则我们将 T 与 S视为同一。

定义 2.1. 向量空间 X（定义在实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$上）的拟范数是满足以下条件的函数 $x \in X \mapsto \|x\| \in [0,\infty$

(i) 对每个 $x \in X \setminus \{0\}$，$\|x\| > 0$；(ii) 对每个标量 α 和 $x \in X$，$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$；(iii) 存在一个 κ（≥ 1），使得对每个 x，$y \in X$，$\|x+y\| \le \kappa(\|x\| + \|y\|)$。最小的 κ 称为 $\|\cdot\|$的凹性模。

令 $\mathscr{U} = \{U_n\colon U_n = \{x \in X\colon \|x\| < 1/n\}$ 且 $n \in \mathbb{Z}^+\}$。$\mathscr{U}$ 在 X 上诱导出一个可度量化的向量拓扑 τ，使得 $\mathscr{U}$是 τ的一个局部基。若 (X, τ) 是完备的，则称 X为拟巴拿赫空间。

定义 2.2。 [38, 第7] 页 r设 ≤ 1 为一个正数。向量空间 X 上的拟范数称为 r-次可加的，如果

$$\|x+y\|^r \le \|x\|^r + \|y\|^r \qquad \text{for any } x, y \in X.$$

[3]请注意，与 Doesv 等人的结果不同，$T|_Y$ 可能不是紧的，参见注记 5.16。

注记 2.3. 一般而言，向量空间 X 上的拟范数 $\|\cdot\|$ 不连续。对于收敛到 $x \in X$ 的序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，我们只能得到

$$\kappa^{-1}\|x\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_n\| \leq \kappa\|x\|, \tag{2.1}$$

其中，κ 是 $\|\cdot\|$的凹性模。然而，r-次可加拟范数是连续的。

定理 2.4. *[38,*引理 *1.1* 和定理 *1.3]*设 $\|\cdot\|$是 X 上的拟范数，其凹性模为$\leq 2^{\frac{1}{r}-1}$。那么对于任意 $x_1,\ldots,x_n \in X$，有

$$\|x_1+\cdots+x_n\| \leq 4^{\frac{1}{r}}(\|x_1\|^r+\cdots+\|x_n\|^r)^{\frac{1}{r}}. \tag{2.2}$$

特别地，存在一个 r-次可加拟范数，定义为

$$|||x||| = \inf\left\{\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n}\|x_i\|^r\right)^{\frac{1}{r}} : x=\sum\nolimits_{i=1}^{n}x_i\right\} \qquad \text{for any } x\in X, \tag{2.3}$$

它满足$|||\cdot||| \leq \|\cdot\| \leq 4^{\frac{1}{r}}\,|||\cdot|||$。

2.1. 上的拟巴拿赫对称算子理想 $\mathcal{B}(H)$。我们用 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 表示实数域或复数域上的序列空间的标准单位向量（由 $e_k(i)=\delta_{k,i}$定义）。本文中，记号 H、H' 和 H'' 始终表示实数域或复数域上的无限维可分希尔伯特空间，即 $H\cong\ell_2$。设$(\cdot|\cdot)$为 H上的内积。对于任意$a\in\mathcal{B}(H)$和 $b\in\mathcal{B}(H')$，我们定义 $a\otimes b\in\mathcal{B}(H\otimes_2 H')$为

$$(a\otimes b)(\xi\otimes\eta)=a(\xi)\otimes b(\eta), \qquad \xi\in H \text{ and } \eta\in H'.$$

其中，$H\otimes_2 H'$ 是 H 与 H'的希尔伯特–施密特张量积。

对于任意指标集 A，空间 $\ell_2(A)$由从 A到相应实数域或复数域的函数 f 构成，使得$\sum_{a\in A}|f(a)|^2<\infty$。此时，$e_i^H=\chi_{\{i\}}$ 是集合 $\{i\}$的特征函数，其中 $i\in A$。

定义 2.5. 设 $\{e_i^H\}_{i\in\mathbb{A}}$ 表示指标集 $\mathbb{A}$上的希尔伯特空间 $\ell_2(\mathbb{A})$的自然基。

设 $P(\mathcal{B}(H))$为 $\mathcal{B}(H)$中所有投影构成的格。对于 $\mathcal{B}(H)$中的任意算子 a，其奇异值序列$s(a)$由下式给出

$$s_k(a)=\inf\{\|a(\mathbf{1}-p)\|_\infty : p\in P(\mathcal{B}(H)),\ \mathrm{Tr(p)}<k\},$$

其中，Tr 表示 $\mathcal{B}(H)$的标准迹。

设 E 是一个拟巴拿赫对称序列空间，即 E 是 ℓ_∞ 的子空间，在所赋予的拟范数 $\|\cdot\|_E$下构成拟巴拿赫空间，并且满足 $y\in E$，$\mu(x)\leq\mu(y)\Rightarrow x\in E$，$\|x\|_E\leq\|y\|_E$，其中，我们用 $\mu(z)$表示序列 $|z|$通常的递减重排。不失一般性，我们始终假设对所有 $k\geq 1$都有 $\|e_k\|_E=1$。通过如下设定，可以定义相应的 Schatten 理想 $\mathcal{C}_E\subset\mathcal{B}(H)$

$$a\in\mathcal{C}_E \Leftrightarrow s(a)\in E$$

带有拟范数

$$\|a\|_{\mathcal{C}_E}=\|s(a)\|_E,$$

见 [32,39,47,50,59]。空间 $\mathcal{C}_E$ 称为与 E相伴的拟巴拿赫对称算子理想。当 $E=\ell_p$、$0<p<\infty$或 c_0时，我们将 $\mathcal{C}_{\ell_p}$ 记为 $\mathcal{C}_p$，将 $\mathcal{C}_{c_0}$ 记为 $\mathcal{C}_0$。关于对称算子理想的详细信息，我们参阅 [21,28,50,58,59]。

下面，我们汇集一些关于拟巴拿赫对称算子理想的事实。在本文中，我们用$e_{\xi,\eta}$表示算子$(\cdot|\eta)\xi$，$\xi,\eta\in H$。

命题 2.6. 设 E 是一个拟巴拿赫对称序列空间，$\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$、$\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$、$\{\xi'_k\}_{k=1}^{\infty}$和 $\{\eta'_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 H 中四个标准正交序列，并设 a、$b\in\mathcal{C}_E$。则

$$\left\{a\otimes e_{\xi_{2i+1},\eta_{2j}}+b\otimes e_{\xi_{2j},\eta_{2i+1}}\right\}_{i,j=1}^{\infty}\simeq\left\{\left(\begin{smallmatrix}0&b\\a&0\end{smallmatrix}\right)\otimes e_{\xi'_i,\eta'_j}\right\}_{i,j=1}^{\infty}.$$

证明。 对于任意由标量构成的有限非零序列 $\{\alpha_{i,j}\}_{i,\ j=1}^{\infty}$，由于 $\sum_{i,\ j=1}^{\infty}\alpha_{i,\ j}(a\otimes e_{\xi_{2i+1},\ \eta_{2j}})$ 和 $\sum_{i,\ j=1}^{\infty}\alpha_{i,\ j}(b\otimes e_{\xi_{2j},\ \eta_{2i+1}})$ 的左、右支撑互不相交，因此可得

$$\begin{aligned}
&s\left(\sum_{i,j=1}^{\infty}\alpha_{i,j}\left(a\otimes e_{\xi_{2i+1},\eta_{2j}}+b\otimes e_{\xi_{2j},\eta_{2i+1}}\right)\right)\\
=&\mu\left(s\left(\sum_{i,j=1}^{\infty}\alpha_{i,j}\left(a\otimes e_{\xi_{2i+1},\eta_{2j}}\right)\right)\oplus s\left(\sum_{i,j=1}^{\infty}\alpha_{i,j}\left(b\otimes e_{\xi_{2j},\eta_{2i+1}}\right)\right)\right),
\end{aligned}$$

w此处“$\oplus$”表示两个递减正数列的不交并。因此 ，

$$\begin{aligned}
&s\left(\sum_{i,j=1}^{\infty}\alpha_{i,j}\left(a\otimes e_{\xi_{2i+1},\eta_{2j}}+b\otimes e_{\xi_{2j},\eta_{2i+1}}\right)\right)\\
=&\mu\left(s\left(a\otimes\left(\sum_{i,j=1}^{\infty}\alpha_{i,j}e_{\xi_{2i+1},\eta_{2j}}\right)\right)\oplus s\left(b\otimes\left(\sum_{i,j=1}^{\infty}\alpha_{i,j}e_{\xi_{2j},\eta_{2i+1}}\right)\right)\right)\\
=&\mu\left(s\left(a\otimes\left(\sum_{i,j=1}^{\infty}\alpha_{i,j}e_{\xi_i',\eta_j'}\right)\right)\oplus s\left(b\otimes\left(\sum_{i,j=1}^{\infty}\alpha_{i,j}e_{\xi_i',\eta_j'}\right)\right)\right)\\
=&s\left(\left(\begin{smallmatrix}0&b\\a&0\end{smallmatrix}\right)\otimes\left(\sum_{i,j=1}^{\infty}\alpha_{i,j}e_{\xi_i',\eta_j'}\right)\right)\\
=&s\left(\sum_{i,j=1}^{\infty}\alpha_{i,j}\left(\left(\begin{smallmatrix}0&b\\a&0\end{smallmatrix}\right)\otimes e_{\xi_i',\eta_j'}\right)\right).
\end{aligned}\tag{2.4}$$

因此，$\sum_{i,j=1}^{\infty}\alpha_{i,j}\left(a\otimes e_{\xi_{2i+1},\eta_{2j}}+b\otimes e_{\xi_{2j},\eta_{2i+1}}\right)\mapsto\sum_{i,j=1}^{\infty}\alpha_{i,j}\left(\left(\begin{smallmatrix}0&b\\a&0\end{smallmatrix}\right)\otimes e_{\xi_i',\eta_j'}\right)$ 可扩展为一个同构映射 S，将 $\left[a\otimes e_{\xi_{2i+1},\eta_{2j}}+b\otimes e_{\xi_{2j},\eta_{2i+1}}\right]_{i,\ j=1}^{\infty}$ 映至 $\left[\left(\begin{smallmatrix}0&b\\a&0\end{smallmatrix}\right)\otimes e_{\xi_i',\eta_j'}\right]_{i,\ j=1}^{\infty}$。由此可得，(2.4) 对 $\left[a\otimes e_{\xi_{2i+1},\eta_{2j}}+b\otimes e_{\xi_{2j},\eta_{2i+1}}\right]_{i,\ j=1}^{\infty}$ 中的每个元素都成立，因此 S 是一个等距映射[1]。□

设 $\{K_k\}_{k=1}^n$ 和 $\{L_k\}_{k=1}^n$ 是 H中两列两两正交的闭子空间，其中 $n\in\mathbb{N}^+\cup\{\infty\}$。若 $n<\infty$，则对于任意 $x\in\mathcal{C}_E$，有

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{n}p_{K_k}xp_{L_k}\right\|_{\mathcal{C}_E}&=\left\|\frac{1}{2^n}\sum_{\{\delta_k\}_{k=1}^n=\{-1,1\}^n}\sum_{1\le i,j\le n}\delta_i\delta_jp_{K_i}xp_{L_j}\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
&=\frac{1}{2^n}\left\|\sum_{\{\delta_k\}_{k=1}^n=\{-1,1\}^n}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n}\delta_ip_{K_i}\right)x\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n}\delta_jp_{L_j}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
&\le\frac{1}{2^n}\kappa\sum_{\delta_1=\pm1}\kappa\sum_{\delta_2=\pm1}\cdots\kappa\sum_{\delta_n=\pm1}\left\|\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n}\delta_ip_{K_i}\right)x\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n}\delta_jp_{L_j}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
&\le\kappa^n\left\|x\right\|_{\mathcal{C}_E},
\end{aligned}\tag{2.5}$$

where κ 是 $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}$的模。如果 E 是巴拿赫对称序列空间，则有

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}p_{K_k}xp_{L_k}\right\|_{\mathcal{C}_E}\le\left\|x\right\|_{\mathcal{C}_E}.\tag{2.6}$$

[1]对于一般的拟巴拿赫空间，由于拟范数不一定连续，一个映射在拟巴拿赫空间的稠密子空间上是等距映射，并不能保证它能延拓为整个空间上的等距映射。

这是对 [21, 引理 5.9。1] （另见 [20], [15, 定理 3.1 和推论 32], 其中给出了更一般的结果）。如果 E 是可分的，那么对于任意 $x \in \mathcal{C}_E$，级数 $\sum_{i=1}^{\infty} p_{K_i} x p_{L_i}$ 在 $\mathcal{C}_E$中（无条件）收敛，并且

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} p_{K_k} x p_{L_k} \right\|_{\mathcal{C}_E} \leq \|x\|_{\mathcal{C}_E}, \tag{2.7}$$

例如参见 [20, 推论 3.4]。因此，对于任意 $1 \leq n \leq \infty$，我们可以定义一个压缩投影$P_{\{K_k,L_k\}_{k=1}^n}$ 如下:

$$P_{\{K_k,L_k\}_{k=1}^n} : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} p_{K_k} x p_{L_k}. \tag{2.8}$$

当 $n = 1$时，我们将 $P_{\{K_k,L_k\}_{k=1}^n}$ 简记为 $P_{K_1,\ L_1}$。

若 E 不是巴拿赫空间，则无法保证 $P_{\{K_k,L_k\}_{k=1}^{\infty}}$ 是压缩投影，例如参见 [15]。事实上，$P_{\{K_k,L_k\}_{k=1}^{\infty}}$ 在 $\mathcal{C}_p$ 上甚至是无界的， $0 < p < 1$。对于 H 中任意两组标准正交基 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$，我们有

$$\left\| \sum_{1 \leq i,j \leq n} e_{\xi_i,\eta_j} \right\|_p = n$$

and

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} e_{\xi_i,\eta_i} \right\|_p = n^{1/p}.$$

由此可得

$$\frac{\| \sum_{i=1}^{n} e_{\xi_i,\eta_i} \|_p}{\| \sum_{1 \leq i,j \leq n} e_{\xi_i,\eta_j} \|_p} \to \infty \quad \text{as } n \to \infty, \tag{2.9}$$

因此， $P_{\{[\xi_k],[\eta_k]\}_{k=1}^{\infty}}$ 在 $\mathcal{C}_p$ 上是无界的。然而，根据韦尔不等式[30, 定理 3.3]，投影 $P_{\{[\xi_k],[\eta_k]\}_{k=1}^{\infty}}$ 在 $\mathcal{C}_p$ 的下三角部分上（相对于基 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$）是有界的。更一般地，由于每个拟巴拿赫对称算子理想 $\mathcal{C}_E$ 都有一个等价拟范数，该拟范数关于韦尔子主序（或对数次主序）是单调的（例如参见 [37,命题 3.2] 或 [60, 定理 7], ），由韦尔不等式可知， $P_{\{[\xi_k],[\eta_k]\}_{k=1}^{\infty}}$ 在 $\mathcal{C}_E$ 的下三角部分上（相对于基$\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$）是有界的。

记号 2.7. 设 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 H 中的两个标准正交序列。我们用 $\mathcal{T}_{E,\{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$ 表示由 $\mathcal{C}_E$ 给出的子空间

$$\mathcal{T}_{E,\{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}} = [e_{\xi_i,\eta_j}]_{1 \leq j \leq i < \infty}, \tag{2.10}$$

其中 $e_{\xi,\eta} = (\cdot|\eta)\xi$， 而 $[e_{\xi_i,\eta_j}]_{1 \leq j \leq i < \infty}$ 表示 $\mathcal{C}_E$ 中 $\{e_{\xi_i,\eta_j}\}_{1 \leq j \leq i < \infty}$ 的线性张成的闭包。注意，对于 H 中任意两个标准正交序列 $\{\xi_i'\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{\eta_i'\}_{i=1}^{\infty}$， $\mathcal{T}_{E,\{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$ 与 $\mathcal{T}_{E,\{\xi_i',\eta_i'\}_{i=1}^{\infty}}$ 等距同构。因此，我们用 $\mathcal{T}_E$ 表示一个与这些空间中任意一个等距同构的拟巴拿赫空间。

一个重要的投影是（下）三角投影 $T^{E,\{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$，其定义在张成空间$\left(\{e_{\xi_i,\eta_j}\}_{i,j=1}^{\infty}\right)$上，定义如下

$$T^{E,\{\xi_k,\eta_k\}_{k=1}^{\infty}}\left(e_{\xi_i,\eta_j}\right) = \begin{cases} e_{\xi_i,\eta_j}, & 1 \leq j \leq i < \infty \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{2.11}$$

以下定理可见于 [4, 定理 4.7]。

定理 2.8. 假设 E 是一个可分巴拿赫对称序列空间，且$\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和$\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 H中的两列标准正交序列。以下条件等价:

(a) $T^{E,\ \{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$在$span\left(\{e_{\xi_i,\eta_j}\}_{i,\ j=1}^{\infty}\right)$上是有界的;

(b) $\mathcal{T}_{E,\ \{\xi_i,\eta_i\}_{k=1}^{\infty}}$ 在 $\mathcal{C}_E$中是可补的; (c) $\mathcal{T}_E \approx \mathcal{C}_E$。

2.2. **拟巴拿赫空间上有界算子的扰动。**

定义 2.9。设 X 为一个拟巴拿赫空间。由 X 中的非零闭子空间 $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ 组成的序列称为 X 的*Schauder* 分解，如果每个 $x \in X$ 都能唯一表示为 $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 的形式，其中对每个 k都有 $x_k \in X_k$。如果对每个 k都有$\dim(X_k) = 1$，并且存在 $x_k \in X_k$ 使得对每个 k都有X_k =张成空间$\{x_k\}$，则称序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 X的*Schauder*基。

拟巴拿赫空间 $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的每个 Schauder 分解 X 都确定一个投影序列$\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X，定义为 Q_n： $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \mapsto x_n$。众所周知，这些投影是一致有界的（例如参见定理B.1）。记

$$K_c := \sup_n \|Q_n\| < \infty. \tag{2.12}$$

例如，若 $\{K_i\}_i^{\infty}$ 和 $\{L_i\}_i^{\infty}$ 是 H 的两个两两正交的闭子空间序列，

$$X_k = \Big\{ x \in \mathcal{C}_E : p_{[\bigcup_{i=1}^{k} K_i]} x p_{[\bigcup_{i=1}^{k} L_i]} - p_{[\bigcup_{i=1}^{k-1} K_i]} x p_{[\bigcup_{i=1}^{k-1} L_i]} = x \Big\} \qquad \text{for every } k \geq 2$$

and

$$X_1 = \Big\{ x \in \mathcal{C}_E : p_{K_1} x p_{L_1} = x \Big\},$$

那么 $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是$[\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k]$的 Schauder 分解。

引理2.10。设 X 是一个具有 *Schauder* 分解 $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的拟巴拿赫空间，且 Y 是一个拟巴拿赫空间，其拟范数为 r-次可加。若 $T, S \in \mathcal{B}(X, Y)$，则

$$\|T - S\| \leq K_c \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \big\| T|_{X_k} - S|_{X_k} \big\|^r \Big)^{\frac{1}{r}}.$$

定义2.11。设 X 和 Y 是两个拟巴拿赫空间，$\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 X的 Schauder 分解。设 T, $S \in \mathcal{B}(X, Y)$ 和 $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$是一个非负数序列，且 $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$。若

$$\big\| T|_{X_k} - S|_{X_k} \big\| \leq \varepsilon_k$$

fo对每个 k，则 S 称为与 $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ 相关、针对 $\{\varepsilon_k\}_{k=}^{\infty}$的 T 的扰动 1·

定理 2.12。设 X 是一个具有 *Schauder* 分解 $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$的拟巴拿赫空间，Y是一个拟范数具有 r-次可加性的拟巴拿赫空间。若 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$，$R_k \in \mathcal{B}(X_k, Y)$，$k = 1, 2, \ldots$ 满足

$$K_c \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \big\| T|_{X_k} - R_k \big\|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \leq \varepsilon, \tag{2.13}$$

对某个 $\varepsilon > 0$，则存在 $T_0 \in \mathcal{B}(X, Y)$ 使得

$$T_0|_{X_k} = R_k \text{ and } \|T - T_0\| \leq \varepsilon. \tag{2.14}$$

证明。对每个 $k \in \mathbb{N}^+$，令 Q_k 为从 $X = [\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i]$ 到 X_k 的自然投影，对每个 k 都成立。只需注意到

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|(T|_{X_k} - R_k) Q_k(x)\|^r \overset{(2.13)}{\leq} \varepsilon \|x\|^r < \infty \qquad \text{for every } x \in X.$$

由于对每个 $x \in X$ 和 $TQ_k = T|_{X_k} Q_k$，$T(x) = T\big(\sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} TQ_k(x)$，因此级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_k Q_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} TQ_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} (T|_{X_k} - R_k) Q_k(x)$$

收敛。因此，算子

$$T_0 := \sum_{k=1}^{\infty} R_k Q_k = T - \sum_{k=1}^{\infty} (T|_{X_k} - R_k) Q_k$$

强收敛。根据 [55, 2.8 定理]，T_0 是从 X 到 Y的有界算子，并满足（2.14）。根据引理2.10，证明得证。□

设 $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是拟巴拿赫空间 X 的 Schauder 分解。容易验证，若对于每个 k， Z_k 都是 X_k 的非零闭子空间，则 $\{Z_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $[\bigcup_k^{\infty} Z_k]$ 的 Schauder 分解。在本文中，我们始终用 I_X 表示拟巴拿赫空间 X 上的恒等算子。

引理 2.13. 假设

(1) X 是一个带有 *Schauder* 分解 $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的拟巴拿赫空间，(2) Z_k 是 X_k 的一个非零可补子空间，其投影算子为 Q_k： $X_k \to Z_k$对每个 k 都成立，并且 $\sup_k \|Q_k\| \le M < \infty$，(3) Y 是一个拟范数为 r-次可加的拟巴拿赫空间，并且(4) $T \in \mathcal{B}(X,\ Y)$ 和 $S \in \mathcal{B}([\cup_{k=1}^{\infty} Z_k],\ Y)$ 满足： $T|_{[\bigcup_k^{\infty} Z_k]}$ 是与 $\{Z_k\}_{k=1}^{\infty}$ 相关联的 S 的扰动，其中 $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$，且 $\sum_{k=1}^{\infty} {\varepsilon_k}^r < \infty$。

那么 S 可延拓为一个算子 $S \in \mathcal{B}(X,Y)$ 使得 $S(I_{X_k} - Q_k) = T(I_{X_k} - Q_k)$ 对每个 k，并且 T 是与 S 相关联的扰动，适用于 $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ 当 $\{M\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$时。

证明。 对每个 k，令 $R_k = S|_{Z_k} Q_k + T(I_{X_k} - Q_k)$。我们有

$$\left\|T|_{X_k} - R_k\right\| = \left\|TQ_k + T(I_{X_k} - Q_k) - R_k\right\| = \left\|(T|_{Z_k} - S|_{Z_K})Q_k\right\| \le M\varepsilon_k.$$

由定理 2.12，存在一个有界算子 $\tilde{S}$ 使得 $\tilde{S}|_{X_k} = R_k$ 对每个 k。此外，

$$\begin{aligned}\tilde{S}(I_{X_k} - Q_k) &= \tilde{S}|_{X_k}(I_{X_k} - Q_k) = R_k(I_{X_k} - Q_k)\\ &= S|_{Z_k} Q_k(I_{X_k} - Q_k) + T(I_{X_k} - Q_k)(I_{X_k} - Q_k) = T(I_{X_k} - Q_k)\end{aligned}$$

对每个 k。 □

当 $Y \subseteq X$时，我们将从 Y到 X的自然嵌入记为 $\iota_{Y\hookrightarrow X}$。

引理 2.14。 设 X 是一个拟范数满足 r-次可加性的拟巴拿赫空间。假设Y 是 X 的一个 λ-可补（$\lambda \ge 1$）子空间，且存在一个算子 $T:\ Y \to X$ 满足$\|T - \iota_{Y\hookrightarrow X}\| \le \varepsilon < \lambda^{-1}$。那么， T是一个同构嵌入，并且 $T(Y)$在 X中是 $\lambda(1+(\varepsilon\lambda)^r)^{\frac{1}{r}}(1-(\varepsilon\lambda)^r)^{-\frac{1}{r}}$-可补的。

证明。 由于 $\|T - \iota_{Y\hookrightarrow X}\| \le \varepsilon < \lambda^{-1} \le 1$，由此可得

$$\|Tx\|^r \ge \|x\|^r - \|(T - \iota_{Y\hookrightarrow X})x\|^r \ge (1-\varepsilon^r)\|x\|^r,\ \forall x \in Y.$$

换言之， T 是从 Y 到 X的同构嵌入。设 P 为从 X到 Y 且满足 $\|P\| \le \lambda$的投影。定义

$$S = TP + I_X - P. \tag{2.15}$$

我们有

$$\|S - I_X\| = \|(T - \iota_{Y\hookrightarrow X})P\| \le \varepsilon\lambda < 1,$$

这表明 S是可逆算子，且 $\|S\| \le (\|I_X\|^r + \|S - I_X\|^r)^{\frac{1}{r}} \le (1+(\varepsilon\lambda)^r)^{\frac{1}{r}}$以及 $\left\|S^{-1}\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{\infty}(I_X - S)^k\right\| \le \left(\sum_{k=0}^{\infty}\|(I_X - S)^k\|^r\right)^{\frac{1}{r}} \le \left(\sum_{k=0}^{\infty}(\varepsilon\lambda)^{rk}\right)^{\frac{1}{r}} = (1-(\varepsilon\lambda)^r)^{-\frac{1}{r}}$。注意到

$$(SPS^{-1})^2 = SPS^{-1}$$

and

$$\mathrm{im}(SPS^{-1}) = \mathrm{im}(SP) \overset{(2.15)}{=} \mathrm{im}((TP + (I_X - P))P) = \mathrm{im}(TP) = \mathrm{im}(T),$$

其中，$\mathrm{im}(T)$表示算子 T的值域，我们得到 SPS^{-1}是从X到 $T(Y)$的投影，且 $\|SPS^{-1}\| \le \lambda(1+(\varepsilon\lambda)^r)^{\frac{1}{r}}(1-(\varepsilon\lambda)^r)^{-\frac{1}{r}}$。 □

3. Block sequences in $\mathcal{B}(H)$

设 $\{K_i\}_i$ 是 H中有限或无限个两两正交的闭子空间组成的序列。假设 $\{u_i : K_i \to H'\}_i$ 是一个等距映射序列。对于每个 i，我们定义一个从 K_i 到$H' \otimes_2 \ell_2$ 的等距映射如下:

$$\widehat{u_i} : \xi \in K_i \mapsto u_i(\xi) \otimes e_i \in H' \otimes_2 \ell_2, \tag{3.1}$$

其中，$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 表示 ℓ_2的自然基。于是存在唯一的等距映射$\hat{\mathrm{U}}u$，从 $[\bigcup_i K_i]$映入 $H' \otimes_2 \ell_2$，其定义为

$$\widehat{u} : \sum_i \xi_i \mapsto \sum_i u_i(\xi_i) \otimes e_i, \tag{3.2}$$

其中，对每个 i都有 $\xi_i \in K_i$，使得对每个 i都有$\hat{\mathrm{U}}u|_{K_i} = \grave{\mathrm{U}}u_i$。

设 $\{K_i\}_i$ 和 $\{L_j\}_j$ 是 H中两个有限或无限的两两正交的闭子空间序列。设 G 是 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$的一个非空子集。

定义3.1。 $\mathcal{B}(H)$中的序列 $\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G}$ 称为与 $\{K_i\}_i$和 $\{L_j\}_j$相关的块序列，如果对所有$(i, j) \in G$，都有$x_{i,\ j} = p_{K_i} x_{i,\ j} p_{L_j}$，记作

$$\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K_i\}_i \otimes \{L_j\}_j.$$

特别地，当 $\{K_i\}_i$（（分别是 $\{L_j\}_j$））只包含一个元素 K'（（分别是 L'））时，我们可以将 $\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G}$ 写作 $\{x_j\}_j$（（分别是 $\{x_i\}_i$））， 并且

$$\{x_j\}_j \overset{\text{b.s}}{\boxplus} K' \otimes \{L_j\}_j \quad \big(\text{resp. } \{x_i\}_i \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K_i\}_i \otimes L'\big).$$

定义3.2。 设 $\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G}$ 是与 $\{K_i\}_i$ 和 $\{L_j\}_j$ 相关联的块序列，且 $\mathcal{B}$（H）中的 $\{u_i : K_i \to H'\}_i$ 和 $\{v_j : L_j \to H'\}_j$ 是两个等距映射序列。若存在算子 $a \in \mathcal{B}$（H'），使得序列$\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G}$由以下系统生成 $\{u_i\colon K_i \to H'\}_i \otimes \{v_j\colon L_j \to,\ H'\}_j$其中包含等距映射和算子，则称该序列为

$$u_i x_{i,j} {v_j}^* = a$$

对于每个（$i,\ j$）$\in G$，并记为

$$\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{u_i : K_i \to H'\}_i \otimes \{v_j : L_j \to H'\}_j \curvearrowleft a.$$

如果只强调这种等距映射系统的存在性，则称序列 $\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G}$由算子 $a \in \mathcal{B}$（H'）生成，并记为

$$\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K_i\}_i \otimes \{L_j\}_j \curvearrowleft a$$

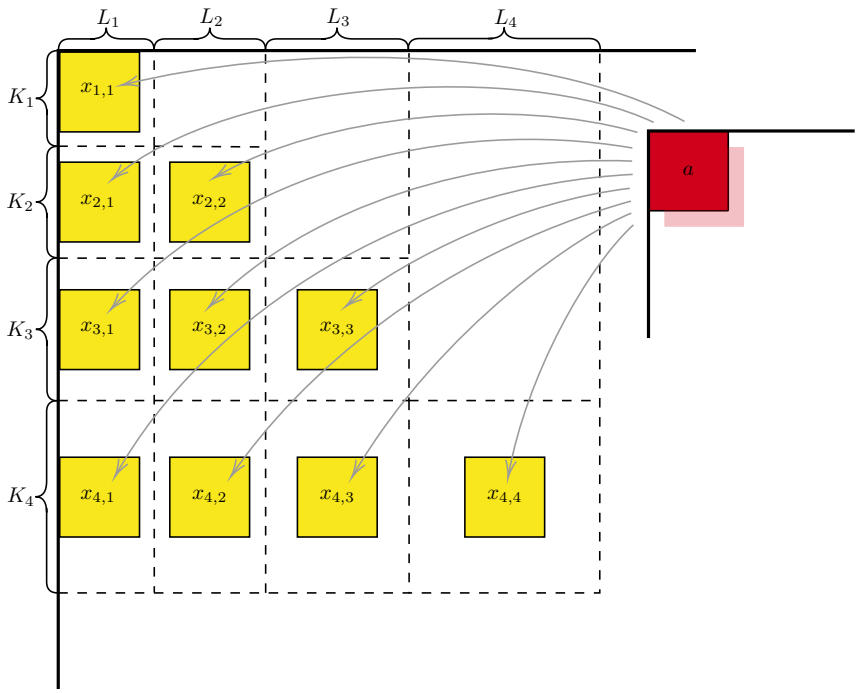
or

$$\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K_i\}_i \otimes \{L_j\}_j \curvearrowleft$$

若 a 的选取无关紧要。

例3.3. 对于情形 $G = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} :\ j \le i\}$，下图有助于理解 $a \in \mathcal{B}(H')$ 在如下形式的表示中的作用

$$\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G} \overset{b.s}{\boxplus} \{K_i\}_i \otimes \{L_j\}_j \curvearrowleft a.$$



在上图中，黄色方块对应于算子 $x_{i,\ j}$ 在其支撑上的限制，而红色方块对应于算子 a 在其支撑上的限制。

注 3.4.

(1) 假设 $\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G}$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 中的一个序列，且 $\{\xi_i'\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{\eta_i'\}_{i=1}^{\infty}$ 是 H' 中的两个正交归一向量序列。容易看出

$$\left\{x_{i,j}\otimes e_{\xi_i',\eta_j'}\right\}_{(i,j)\in G}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{H\otimes_2\xi_i'\}_i\otimes\{H\otimes_2\eta_j'\}_j.$$

假设 $b\in\mathcal{B}(H')$ 且

$$\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_i\}_i\otimes\{L_j\}_j.$$

我们有

$$\{x_{i,j}\otimes b\}_{(i,j)\in G}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_i\otimes_2 H'\}_i\otimes\{L_j\otimes_2 H'\}_j$$

and

$$\{b\otimes x_{i,j}\}_{(i,j)\in G}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{H'\otimes_2 K_i\}_i\otimes\{H'\otimes_2 L_j\}_j.$$

(2) 假设

$$\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_i\}_i\otimes\{L_j\}_j.$$

假设 $\{u_i\}_i$ 是从 $\{K_i\}_i$ 到 H' 的等距映射序列，且 $\{v_j\}_j$ 是从 $\{L_j\}_j$ 到 H'的等距映射序列，并且 $\widehat{\ }u$ 是式（3.2）中给出的等距映射，同样地，$\widehat{\ }v_j$和 $\widehat{\ }v$ 由下式给出

$$\widehat{v_j}:\eta\in L_j\mapsto v_j(\eta)\otimes e_j\in H'\otimes_2\ell_2,\tag{3.3}$$

and

$$\widehat{v}:\sum_j\eta_j\mapsto\sum_j v_j(\eta_j)\otimes e_j,$$

其中，对每个 j，$\eta_j\in L_i$ 都成立，使得对每个 j，$\grave{\mathrm{U}}v|_{L_j}=\grave{\mathrm{U}}v_j$ 都成立。存在一个从 $\mathrm{span}\left(\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G}\right)$ 到 $\mathcal{B}(H'\otimes_2\ell_2)$ 的线性嵌入，由下式给出

$$x\in[x_{i,j}]_{(i,j)\in G}\mapsto\widehat{u}x\widehat{v}^*.$$

注意，$\hat{\mathrm{U}}u\ell(x) = \hat{\mathrm{U}}u$ 且 $r(x)\hat{\mathrm{U}}v^* = \hat{\mathrm{U}}v^*$，其中 $\ell(x)$（分别为 $r(x)$）表示 x 的左（分别为右）支撑。

对于任意仅含有限个非零元素的标量序列 $\{\alpha_{i,j}\}_{(i,j)\in G}$，有

$$\begin{aligned}\widehat{u}\Big(\sum_{(i,j)\in G}\alpha_{i,j}x_{i,j}\Big)\widehat{v}^* &= \sum_{(i,j)\in G}\alpha_{i,j}\widehat{u}x_{i,j}\widehat{v}^*\\ &= \sum_{(i,j)\in G}\alpha_{i,j}\widehat{u_i}x_{i,j}\widehat{v_j}^*\\ &\overset{(3.1),(3.3)}{=} \sum_{(i,j)\in G}\alpha_{i,j}(u_i x_{i,j}{v_j}^*)\otimes(\cdot|e_j)e_i.\end{aligned}$$

特别地，若

$$\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{u_i : K_i \to H'\}_i \otimes \{v_j : L_j \to H'\}_j \curvearrowleft a,$$

then

$$\widehat{u}\Big(\sum_{(i,j)\in G}\alpha_{i,j}x_{i,j}\Big)\widehat{v}^* = \sum_{(i,j)\in G}\alpha_{i,j}\ a\otimes(\cdot|e_j)e_i = a\otimes c,$$

其中 $c = \sum_{(i,j)\in G}\alpha_{i,j}(\cdot|e_j)e_i \in \mathcal{B}(\ell_2)$。由于 c 是有限秩的，因此存在两个标准正交序列 $\{f_l\}_l$ 和 $\{g_l\}_l$，它们属于 ℓ_2，且满足 $c = \sum_l s_l(c)(\cdot|g_l)f_l$。于是

$$\widehat{u}\Big(\sum_{(i,j)\in G}\alpha_{i,j}x_{i,j}\Big)\widehat{v}^* = a\otimes c = \sum_l s_l(c)\cdot a\otimes(\cdot|g_l)f_l.$$

因此，若 a是紧算子，则存在两个标准正交序列 $\{\xi'_k\}_k$和 $\{\eta'_k\}_k$，它们属于 H'，且满足 $a = \sum_k s_k(a)(\cdot|\eta'_k)\xi'_k$。因此，

$$\widehat{u}\Big(\sum_{(i,j)\in G}\alpha_{i,j}x_{i,j}\Big)\widehat{v}^* = a\otimes c = \sum_{k,l}s_k(a)s_l(c)\cdot\big(\cdot|\eta_k\otimes g_l\big)\xi_k\otimes f_l.$$

这意味着 $\sum_{(i,j)\in G}\alpha_{i,j}x_{i,j}$ 的奇异值序列是 $\big\{s_k(a)s_l(c)\big\}_{k,l}$的降序重排。

(3) 假设

$$\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K_i\}_i \otimes \{L_j\}_j \curvearrowleft a.$$

如果还存在由H 中的两两正交的闭子空间构成的其他序列 $\{K'_i\}_i$ 和 $\{L'_j\}_j$，使得

$$\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K'_i\}_i \otimes \{L'_j\}_j,$$

then

$$\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K'_i\}_i \otimes \{L'_j\}_j \curvearrowleft a.$$

事实上，注意到对于每个$(i,\ j)\in G$，$\ell(x_{i,\ j})\subset K_i\cap K'_i$且$r(x_{i,\ j})\subset L_j\cap L'_j$，因此我们有

$$\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K_i\cap K'_i\}_i \otimes \{L_j\cap L'_j\}_j \curvearrowleft a.$$

可以看出，$\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G}$ 是由与$\{K'_i\}_i$ 和 $\{L'_j\}_j$相关联的 a 生成的块序列。

下面，对于由单个算子生成的给定块序列，我们给出一个判据，用以判断其“块子序列”是否由另一个算子生成。

定理 3.5。设 G 和 U 是两个非空的 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 集合，且存在两个由非空、两两不相交的有限 $\mathbb{N}$集合组成的序列$\{I_i\}_i$ 和 $\{J_j\}_j$，使得

$$I_i\times J_j\subset G \qquad \textit{for every } (i,j)\in U.$$

假设$\{x_{i',j'}\}_{(i',j')\in G}$ 是 $\mathcal{B}(H)$中的一个序列，且

$$\{x_{i',j'}\}_{(i',j')\in G} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K_{i'}\}_{i'} \otimes \{L_{j'}\}_{j'} \curvearrowleft a \in \mathcal{B}(H').$$

如果存在一个序列 $\left\{\sum_{(i',j')\in I_i\times J_j} \alpha_{i',j'}^{(i,j)}(\cdot|e_{j'})e_{i'}\right\}_{(i,j)\in U}$ 属于 $\mathcal{B}(\ell_2)$ 且满足

$$\left\{\sum_{(i',j')\in I_i\times J_j} \alpha_{i',j'}^{(i,j)}(\cdot|e_{j'})e_{i'}\right\}_{(i,j)\in U} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \left\{[e_{i'}]_{i'\in I_i}\right\}_i \otimes \left\{[e_{j'}]_{j'\in J_j}\right\}_j \curvearrowleft c \in \mathcal{B}(H''),$$

then

$$\left\{\sum_{(i',j')\in I_i\times J_j} \alpha_{i',j'}^{(i,j)}x_{i',j'}\right\}_{(i,j)\in U} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \left\{[\cup_{i'\in I_i}K_{i'}]\right\}_i \otimes \left\{[\cup_{j'\in J_j}L_{j'}]\right\}_j \curvearrowleft a\otimes c.$$

证明。 假设 $a \in \mathcal{B}(H')$ 和 $c \in \mathcal{B}(H'')$，并假设

$$\{x_{i',j'}\}_{(i',j')\in G} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{u_{i'} : K_{i'} \to H'\}_{i'} \otimes \{v_{j'} : L_{j'} \to H'\}_{j'} \curvearrowleft a$$

and

$$\left\{\sum_{(i',j')\in I_i\times J_j} \alpha_{i',j'}^{(i,j)}(\cdot|e_{j'})e_{i'}\right\}_{(i,j)\in U}$$
$$\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\left\{u_i' : \sum\nolimits_{i'\in I_i} \mathbb{C}e_{i'} \to H''\right\}_i \otimes \left\{v_j' : \sum_{j'\in J_j} \mathbb{C}e_{j'} \to H''\right\}_j \curvearrowleft c.$$

Put

$$K_i' = [\cup_{i'\in I_i}K_{i'}] \qquad \text{and} \qquad L_j' = [\cup_{j'\in I_j}L_{j'}],$$

令

$$u_i'' : \sum_{i'\in I_i} \xi_{i'} \in K_i' = \sum_{i'\in I_i} K_{i'} \longmapsto \sum_{i'\in I_i} u_{i'}(\xi_{i'}) \otimes u_i'(e_{i'})$$

and

$$v_j'' : \sum_{j'\in I_j} \xi_{j'} \in L_j' = \sum_{j'\in J_j} L_{j'} \longmapsto \sum_{i'\in I_i} v_{j'}(\xi_{j'}) \otimes v_j'(e_{j'}).$$

因此,

$$\begin{aligned} u_i''\Big(\sum_{(i',j')\in I_i\times J_j} \alpha_{i',j'}^{(i,j)}x_{i',j'}\Big)v_j''^* &= \sum_{(i',j')\in I_i\times J_j} \alpha_{i',j'}^{(i,j)}\big(u_{i'}x_{i',j'}v_{j'}^*\big) \otimes \big(v_j'^*(\cdot)\big|e_{j'}\big)u_i'(e_{i'}) \\ &= a\otimes \sum_{(i',j')\in I_i\times J_j} \alpha_{i',j'}^{(i,j)}(v_j'^*(\cdot)\big|e_{j'}\big)u_i'(e_{i'}) \\ &= a\otimes u_i'\Big(\sum_{(i',j')\in I_i\times J_j} \alpha_{i',j'}^{(i,j)}(\cdot|e_{j'})e_{i'}\Big)v_j'^* \\ &= a\otimes c. \end{aligned}$$

因此,

$$\left\{\sum_{(i',j')\in I_i\times J_j} \alpha_{i',j'}^{(i,j)}x_{i',j'}\right\}_{(i,j)\in U}$$
$$\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\left\{u_i'' : [\cup_{i'\in I_i}K_{i'}] \to H'\otimes_2 H''\right\}_i \otimes \left\{v_j'' : [\cup_{j'\in J_j}L_{j'}] \to H'\otimes_2 H''\right\}_j \curvearrowleft a\otimes c.$$

□

注 3.6. 定理 3.5的以下推论将在本文中频繁使用。若有两个标量序列 $\{(\alpha_{i'}^{(i)})_{i'\in I_i}\}_i$ 和 $\{(\beta_{j'}^{(j)})_{j'\in J_j}\}_j$ 满足以下条件

$$\left\|(\alpha_{i'}^{(i)})_{i'\in I_i}\right\|_{\ell_2} = \alpha \quad \text{and} \quad \left\|(\beta_{j'}^{(j)})_{j'\in J_j}\right\|_{\ell_2} = \beta \qquad \text{for every } (i,j)\in U.$$

以及矩阵

$$\left(\alpha_{i',j'}^{(i,j)}\right)_{(i',j')\in I_i\times J_j} = \left(\alpha_{i'}^{(i)}\beta_{j'}^{(j)}\right)_{(i',j')\in I_i\times J_j}$$

对于每个 $(i,j)\in U$，则有

$$\left\{\sum_{(i',j')\in I_i\times J_j}\alpha_{i',j'}^{(i,j)}(\cdot|e_{j'})e_{i'}\right\}_{(i,j)\in U}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\left\{[e_{i'}]_{i'\in I_i}\right\}_i\otimes\left\{[e_{j'}]_{j'\in J_j}\right\}_j\curvearrowleft\alpha\beta(\cdot|e_1)e_1$$

因此，

$$\left\{\sum_{(i',j')\in I_i\times J_j}\alpha_{i',j'}^{(i,j)}x_{i',j'}\right\}_{(i,j)\in U}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\left\{[\cup_{i'\in I_i}K_{i'}]\right\}_i\otimes\left\{[\cup_{j'\in J_j}L_{j'}]\right\}_j\curvearrowleft\alpha\beta a\otimes(\cdot|e_1)e_1,$$

其中， a 是定理3.5 中给出的算子。

定义 3.7. 设 $\{G_n\}_{n\geq1}$ 是由$_{\text{b.s}}\mathbb{N}\times\mathbb{N}$的互不相交的非空子集组成的一个序列（有限或无限）。对于 $\left\{\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G_n}\right\}_{n\geq1}$，在 $\mathcal{B}(H)$ 中满足 $\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G_n}\boxplus\{K_i\}_i\otimes\{L_j\}_j\curvearrowleft$ 对所有 $n\geq1$，我们称

$$\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G_n}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_i\}_i\otimes\{L_j\}_j\curvearrowleft$$

对于所有 $n\geq1$，若它们由一个算子和一个共同的等距映射系统生成，即存在等距映射序列 $\{u_i:K_i\to H'\}_i$（与 n 无关）、等距映射序列 $\{v_j:L_j\to H'\}_j$（与 n 无关），以及 $\mathcal{B}(H')$ 中的序列 $\{a_n\}_{n\geq1}$，使得对每个 n，都有

$$\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in G_n}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{u_i:K_i\to H'\}_i\otimes\{v_j:L_j\to H'\}_j\curvearrowleft a_n.$$

从现在起，假设 E 是一个可分拟巴拿赫对称序列空间。

以下结果是一个众所周知的事实，参见例如 [7, 命题 2.1]。

定理 3.8. 设 a、$b\in\mathcal{C}_E$ 满足 $\|\left(\begin{smallmatrix}0&b\\a&0\end{smallmatrix}\right)\|_{\mathcal{C}_E(\ell_2\oplus\ell_2)}=1$ [1]。假设存在两个序列 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 和 $\{y_k\}_{k=1}^\infty$，它们属于 $\mathcal{C}_E$ 且满足

$$\{x_k\}_{k=1}^\infty\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_k\}_{k=1}^\infty\otimes L_0\curvearrowleft a$$

and

$$\{y_k\}_{k=1}^\infty\overset{\text{b.s}}{\boxplus}K_0\otimes\{L_k\}_{k=1}^\infty\curvearrowleft b,$$

其中 $\{K_k\}_{k=0}^\infty$ 和 $\{L_k\}_{k=0}^\infty$ 是 H 中两个相互正交的闭子空间序列 .
Then, we have

$$\{x_k+y_k\}_{k=1}^\infty\simeq\{e_k^H\}_{k=1}^\infty$$

*(*注意，“$\simeq$”表示这两个基本序列等距等价*)*，其中 $\{e_k^H\}_{k=1}^\infty$是 ℓ_2 的自然基（参见定义2.5）。

以下引理证明中所用的思路可见于 [5,7,26,31]。

引理 3.9。 设 $\{K_i\}_{i=1}^\infty$ 是 H中一个两两正交的闭子空间序列，$\{L_i\}_{i=1}^\infty$是 H中一个（不一定两两正交的）有限维子空间序列。假设 $\{x_{i,j}\}_{1\leq j\leq i<\infty}$ 是 $\mathcal{C}_E$ 中的一个有界序列，满足

$$\{x_{i,j}\}_{i=j}^\infty\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_i\}_{i=1}^\infty\otimes L_j\qquad\text{for every } j,$$

对于任意正数序列 $\{\varepsilon_{k,j}\}_{k,\ j=1}^\infty$ [2]，，存在一个严格递增的[3] 正整数$\{i_k\}_{k=1}^\infty$ 序列，以及一个 $\mathcal{C}_E$ 中的序列 $\{y_{i_k,j}\}_{1\leq j\leq i_{k-1}<\infty}$，满足

$_{\text{b.s}}(1)\,\{y_{i_k,j}\}_{j\leq i_{k-1}<\infty}\boxplus\{K_{i_k}\}_{k=1}^\infty\otimes L_j\curvearrowleft$ 对每个 j，$_{\text{b.s}}(2)$

$\{y_{i_k,j}\}_{j\leq i_{k-1}<\infty}\boxplus\{K_{i_k}\}_{k=1}^\infty\otimes L\curvearrowleft$ 对所有 j 都相容，其中 $L=[\bigcup_{j=1}^\infty L_j]$，并且(3) $\|x_{i_k,\ j}-y_{i_k,\ j}\|_{\mathcal{C}_E}\leq\varepsilon_{k,\ j}$ 对每个 $k\geq2$ 和 $1\leq j\leq i_{k-1}$

---

[1]设 p 为前 ℓ_2 个上的恒等算子，q 为前 ℓ_2个上的恒等算子。对于任意 $x\in B(\ell_2\oplus\ell_2)$，记 $x:=\left(\begin{smallmatrix}pxp&pxq\\qxp&qxq\end{smallmatrix}\right)$。[2]在下文中，我们常假设，对于每个固定的 j，当 $k\to\infty$ 时，$\varepsilon_{k,\ j}\downarrow0$；并且对于每个固定的 k，当 $j\to\infty$ 时，$\varepsilon_{k,\ j}\downarrow0$。[3]在本文中，*“increasing”* 始终表示严格递增。

如果，在一个 此外，若 $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ 相互正交，则可以将 $\{y_{i_k,j}\}_{1\le j\le i_{k-1}<\infty}$ 选为 be

$$\{y_{i_k,j}\}_{j\le i_{k-1}<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}\otimes\{L_j\}_{j=1}^{\infty}\curvearrowleft$$

对所有 $j\ge 1$ 都相容。

证明。不失一般性，我们可以假设 $\{\varepsilon_{i,j}\}_{i=j}^{\infty}$ 是一个递减序列，且对每个 j 都有 $L_j\neq\{0\}$。令 $m_j:=\dim(L_1+\cdots+L_j)$，我们可以选取一个标准正交序列 $\{\eta_{j'}\}_{1\le j'\le m_j}$，使得 $L_1+\cdots+L_j=$ 张成空间 $(\{\eta_1,\ldots,\eta_{m_j}\})$。注意到，对于每个 j，$\dim(\mathrm{im}(x_{i,\ j}))\le\dim(L_j)$，我们可以选取一个由正交序列组成的序列

$$\left\{\xi_1^i,\cdots,\xi_{n_1^i}^i,\cdots,\xi_{n_{i-1}^i+1}^i,\cdots,\xi_{n_i^i}^i\right\}\subseteq K_i\qquad i=1,2,\cdots$$

由正交归一向量组成，其中对每个 $1\le j\le i$ 都有 $n_0^i=0$ 和 $n_j^i\le m_j$，使得

$$x_{i,j}=\sum_{i'=1}^{n_j^i}\sum_{j'=1}^{m_j}\alpha_{i',j'}^{(i,j)}(\cdot|\eta_{j'})\xi_{i'}^i,$$

其中 $\left\{\alpha_{i'\ ,\ j'}^{(i,j)}\right\}_{1\le i'\le n_j^i,\ 1\le j'\le m_j}$ 是一个标量序列。如果 L_j 的各项 $1\le j<\infty$ 两两正交，那么我们可以写成

$$x_{i,j}=\sum_{i'=1}^{n_j^i}\sum_{j'=m_{j-1}+1}^{m_j}\alpha_{i',j'}^{(i,j)}(\cdot|\eta_{j'})\xi_{i'}^i$$

对于任意 $1\le j\le i$（置 $m_0=0$），即 $\alpha_{i'\ ,\ j'}^{(i,j)}=0$ 对所有 $1\le j'\le m_{j-1}$。

由有限维巴拿赫空间的单位球的紧性，$\mathbb{M}_{n_i^j,\ m_j}$，并通过对子序列进行归纳法，存在

（1）正整数的递增序列 $\{i_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$，$j=1,2,\cdots$，其中 $\{i_k^{(j+1)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\{i_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ 的子序列，且 $i_1^{(j)}<i_1^{(j+1)}$；（2）一个非递减序列 $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$，满足对所有 k都有 $n_j\le n_j^{i_k^{(j)}}$；以及（3）标量序列 $\left\{\alpha_{i'\ ,\ j'}^{j}\right\}_{1\le i'\le n_j,\ 1\le j'\le m_j}$，

使得对于每个 $l\ge 2$ 和 $1\le j\le i_1^{(l-1)}$，以及所有 $k\ge 1$，我们都有

$$\left\|x_{i_k^{(j)},j}-\sum_{i'=1}^{n_j}\sum_{j'=1}^{m_j}\alpha_{i',j'}^{j}(\cdot|\eta_{j'})\xi_{i'}^{i_k^{(l)}}\right\|_{\mathcal{C}_E}\le\varepsilon_{l-1+k,j}.$$

令 $i_k=i_1^{(k)}$ 和，即可完成证明

$$y_{i_k,j}=\sum_{i'=1}^{n_j}\sum_{j'=1}^{m_j}\alpha_{i',j'}^{j}(\cdot|\eta_{j'})\xi_{i'}^{i_k}$$

对于每个 $k\ge 2$ 和 $1\le j\le i_{k-1}$。 □

注 3.10. 定理 3.9 证明中使用的论证适用于 $\{x_{i,j}\}_{1\le i\le j<\infty}$ 中元素的上三角序列 $\mathcal{C}_E$。

推论 3.11. 设 L 是 H 的有限维子空间，且 $\{K_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 H 的两两正交的闭子空间序列。假设 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{C}_E$ 中的有界序列，满足

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_k\}_{k=1}^{\infty}\otimes L.$$

给定一个正数序列 $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$，存在一个由正整数组成的递增序列 $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$，以及一个属于 $\mathcal{C}_E$ 的序列 $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$，满足

$$\{y_i\}_{i=1}^{\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}\otimes L\curvearrowleft$$

使得 $\|x_{k_i}-y_i\|_{\mathcal{C}_E}\le\varepsilon_i$ 对所有 i均成立。

4. Decompositions of operators on $\mathcal{C}_E$

从现在起，除非另有说明，我们总是假设

- $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是希尔伯特空间 H中的两列正交归一向量，
- $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是希尔伯特空间 H中的两列相互正交的有限维子空间，
- E 是一个可分拟巴拿赫对称序列空间 E，且 $c_0 \not\hookrightarrow E$（等价地， E具有 Fatou 性质和序连续范数，见下文命题A.3），并且
- $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}$的凹性模为 $2^{\frac{1}{r}-1}$，其中 r是满足$0<r\leq 1$的正数。特别地，对于任何在 $\mathcal{C}_E$中收敛的 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$，我们有

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right\|_{\mathcal{C}_E} \overset{(2.2)}{\leq} 4^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^r\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{4.1}$$

4.1. **作用于 $\mathcal{C}_E$ 上的算子 Arazy 型分解定理。** 下文中，$\hat{}H$、$\hat{}H'$、 $\tilde{H}$ 和 $\tilde{H}'$表示可分无限维希尔伯特空间。回顾一下，$\mathcal{T}_{E,\{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$ 根据（2.10），表示 $\mathcal{C}_E$ 的下三角子空间，即

$$\mathcal{T}_{E,\{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}} = [e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\leq j\leq i<\infty}.$$

Arazy 为可分 Banach算子理想 [7, 之间的同构嵌入建立了一个重要的分解定理1]定理 4：

设 E 和 F 是两个巴拿赫对称序列空间，且 $c_0 \not\hookrightarrow E$。如果 $\mathcal{T}_{F,\{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$同构于 $\mathcal{C}_E$的一个子空间，那么存在一个线性同构 V，将$\mathcal{T}_{F,\{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$ 映入$\mathcal{C}_E$，使得 V可以分解为三个算子 V_1、 V_2 和 V_3之和，即

$$V = V_1 + V_2 + V_3.$$

粗略地说，在 3 个希尔伯特空间的张量积上的表示中，它们分别具有以下性质：

- V_1 具有对角形式，即存在一个序列 $\{c_{i,j}\}_{1\leq j\leq i<\infty}$，使得

$$V_1(e_{\xi_i,\eta_j}) = c_{i,j}\otimes e_{\xi_i,\eta_i}, \qquad 1\leq j\leq i<\infty,$$

- 存在一个元素 $b\in\mathcal{C}_E$，使得

$$V_2(e_{\xi_i,\eta_j}) = b\otimes e_{\xi_{\varphi(i,j)},\eta_1}, \qquad 1\leq j\leq i<\infty,$$

  其中 φ 是将 $\{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 按字典序排列到 $\mathbb{N}$中的映射。特别地，若 $b\neq 0$，则 $\{V_2(e_{\xi_i,\eta_j})\}_{1\leq j\leq i<\infty}$ 等价于无限维可分希尔伯特空间的一组正交归一基。

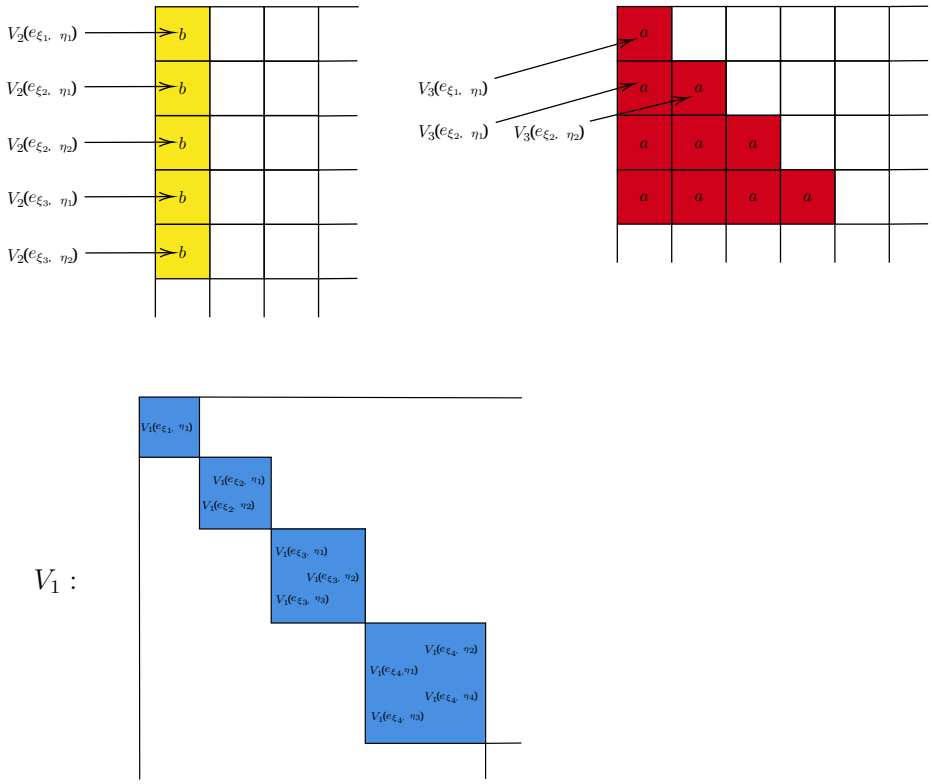
- 存在一个元素 $a\in\mathcal{C}_E$，使得

$$V_3(e_{\xi_i,\eta_j}) = a\otimes e_{\xi_i,\eta_j}, \qquad 1\leq j\leq i<\infty.$$

此外，在 $\mathcal{C}_E$上存在三个投影算子 P_i, $i=1$，2，3，使得

$$V_i = P_iV, \qquad i=1,2,3.$$

以下图示有助于理解 V_1、 V_2 和 V_3的具体形式：



下面，我们将 [7, 定理 4。1] 推广到拟巴拿赫算子理想上一般有界线性算子的情形（参见定理 4.14）。在下文的定理 4.1 中， T_1 类似于上文的V_1， T_2+T_3 类似于上文的 V_2 （参见注记 4.13），而 T_4 类似于上文的 V_3 （参见引理 4.10和注记4.11）。以下定理给出了更为详尽的表示，并展示了如何通过对原算子进行扰动，得到具有“良好”分解的算子——这一点也是随后证明定理5.15 和5.23的关键。

定理 4.1。设 $T:\mathcal{T}_{E,\ \{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}\to\mathcal{C}_E$ 是一个有界算子，且满足$p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i]}T(\cdot)p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty}L_i]}=T$。给定一个正数序列 $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^{\infty}$，则存在两个由正整数组成的递增序列 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$，以及4 个算子 T_1、T_2、T_3、$T_4\in\mathcal{B}\big(\mathcal{T}_{E,\ \{\xi_{i_{k+1}},\eta_{i_k}\}_{k=2}^{\infty}},\ \mathcal{C}_E\big)$，其形式为

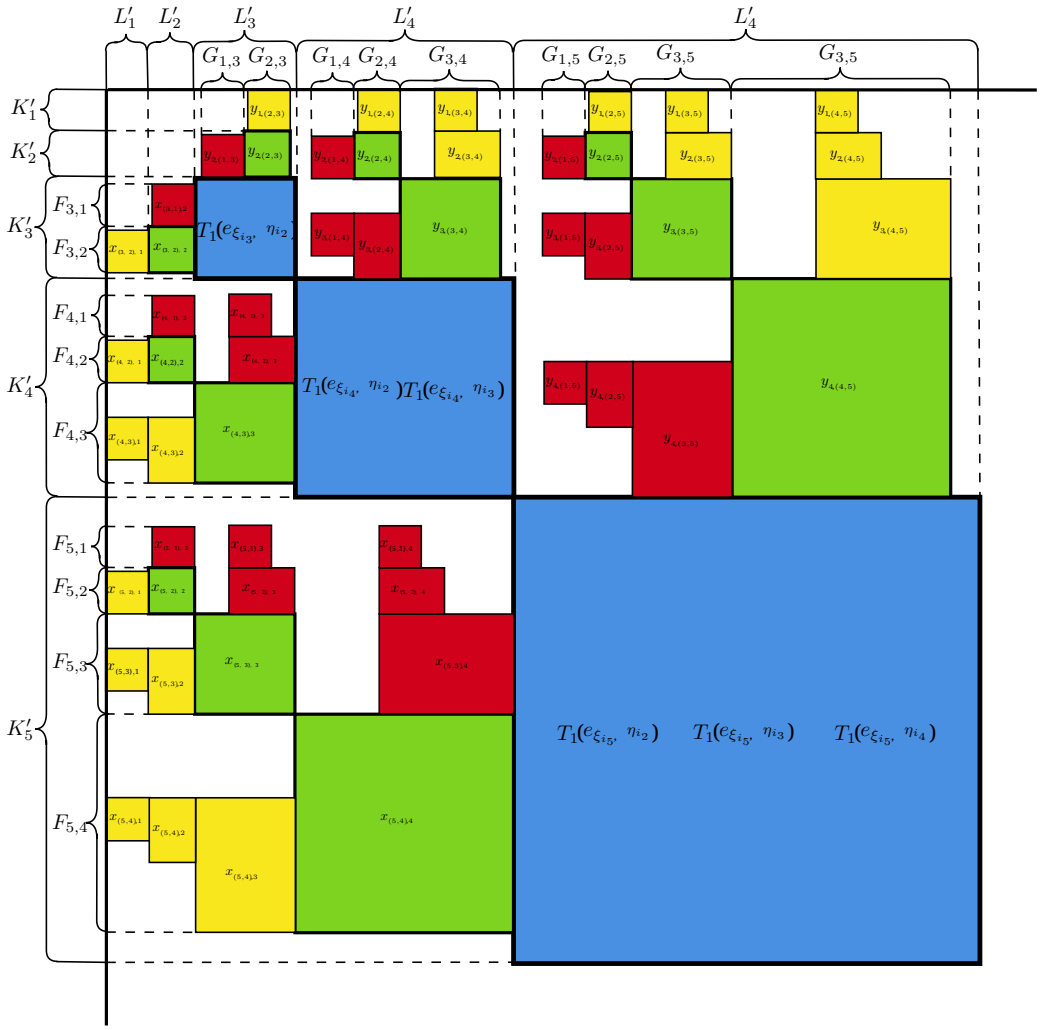
$$T_1(e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}})=p_{K'_k}T(e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}})p_{L'_k},\qquad 2\le l<k<\infty, \tag{4.2}$$

$$T_2(e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}})=x_{(k,l),l}+y_{l,(l,k)},\qquad 2\le l<k<\infty, \tag{4.3}$$

$$T_3(e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}})=\sum_{m=1}^{l-1}\big(x_{(k,l),m}+y_{m,(l,k)}\big),\qquad 2\le l<k<\infty, \tag{4.4}$$

$$T_4(e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}})=\sum_{m=1}^{l-1}\big(x_{(k,m),l}+y_{l,(m,k)}\big),\qquad 2\le l<k<\infty, \tag{4.5}$$

使得 $T_1+T_2+T_3+T_4$ 是$T|_{\mathcal{T}_{E,\{\xi_{i_{k+1}},\eta_{i_k}\}_{k=2}^{\infty}}}$的一个扰动，该扰动与 $\{\varepsilon_l\}_{l=2}^{\infty}$的*Schauder* 分解 $\big\{[e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}}]_{k=l+1}^{\infty}\big\}_{l=2}^{\infty}$ 相关联，其中



算子 T_1 （分别对应 T_2、 T_3、 T_4）对应蓝色部分（分别对应绿色部分、黄色部分、红色部分）。

(1) $K'_k = [\bigcup_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} K_i]$ 与$L'_k = [\bigcup_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} L_i]$ 对每个 $k \geq 1$ （令 $n_0 = 0$），(2) $\{F_{k,l}\}_{1\leq l<k}$ 是 K'_k 的两两正交子空间的有限序列，对每个 k，(3) $\{G_{l,k}\}_{1\leq l<k}$ 是 L'_k 的两两正交子空间的有限序列，对每个 k， b.s(4) $\left\{x_{(k,l),m}\right\}_{\substack{1\leq l<k<\infty\\ 1\leq m<k<\infty}} \boxplus \{F_{k,l}\}_{1\leq l<k<\infty} \otimes \{L'_m\}_{m=1}^{\infty}$ 使得$x_{(2,1),1} = 0$,

$$\left\{x_{(k,l),m}\right\}_{2\leq m=l<k<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \left\{F_{k,l}\right\}_{2\leq l<k<\infty} \otimes \left\{L'_m\right\}_{m=2}^{\infty} \curvearrowleft \hat{c}_l \tag{4.6}$$

相容[1] 对所有 $l \geq 2$,

$$\left\{x_{(k,l),m}\right\}_{1\leq m<l<k<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \left\{F_{k,l}\right\}_{2\leq l<k<\infty} \otimes \left\{L'_m\right\}_{m=1}^{\infty} \curvearrowleft \hat{b}_m \tag{4.7}$$

对所有 $m \geq 1$，均相容

$$\left\{x_{(k,m),l}\right\}_{1\leq m<l<k<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \left\{F_{k,m}\right\}_{1\leq m<k-1<\infty} \otimes \left\{L'_l\right\}_{l=2}^{\infty} \curvearrowleft \hat{a}_m \tag{4.8}$$

[1]这里，$\hat{c}_l$ 是希尔伯特空间$\hat{}H$上的一个算子，并且存在两个等距映射序列 $\{\hat{}u_{k,\ l} : F_{k,\ l} \to \hat{}H\}_{2\leq l<k<\infty}$ 以及 $\{\hat{}v_l : L'_m \to \hat{}H\}_{m=2}^{\infty}$，使得对所有 $2 \leq m = l < k < \infty$,

$$\hat{u}_{k,m} x_{(k,l),m} \hat{v}_m = \hat{u}_{k,l} x_{(k,l),l} \hat{v}_l = \hat{c}_l.$$

$\hat{}$ $\hat{}$对所有 $m \geq 1$均相容，并且 $\|b_m\|_{\mathcal{C}_E} \leq \varepsilon_m \|b_1\|_{\mathcal{C}_E}$ 和 $\|\hat{a}_m\|_{\mathcal{C}_E} \leq \varepsilon_m \|\hat{a}_1\|_{\mathcal{C}_E}$ 对每个$m \geq 2$,

(5) $\{y_{m,(l,k)}\}_{\substack{1\leq m<k<\infty \\ 1\leq l<k<\infty}} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K'_m\}_{m=1}^{\infty} \otimes \{G_{l,k}\}_{1\leq l<k<\infty}$ 使得 $y_{1,(1,2)} = 0$,

$$\{y_{m,(l,k)}\}_{2\leq m=l<k<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K'_m\}_{m=2}^{\infty} \otimes \{G_{l,k}\}_{2\leq l<k<\infty} \curvearrowleft \tilde{c}_l \tag{4.9}$$

对所有 $l \geq 2$ 均相容,

$$\{y_{m,(l,k)}\}_{1\leq m<l<k<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K'_m\}_{m=1}^{\infty} \otimes \{G_{l,k}\}_{2\leq l<k<\infty} \curvearrowleft \tilde{b}_m \tag{4.10}$$

对所有 $m \geq 1$ 均相容,

$$\{y_{l,(m,k)}\}_{1\leq m<l<k<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K'_l\}_{l=2}^{\infty} \otimes \{G_{m,k}\}_{1\leq m<k-1<\infty} \curvearrowleft \tilde{a}_m \tag{4.11}$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$对所有 $m \geq 1$ 均相容，且 $\|b_m\|_{\mathcal{C}_E} \leq \varepsilon_m \|b_1\|_{\mathcal{C}_E}$ 并且对每个$m \geq 2$, $\|\tilde{a}_m\|_{\mathcal{C}_E} \leq \varepsilon_m \|\tilde{a}_1\|_{\mathcal{C}_E}$。

注 4.2。 设 $\{x_{i,j}\}_{1\leq j\leq i<\infty}$ 是（拟）巴拿赫空间 X 的三角序列，且 M 是一个正数，使得

(a) $\{[x_{i,j}]_{i=j}^{\infty}\}_{j=1}^{\infty}$ 是 X 的 Schauder 分解；(b) 对每个 j，$\{x_{i,j}\}_{i=j}^{\infty}$ 与 ℓ_2 的单位基 M-等价；(c) 对每个 i 以及标量的有限序列 $\{\alpha_j\}_{j=1}^{i}$，$\big\|\sum_{j=1}^{i} \alpha_j x_{i,j}\big\| \leq M\big(\sum_{j=1}^{i} |\alpha_j|^2\big)^{1/2}$。

假设 T 是从 X 到 $\mathcal{C}_E$的有界算子。定理 4.1 的结论仍然成立。

注 4.3。 设 F 是另一个可分拟巴拿赫对称序列空间。若考虑有界算子 $T\colon \mathcal{T}_{F,\{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}} \to \mathcal{C}_E$，使得 $p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i]} T(\cdot) p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i]} = T$，则

(1) 上述定理的结论仍然成立。(2) 如果 $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的选取满足 $p_{K_i}(\mathrm{im}(T)) p_{L_j} = \{0\}$ 对每个 $1 \leq i < j < \infty$均成立 $K_i = [\xi_i]$（例如，$L_i = [\eta_i]$，以及 $\mathrm{im}(T) \subset [e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\leq j\leq i<\infty}$），则 $(y_{m,\,(l,k)})$ 在（4.3）、（4.4）和（4.5）中的值均为 0。

为方便起见，以下仅考虑 $E = F$ 的情形。

证明。为方便起见，对所有 i 和 j，记 $e_{i,j} := (\cdot|\eta_j)\xi_i$。令 $\{\delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ 和 $\{\delta_{k,j}\}_{k,j=1}^{\infty}$ 为固定的、足够小的正数序列。

由于对于每个 j，$\{e_{i,j}\}_{i=j}^{\infty}$ 与 ℓ_2 的标准基等距，因此可得，对于每个 j，$\{T(e_{i,j})\}_{i=j}^{\infty}$ 是弱零的。通过标准扰动论证，存在两个严格递增的正整数序列$\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$\left\| T(e_{i_{k+1},j}) - \left(p_{[\bigcup_{l=1}^{n_{k+1}} K_l]} T(e_{i_{k+1},j}) p_{[\bigcup_{l=1}^{n_{k+1}} L_l]} - p_{[\bigcup_{l=1}^{n_k} K_l]} T(e_{i_{k+1},j}) p_{[\bigcup_{l=1}^{n_k} L_l]} \right) \right\|_{\mathcal{C}_E} \leq \delta_{k,j},$$

对于 $j = 1, 2, \ldots\ldots, i_k$ 且对于每个 k。因此，不失一般性，我们可以假设

$$T(e_{i_{k+1},j}) = p_{[\bigcup_{l=1}^{n_{k+1}} K_l]} T(e_{i_{k+1},j}) p_{[\bigcup_{l=1}^{n_{k+1}} L_l]} - p_{[\bigcup_{l=1}^{n_k} K_l]} T(e_{i_{k+1},j}) p_{[\bigcup_{l=1}^{n_k} L_l]}, \tag{4.12}$$

$j = 1, 2, \ldots\ldots, i_k$，对于每个 k。我们令 $K'_k = [\bigcup_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} K_l]$，并令 $L'_k = [\bigcup_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} L_l]$，对于每个 $k \geq 1$（令 $n_0 = 0$）。

定理 4.1 的证明分为以下 3 个引理。

引理 4.4。 在定理 *4.1*的假设下，存在一个递增序列 $\{i_s\}_{s=1}^{\infty}$，由正整数组成；还存在一个有界算子 $T_1 : [e_{i_s,i_t}]_{1\leq t<s<\infty} \to \mathcal{C}_E$ 满足

$$T_1(e_{i_s,i_t}) = p_{K'_s} T(e_{i_s,i_t}) p_{L'_s}$$

对每个 $1 \leq t < s < \infty$ 以及有界算子 $S_2 : [e_{i_s,i_t}]_{1\leq t<s<\infty} \to \mathcal{C}_E$ *(*见 (4.18) 下文*)*，使得 $T_1 + S_2$ 是 $T|_{[e_{i_s,i_t}]_{1\leq t<s<\infty}}$ 所关联的 *Schauder* 分解的小扰动$\{[e_{i_s,i_t}]_{s=t+1}^{\infty}\}_{t=1}^{\infty}$。

证明。 由归纳法和推论 A.7，存在

(1) 对于 $j=1$、2、.....和 $k_s^{(0)}=s$，正整数的递增序列 $\{k_s^{(j)}\}_{s=1}^{\infty}$，使得 $\{k_s^{(j)}\}_{s=1}^{\infty}$ 是 $\{k_s^{(j-1)}\}_{s=1}^{\infty}$ 的子序列，且 $k_1^{(j)}>k_1^{(j-1)}$；(2) 对每个 $j\geq 1$，$R_j\in \mathcal{B}\text{Å}\left[e_{i_{k_s^{(j)}},i_{k_2^{(j-1)}}}\right]_{s=2}^{\infty},\mathcal{C}_E$ ã；(3) $x_s^{(j)},y_s^{(j)},z_s^{(j)}\in\mathcal{C}_E$，其中 $x_s^{(j)}=p_{K_s^{(j)}}x_s^{(j)}p_{L}$ (j) 1，$y_s^{(j)}=p_{K1}y_j^{(j)}p_{L}$ (j)s，并且 $z_s^{(j)}=p_{K_s^{(j)}}T\left(e_{i_{k_s^{(j)}},i_{k_2^{(j-1)}}}\right)p_{L}$ (j)s，对每个 $s\geq 2$ 和 $j\geq 1$ 均成立，其中 $K_s^{(j)}=\left[\bigcup_{i=n_{k_{s-1}^{(j)}}+1}^{n_{k_s^{(j)}}}K_i\right]$，且对每个 $s\geq 1$ 和 $j\geq 1$，$L_s^{(j)}=\left[\bigcup_{i=n_{k_{s-1}^{(j)}}+1}^{n_{k_s^{(j)}}}L_i\right]$（取 $k_0^{(j)}=0$）

使得

$$R_j\left(e_{i_{k_s^{(j)}},i_{k_2^{(j-1)}}}\right)=x_s^{(j)}+y_s^{(j)}+z_s^{(j)},\qquad s=2,3,\ldots, \tag{4.13}$$

并且 $\left\|T|_{\left[e_{i_{k_s^{(j)}},i_{k_2^{(j-1)}}}\right]_{s=2}^{\infty}}-R_j\right\|\leq\delta_j$) 对每个 $j\geq 1$ (注意，若 $\left\{T\left(e_{i_{k_s^{(j-1)}},i_{k_2^{(j-1)}}}\right)\right\}_{s=2}^{\infty}$ 是半归一化的，

那么根据推论A.7，对于每个 $\{t_s\}_{s=2}^{\infty}$ 仅有有限个非零标量的序列，我们可以选取一个合适的序列 $\{k_s^{(j)}\}_{s=1}^{\infty}$ 使得

$$\begin{aligned}\left\|(T-R_j)\left(\sum_{s=2}^{\infty}t_s e_{i_{k_s^{(j)}},i_{k_2^{(j-1)}}}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E}&\leq\frac{\delta_j}{2^{\frac{1}{r}-1}(\|T\|+1)}\left\|T\left(\sum_{s=2}^{\infty}t_s e_{i_{k_s^{(j)}},i_{k_2^{(j-1)}}}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E}\\&\leq\frac{\delta_j}{2^{\frac{1}{r}-1}}\left\|\sum_{s=2}^{\infty}t_s e_{i_{k_s^{(j)}},i_{k_2^{(j-1)}}}\right\|_{\mathcal{C}_E}.\end{aligned}$$

否则，我们可以选取合适的 $\{k_s^{(j)}\}_{s=1}^{\infty}$ 使得 $\left\{T\left(e_{i_{k_s^{(j)}},i_{k_2^{(j-1)}}}\right)\right\}_{s=2}^{\infty}$ 在 $\mathcal{C}_E$ 中趋于 0（速度可以任意快）。因此，我们可以假设 $x_s^{(j)}$和 $y_s^{(j)}$均为 0。)。

接下来，我们考虑序列 $\{k_2^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$。对于任意 $1\leq t<s$，存在唯一的正整数s'，使得 $k_{s'}^{(t+1)}=k_2^{(s)}$（显然，$s'\geq 2$），因此

$$R_{t+1}\left(e_{i_{k_2^{(s)}},i_{k_2^{(t)}}}\right)=R_{t+1}\left(e_{i_{k_{s'}^{(t+1)}},i_{k_2^{(t)}}}\right)\overset{(4.13)}{=}x_{s'}^{(t+1)}+y_{s'}^{(t+1)}+z_{s'}^{(t+1)},$$

并记为

$$x_{s,t}=x_{s'}^{(t+1)},\qquad y_{t,s}=y_{s'}^{(t+1)}\qquad\text{and}\qquad z_{s,t}=z_{s'}^{(t+1)}.$$

由于对每个 j都有 $k_1^{(j)}>k_1^{(j-1)}$，因此可得 $k_2^{(s-1)}\leq k_1^{(s)}\leq k_{s'-1}^{(t+1)}<k_{s'}^{(t+1)}=k_2^{(s)}\leq k_1^{(s+1)}$。为方便起见，不失一般性，我们仍将 $\{i_{k_2^{(s)}}\}_{s=1}^{\infty}$ 分别记为 $\{i_s\}_{s=1}^{\infty}$，将 $\{n_{i_{k_1^{(s+1)}}}\}_{s=0}^{\infty}$记为 $\{n_s\}_{s=0}^{\infty}$。我们有

$$x_{s,t}=p_{K_s'}x_{s,t}p_{[\bigcup_{l=1}^{t}L_l']}\qquad y_{t,s}=p_{[\bigcup_{l=1}^{t}K_l']}y_{t,s}p_{L_s'}\qquad z_{s,t}=p_{K_s'}T\left(e_{i_s,i_t}\right)p_{L_s'}. \tag{4.14}$$

根据定理 2.12，不失一般性，我们可以假设

$$T(e_{i_s,i_t})=x_{s,t}+y_{t,s}+z_{s,t}, \tag{4.15}$$

对每个 $1\leq t<s<\infty$。

根据定理 3.9 和注记3.10，如有必要，取 $\{i_s\}_{s=1}^{\infty}$ 的一个子序列后，我们不妨假设

(1) 存在一个等距映射序列 $\{u_s:K_s'\to H'\}_{s=2}^{\infty}$，一个等距映射 $v:L'\to H'$，其中 $L'=[\bigcup_{l=1}^{\infty}L_l']$，以及 $\mathcal{C}_E(H')$ 中的一个序列 $\{a_t\}_{t=1}^{\infty}$，使得

$$\{x_{s,t}\}_{s=t+1}^{\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{u_s:K_s'\to H'\}_{s=2}^{\infty}\otimes\{v:L'\to H'\}\curvearrowleft a_t \tag{4.16}$$

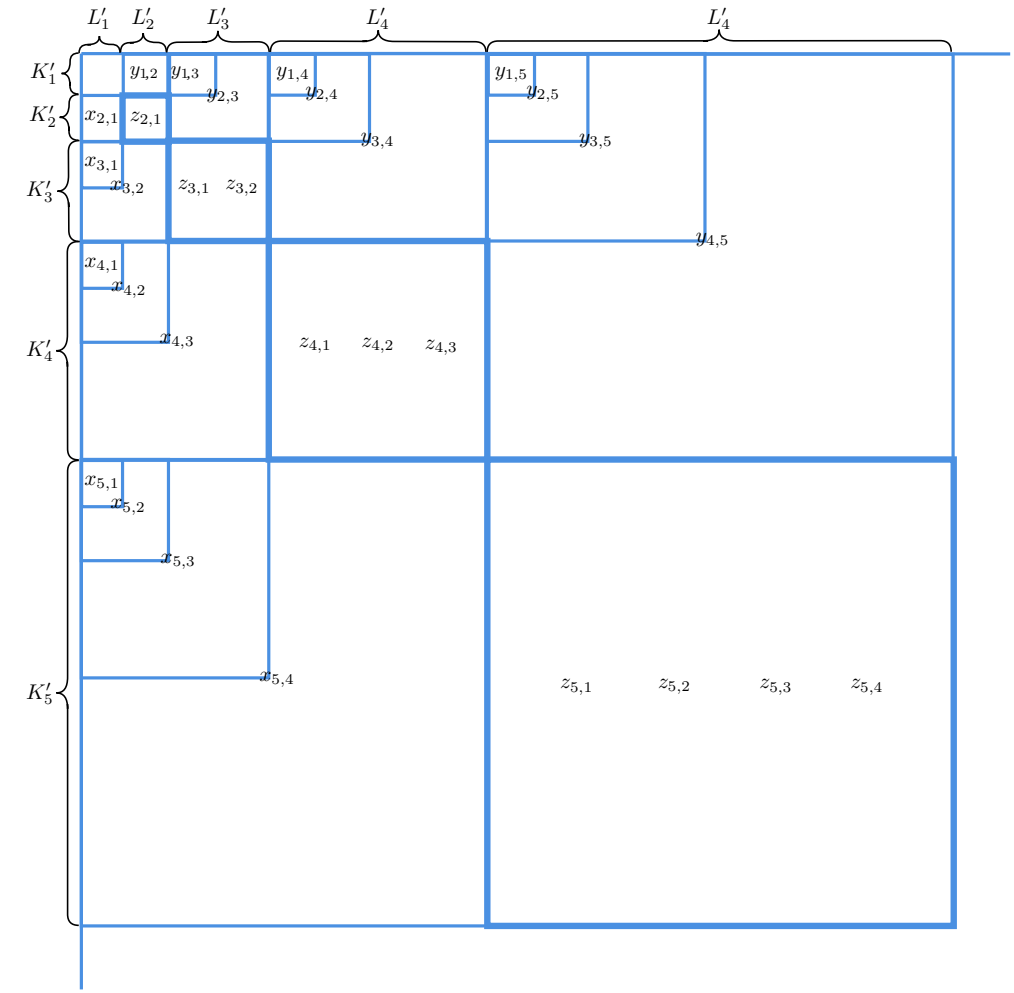
对于每个 $t\geq 1$，并且

（2）存在一个等距映射 $u': K' \to H''$，其中 $K' = [\bigcup_{l=1}^{\infty} K'_l]$，一列等距映射$\{v'_s : L'_s \to H''\}_{s=2}^{\infty}$，以及一个序列 $\{b_t\}_{t=1}^{\infty}$ of in $\mathcal{C}_E(H'')$，使得

$$\{y_{t,s}\}_{s=t+1}^{\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{u' : K' \to H''\} \otimes \{v'_s : L'_s \to H''\}_{s=2}^{\infty} \curvearrowleft b_t \tag{4.17}$$

对每个 $t \geq 1$。

$x_{s,\,t}$, $y_{s,\,t}$ 和 $z_{s,\,t}$ 的位置如下所示。



接下来，我们证明由下式给出的算子 T_1

$$T_1(e_{i_s,i_t}) = p_{K'_s} T(e_{i_s,i_t}) p_{L'_s} = z_{s,t},$$

对于每一个在 $[e_{i_s,i_t}]_{1\leq t<s<\infty}$上有界的 $1 \leq t < s < \infty$。[2]

[2]如果 E 是可分巴拿赫对称序列空间，那么 $P_{\{K'_s,L'_s\}_{s=2}^{\infty}}$ 是一个对角投影，且有界。因此，$T_1 = P_{\{K'_s,L'_s\}_{s=2}^{\infty}} T|_{[e_{i_s,i_t}]_{1\leq t<s<\infty}}$ 自动有界。然而，如果 E 只是一个非赋范的可分拟巴拿赫对称序列空间，则无法保证 $\mathcal{C}_E$ 上的对角投影有界。

对于标量的任意有限序列 $\{\alpha_{s,t}\}_{1\le t<s\le n+1}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\Big\|\sum_{1\le t<s\le n+1}\alpha_{s,t}x_{s,t}\Big\|_{\mathcal{C}_E}\\
\overset{(4.16)}{=}\ &\Big\|\sum_{1\le t<s\le n+1}\alpha_{s,t}x_{n-1+s,t}\Big\|_{\mathcal{C}_E}\\
\overset{(4.14)(4.15)}{=}\ &\Big\|P_{[\bigcup_{l=1}^n K'_{n+l}],[\bigcup_{l=1}^n L'_l]}T\Big(\sum_{1\le t<s\le n+1}\alpha_{s,t}e_{i_{n-1+s},i_t}\Big)\Big\|_{\mathcal{C}_E}\\
\le\ &\|T\|\Big\|\sum_{1\le t<s\le n+1}\alpha_{s,t}e_{i_{n-1+s},i_t}\Big\|_{\mathcal{C}_E}\\
=\ &\|T\|\Big\|\sum_{1\le t<s\le n+1}\alpha_{s,t}e_{i_s,i_t}\Big\|_{\mathcal{C}_E},
\end{aligned}$$

同理，由（4.17），可得

$$\Big\|\sum_{1\le t<s\le n+1}\alpha_{s,t}y_{t,s}\Big\|_{\mathcal{C}_E}\le\|T\|\Big\|\sum_{1\le t<s\le n+1}\alpha_{s,t}e_{i_s,i_t}\Big\|_{\mathcal{C}_E}.$$

因此，存在一个有界算子 $S_2:\ [e_{i_s,i_t}]_{1\le t<s<\infty}\to\mathcal{C}_E$，满足

$$S_2(e_{i_s,i_t})=x_{s,t}+y_{t,s}\tag{4.18}$$

对每个 $1\ \le t<s<\infty$，因此，我们有 $T_1=T|_{[e_{i_s,i_t}]_{1\le t<s<\infty}}-S_2$ [3]，它是有界的。 □

引理 4.5。在引理 *4.4*的假设下，存在一个由正整数组成的递增序列 $\{t_k\}_{k=2}^\infty$，使得存在一个有界算子 $S_3:\ [e_{i_{t_k},i_{t_l}}]_{2\le l<k<\infty}\to\mathcal{C}_E$（见（4.32）下文），满足 S_3 是 $S_2|_{[[e_{i_{t_k},i_{t_l}}]_{2\le l<k<\infty}}$ 关于 *Schauder* 分解 $\big\{[e_{i_{t_k},i_{t_l}}]_{k=l+1}^\infty\big\}_{l=2}^\infty$的一个小扰动。

证明。对于任意有限标量序列 $\{\alpha_t\}_{t=1}^n$，我们有

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{t=1}^n\alpha_t a_t\Big\|_{\mathcal{C}_E(H')}\overset{(4.16)}{=}\ &\Big\|\sum_{t=1}^n\alpha_t x_{n+1,t}\Big\|_{\mathcal{C}_E}\\
\le\ &\Big\|\sum_{t=1}^n\alpha_t(x_{n+1,t}+y_{t,n+1})\Big)\Big\|_{\mathcal{C}_E}\\
=\ &\Big\|S_2\Big(\sum_{t=1}^n\alpha_t e_{i_{n+1},i_t}\Big)\Big\|_{\mathcal{C}_E}\le\|S_2\|\left(\sum_{t=1}^n|\alpha_t|^2\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

类似地，

$$\Big\|\sum_{t=1}^n\alpha_t b_t\Big\|_{\mathcal{C}_E(H'')}\le\|S_2\|\left(\sum_{t=1}^n|\alpha_t|^2\right)^{1/2}.$$

这意味着映射 $(\alpha_t)_{t=1}^\infty\in\ell_2\mapsto\sum_{t=1}^\infty\alpha_t a_t$ 和 $(\alpha_t)_{t=1}^\infty\in\ell_2\mapsto\sum_{t=1}^\infty\alpha_t b_t$ 是有界的，因此 $\{a_t\}_{t=1}^\infty$ 是 $\mathcal{C}_E(H')$中的弱零序列，而 $\{b_t\}_{t=1}^\infty$ 是$\mathcal{C}_E(H'')$中的弱零序列。

[3]Note that $(T|_{[e_{i_s,i_t}]_{1\le t<s<\infty}}-S_2)(e_{i_s,i_t})=x_{s,t}+y_{t,s}+z_{s,t}-x_{s,t}-y_{t,s}=z_{s,t}=T_1(e_{i_s,i_t})$.

注意，$\{v(L'_t)\}_{t=1}^{\infty}$ 和 $\{u'(K'_t)\}_{t=1}^{\infty}$ 是 H'（分别为 H''）中由相互正交的有限维子空间构成的序列。对于每个 $t\geq 1$，我们记[4]

$$F_t=\operatorname{im}(a_1)+\cdots+\operatorname{im}(a_t)\overset{(4.16)}{\subseteq}\operatorname{im}(u_{t+1}),$$
$$F'_t=\ker(b_1)^{\perp}+\cdots+\ker(b_t)^{\perp}\overset{(4.17)}{\subseteq}\ker({v'_{t+1}}^{*})^{\perp}=\operatorname{im}(v'_{t+1}).$$

于是，

$$a_t=p_{F_t}a_tp_{v([\bigcup_{j=1}^{t}L'_j])}\quad\text{and}\quad b_t=p_{u'([\bigcup_{j=1}^{t}K'_j])}b_tp_{F'_t}\quad\text{for every } t\geq 1.$$

根据标准扰动论证并利用定理 A.6，存在一个正整数序列 $\{t_l\}_{l=2}^{\infty}$、一个序列 $\{a'_l\}_{l=2}^{\infty}$ 属于 $\mathcal{C}_E(H')$ 以及一个序列 $\{b'_l\}_{l=2}^{\infty}$ 属于 $\mathcal{C}_E(H'')$，使得

$$\|a_{t_l}-a'_l\|\quad\text{and}\quad\|b_{t_l}-b'_l\|\leq\delta_l\quad\text{for every } l\geq 2,\tag{4.19}$$

其中 $\{a'_l\}_{l=2}^{\infty}$ 和 $\{b'_l\}_{l=2}^{\infty}$ 分别具有如下形式

$$\begin{aligned}a'_l&=\sum_{m=1}^{l-1}\left(a'_{l,m}+a'_{m,l}\right)+a'_{l,l}\qquad l=2,3,\ldots,\\ b'_l&=\sum_{m=1}^{l-1}\left(b'_{l,m}+b'_{m,l}\right)+b'_{l,l}\qquad l=2,3,\ldots,\end{aligned}\tag{4.20}$$

分别为，

(1) $\hat{}F_l=F_{t_{l-1}}{}^{\perp}\cap F_{t_l}$（令 $F_0=\{0\}$）和 $\tilde{F}_l=F'_{t_{l-1}}{}^{\perp}\cap F'_{t_l}$（令 $F'_0=\{0\}$），并且对每个 $l\geq 1$（令 $t_0=0$），$\hat{}L_l=[\bigcup_{j=t_{l-1}+1}^{t_l}v(L'_j)]=v\big([\bigcup_{j=t_{l-1}+1}^{t_l}L'_j]\big)$ 和 $\tilde{K}_l=[\bigcup_{j=t_{l-1}+1}^{t_l}u'(K'_j)]=u'\big([\bigcup_{j=t_{l-1}+1}^{t_l}(K'_j)]\big)$，

(2) $\{a'_{l,m}\}_{(l,m)\neq(1,1)}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{\hat{}F_l\}_{l=1}^{\infty}\otimes\{\hat{}L_m\}_{m=1}^{\infty}$ 使得

- $\{a'_{l,m}\}_{l=m+1}^{\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{\hat{}u_l:\hat{}F_l\to\hat{}H\}_{l=2}^{\infty}\otimes\{\hat{}v_m:\hat{}L_m\to\hat{}H\}_{m=1}^{\infty}\curvearrowleft c_m$ 对所有$m\geq 1$都相容，并且

$$\|c_m\|_{\mathcal{C}_E}\leq\delta_m\|c_1\|_{\mathcal{C}_E}\qquad\text{for every } m\geq 2,\tag{4.21}$$

- $\{a'_{m,l}\}_{l=m+1}^{\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{\hat{}u'_m:\hat{}F_m\to\hat{}H\}_{m=1}^{\infty}\otimes\{\hat{}v'_l:\hat{}L_l\to\hat{}H\}_{l=2}^{\infty}\curvearrowleft c'_m$ 对所有$m\geq 1$，并且

$$\|c'_m\|_{\mathcal{C}_E}\leq\delta_m\|c'_1\|_{\mathcal{C}_E}\qquad\text{for every } m\geq 2,\tag{4.22}$$

- $a'^{,l}=p_{\hat{F}_l}a_{t_l}p_{\hat{L}_l}$ 对于每个 $l\geq 2$，

(3) $\{b'_{m,l}\}_{(m,l)\neq(1,1)}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_m\}_{m=1}^{\infty}\otimes\{F_l\}_{l=1}^{\infty}$ 使得

- $\{b'_{m,l}\}_{l=m+1}^{\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{\tilde{u}_m:\ \tilde{K}_m\to\tilde{H}\}_{m=1}^{\infty}\otimes\{\tilde{v}_l:\ \tilde{F}_l\to\tilde{H}\}_{l=2}^{\infty}\curvearrowleft d_m$ 对于所有情况都相容 $m\geq 1$，且

$$\|d_m\|_{\mathcal{C}_E}\leq\delta_m\|d_1\|_{\mathcal{C}_E}\qquad\text{for every } m\geq 2,\tag{4.23}$$

- $\{b'_{l,m}\}_{l=m+1}^{\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{\tilde{u}'_l:\ \tilde{K}_l\to\tilde{H}\}_{l=2}^{\infty}\otimes\{\tilde{v}'_m:\ \tilde{L}_m\to\tilde{H}\}_{m=1}^{\infty}\curvearrowleft d'_m$ 对所有情况均相容 $m\geq 1$，且

$$\|d'_m\|_{\mathcal{C}_E}\leq\delta_m\|d'_1\|_{\mathcal{C}_E}\qquad\text{for every } m\geq 2,\tag{4.24}$$

- $b'_{l,\ l}=p_{\tilde{K}_l}b_{t_l}p_{\tilde{F}_l}$ 对每个 $l\geq 2$。

[4]对于线性空间 X 的子空间 X_1，X_2，X_1+X_2 表示

$$\{x_1+x_2:x_1\in X_1\text{ and }x_2\in X_2\},$$

它是 X 的一个子空间。由于对于每个 i，$\operatorname{im}(a_i)$ 都是有限维子空间，因此可得

$$\operatorname{im}(a_1)+\cdots+\operatorname{im}(a_t)$$

是有限维的。特别地，对于每个 t，$\operatorname{im}(a_1)+\cdots+\operatorname{im}(a_t)$ 都是闭的。

Put

$$x'_{k,l} := u^*_{t_k} a'_l v \quad \text{and} \quad y'_{l,k} := u'^* b'_l v'_{t_k} \tag{4.25}$$

对于每个 $2 \le l < k < \infty$。

对任意 $l \ge 2$ 以及标量的有限序列 $\{\alpha_k\}_{k=l+1}^n$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{k=l+1}^n \alpha_k S_2(e_{i_{t_k},i_{t_l}}) - \sum_{k=l+1}^n \alpha_k (x'_{k,l} + y'_{l,k}) \right\|_{C_E} \\
\overset{(4.18)}{\le}\ & 2^{\frac{1}{r}-1} \left(\Big\| \sum_{k=l+1}^n \alpha_k (x_{t_k,t_l} - x'_{k,l}) \Big\|_{\mathcal{C}_E} + \left\| \sum_{k=l+1}^n \alpha_k (y_{t_l,t_k} - y'_{l,k}) \right\|_{\mathcal{C}_E} \right) \\
\overset{(4.16),(4.17),(4.25)}{=}\ & 2^{\frac{1}{r}-1} \left(\Big(\sum_{k=l+1}^n |\alpha_k|^2 \Big)^{1/2} \|a_{t_l} - a'_l\|_{\mathcal{C}_E} + \Big(\sum_{k=l+1}^n |\alpha_k|^2 \Big)^{1/2} \|b_{t_l} - b'_l\|_{\mathcal{C}_E} \right) \\
\overset{(4.19)}{\le}\ & 2^{\frac{1}{r}} \delta_l \left\| \sum_{k=l+1}^n \alpha_k e_{i_{t_k},i_{t_l}} \right\|_{\mathcal{C}_E}.
\end{aligned}$$

注意

$$\begin{aligned}
x'_{k,l} &= u^*_{t_k} a'_l v \\
&= \sum_{m=1}^{l-1} \Big(u^*_{t_k} a'_{l,m} v + u^*_{t_k} a'_{m,l} v \Big) + u^*_{t_k} p_{\hat{F}_l} a_{t_l} p_{\hat{L}_l} v \\
&\overset{(4.21),(4.22)}{=} \sum_{m=1}^{l-1} \Big((\hat{u}_l u_{t_k})^* c_m (\hat{v}_m v) + (\hat{u}'_m u_{t_k})^* c'_m (\hat{v}'_l v) \Big) + u^*_{t_k} p_{\hat{F}_l} a_{t_l} p_{\hat{L}_l} v,
\end{aligned}$$

并且，类似地，

$$y'_{l,k} = u'^* b'_l v'_{t_k} = \sum_{m=1}^{l-1} \Big((\tilde{u}'_l u')^* d'_m (\tilde{v}'_m v'_{t_k}) + (\tilde{u}_m u')^* d_m (\tilde{v}_l v'_{t_k}) \Big) + u'^* p_{\tilde{K}_l} b_{t_l} p_{\tilde{F}_l} v'_{t_k}.$$

Put

$$\hat{F}^{-1}_{k,l} = (u_{t_k})^* (\hat{F}_l) \subset K'_{t_k} \quad \text{and} \quad \tilde{F}^{-1}_{l,k} = (v'_{t_k})^* (\tilde{F}_l) \subset L'_{t_k}$$

对每个 $1 \le l < k < \infty$，以及

$$\hat{L}_l^{-1} = \Big[\bigcup_{j=t_{l-1}+1}^{t_l} L'_j \Big] \quad \text{and} \quad \tilde{K}_l^{-1} = \Big[\bigcup_{j=t_{l-1}+1}^{t_l} K'_j \Big]$$

对每个 $l \ge 1$。显然，$\big\{ \hat{F}^{-1}_{k,l} \big\}_{1 \le l < k < \infty}$ 与 $\{\tilde{F}^{-1}_{l,k}\}_{1 \le l < k < \infty}$ 分别是希尔伯特空间中相互正交的有限维子空间序列。对任意 $1 \le l < k < \infty$ 与 $1 \le m < k < \infty$，我们令

$$x_{(k,l),m} = \begin{cases} 0\,, & m = l = 1,\ k = 2 \\ u^*_{t_k} p_{\hat{F}_l} a_{t_l} p_{\hat{L}_l} v\,, & 2 \le m = l < k < \infty \\ (\hat{u}_l u_{t_k})^* c_m (\hat{v}_m v)\,, & 1 \le m < l < k < \infty \\ (\hat{u}'_l u_{t_k})^* c'_l (\hat{v}'_m v)\,, & 1 \le l < m < k < \infty \end{cases} \tag{4.26}$$

and

$$y_{m,(l,k)} = \begin{cases} 0\,, & m = l = 1,\ k = 2 \\ u'^* p_{\tilde{K}_l} b_{t_l} p_{\tilde{F}_l} v'_{t_k}\,, & 2 \le m = l < k < \infty \\ (\tilde{u}_m u')^* d_m (\tilde{v}_l v'_{t_k})\,, & 1 \le m < l < k < \infty \\ (\tilde{u}'_m u')^* d'_l (\tilde{v}'_l v'_{t_k})\,, & 1 \le l < m < k < \infty \end{cases} \tag{4.27}$$

特别是，

(1) $\{x_{(k,l),m}\}_{\substack{1\le l<k<\infty\\ 1\le m<k<\infty}} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{\hat{F}_{k,l}^{-1}\}_{1\le l<k<\infty} \otimes \{\hat{L}_m^{-1}\}_{m=1}^{\infty}$ such that $x_{(2,1),1}=0$,

$$\{x_{(k,l),m}\}_{2\le m=l<k<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{u_{t_k}|_{\hat{F}_{k,l}^{-1}} : \hat{F}_{k,l}^{-1} \to H'\}_{2\le l<k<\infty} \otimes \{v|_{\hat{L}_m^{-1}} : \hat{L}_m^{-1} \to H'\}_{l=2}^{\infty}$$
$$\curvearrowleft p_{\hat{F}_l} a_{t_l} p_{\hat{L}_l} \quad \text{are consistent for all } l\ge 2,$$

$$\{x_{(k,l),m}\}_{1\le m<l<k<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{\hat{u}_l u_{t_k}|_{\hat{F}_{k,l}^{-1}} : \hat{F}_{k,l}^{-1} \to \hat{H}\}_{2\le l<k<\infty} \otimes \{\hat{v}_m v|_{\hat{L}_m^{-1}} : \hat{L}_m^{-1} \to \hat{H}\}_{m=1}^{\infty} \tag{4.28}$$
$$\curvearrowleft c_m \quad \text{对所有 } m\ge 1\text{均相容},$$

$$\{x_{(k,m),l}\}_{1\le m<l<k<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{\hat{u}'_m u_{t_k}|_{\hat{F}_{k,m}^{-1}} : \hat{F}_{k,m}^{-1} \to \hat{H}'\}_{1\le m<k-1<\infty} \otimes \{\hat{v}'_l v|_{\hat{L}_l^{-1}} : \hat{L}_l^{-1} \to \hat{H}\}_{l=2}^{\infty} \tag{4.29}$$
$$\curvearrowleft c'_m \quad \text{are consistent for all } m\ge 1,$$

(2) $\{y_{m,(l,k)}\}_{\substack{1\le m<k<\infty\\ 1\le l<k<\infty}} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{\tilde{K}_m^{-1}\}_{m=1}^{\infty} \otimes \{\tilde{F}_{l,k}^{-1}\}_{1\le l<k<\infty}$ 使得$y_{1,(1,2)}=0$,

$$\{y_{m,(l,k)}\}_{2\le m=l<k<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{u'|_{\tilde{K}_m^{-1}} : \tilde{K}_m^{-1} \to H''\}_{l=2}^{\infty} \otimes \{v'_{t_k}|_{\tilde{F}_{l,k}^{-1}} : \tilde{F}_{l,k}^{-1} \to H''\}_{2\le l<k<\infty}$$
$$\curvearrowleft p_{\tilde{K}_l} b_{t_l} p_{\tilde{F}_l} \quad \text{are consistent for all } l\ge 2,$$

$$\{y_{m,(l,k)}\}_{1\le m<l<k<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{\tilde{u}_m u'|_{\tilde{K}_m^{-1}} : \tilde{K}_m^{-1} \to \tilde{H}\}_{m=1}^{\infty} \otimes \{\tilde{v}_l v'_{t_k}|_{\tilde{F}_{l,k}^{-1}} : \tilde{F}_{l,k}^{-1} \to \tilde{H}\}_{2\le l<k<\infty} \tag{4.30}$$
$$\curvearrowleft d_m \quad \text{are consistent for all } m\ge 1,$$

$$\{y_{l,(m,k)}\}_{1\le m<l<k<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{\tilde{u}'_l u'|_{\tilde{K}_l^{-1}} : \tilde{K}_l^{-1} \to \tilde{H}\}_{l=2}^{\infty} \otimes \{\tilde{v}'_m v'_{t_k}|_{\tilde{F}_{m,k}^{-1}} : \tilde{F}_{m,k}^{-1} \to \tilde{H}'\}_{1\le m<k-1<\infty} \tag{4.31}$$
$$\curvearrowleft d'_m \quad \text{are consistent for all } m\ge 1,$$

(3)

$$x'_{k,l} = \sum_{m=1}^{l-1} \big(x_{(k,l),m} + x_{(k,m),l}\big) + x_{(k,l),l} \quad \text{and} \quad y'_{l,k} = \sum_{m=1}^{l-1} \big(y_{l,(m,k)} + y_{m,(l,k)}\big) + y_{l,(l,k)}$$

for every $2\le l<k<\infty$.

因此　因此，根据定理2.12，存在一个有界算子 S_3： $[e_{i_t\ ,i_t}\ ]_{2\le l_k<k_l<\infty} \to \mathcal{C}_E$ 使得

$$\begin{aligned} S_3(e_{i_{t_k},i_{t_l}}) &= x'_{k,l} + y'_{l,k} \\ &= \sum_{m=1}^{l-1} \big(x_{(k,l),m} + x_{(k,m),l}\big) + \sum_{m=1}^{l-1} \big(y_{l,(m,k)} + y_{m,(l,k)}\big) + x_{(k,l),l} + y_{l,(l,k)} \end{aligned} \tag{4.32}$$

对每个 $2\le l<k<\infty$ 都成立，它是与 Schauder 分解 $\{[e_{i_{t_k},i_{t_l}}]_{k=l+1}^{\infty}\}_{l=2}^{\infty}$ 相关的 $S_2|_{[[e_{i_{t_k},i_{t_l}}]_{2\le l<k<\infty}}$ 的小扰动。□

引理 4.6。 算子 S_3 在引理 *4.5* 中可写为 $S_3=T_2+T_3+T_4$，其中 T_2, T_3和 T_4是从 $[e_{i_{t_k},i_{t_l}}]_{2\le l<k<\infty}$到 $\mathcal{C}_E$的有界算子，使得

$$T_2(e_{i_{t_k},i_{t_l}}) = x_{(k,l),l} + y_{l,(l,k)}, \qquad 2\le l<k<\infty,$$

$$T_3(e_{i_{t_k},i_{t_l}}) = \sum_{m=1}^{l-1} \big(x_{(k,l),m} + y_{m,(l,k)}\big), \qquad 2\le l<k<\infty,$$

and

$$T_4(e_{i_{t_k},i_{t_l}}) = \sum_{m=1}^{l-1} \big(x_{(k,m),l} + y_{l,(m,k)}\big), \qquad 2\le l<k<\infty.$$

证明。首先，我们证明 T_3 在 $[e_{i_{t_k},i_{t_l}}]_{2\le l<k<\infty}$上有界。若 $c_1=0$且 $d_1=0$，则$c_m, c'_m, d_m, d'_m = 0$（见上文（4.21）、（4.22）、（4.24）、（4.23））。因此，根据$x_{(k,l),m}$,$x_{(k,m),l}$,$y_{m,(l,k)}$ 和 $y_{l,(m,k)}$的定义，我们得到 $T_3=0$。

若 c_1 或 d_1 非零，则对于任意有限标量序列 $\{\alpha_k\}_{k=3}^n$，有

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=3}^n|\alpha_k|^2\right)^{1/2}\cdot\left\|\left(\begin{smallmatrix}0&d_1\\c_1&0\end{smallmatrix}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
\overset{(4.28),(4.30),\text{Th. 3.8}}{=}\ &\left\|\sum_{k=3}^n\alpha_k\big(x_{(k,2),1}+y_{1,(2,k)}\big)\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
=\ &\left\|\big(P_{[\bigcup_{j=2}^\infty\tilde K_j^{-1}],\hat L_1^{-1}}+P_{\tilde K_1^{-1},[\bigcup_{j=2}^\infty\hat L_j^{-1}]}\big)S_3\Big(\sum_{k=1}^n\alpha_k e_{i_{t_k},i_{t_{k-1}}}\Big)\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
\overset{(2.5)}{\le}\ &4^{\frac1r-1}\|S_3\|\cdot\left\|\sum_{k=3}^n\alpha_k e_k\right\|_E,
\end{aligned}$$

其中第二个等式由以下事实得出：

$$\big\{x_{(k,l),m}\big\}_{\substack{1\le l<k<\infty\\1\le m<k<\infty}}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{\hat F_{k,l}^{-1}\}_{1\le l<k<\infty}\otimes\{\hat L_m^{-1}\}_{m=1}^\infty$$

and

$$\big\{y_{m,(l,k)}\big\}_{\substack{1\le m<k<\infty\\1\le l<k<\infty}}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{\tilde K_m^{-1}\}_{m=1}^\infty\otimes\{\tilde F_{l,k}^{-1}\}_{1\le l<k<\infty}.$$

特别地，有

$$\left\|\left(\begin{smallmatrix}0&d_1\\c_1&0\end{smallmatrix}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E}\cdot\|\cdot\|_{\ell_2}\le4^{\frac1r-1}\|S_3\|\cdot\|\cdot\|_E.$$

因此，对于任意仅含有限个非零元素的标量序列 $\{\alpha_{k,l}\}_{2\le l<k<\infty}$，有

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{2\le l<k<\infty}|\alpha_{k,l}|^2\right)^{1/2}\cdot\left\|\left(\begin{smallmatrix}0&d_1\\c_1&0\end{smallmatrix}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E}&=\left\|\left(\begin{smallmatrix}0&d_1\\c_1&0\end{smallmatrix}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E}\cdot\left\|\sum_{2\le l<k<\infty}\alpha_{k,l}e_{i_{t_k},i_{t_l}}\right\|_{C_{\ell_2}}\\
&\le4^{\frac1r-1}\|S_3\|\cdot\left\|\sum_{2\le l<k<\infty}\alpha_{k,l}e_{i_{t_k},i_{t_l}}\right\|_{\mathcal{C}_E}.
\end{aligned}\tag{4.33}$$

因此，对于任意只有有限个非零元素的标量序列 $\{\alpha_{k,l}\}_{2\le l<k<\infty}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left\|T_3\Big(\sum_{2\le l<k<\infty}\alpha_{k,l}e_{i_{t_k},i_{t_l}}\Big)\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
=\ &\left\|\sum_{2\le l<k<\infty}\alpha_{k,l}\sum_{m=1}^{l-1}\big(x_{(k,l),m}+y_{m,(l,k)}\big)\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
\overset{(2.2)}{\le}\ &4^{\frac1r}\left(\sum_{m=1}^\infty\left\|\sum_{m+1\le l<k<\infty}\alpha_{k,l}\big(x_{(k,l),m}+y_{m,(l,k)}\big)\right\|_{\mathcal{C}_E}^r\right)^{1/r}\\
\overset{(4.28),(4.30),\text{Th 3.8}}{=}\ &4^{\frac1r}\left(\sum_{m=1}^\infty\left\|\left(\begin{smallmatrix}0&d_m\\c_m&0\end{smallmatrix}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E}^r\right)^{1/r}\left(\sum_{m+1\le l<k<\infty}|\alpha_{k,l}|^2\right)^{1/2}\\
\overset{(4.21),(4.23)}{\le}\ &4^{\frac1r}\left(1+2^{1-r}\sum_{m=2}^\infty{\delta_m}^r\right)^{1/r}\left\|\left(\begin{smallmatrix}0&d_1\\c_1&0\end{smallmatrix}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E}\left(\sum_{2\le l<k<\infty}|\alpha_{k,l}|^2\right)^{1/2}\\
\overset{(4.33)}{\le}\ &4^{\frac2r-1}\left(1+2^{1-r}\sum_{m=2}^\infty{\delta_m}^r\right)^{1/r}\|S_3\|\cdot\left\|\sum_{2\le l<k<\infty}\alpha_{k,l}e_{i_{t_k},i_{t_l}}\right\|_{\mathcal{C}_E}.
\end{aligned}\tag{4.34}$$

因此， T_3 有界。

接下来，我们证明 T_4 在 $[e_{i_{t_k},i_{t_l}}]_{2\le l<k<\infty}$上有界。对于任意有限标量序列 $\{\alpha_{k,l}\}_{2\le l<k\le n+2}$，

$$
\begin{aligned}
&\Big\|\sum_{2\le l<k\le n+2}\alpha_{k,l}\sum_{m=1}^{l-1}x_{(k,m),l}\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r\\
\overset{(4.29)}{=}&\Big\|\sum_{2\le l<k\le n+2}\alpha_{k,l}\sum_{m=1}^{l-1}x_{(2n+k,m),n+l}\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r\\
=&\Big\|\sum_{2\le l<k\le n+2}\alpha_{k,l}\sum_{m=1}^{n}x_{(2n+k,m),n+l}-\sum_{2\le l<k\le n+2}\alpha_{k,l}\sum_{m=l}^{n}x_{(2n+k,m),n+l}\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r\\
=&\Big\|\sum_{2\le l<k\le n+2}\alpha_{k,l}\sum_{m=1}^{n}x_{(2n+k,m),n+l}-\sum_{l=2}^{n}\sum_{m=l}^{n}\sum_{k=l+1}^{n+2}\alpha_{k,l}x_{(2n+k,m),n+l}\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r\\
\overset{(2.2)}{\le}&4\Big\|\sum_{2\le l<k\le n+2}\alpha_{k,l}\sum_{m=1}^{n}x_{(2n+k,m),n+l}\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r+4\sum_{l=2}^{n}\sum_{m=l}^{n}\Big\|\sum_{k=l+1}^{n+2}\alpha_{k,l}x_{(2n+k,m),n+l}\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r\\
\overset{(4.29)}{=}&4\Big\|P_{[\bigcup_{i,j=1}^n\hat{F}^{-1}_{2n+2+i,j}],[\bigcup_{j=1}^n\hat{L}^{-1}_{n+1+j}]}S_3\Big(\sum_{2\le l<k\le n+2}\alpha_{k,l}e_{i_{t_{2n+k}},i_{t_{n+l}}}\Big)\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r\\
&+4\sum_{l=2}^{n}\sum_{m=l}^{n}\|c'_m\|_{\mathcal{C}_E}^r\Big(\sum_{k=l+1}^{n+2}|\alpha_{k,l}|^2\Big)^{r/2}\\
\overset{(2.2)}{\le}&4\|S_3\|^r\Big\|\sum_{2\le l<k\le n+2}\alpha_{k,l}e_{i_{t_{2n+k}},i_{t_{n+l}}}\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r+4\sum_{l=2}^{n}\sum_{m=l}^{n}\|c'_m\|_{\mathcal{C}_E}^r\Big(\sum_{k=l+1}^{n+2}|\alpha_{k,l}|^2\Big)^{r/2}\\
=&4\|S_3\|^r\Big\|\sum_{2\le l<k\le n+2}\alpha_{k,l}e_{i_{t_k},i_{t_l}}\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r+4\sum_{l=2}^{n}\sum_{m=l}^{n}\|c'_m\|_{\mathcal{C}_E}^r\Big(\sum_{k=l+1}^{n+2}|\alpha_{k,l}|^2\Big)^{r/2}\\
\le&4\Big(\|S_3\|^r+\sum_{l=2}^{n}\sum_{m=l}^{n}{\delta_m}^r\|c'_1\|_{\mathcal{C}_E}^r\Big)\Big\|\sum_{2\le l<k\le n+2}\alpha_{k,l}e_{i_{t_k},i_{t_l}}\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r\\
\le&4\Big(\|S_3\|^r+\|c'_1\|_{\mathcal{C}_E}^r\sum_{m=2}^{\infty}m{\delta_m}^r\Big)\Big\|\sum_{2\le l<k\le n+2}\alpha_{k,l}e_{i_{t_k},i_{t_l}}\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r,
\end{aligned}
$$

类似地，

$$
\begin{aligned}
&\Big\|\sum_{2\le l<k\le n+2}\alpha_{k,l}\sum_{m=1}^{l-1}y_{l,(m,k)}\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r\\
&\le 4\Big(\|S_3\|^r+\|d'_1\|_{\mathcal{C}_E}^r\sum_{m=2}^{\infty}m{\delta_m}^r\Big)\Big\|\sum_{2\le l<k\le n+2}\alpha_{k,l}e_{i_{t_k},i_{t_l}}\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r.
\end{aligned}
$$

由于 $\{\delta_m\}_{m=1}^{\infty}$ 足够小，不失一般性，我们可以假设 $\sum_{m=2}^{\infty}m{\delta_m}^r<\infty$。因此， T_4 有界。

由于 $T_2=S_3-T_3-T_4$，可得 T_2 在 $[e_{i_{t_k},i_{t_l}}]_{2\le l<k<\infty}$[5]上有界。 □

定理 4.1 的证明完毕。 □

[5]If E 是一个巴拿赫空间，则 $\mathcal{C}_E$ 上的对角投影自动有界（参见（2.6））。不在 g

$$T_2=(P_{\{[\bigcup_{k'=l'+1}^{\infty}\hat{F}^{-1}_{k',l'}],\hat{L}^{-1}_{l'}\}_{l'=2}^{\infty}}+P_{\{\tilde{K}^{-1}_{l'},[\bigcup_{k'=l'+1}^{\infty}\tilde{F}^{-1}_{l',k'}]\}_{l'=2}^{\infty}})S_3,$$

我们得到 T_2 是有界的。根据 $T_4=S_3-T_2-T_3$，我们得到 T_4 的有界性。

下面，我们研究定理 T_1、 T_2、 T_3和 T_4 **4.1** 中给出的算子。在下面的定理 4.17 （分别为定理 4.14）中，我们证明，若 c_0， $\ell_2 \not\hookrightarrow E$ （分别为 $c_0 \not\hookrightarrow E$），则存在两个来自 $\mathcal{B}([e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,l=1}^{\infty}$、$\mathcal{C}_E)$（分别为三个来自 $\mathcal{B}(\mathcal{T}_{E、\{\xi'_k,\eta'_k\}_{k=1}^{\infty}}$、$\mathcal{C}_E)$）的算子，其中 $\{\xi'_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{\eta'_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 H 中的两个标准正交序列，并且它们有更具体的表示；其和限制在 $\mathcal{T}_{E、\{\xi'_k,\eta'_k\}_{k=1}^{\infty}}(=[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{1\le l\le k<\infty})$ 上是 $(T_1+T_2+T_3+T_4)|_{\mathcal{T}_{E、\{\xi'_k,\eta'_k\}_{k=1}^{\infty}}}$ 的一个小扰动。

从现在起，我们始终假设定理 $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^{\infty}$ 中的序列 4.1 由充分小的正数组成。

引理 4.7。 设 T_2 和 T_3 是定理 *4.1*中给出的有界算子。若 b_1 或 b_1 非零，则

(1) $\{T_3(e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}})\}_{2\le l<k<\infty} \sim \{(T_2+T_3)(e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}})\}_{2\le l<k<\infty} \sim \{e^H_{(k,l)}\}_{2\le l<k<\infty}$, *and for any sequence* $\{\alpha_{k,l}\}_{2\le l<k<\infty}$ *with* $\|\{\alpha_{k,l}\}_{2\le l<k<\infty}\|_2<\infty$, *we have*

$$\begin{aligned}
&2^{1-\frac{1}{r}}\left(1-2^{\frac{4}{r}-1}\Big(\sum_{m=2}^{\infty}{\varepsilon_m}^r\Big)^{1/r}\right)\left\|\left(\begin{smallmatrix}0&\tilde b_1\\ \hat b_1&0\end{smallmatrix}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E}\Big(\sum_{2\le l<k<\infty}|\alpha_{k,l}|^2\Big)^{1/2}\\
\le&\left\|\sum_{2\le l<k<\infty}\alpha_{k,l}T_3(e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}})\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
\le&\,2^{\frac{1}{r}-1}\left(1+2^{\frac{3}{r}}\Big(\sum_{m=2}^{\infty}{\varepsilon_m}^r\Big)^{1/r}\right)\left\|\left(\begin{smallmatrix}0&\tilde b_1\\ \hat b_1&0\end{smallmatrix}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E}\Big(\sum_{2\le l<k<\infty}|\alpha_{k,l}|^2\Big)^{1/2}.
\end{aligned}\tag{4.35}$$

(2) 令

$$\hat b:=\sum_{m=1}^{\infty}\hat b_m\otimes(\cdot|e_1)e_m\quad and\quad \tilde b:=\sum_{m=1}^{\infty}\tilde b_m\otimes(\cdot|e_m)e_1,\tag{4.36}$$

我们有

$$\|\cdot\|_{\ell_2}\le\frac{16^{\frac{1}{r}-1}\|T\|}{\left\|\left(\begin{smallmatrix}0&\tilde b\\ \hat b&0\end{smallmatrix}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E}}\|\cdot\|_E,$$

i.e., $E\subset\ell_2$. *In particular,* $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_{\ell_2}}\le\frac{16^{\frac{1}{r}-1}\|T\|}{\left\|\left(\begin{smallmatrix}0&\tilde b\\ \hat b&0\end{smallmatrix}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E}}\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}$.

证明。 **(1)**。由定理 3.8，对于任意满足 $\{\alpha_{k,l}\}_{2\le l<k<\infty}$ 的序列 $\|\{\alpha_{k,l}\}_{2\le l<k<\infty}\|_2<\infty$，我们有

$$\left\|\sum_{2\le l<k<\infty}\alpha_{k,l}\big(x_{(k,l),1}+y_{1,(l,k)}\big)\right\|_{\mathcal{C}_E}=\left\|\left(\begin{smallmatrix}0&\tilde b_1\\ \hat b_1&0\end{smallmatrix}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E}\Big(\sum_{2\le l<k<\infty}|\alpha_{k,l}|^2\Big)^{1/2}.\tag{4.37}$$

仿照（4.34）进行类似论证，可得

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{2\le l<k<\infty}\alpha_{k,l}\Big(T_3(e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}})-\big(x_{(k,l),1}+y_{1,(l,k)}\big)\Big)\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
\le&4^{\frac{1}{r}}\Big(\sum_{m=2}^{\infty}\left\|\left(\begin{smallmatrix}0&\tilde b_m\\ \hat b_m&0\end{smallmatrix}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E}^r\Big)^{1/r}\left(\sum_{2\le l<k<\infty}|\alpha_{k,l}|^2\right)^{1/2}\\
\le&2^{\frac{3}{r}}\left(\sum_{m=2}^{\infty}{\varepsilon_m}^r\right)^{1/r}\left\|\left(\begin{smallmatrix}0&\tilde b_1\\ \hat b_1&0\end{smallmatrix}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E}\left(\sum_{2\le l<k<\infty}|\alpha_{k,l}|^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

结合（4.37）可证明（4.35），因此 $\{T_3(e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}})\}_{2\le l<k<\infty}\sim\{e^H_{(k,l)}\}_{2\le l<k<\infty}$。根据（4.6）和注记 3.4， $\{x_{(k,l),l}\}_{2\le l<k<\infty}\simeq\{\hat c_l\otimes(\cdot|e_l)e_{(k,l)}\}_{2\le l<k<\infty}$,

其中$\{e_{(k,l)}\}_{k,l}$是 ℓ_2（$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$）的单位基。对于任意有限标量序列 $\{\alpha_{k,l}\}_{2\le l<k\le n}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{2\le l<k\le n}\alpha_{k,l}x_{(k,l),l}\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
=&\left\|\sum_{2\le l<k\le n}\alpha_{k,l}\big(\hat{c}_l\otimes(\cdot|e_l)e_{(k,l)}\big)\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
=&\left\|\sum_{l=2}^{n}\left(\hat{c}_l\otimes\left((\cdot|e_l)\sum_{k=l+1}^{n}\alpha_{k,l}e_{(k,l)}\right)\right)\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
=&\left\|\sum_{l=2}^{n}\left(\sum_{k=l+1}^{n}|\alpha_{k,l}|^2\right)^{1/2}\hat{c}_l\otimes(\cdot|e_l)e_l\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
\overset{(4.6)}{=}&\left\|\sum_{l=2}^{n}\left(\sum_{k=l+1}^{n}|\alpha_{k,l}|^2\right)^{1/2}x_{(n+1,l),l}\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
\overset{(4.3)}{=}&\left\|P_{K'_{n+1},[\bigcup_{j=1}^{n}L'_j]}T_2\left(\sum_{l=2}^{n}\left(\sum_{k=l+1}^{n}|\alpha_{k,l}|^2\right)^{1/2}e_{\xi_{i_{n+1}},\eta_{i_l}}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
\le&\ \|T_2\|\left(\sum_{2\le l<k\le n}|\alpha_{k,l}|^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

类似地推论可得

$$\left\|\sum_{2\le l<k\le n}\alpha_{k,l}y_{l,(l,k)}\right\|_{\mathcal{C}_E}\le\|T_2\|\left(\sum_{2\le l<k\le n}|\alpha_{k,l}|^2\right)^{1/2}.$$

此外，由于

$$\Big(P_{[\bigcup_{j=2}^{\infty}K'_j],L'_1}+P_{K'_1,[\bigcup_{j=2}^{\infty}L'_j]}\Big)(T_2+T_3)(e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}})\overset{(4.3),(4.4)}{=}x_{(k,l),1}+y_{1,(l,k)}$$

对每个 $2\le l<k<\infty$，根据 $\{T_3(e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}})\}_{2\le l<k<\infty}\sim\{e^H_{(k,l)}\}_{2\le l<k<\infty}$ 和 (4.37) 这一事实可知，存在某个正数 $C>1$ 使得对于任意由有限个非零标量构成的序列 $\{\alpha_{k,l}\}_{2\le l<k<\infty}$，我们有

$$\begin{aligned}
C^{-1}\left(\sum_{2\le l<k<\infty}|\alpha_{k,l}|^2\right)^{1/2}&\le\left\|\sum_{2\le l<k<\infty}\alpha_{k,l}(T_2+T_3)(e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}})\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
&=\left\|\sum_{2\le l<k<\infty}\alpha_{k,l}\Big(x_{(k,l),l}+y_{l,(l,k)}+T_3(e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}})\Big)\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
&\le C\left(\sum_{2\le l<k<\infty}|\alpha_{k,l}|^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

因此，$\big\{(T_2+T_3)(e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}})\big\}_{2\le l<k<\infty}\sim\big\{e^H_{(k,l)}\big\}_{2\le l<k<\infty}$。

(2). 对任意正整数 N，定义

$$\hat{\beta}_N:=\sum_{m=1}^{N}\hat{b}_m\otimes(\cdot|e_1)e_m\quad\text{and}\quad\tilde{\beta}_N:=\sum_{m=1}^{N}\tilde{b}_m\otimes(\cdot|e_m)e_1.$$

对于任意序列 $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \in E$，有

$$\begin{aligned}
&\left\|\begin{pmatrix} 0 & \tilde{\beta}_N \\ \hat{\beta}_N & 0 \end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{C}_E} \left\|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k\right\|_{\ell_2} \\
\overset{(4.7),(4.9)}{=}\ &\left\|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sum_{m=1}^{N} \left(x_{(N+k+2,N+k+1),m} + y_{m,(N+k+1,N+k+2)}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E} \\
=\ &\left\|\left(P_{[\bigcup_{j=N+2}^{\infty} F_{j+1,j}],[\bigcup_{j=1}^{N} L'_j]} + P_{[\bigcup_{j=1}^{N} K'_j],[\bigcup_{j=N+2}^{\infty} G_{j,j+1}]}\right)\right. \\
&\left.(T_1+T_2+T_3+T_4)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_{\xi_{i_{N+k+2}},\eta_{i_{N+k+1}}}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E} \qquad (4.38) \\
\overset{(2.5)}{\leq}\ &4^{\frac{1}{r}-1}\left(2^{\frac{1}{r}-1}\|T\| + 2^{\frac{1}{r}-1}4^{\frac{1}{r}}\left(\sum_{k=N}^{\infty} {\varepsilon_k}^r\right)^{\frac{1}{r}}\right)\left\|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_{\xi_{i_{N+k+2}},\eta_{i_{N+k+1}}}\right\|_{\mathcal{C}_E} \\
=\ &8^{\frac{1}{r}-1}\left(\|T\| + 4^{\frac{1}{r}}\left(\sum_{k=N}^{\infty} {\varepsilon_k}^r\right)^{\frac{1}{r}}\right)\left\|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k\right\|_E .
\end{aligned}$$

注意到 $\beta_N \to b$ 和 $\beta_N \to b$ 在 $\mathcal{C}_E$ 中，如 $N \to \infty$所示，我们有

$$\|\cdot\|_{\ell_2} \leq \frac{16^{\frac{1}{r}-1}\|T\|}{\left\|\begin{pmatrix} 0 & \tilde{b} \\ \hat{b} & 0 \end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{C}_E}} \|\cdot\|_E .$$

证明完毕。 □

记号 4.8. 对于任意非空子集 $A \subset \mathbb{N}$，我们定义

$$K_A = \left[\bigcup_{i\in A} K_i\right], \qquad L_A = \left[\bigcup_{i\in A} L_i\right].$$

Put

$$K = \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right] \quad \text{and} \quad L = \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i\right].$$

若有必要，将 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ 替换为定理 *4.1* 中的一个子序列。不失一般性，我们可以假设存在一个序列 $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$，由 $\mathbb{N}$ 的非空子集构成，且 $B_k \subset \{n_{k-1}+1, \ldots, n_k\}$ 满足

$$K'_k = K_{B_k}, \qquad L'_k = L_{B_k},$$

and $\mathbb{N} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ 是一个无限集。此外，不失一般性，我们可以假设 *e*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \dim(K_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \dim(L_i) = \infty.$$

因此，我们可以假设存在一个由 $\mathbb{N}$ 的两两不相交（无限）子集组成的序列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$，满足 $B_k \subset A_k$，使得

$$\dim(K_{A_k}) = \dim(L_{A_k}) = \infty$$

对每个 k都成立。很容易构造两个由 H 中的两两正交的闭子空间组成的序列 $\{F_{(k,l)}\}_{2\leq l<k<\infty}$ 和 $\{G_{(l,k)}\}_{2\leq l<k<\infty}$，使得

$$F_{k,l} \subset F_{(k,l)} \subset K_{A_k}, \qquad \dim(F_{(k,l)}) = \infty,$$

and

$$G_{l,k} \subset G_{(l,k)} \subset L_{A_k}, \qquad \dim(G_{(l,k)}) = \infty.$$

引理 4.9。令 T_3 为定理 *4.1* 中给出的有界算子。则存在一个有界算子 R_3：$[e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}}]_{k,l=2}^{\infty} \to \mathcal{C}_E$ 其形式为

$$\tilde{R}_3(e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}}) = \begin{cases} x_{(k,l)} + y_{(l,k)}, & 2 \leq l < k < \infty, \\ 0, & otherwise, \end{cases}$$

~使得 $R_3|_{[e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}}]_{2\le l<k<\infty}}$ 是与 *Schauder* 分解 $\{[e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}}]_{k=l+1}^{\infty}\}_{l=1}^{\infty}$ 相关的 T_3 的小扰动，其中

$$\{x_{(k,l)}\}_{2\le l<k<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{F_{(k,l)}\}_{2\le l<k<\infty}\otimes L \curvearrowleft \hat{b},$$

$$\{y_{(l,k)}\}_{2\le l<k<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} K\otimes\{G_{(l,k)}\}_{2\le l<k<\infty} \curvearrowleft \tilde{b},$$

且 $\left\|\begin{pmatrix}0 & \tilde{b}\\ \hat{b} & 0\end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{C}_E}\|\cdot\|_{\ell_2}\le 16^{\frac{1}{r}-1}\|T\|\cdot\|\cdot\|_{E^\circ}$。此外，我们有

$$\lim_{N\to\infty}\left\|P_{[\bigcup_{k=N}^{\infty}K_k],[\bigcup_{k=N}^{\infty}L_k]}\tilde{R}_3\right\|=0.$$

~证明。如果 b_1 和 b_1 均为零，则定义 $R_3=0$。

假设 $\hat{b}_1$ 或 $\tilde{b}_1$ 非零，且

$$\left\{x_{(k,l),m}\right\}_{1\le m<l<k<\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\left\{\hat{u}'_{k,l}:F_{k,l}\to\hat{H}'\right\}_{2\le l<k<\infty}\otimes\left\{\hat{v}'_m:L'_m\to\hat{H}'\right\}_{m=1}^{\infty}\curvearrowleft\hat{b}_m$$

and

$$\left\{y_{m,(l,k)}\right\}_{1\le m<l<k<\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\left\{\tilde{u}'_m:K'_m\to\tilde{H}'\right\}_{m=1}^{\infty}\otimes\left\{\tilde{v}'_{l,k}:G_{l,k}\to\tilde{H}'\right\}_{2\le l<k<\infty}\curvearrowleft\tilde{b}_m$$

对于每个 $m>1$。

我们可以构造一个等距映射序列 $\left\{\hat{u}'_{(k,l)}:F_{(k,l)}\to\hat{H}'\otimes_2\ell_2\right\}_{2\le l<k<\infty}$ 和一个等距映射 $\hat{v}':L\to H'\otimes_2\ell_2$，使得 $\hat{u}'_{(k,l)}$ 是 $\hat{u}'_k$的一个延拓，$\iota(\cdot)\otimes_2 e_1$，即

$$\hat{u}'_{(k,l)}(f)=\hat{u}'_{k,l}(f)\otimes_2 e_1\qquad\text{for any } f\in F_{k,l}$$

and

$$\hat{u}'_{(k,l)}\big(F_{(k,l)}\big)=\hat{H}'\otimes_2 e_1,$$

and

$$\hat{v}':\sum_{m=1}^{\infty}f_m\longmapsto\sum_{m=1}^{\infty}\hat{v}'_m(f_m)\otimes_2 e_m,\qquad\text{where } f_m\in L'_m,\ m\ge1.$$

类似地，我们可以构造一个等距映射 $\tilde{u}':K\to\tilde{H}'\otimes_2\ell_2$ 和一个等距映射序列 $\left\{\tilde{v}'_{(l,k)}:G_{(l,k)}\to\tilde{H}'\otimes_2\ell_2\right\}$，使得

$$\tilde{u}':\sum_{m=1}^{\infty}g_m\longmapsto\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{u}'_m(g_m)\otimes_2 e_m,\qquad\text{where } g_m\in K'_m,\ m\ge1,$$

并且 $\tilde{v}'_{(l,k)}$ 是 $\tilde{v}'_k$的一个延拓，$\iota(\cdot)\otimes_2 e_1$，即

$$\tilde{v}'_{(l,k)}(g)=\tilde{v}'_{l,k}(g)\otimes_2 e_1\qquad\text{for any } g\in G_{k,l}$$

and

$$\tilde{v}'_{(l,k)}\big(G_{(l,k)}\big)=\tilde{H}'\otimes_2 e_1.$$

由此可得（参见注记3.4（3））

$$\left\{x_{(k,l),m}\right\}_{1\le m<l<k<\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\left\{\hat{u}'_{(k,l)}:F_{(k,l)}\to\hat{H}'\otimes_2\ell_2\right\}_{2\le l<k<\infty}\otimes\left\{\hat{v}':L\to\hat{H}'\otimes_2\ell_2\right\}\curvearrowleft\hat{b}_m\otimes e_{1,m}\tag{4.39}$$

and

$$\left\{y_{m,(l,k)}\right\}_{1\le m<l<k<\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\left\{\tilde{u}':K\to\tilde{H}'\otimes_2\ell_2\right\}\otimes\left\{\tilde{v}'_{(l,k)}:G_{(l,k)}\to\tilde{H}'\otimes_2\ell_2\right\}_{2\le l<k<\infty}\curvearrowleft\tilde{b}_m\otimes e_{m,1}.\tag{4.40}$$

对每个 $m\ge1$，其中 $e_{1,\ m}=(\cdot|e_m)e_1$ 和 $e_{m,\ 1}=(\cdot|e_1)e_m$。注意

$$\sum_{m=1}^{\infty}\|\hat{b}_m\otimes e_{1,m}\|_{\mathcal{C}_E}^r\overset{\text{Th 4.1}}{\le}\left(1+\sum_{m=2}^{\infty}{\varepsilon_m}^r\right)\|\hat{b}_1\|_{\mathcal{C}_E}^r<\infty$$

and

$$\sum_{m=1}^{\infty}\|\tilde{b}_m\otimes e_{m,1}\|_{\mathcal{C}_E}^r \overset{\text{Th 4.1}}{\leq}\Big(1+\sum_{m=2}^{\infty}{\varepsilon_m}^r\Big)\|\tilde{b}_1\|_{\mathcal{C}_E}^r<\infty.$$

因此，级数 $\sum_{m=1}^{\infty}\hat{b}_m\otimes e_{1,\ m}$ 收敛到 $\hat{b}$，而级数 $\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{b}_m\otimes e_{m,\ 1}$ 收敛到 $\tilde{b}$。定义

$$x_{(k,l)}:=(\hat{u}'_{(k,l)})^*\hat{b}\hat{v}' \qquad\text{and}\qquad y_{(l,k)}:=\tilde{u}'^*\tilde{b}\tilde{v}'_{(l,k)}, \tag{4.41}$$

对每个 $2\leq l<k<\infty$。我们得到

$$\{x_{(k,l)}\}_{2\leq l<k<\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{\hat{u}'_{(k,l)}:F_{(k,l)}\to\hat{H}'\otimes_2\ell_2\}_{2\leq l<k<\infty}\otimes\{\hat{v}':L\to\hat{H}'\otimes_2\ell_2\}\curvearrowleft\hat{b} \tag{4.42}$$

and

$$\{y_{(l,k)}\}_{2\leq l<k<\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{\tilde{u}':K\to\tilde{H}'\otimes_2\ell_2\}\otimes\{\tilde{v}'_{(l,k)}:G_{(l,k)}\to\tilde{H}'\otimes_2\ell_2\}_{2\leq l<k<\infty}\curvearrowleft\tilde{b}. \tag{4.43}$$

令 $\{e_{(k,l)}\}_{k,l}$ 为 $\ell_2(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\cong\ell_2$的单位基。对于任意固定的 $l\geq 2$ 以及任意满足 $\big\|\{\alpha_k\}_{k=l+1}^{\infty}\big\|_2<\infty$的标量序列 $\{\alpha_k\}_{k=l+1}^{\infty}$,

$$\begin{aligned}
&\Big\|T_3\Big(\sum_{k=l+1}^{\infty}\alpha_k e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}}\Big)-\sum_{k=l+1}^{\infty}\alpha_k\Big(x_{(k,l)}+y_{(l,k)}\Big)\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r\\
\overset{(4.4)}{=}\ &\Big\|\sum_{k=l+1}^{\infty}\alpha_k\Big(\sum_{m=1}^{l-1}x_{(k,l),m}-x_{(k,l)}\Big)+\sum_{k=l+1}^{\infty}\alpha_k\Big(\sum_{m=1}^{l-1}y_{m,(l,k)}-y_{(l,k)}\Big)\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r\\
\overset{(4.39),(4.40),(4.42)(4.43)}{=}\ &\Big\|\sum_{k=l+1}^{\infty}\alpha_k\Big(\sum\nolimits_{m=l}^{\infty}\hat{b}_m\otimes e_{1,m}\Big)\otimes(\cdot|e_1)e_{(k,l)}\\
&\qquad+\sum_{k=l+1}^{\infty}\alpha_k\Big(\sum\nolimits_{m=l}^{\infty}\tilde{b}_m\otimes e_{m,1}\Big)\otimes(\cdot|e_{(k,l)})e_1\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r\\
\overset{(4.1)}{\leq}\ &4\sum_{m=l}^{\infty}\big(\|\hat{b}_m\|_{\mathcal{C}_E}^r+\|\tilde{b}_m\|_{\mathcal{C}_E}^r\big)\Big(\sum_{k=l+1}^{\infty}|\alpha_k|^2\Big)^{r/2}\\
\leq\ &4\Big(\big(\|\hat{b}_1\|_{\mathcal{C}_E}^r+\|\tilde{b}_1\|_{\mathcal{C}_E}^r\big)\sum_{m=l}^{\infty}{\varepsilon_m}^r\Big)\Big\|\sum_{k=l+1}^{\infty}\alpha_k e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}}\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r.
\end{aligned}$$

不失一般性，我们可以假设正数序列 $\big\{\sum_{m=l}^{\infty}{\varepsilon_m}^r\big\}_{l=2}^{\infty}$ 足够小。根据定理 2.12，存在一个算子 $R_3\in\mathcal{B}\big([e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}}]_{2\leq l<k<\infty},\mathcal{C}_E\big)$ 满足

$$R_3(e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}})=x_{(k,l)}+y_{(l,k)}$$

对于每个 $2\leq l<k<\infty$，使得 R_3 是与 $\big\{4^{\frac{1}{r}}\big(\|\hat{b}_1\|_{\mathcal{C}_E}^r+\|\tilde{b}_1\|_{\mathcal{C}_E}^r\big)^{1/r}\big(\sum_{m=l}^{\infty}{\varepsilon_m}^r\big)^{1/r}\big\}_{l=2}^{\infty}$上的 Schauder 分解 $\big\{[e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}}]_{k=l+1}^{\infty}\big\}_{l=2}^{\infty}$ 相关联的 T_3 的扰动。

对于任意有限非零标量序列 $\{\alpha_{k,l}\}_{k,l=2}^{\infty}$，有

$$\begin{aligned}
&\Big\|\sum_{2\le l<k<\infty}\alpha_{k,l}\big(x_{(k,l)}+y_{(l,k)}\big)\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r \qquad (4.44)\\
\le\ & 4\Big\|\sum_{2\le l<k<\infty}\alpha_{k,l}x_{(k,l)}\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r+4\Big\|\sum_{2\le l<k<\infty}\alpha_{k,l}y_{(l,k)}\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r\\
\overset{(4.42),(4.43)}{=}\ & 4\big(\|\hat{b}\|_{\mathcal{C}_E}^r+\|\tilde{b}\|_{\mathcal{C}_E}^r\big)\Big(\sum_{2\le l<k<\infty}|\alpha_{k,l}|^2\Big)^{r/2}\\
\le\ & 4\big(\|\hat{b}\|_{\mathcal{C}_E}^r+\|\tilde{b}\|_{\mathcal{C}_E}^r\big)\Big\|\sum_{l,k=2}^{\infty}\alpha_{k,l}e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}}\Big\|_{\mathcal{C}_{\ell_2}}^r\\
\overset{\text{Lem }4.7}{\le}\ & 2^{7-4r}\|T\|^r\Big\|\sum_{l,k=2}^{\infty}\alpha_{k,l}e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}}\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r.
\end{aligned}$$

因此，R_3 可以延拓为有界算子 $R_3:\ [e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}}]_{k,\ l=2}^{\infty}\to\mathcal{C}_E$ 满足

$$\tilde{R}_3(e_{\xi_{i_k},\eta_{i_l}})=\begin{cases}x_{(k,l)}+y_{(k,l)}, & 2\le l<k<\infty,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

根据引理 4.7，有 $\left\|\begin{smallmatrix}0&\hat{b}\\ \tilde{b}&0\end{smallmatrix}\right\|_{\mathcal{C}_E}\|\cdot\|_{\ell_2}\le 16^{\frac{1}{r}-1}\|T\|\cdot\|\cdot\|_E$。

利用事实（4.7）和（4.10），并采用与（4.44）类似的论证，可得

$$\lim_{N\to\infty}\big\|P_{[\bigcup_{k=N}^{\infty}K_k],[\bigcup_{k=N}^{\infty}L_k]}\tilde{R}_3\big\|=0. \qquad (4.45)$$

□

引理 4.10。设 T_4 为定理 *4.1*中给出的有界算子。存在一个有界算子 $R_4:\ [e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k,\ l=1}^{\infty}\to\mathcal{C}_E$ 其形式为

$$\tilde{R}_4(e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}})=x_{2k+1,2l}+y_{2l,2k+1}\qquad \textit{for every } k,l\ge 1,$$

使得 $R_4|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{1\le l\le k<\infty}}$ 是与 *Schauder* 分解 $\big\{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k=l}^{\infty}\big\}_{l=1}^{\infty}$相关联的 $T_4|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{1\le l\le k<\infty}}$ 的小扰动，其中

$$\{x_{2k+1,2l}\}_{k,l=1}^{\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_{A_{2k+1}}\}_{k=1}^{\infty}\otimes\{L_{A_{2l}}\}_{l=1}^{\infty}\curvearrowleft,$$

and

$$\{y_{2l,2k+1}\}_{k,l=1}^{\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_{A_{2l}}\}_{l=1}^{\infty}\otimes\{L_{A_{2k+1}}\}_{k=1}^{\infty}\curvearrowleft.$$

此外，如果 $T_4\neq 0$（即 $\hat{a}_1$ 或 $\tilde{a}_1$ 非零），则 R_4 是同构嵌入。*Pr*

oof. 不失一般性，我们可以假定 $\hat{a}_m\in\mathcal{B}(H)$ 与 $\tilde{a}_m\in\mathcal{B}(H)$，并且

$$\big\{x_{(k,m),l}\big\}_{1\le m<l<k<\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\big\{\hat{u}_{k,m}:F_{k,m}\to H\big\}_{1\le m<k-1<\infty}\otimes\big\{\hat{v}_l:L_l'\to H\big\}_{l=2}^{\infty}\curvearrowleft\hat{a}_m$$

and

$$\big\{y_{l,(m,k)}\big\}_{1\le m<l<k<\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\big\{\tilde{u}_l:K_l'\to H\big\}_{l=2}^{\infty}\otimes\big\{\tilde{v}_{m,k}:G_{m,k}\to H\big\}_{1\le m<k-1<\infty}\curvearrowleft\tilde{a}_m$$

对每一个 $m\ge 1$。

存在一个满足以下条件的等距映射序列 $\big\{u_i:\ K_{A_i}\to H\otimes_2\ell_2\big\}_{i=2}^{\infty}$

$$u_{2k}(f)=\tilde{u}_{2k}(f)\otimes_2 e_1\qquad\text{for any } f\in K_{2k}'=K_{B_{2k}},$$
$$u_{2k}(K_{A_{2k}})=H\otimes_2 e_1,$$

and

$$u_{2k+1}\Big(\sum\nolimits_{m=1}^{2k-1}f_m\Big)=\hat{u}_{2k+1,m}(f_m)\otimes_2 e_m,\qquad\text{where } f_m\in F_{2k+1,m},\ 1\le m<2k,$$

$$\operatorname{im}(\hat{a}_m)\otimes_2 e_m\subset u_{2k+1}(K_{A_{2k+1}})\qquad \text{for every } m\geq 2k,$$

以及一个满足以下条件的等距映射序列 $\{v_i:\ L_{A_i}\to H\otimes_2\ell_2\}_{i=2}^{\infty}$

$$v_{2k}(g)=\hat{v}_{2k}(g)\otimes_2 e_1\qquad \text{for any } g\in L'_{2k}=L_{B_{2k}},$$

$$v_{2k}(L_{A_{2k}})=H\otimes_2 e_1,$$

and

$$v_{2k+1}\left(\sum\nolimits_{m=1}^{2k-1}g_m\right)=\tilde{v}_{m,2k+1}(g_m)\otimes_2 e_m,\qquad \text{where } g_m\in G_{m,2k+1},\ 1\leq m<2k,$$

$$\ker(\tilde{a}_m)^{\perp}\otimes_2 e_m\subset v_{2k+1}(L_{A_{2k+1}})\qquad \text{for every } m\geq 2k.$$

由此可得（见注记3.4(2)）

$$\begin{aligned}&\left\{x_{(2k+1,m),2l}\right\}_{1\leq m<2l<2k+1<\infty}\\ &\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\left\{u_{2k+1}:K_{A_{2k+1}}\to H\otimes_2\ell_2\right\}_{k=1}^{\infty}\otimes\left\{v_{2l}:L_{A_{2l}}\to H\otimes_2\ell_2\right\}_{l=1}^{\infty}\curvearrowleft\hat{a}_m\otimes e_{m,1}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\left\{y_{2l,(m,2k+1)}\right\}_{1\leq m<2l<2k+1<\infty}\\ &\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\left\{u_{2l}:K_{A_{2l}}\to H\otimes_2\ell_2\right\}_{l=1}^{\infty}\otimes\left\{v_{2k+1}:L_{2k+1}\to H\otimes_2\ell_2\right\}_{k=1}^{\infty}\curvearrowleft\tilde{a}_m\otimes e_{1,m}\end{aligned}$$

对每个 $m\geq 1$，其中 $e_{m,\ 1}=(\cdot|e_1)e_m$ 以及 $e_{1,\ m}=(\cdot|e_m)e_1$。注意

$$\sum_{m=1}^{\infty}\|\hat{a}_m\otimes e_{m,1}\|_{\mathcal{C}_E}^r\overset{\text{Th 4.1}}{\leq}\left(1+\sum_{m=2}^{\infty}{\varepsilon_m}^r\right)\|\hat{a}_1\|_{\mathcal{C}_E}^r<\infty$$

and

$$\sum_{m=1}^{\infty}\|\tilde{a}_m\otimes e_{1,m}\|_{\mathcal{C}_E}^r\overset{\text{Th 4.1}}{\leq}\left(1+\sum_{m=2}^{\infty}{\varepsilon_m}^r\right)\|\tilde{a}_1\|_{\mathcal{C}_E}^r<\infty.$$

假设级数 $\sum_{m=1}^{\infty}\hat{a}_m\otimes e_{m,\ 1}$ 收敛于 $\hat{a}$，且级数 $\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_m\otimes e_{1,\ m}$ 收敛于 $\tilde{a}$。记

$$x_{2k+1,2l}:=(u_{2k+1})^*\hat{a}v_{2l}\qquad\text{and}\qquad y_{2l,2k+1}=(u_{2l})^*\tilde{a}v_{2k+1}$$

对每个 $k,\ l\geq 1$。我们得到

$$\{x_{2k+1,2l}\}_{k,l=1}^{\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\left\{u_{2k+1}:K_{A_{2k+1}}\to H\otimes_2\ell_2\right\}_{k=1}^{\infty}\otimes\left\{v_{2l}:L_{A_{2l}}\to H\otimes_2\ell_2\right\}_{l=1}^{\infty}\curvearrowleft\hat{a}\qquad(4.46)$$

and

$$\{y_{2l,2k+1}\}_{k,l=1}^{\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\left\{u_{2l}:K_{A_{2l}}\to H\otimes_2\ell_2\right\}_{l=1}^{\infty}\otimes\left\{v_{2k+1}:L_{2k+1}\to H\otimes_2\ell_2\right\}_{k=1}^{\infty}\curvearrowleft\tilde{a}.\qquad(4.47)$$

固定 $l\geq 1$，对于任意满足 $\|\{\alpha_k\}_{k=l}^{\infty}\|_2<\infty$ 的标量序列 $\{\alpha_k\}_{k=l}^{\infty}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\Big\|T_4\Big(\sum_{k=l}^{\infty}\alpha_k e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}\Big)-\sum_{k=l}^{\infty}\alpha_k\Big(x_{2k+1,2l}+y_{2l,2k+1}\Big)\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r \qquad (4.48)\\
\overset{(4.8),(4.11)}{=}\ &\Big\|\sum_{k=l}^{\infty}\alpha_k\Big(\Big(\sum\nolimits_{m=2l}^{\infty}\hat{a}_m\otimes e_{m,1}\Big)\otimes(\cdot|e_{2l})e_{2k+1}\\
&\qquad+\Big(\sum\nolimits_{m=2l}^{\infty}\tilde{a}_m\otimes e_{1,m}\Big)\otimes(\cdot|e_{2k+1})e_{2l}\Big)\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r\\
\leq\ & 4\sum_{m=2l}^{\infty}\Big(\Big\|\sum_{k=l}^{\infty}\alpha_k\big(\hat{a}_m\otimes e_{m,1}\big)\otimes(\cdot|e_{2l})e_{2k+1}\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r\\
&\qquad+\Big\|\sum_{k=l}^{\infty}\alpha_k\big(\tilde{a}_m\otimes e_{1,m}\big)\otimes(\cdot|e_{2k+1})e_{2l}\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r\Big)\\
\leq\ & 4\sum_{m=2l}^{\infty}\big(\|\hat{a}_m\|_{\mathcal{C}_E}^r+\|\tilde{a}_m\|_{C_E}^r\big)\Big(\sum_{k=l}^{\infty}|\alpha_k|^2\Big)^{r/2}\\
\overset{\text{Th 4.1}}{\leq}\ & 4\Big(\big(\|\hat{a}_1\|_{\mathcal{C}_E}^r+\|\tilde{a}_1\|_{C_E}^r\big)\sum_{m=2l}^{\infty}{\varepsilon_m}^r\Big)\Big\|\sum_{k=l}^{\infty}\alpha_k e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}\Big\|_{\mathcal{C}_E}^r.
\end{aligned}$$

不失一般性，我们可以假设正数序列 $\big\{\sum_{m=l}^{\infty}{\varepsilon_m}^r\big\}_{l=2}^{\infty}$ 足够小。根据定理 2.12，存在一个算子 $R_4\in\mathcal{B}\big([e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{1\leq l\leq k<\infty},\ \mathcal{C}_E\big)$ 满足

$$R_4(e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}})=x_{2k+1,2l}+y_{2l,2k+1}$$

对每个 $1\leq l\leq k<\infty$，使得 R_4 是与 Schauder 分解 $\big\{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k=l}^{\infty}\big\}_{l=1}^{\infty}$ 相关的 T_4 的扰动，适用于 $\big\{4^{\frac{1}{r}}\big(\|\hat{a}_1\|_{\mathcal{C}_E}^r+\|\tilde{a}_1\|_{\mathcal{C}_E}^r\big)^{1/r}\big(\sum_{m=2l}^{\infty}{\varepsilon_m}^r\big)^{1/r}\big\}_{l=1}^{\infty}$。

我们定义等距映射 $\widehat{\ }u$（分别地，$\widehat{\ }v$）为公式（3.2，它由上述等距映射序列$\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$（分别地，$\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$）诱导。对于任意有限非零序列 $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的标量，根据注记 3.4 （2），我们有

$$\begin{aligned}
&\Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\big(\hat{a}\otimes(\cdot|e_{2k})e_{2k+1}+\tilde{a}\otimes(\cdot|e_{2k+1})e_{2k}\big)\Big\|_{\mathcal{C}_E} \qquad (4.49)\\
=\ &\Big\|\widehat{u}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(x_{2k+1,2l}+y_{2l,2k+1})\Big)\widehat{v}\Big\|_{\mathcal{C}_E}\\
\overset{(4.46),(4.47)}{\leq}\ &\|R_4\|\Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2k}}}\Big\|_{\mathcal{C}_E}\\
=\ &\|R_4\|\Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k\Big\|_E.
\end{aligned}$$

利用命题 2.6，对于任意有限非零序列 $\{\alpha_{k,l}\}_{k,\,l=1}^{\infty}$ 个标量，并设置 $x=\sum_{k,\,l=1}^{\infty}\alpha_{k,\,l}e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{k,l=1}^{\infty}\alpha_{k,l}\big(x_{2k+1,2l}+y_{2l,2k+1}\big)\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
\overset{(4.46),(4.47)}{=}&\left\|\sum_{k,l=1}^{\infty}\alpha_{k,l}\big(\hat{a}\otimes(\cdot|e_{2l})e_{2k+1}+\tilde{a}\otimes(\cdot|e_{2k+1})e_{2l}\big)\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
\overset{\text{Prop 2.6}}{=}&\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{k,l}\left(\begin{smallmatrix}0&\tilde{a}\\ \hat{a}&0\end{smallmatrix}\right)\otimes(\cdot|e_l)e_k\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
=&\left\|\left(\begin{smallmatrix}0&\tilde{a}\\ \hat{a}&0\end{smallmatrix}\right)\otimes\Big(\sum\nolimits_{k,l=1}^{\infty}\alpha_{k,l}(\cdot|e_l)e_k\Big)\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
=&\left\|\left(\begin{smallmatrix}0&\tilde{a}\\ \hat{a}&0\end{smallmatrix}\right)\otimes x\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
=&\left\|\left(\begin{smallmatrix}0&\tilde{a}\\ \hat{a}&0\end{smallmatrix}\right)\otimes\sum\nolimits_{k=1}^{\infty}s_k(x)(\cdot|e_k)e_k\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
\overset{\text{Prop 2.6}}{=}&\left\|\sum_{k=1}^{\infty}s_k(x)\big(\hat{a}\otimes(\cdot|e_{2k})e_{2k+1}+\tilde{a}\otimes(\cdot|e_{2k+1})e_{2k}\big)\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
\overset{(4.49)}{\leq}&\|R_4\|\left\|\sum_{k=1}^{\infty}s_k(x)e_k\right\|_E=\|R_4\|\cdot\|x\|_{\mathcal{C}_E}.
\end{aligned}$$

˜因此， R_4 可以延拓为一个有界算子 $R_4:[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k,\,l=1}^{\infty}\to\mathcal{C}_E$，且

$$\tilde{R}_4(e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}})=x_{2k+1,2l}+y_{2l,2k+1}$$

对所有 $k,\ l\geq 1$。

由定理4.1以及$\hat{a}$ 与 $\tilde{a}$的定义，算子$\hat{a}_1$ （相应地， $\tilde{a}_1$）非零当且仅当$\hat{a}$ （相应地， $\tilde{a}$）非零。不失一般性，我们可以假设$\hat{a}\neq 0$。特别地， $|\hat{a}|_\infty\neq 0$。对任意有限非零标量序列$\{\alpha_{k,l}\}_{k,\,l=1}^{\infty}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{k,l=1}\tilde{R}_4\big(\alpha_{k,l}e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}\big)\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
\overset{(4.46),(4.47)}{=}&\left\|\sum_{k,l=1}^{\infty}\alpha_{k,l}\big(\hat{a}\otimes(\cdot|e_{2l})e_{2k+1}+\tilde{a}\otimes(\cdot|e_{2k+1})e_{2l}\big)\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
\geq&\left\|\sum_{k,l=1}^{\infty}\alpha_{k,l}\hat{a}\otimes(\cdot|e_{2l})e_{2k+1}\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
\geq&\|\hat{a}\|_\infty\left\|\sum_{k,l=1}\alpha_{k,l}(\cdot|e_{2l})e_{2k+1}\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
=&\|\hat{a}\|_\infty\left\|\sum_{k,l=1}\alpha_{k,l}e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}\right\|_{\mathcal{C}_E}.
\end{aligned}$$

˜换言之，若 $T_4\neq 0$，则 R_4 是一个同构嵌入。 □

注 4.11。 可以看出

$$\{x_{2k+1,2l}+y_{2l,2k+1}\}_{k,l=1}^{\infty}\simeq\{\left(\begin{smallmatrix}0&\tilde{a}\\ \hat{a}&0\end{smallmatrix}\right)\otimes e_{k,l}\}_{k,l=1}^{\infty},$$

w这里$\hat{a}=\sum_{m=1}^{\infty}\hat{}a_m\otimes e_{m,1}$ 和 $\tilde{a}=\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_m\otimes e_{1,m}$，其中 $e_{k,l}$ 由 $(\cdot|e_l^H)e_k^H$给出 .

引理 4.12。 设 T_2 是定理 *4.1*中给出的有界算子。那么，要么

(1) 存在一个正整数 N，使得 $\{T_2(e_{\xi_{i_{2k+1}},\,\eta_{i_{2l}}})\}_{N\le l\le k<\infty}\sim\{e^H_{(k,l)}\}_{N\le l\le k<\infty}$；或者(2) 存在 $\{i_l\}_{l=2}^\infty$ 的一个递增子序列 $\{i'_l\}_{l=1}^\infty$ 以及一个归一化序列 $\{\eta'_l\}_{l=1}^\infty$，满足 $\eta'_l\in[\eta_{i_{2s}}]_{i'_{2l}\le i_{2s}<i'_{2l+1}}$，使得 $T_2|_{[e_{\xi_{i'_{2k+1}},\eta'_l}]_{1\le l\le k<\infty}}$ 是与*Schauder* 分解 $\{[e_{\xi_{i'_{2k+1}},\eta'_l}]_{k=l}^\infty\}_{l=1}^\infty$ 相关联的零算子的小扰动。

证明。设

$$c_l=\begin{pmatrix}0&\tilde{c}_l\\ \hat{c}_l&0\end{pmatrix}$$

对每个 $l\ge 2$。根据注记3.4 (2)，对于任意有限非零标量序列 $\{\alpha_l\}_{l=1}^n$，有

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{l=1}^n\alpha_l T_2(e_{\xi_{i_{2n+1}},\eta_{i_{2l}}})\Big\|_{\mathcal{C}_E}&\overset{(4.3),(4.6),(4.9)}{=}\Big\|\sum_{l=1}^n\alpha_l\big(\hat{c}_{2l}\otimes(\cdot|e_{2l})e_{2l+1}+\tilde{c}_{2l}\otimes(\cdot|e_{2l+1})e_{2l}\big)\Big\|_{\mathcal{C}_E}\\&\overset{\text{Prop 2.6}}{=}\Big\|\sum_{l=1}^n\alpha_l\big(c_{2l}\otimes(\cdot|e_l)e_l\big)\Big\|_{\mathcal{C}_E}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\Big\|\sum_{l=1}^n\alpha_l\big(c_{2l}\otimes(\cdot|e_l)e_l\big)\Big\|_{\mathcal{C}_E}\le\|T_2\|\Big(\sum_{l=1}^n|\alpha_l|^2\Big)^{1/2}.$$

因此，由下式定义的算子 Q

$$Q:\{\alpha_l\}_{l=1}^\infty\in\ell_2\mapsto\sum_{l=1}^\infty\alpha_l\big(c_{2l}\otimes(\cdot|e_l)e_l\big)$$

是有界的。

对于任意正整数 N 和任意有限标量序列 $\{\alpha_{k,l}\}_{N\le l\le k\le n}$，我们有

$$\begin{aligned}&\Big\|\sum_{N\le l\le k\le n}\alpha_{k,l}T_2(e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}})\Big\|_{\mathcal{C}_E}\\\overset{(4.3)}{=}&\Big\|\sum_{N\le l\le k\le n}\alpha_{k,l}\big(x_{(2k+1,2l),2l}+y_{2l,(2l,2k+1)}\big)\Big\|_{\mathcal{C}_E}\\\overset{(4.6),(4.9)}{=}&\Big\|\sum_{N\le l\le k\le n}\alpha_{k,l}\big(\hat{c}_{2l}\otimes(\cdot|e_{2^{2l}})e_{2^{2l}(2k+1)}+\tilde{c}_{2l}(\cdot|e_{2^{2l}(2k+1)})e_{2^{2l}}\big)\Big\|_{\mathcal{C}_E}\\=&\Big\|\sum_{l=N}^n\sum_{k=l}^n\alpha_{k,l}\big(\hat{c}_{2l}\otimes(\cdot|e_{2^{2l}})e_{2^{2l}(2k+1)}+\tilde{c}_{2l}(\cdot|e_{2^{2l}(2k+1)})e_{2^{2l}}\big)\Big\|_{\mathcal{C}_E}\\\overset{\text{Prop 2.6}}{=}&\Big\|\sum_{l=N}^n\Big(c_{2l}\otimes\Big((\cdot|e_{2^{2l}})\sum_{k=l}^n\alpha_{k,l}e_{2^{2l}(2k+1)}\Big)\Big)\Big\|_{\mathcal{C}_E}\\=&\Big\|\sum_{l=2}^n\Big(\sum_{k=l+1}^n|\alpha_{k,l}|^2\Big)^{1/2}c_{2l}\otimes(\cdot|e_l)e_l\Big\|_{\mathcal{C}_E}\\=&\Big\|Q\Big(\sum_{l=N}^n\Big(\sum_{k=l}^n|\alpha_{k,l}|^2\Big)^{1/2}e_l\Big)\Big\|_{\mathcal{C}_E}.\end{aligned}$$

情形 I：存在一个正整数 N，使得 $Q|_{[e_i]_{i=N}^\infty}$ 是同构嵌入。特别地，我们有 $\{T_2(e_{\xi_{i_{2k+1}},\,\eta_{i_{2l}}})\}_{N\le l\le k<\infty}\sim\{e^H_{(k,l)}\}_{N\le l<k<\infty}$。

情形 II：否则，存在一个正整数的递增序列 $\{l_t\}_{t=1}^{\infty}$，以及 $\alpha^{(t)}=\sum_{l_t\le l<l_{t+1}}\alpha_l^{(t)}e_l\in[e_l]_{l_t\le l<l_{t+1}}$，对每个 t 都有 $\|\alpha^{(t)}\|_2=1$（这里，$\{\varepsilon_t\}_{t\ge1}$ 是一个由足够小的正数组成的序列）

$$\left\|Q\left(\alpha^{(t)}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E}\le\varepsilon_t.$$

Set

$$\eta_t'=\sum_{l_t\le l<l_{t+1}}\alpha_l^{(t)}\eta_{i_{2l}}.$$

注意，对所有 $t\ge1$，$\|\eta_t'\|_H=1$ 成立。固定每个 $t\ge1$，对任意有限标量序列 $\{\beta_s\}_{s=t+1}^{n}$，我们有

$$\begin{aligned}\left\|T_2\Big(\sum_{s=t+1}^{n}\beta_s e_{\xi_{i_{2l_s+1}},\eta_t'}\Big)\right\|_{\mathcal{C}_E}&=\left\|\sum_{l_t\le l<l_{t+1}}\sum_{s=t+1}^{n}\beta_s\alpha_l^{(t)}T_2(e_{\xi_{i_{2l_s+1}},\eta_{i_{2l}}})\right\|_{\mathcal{C}_E}\\&=\left\|Q\left(\sum_{l_t\le l<l_{t+1}}\Big(\sum_{s=t+1}^{n}|\beta_s|^2\Big)^{1/2}\alpha_l^{(t)}e_l\right)\right\|_{\mathcal{C}_E}\\&=\Big(\sum_{s=t+1}^{n}|\beta_s|^2\Big)^{1/2}\left\|Q\left(\alpha^{(t)}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E}\\&\le\varepsilon_t\left\|\sum_{s=t+1}^{n}\beta_s e_{\xi_{i_{2l_s+1}},\eta_t'}\right\|_{\mathcal{C}_E}.\end{aligned}$$

由定理2.12，证明完成。

□

注 4.13. 结合引理4.7 与引理4.12，我们得到要么

$$\left\{(T_2+T_3)(e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}})\right\}_{N\le l\le k<\infty}\sim\left\{e_{(k,l)}^{H}\right\}_{N\le l\le k<\infty},$$

或者$(T_2+T_3)|_{[e_{\xi_{i'_{2k+1}},\eta_l'}]_{1\le l\le k<\infty}}$ 是与 Schauder 分解$\left\{[e_{\xi_{i'_{2k+1}},\eta_l'}]_{k=l}^{\infty}\right\}_{l=1}^{\infty}$相关联的零算子的小扰动。

结合引理4.10 与注4.13，我们得到如下定理。

定理 4.14。 在定理*4.1*的假设下，存在一个正整数的严格递增序列 $\{i_k'\}_{k=1}^{\infty}$、$\mathbb{N}$ 的互不相交子集序列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$、一个归一化序列$\{\eta_k'\}_{k=1}^{\infty}$（满足 $\eta_k'\in[\eta_i]_{i_{2k}'\le i<i_{2k+1}'}$），以及三个算子 S_1、S_2、$S_3\in\mathcal{B}\big(\mathcal{T}_{E、\{\xi_{i'_{2k+1}},\eta_k'\}_{k=1}^{\infty}}、\mathcal{C}_E\big)$，使得 $S_1+S_2+S_3$ 是 $T|_{\mathcal{T}_E}$ 的小扰动$_{.\{\xi_{i'_{2k+1}},\eta_k'\}_{k=1}^{\infty}}$ 与 *Schauder* 分解 $\left\{[e_{\xi_{i'_{2k+1}},\eta_l'}]_{k=l}^{\infty}\right\}_{l=1}^{\infty}$ 相关，其中

(1) $S_1(e_{\xi_{i'_{2k+1}},\eta_l'})=p_{K_{A_{2k+1}}}T(e_{\xi_{i'_{2k+1}},\eta_l'})p_{L_{A_{2k+1}}}$ *for every* $1\le l\le k<\infty$,
(2) $\left\{S_2(e_{\xi_{i'_{2k+1}},\eta_l'})\right\}_{1\le l\le k<\infty}\sim\left\{e_{(k,l)}^{H}\right\}_{1\le l\le k<\infty}$ *or* $S_2=0$, *and*
(3) $S_3(e_{\xi_{i'_{2k+1}},\eta_l'})=x_{2k+1,2l}+y_{2l,2k+1}$ *for every* $1\le k\le l<\infty$, *where*

$$\{x_{2k+1,2l}\}_{1\le l\le k<\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_{A_{2k+1}}\}_{k=1}^{\infty}\otimes\{L_{A_{2l}}\}_{l=1}^{\infty}\curvearrowleft$$

and

$$\{y_{2l,2k+1}\}_{1\le l\le k<\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_{A_{2l}}\}_{l=1}^{\infty}\otimes\{L_{A_{2k+1}}\}_{k=1}^{\infty}\curvearrowleft\ .$$

注记 4.15。 设 F 是另一个可分拟巴拿赫对称序列空间。若我们考虑一个有界算子 $T\colon \mathcal{T}_{F,\{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^\infty} \to \mathcal{C}_E$ 满足 $p_{[\bigcup_{i=1}^\infty K_i]} T\,(\cdot)\, p_{[\bigcup_{i=1}^\infty L_i]} = T$，那么，根据注记 4.3，对前述引理的证明作必要变更后重复证明，可得定理4.14的结论仍然成立。此外，

(i) 若 $F \not\subset \ell_2$，则上述定理中的 $S_2 = 0$。若 $F \not\subset E$，则上述定理中的 $S_3 = 0$。(ii) 若选取 $\{K_i\}_{i=1}^\infty$ 和 $\{L_i\}_{i=1}^\infty$，使得对于每个 $1 \le i < j < \infty$，$p_{K_i}(\mathrm{im}(T))p_{L_j} = \{0\}$，则“$y_{2l,\ 2k+1}$”部分为 0。特别地，$K_i = [\xi_i]$、$L_i = [\eta_i]$ 和 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{T}_{F,\ \{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^\infty})$，因此我们得到 S_1，S_2，$S_3 \in \mathcal{B}(\mathcal{T}_{F,\ \{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^\infty})$。

引理 4.16。 设 T_1 和 T_2 为定理 *4.1*中给出的有界算子。若再有$\ell_2 \not\hookrightarrow E$，则存在

- $\{i_k\}_{k=2}^\infty$的一个递增子序列 $\{i'_k\}_{k=1}^\infty$，
- 一个归一化序列 $\{\xi'_k\}_{k=1}^\infty$，其中 $\xi'_k \in [\xi_{i_{2s+1}}]_{i'_{2k+1} \le i_{2s+1} < i'_{2k+2}}$，且
- 一个归一化序列 $\{\eta'_k\}_{k=1}^\infty$，其中 $\eta'_k \in [\eta_{i_{2s}}]_{i'_{2k} \le i_{2s} < i'_{2k+1}}$

使得 $T_1|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{1\le l\le k<\infty}}$ 和 $T_2|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{1\le l\le k<\infty}}$ 都是与 *Schauder* 分解$\big\{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k=l}^\infty\big\}_{l=1}^\infty$相关联的零算子的扰动。

因此，若 T 是一个同构嵌入，则$\hat{a}_1$ 或 $\tilde{a}_1$ 非零（即 $T_4 \neq 0$）。

证明。 采用引理 4.12 中的相同论证，可得存在一个递增子序列$\{i''_l\}_{l=1}^\infty$，它属于 $\{i_l\}_{l=2}^\infty$，以及一个归一化序列 $\{\eta''_l\}_{l=1}^\infty$，满足 $\eta''_l \in [\eta_{i_{2s}}]_{i''_{2l} \le i_{2s} < i''_{2l+1}}$，使得$T_2|_{[e_{\xi_{i''_{2k+1}},\eta''_l}]_{1\le l\le k<\infty}}$ 是与 Schauder 分解 $\big\{[e_{\xi_{i''_{2k+1}},\eta''_l}]_{k=l}^\infty\big\}_{l=1}^\infty$ 对应的零算子的扰动，其中 $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^\infty$。

注意，对于每个固定的 l，$[T_1 e_{\xi_{i''_{2k+1}},\eta''_l}]_{k=l}^\infty$ 与 E 的一个子空间等距同构（例如参见 [35, 命题 3.3]）。对于每个固定的 $k \ge 1$，考虑算子

$$\{\alpha_s\}_{s=0}^\infty \in \ell_2 \longmapsto \left(\sum_{s=0}^\infty \alpha_s T_1 e_{\xi_{i''_{2(k+s)+1}},\eta''_1}, \dots, \sum_{s=0}^\infty \alpha_s T_1 e_{\xi_{i''_{2(k+s)+1}},\eta''_k}\right) \in \underbrace{(\mathcal{C}_E \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}_E)}_{k}.$$

显然，它是有界的。利用假设 $\ell_2 \not\hookrightarrow E$ 和事实 B.2，我们可找到一个正整数严格递增序列 $\{k_s\}_{s=1}^\infty$ 以及 $\alpha^{(s)} = \big(\alpha_k^{(s)}\big)_{k_{2s+1}\le k<k_{2s+2}}$，使得 $\|\alpha^{(s)}\|_2 = 1$ 对每个 s均成立，从而

$$\left\| \sum_{k_{2s+1}\le k<k_{2s+2}} \alpha_k^{(s)} T_1 e_{\xi_{i''_{2k+1}},\eta''_{k_t}} \right\|_{\mathcal{C}_E} \le \varepsilon_s \qquad t = 1, \dots, 2s$$

Put

$$\xi'_s = \sum_{k_{2s+1}\le k<k_{2s+2}} \alpha_k^{(s)} \xi_{i''_{2k+1}} \quad \text{and} \quad \eta'_s = \eta''_{k_{2s}} \qquad s = 1, 2 \cdots.$$

Fo对于每个固定的 t，对于任意满足 $\|\{\beta_s\}_{s=t}^\infty\|_2 < \infty$ 的标量序列 $\{\beta_s\}_{s=t}^\infty$，我们有

$$\begin{aligned}\left\| T_1\Big(\sum_{s=t}^\infty \beta_s e_{\xi'_s,\eta'_t}\Big)\right\|_{\mathcal{C}_E} &\le 4^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{s=t}^\infty \big(\varepsilon_s|\beta_s|\big)^r\right)^{\frac{1}{r}} \le 4^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{s=t}^\infty {\varepsilon_s}^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{s=t}^\infty |\beta_s|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le 4^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{s=t}^\infty {\varepsilon_s}^q\right)^{\frac{1}{q}} \left\| \sum_{s=t}^\infty \beta_s e_{\xi'_s,\eta'_t} \right\|_{\mathcal{C}_E}.\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{2}$。因此，$T_1|_{[e_{\xi'_s,\eta'_t}]_{1\le t\le s<\infty}}$ 是与 Schauder 分解 $\big\{[e_{\xi'_s,\eta'_t}]_{s=t}^\infty\big\}_{t=1}^\infty$ 相关联的零算子的扰动，适用于 $\big\{4^{\frac{1}{r}}\big(\sum_{s=t}^\infty {\varepsilon_s}^q\big)^{\frac{1}{q}}\big\}_{t=1}^\infty$（不失一般性，我们可以假设正数序列 $\big\{\big(\sum_{s=t}^\infty {\varepsilon_s}^q\big)^{\frac{1}{q}}\big\}_{t=1}^\infty$ 足够小）。由于对于每个 t 都有 $[e_{\xi'_s,\eta'_t}]_{s=t}^\infty \subset [e_{\xi_{i''_{2k+1}},\eta''_{k_{2t}}}]_{k=k_{2t}}^\infty$，可知 $T_2|_{[e_{\xi'_s,\eta'_t}]_{1\le t\le s<\infty}}$ 是与 Schauder 分解 $\big\{[e_{\xi'_s,\eta'_t}]_{s=t}^\infty\big\}_{t=1}^\infty$ 相关联的零算子的小扰动，适用于 $\{\varepsilon_{k_{2t}}\}_{t=1}^\infty$。通过令 $i'_{2s} = i''_{2k_{2s}}$ 并对所有 $s \ge 1$ 取 $i'_{2s+1} = i''_{2k_{2s+1}+1}$，即可得到该引理的第一个断言。

假设 T 是一个同构嵌入。如果$\hat{a}_1$ 和 $\tilde{a}_1$ 均为零（即 $T_4=0$），那么$T_3|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{N\le l\le k<\infty}}$ 对于某个充分大的正整数 N而言是一个同构嵌入。根据引理 4.7， $[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{N\le l\le k<\infty}$与 ℓ_2同构，因此，

$$E\cong[e_{\xi'_k,\eta'_k}]_{k=N}^{\infty}\approx\ell_2.$$

这与假设矛盾。换言之，$\hat{a}_1$ 或 $\tilde{a}_1$ 非零。 □

现在，结合引理4.9、4.10和4.16，并利用注记3.6，我们得到如下定理。

定理 4.17. 设 E 是一个可分拟巴拿赫对称序列空间，使得c_0、 $\ell_2\not\hookrightarrow E$和 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{T}_{E,\ \{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$、$\mathcal{C}_E)$ 满足 $p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i]}T(\cdot)p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty}L_i]}=T$。设 $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^{\infty}$为一列正数。

存在正整数的递增序列 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ 、两个标准正交序列$\{\xi'_k\}_{k=1}^{\infty}$ （满足 $\xi'_k\in[\xi_i]_{i_{2k+1}\le i<i_{2k+2}}$ ）和 $\{\eta'_k\}_{k=1}^{\infty}$ （满足 $\eta'_k\in[\eta_i]_{i_{2k}\le i<i_{2k+1}}$），以及两个算子$\tilde{R}_1$、 $\tilde{R}_2\in\mathcal{B}\big([e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,\ l=1}^{\infty}$、$\mathcal{C}_E\big)$，它们具有如下形式

$$\tilde{R}_1(e_{\xi'_k,\eta'_l})=\begin{cases}x_{(2k+1,2l)}+y_{(2l,2k+1)}, & 1\le l\le k<\infty,\\ 0, & otherwise,\end{cases}\tag{4.50}$$

$$\tilde{R}_2(e_{\xi'_k,\eta'_l})=x_{2k+1,2l}+y_{2l,2k+1}\quad for\ every\ k,l\ge1,\tag{4.51}$$

使得 $\big(\tilde{R}_1+\tilde{R}_2\big)|_{\mathcal{T}_{E,\ \{\xi'_k,\eta'_k\}_{k=1}^{\infty}}}$是与 $T|_{\mathcal{T}_{E,\ \{\xi'_k,\eta'_k\}_{k=1}^{\infty}}}$相关的扰动，该扰动对应于 $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^{\infty}$ 的 *Schauder* 分解 $\big\{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k=l}^{\infty}\big\}_{l=1}^{\infty}$，其中

(1) $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{N}$ 的互不相交子集序列，并且 $\{F_{(2k+1,2l)}\}_{1\le l\le k<\infty}$ 和 $\{G_{(2l,2k+1)}\}_{1\le l\le k<\infty}$ 是 H 中两两正交的闭子空间序列，使得

$$F_{(2k+1,2l)}\subset K_{A_{2k+1}}\quad and\quad G_{(2l,2k+1)}\subset L_{A_{2k+1}}\quad for\ every\ 1\le l\le k<\infty,$$

(2)

$$\{x_{(2k+1,2l)}\}_{1\le l\le k<\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{F_{(2k+1,2l)}\}_{1\le l\le k<\infty}\otimes L\curvearrowleft\hat{b},$$

$$\{y_{(2l,2k+1)}\}_{1\le l\le k<\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}K\otimes\{G_{(2l,2k+1)}\}_{1\le l\le k<\infty}\curvearrowleft\tilde{b},$$

$$and\ \left\|\begin{pmatrix}0&\tilde{b}\\ \hat{b}&0\end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{C}_E}\|\cdot\|_{\ell_2}\le16^{\frac{1}{r}-1}\|T\|\cdot\|\cdot\|_E,$$

(3)

$$\{x_{2k+1,2l}\}_{k,l=1}^{\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_{A_{2k+1}}\}_{k=1}^{\infty}\otimes\{L_{A_{2l}}\}_{l=1}^{\infty}\curvearrowleft$$

$$and$$

$$\{y_{2l,2k+1}\}_{k,l=1}^{\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_{A_{2l}}\}_{l=1}^{\infty}\otimes\{L_{A_{2k+1}}\}_{k=1}^{\infty}\curvearrowleft\ .$$

此外，我们有 $\lim_{N\to\infty}\big\|P_{[\bigcup_{k=N}^{\infty}K_k],\ [\bigcup_{k=N}^{\infty}L_k]}\tilde{R}_1\big\|=0$；若 T 是同构嵌入，~则 R_2 是同构嵌入。

注4.18. 设 F 是另一个可分拟巴拿赫对称序列空间。若考虑有界算子 $T:\mathcal{T}_{F,\{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}\to\mathcal{C}_E$其中 $p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i]}T(\cdot)p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty}L_i]}=T$，那么根据注记4.3，对前述引理的证明作必要变更后重复论证，可知定理 4.17 的所有结论仍然成立，但需要附加条件 $\ell_2\not\hookrightarrow F$，以确~保在 R_2 是同构嵌入的前提下，T 是同构嵌入（见 [27]），从而得到 [7, 推论5。3]此外，

(i) 如果 $F\not\subset\ell_2$，那么上述定理中的 $\tilde{R}_1=0$。如果 $F\not\subset E$，那么上述定理中的 $\tilde{R}_2=0$。(ii) 如果选择 $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$，使得对于每个 $1\le i<j<\infty$ 都有 $p_{K_i}(\mathrm{im}(T))p_{L_j}=\{0\}$ （例如，$K_i=[\xi_i]$、 $L_i=[\eta_i]$ 且 $\mathrm{im}(T)\subset[e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\le j\le i<\infty}$），那么那些“$y_{(2l,2k+1)}$”和“$y_{2l,\ 2k+1}$”部分为 0。

4.2. **应用**。回顾一下，对于可分巴拿赫对称序列空间 E，我们有$\mathcal{T}_E \not\approx \mathcal{C}_E$ 当且仅当三角投影 $T^{E,\ \{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$（定义见（2.11））是无界的（定理 2.8）。这一事实的必要性在拟巴拿赫空间的设置中仍成立，见下文引理 4.20。

以下关于巴拿赫空间情形的命题 E 归功于 Arazy [4, 命题 4。8],其证明依赖于对角投影的有界性（见（2.7））。然而，对于一般的拟巴拿赫对称序列空间 E，无法保证对角投影在 $\mathcal{C}_E$ 上的有界性（见（2.9））。下面，我们给出另一种证明，以避免使用对角投影。

Pro命题 4.19。对于每个可分拟巴拿赫对称序列空间 E，我们有 e

$$\mathcal{C}_E \approx \mathcal{C}_E \oplus \mathcal{C}_E \quad and \quad \mathcal{T}_E \approx \mathcal{T}_E \oplus \mathcal{T}_E.$$

证明。**对于** $\mathcal{C}_E$ 的情形。我们可以选取一个无限维闭子空间 K of H，使得 $K^{\perp}$ 是无限维的。由此可得

$$\mathcal{C}_E \approx p_K \mathcal{C}_E \oplus p_{K^{\perp}} \mathcal{C}_E \approx \mathcal{C}_E \oplus \mathcal{C}_E.$$

对于 $\mathcal{T}_E$ 的情形。我们有 $\mathcal{T}_E \cong [e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\le j\le i<\infty}$，因此

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_E &\cong \sum_{0\le s,t\le 1} p_{[\xi_{2k-s}]_{k=1}^{\infty}} [e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\le j\le i<\infty} p_{[\eta_{2k-t}]_{k=1}^{\infty}} \\ &\approx [e_{\xi_{2k-1},\eta_{2l-1}}]_{l\le k} \oplus [e_{\xi_{2k},\eta_{2l-1}}]_{l\le k} \oplus [e_{\xi_{2k-1},\eta_{2l}}]_{l<k} \oplus [e_{\xi_{2k},\eta_{2l}}]_{l\le k} \approx \sum_{i=1}^{4} \oplus \mathcal{T}_E,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_E &\cong \sum_{0\le s,t\le 2} p_{[\xi_{3k-s}]_{k=1}^{\infty}} [e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\le j\le i<\infty} p_{[\eta_{3k-t}]_{k=1}^{\infty}} \\ &\approx \Big(\sum_{0\le t\le s\le 2} \oplus [e_{\xi_{3k-s},\eta_{3l-t}}]_{l\le k} \Big) \oplus \Big(\sum_{0\le s<t\le 2} \oplus [e_{\xi_{3k-s},\eta_{3l-t}}]_{l<k} \Big) \approx \sum_{i=1}^{9} \oplus \mathcal{T}_E.\end{aligned}$$

因此,

$$\mathcal{T}_E \oplus \mathcal{T}_E \approx \mathcal{T}_E \oplus \Big(\sum_{i=1}^{9} \oplus \mathcal{T}_E \Big) \approx \mathcal{T}_E \oplus \mathcal{T}_E \oplus \Big(\sum_{i=1}^{4} \oplus \mathcal{T}_E \Big)^2 \approx \sum_{i=1}^{4} \oplus \mathcal{T}_E \approx \mathcal{T}_E.$$

□

引理 4.20。设 E 是可分拟巴拿赫对称序列空间。若 $\mathcal{T}_E \not\approx \mathcal{C}_E$，则$T^{E,\ \{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$ 无界。

证明。若 $T^{E,\ \{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$ 有界，则

$$\mathcal{C}_E \cong [e_{\xi_i,\eta_j}]_{i,j=1}^{\infty} \approx [e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\le j\le i<\infty} \oplus [e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\le i<j<\infty} \approx \mathcal{T}_E \oplus \mathcal{T}_E \approx \mathcal{T}_E,$$

这与假设矛盾。 □

引理 4.21。设 E 是一个可分拟巴拿赫对称序列空间。若 $T^{E,\ \{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$ 有界，则 $P_{\{[\xi_k],[\eta_k]\}_{k=1}^{\infty}}$ 在 $\mathcal{C}_E$ 上有界。

证明。 对任意 $x=\sum_{i,\ j}\alpha_{i,\ j}e_{\xi_i,\ \eta_j}\in$ 张成空间$\big(\{e_{\xi_i,\eta_j}\}_{i,\ j=1}^{\infty}\big)$,

$$\begin{aligned}\left\|P_{\{[\xi_k],[\eta_k]\}_{k=1}^{\infty}}(x)\right\|_{\mathcal{C}_E}&=\left\|\sum_i\alpha_{i,i}e_{\xi_i,\eta_i}\right\|_{\mathcal{C}_E}\le\left\|T^{E,\{\xi_k,\eta_k\}_{k=1}^{\infty}}\right\|\left\|\sum_{i\le j}\alpha_{i,j}e_{\xi_i,\eta_j}\right\|_{\mathcal{C}_E}\\&=\left\|T^{E,\{\xi_k,\eta_k\}_{k=1}^{\infty}}\right\|\left\|\sum_{i\le j}\alpha_{i,j}e_{\xi_j,\eta_i}\right\|_{\mathcal{C}_E}\\&\le\left\|T^{E,\{\xi_k,\eta_k\}_{k=1}^{\infty}}\right\|^2\left\|\sum_{i,j}\alpha_{i,j}e_{\xi_j,\eta_i}\right\|_{\mathcal{C}_E}\\&=\left\|T^{E,\{\xi_k,\eta_k\}_{k=1}^{\infty}}\right\|^2\left\|\sum_{i,j}\alpha_{i,j}e_{\xi_i,\eta_j}\right\|_{\mathcal{C}_E}.\end{aligned}$$

由此可得， $P_{\{[\xi_k],[\eta_k]\}_{k=1}^{\infty}}$ 在 $\mathcal{C}_E$上有界。 □

例 4.22。 根据 (2.9)，可立即得出，对于每个 $0<p\le 1$， $T^{\ell_{p,}\ \{\xi_k,\eta_k\}_{k=1}^{\infty}}$ 无界（当 $p=1$ 时的情形见 *[43]*）。

当 $\mathcal{C}_E\approx\mathcal{T}_E$ 时，研究 $\mathcal{T}_E$ 上的算子比研究 $\mathcal{C}_E$上的算子更方便。然而，若 $\mathcal{T}_E\not\approx\mathcal{C}_E$，情况就会大不相同（例如，三角投影 $T^{E,\ \{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$ 无界）。尤其是，当E 是可分巴拿赫空间时， $\mathcal{C}_E$ 不具有无条件有限维 Schauder 分解（例如，参见 [4] 和 [43]），这可能会造成技术上的困难。

在下文的定理 4.24 中，我们将在整个“方形”上的算子设置下建立定理4.17 的一个类比，即从 $B\big([e_{\xi_i,\eta_j}]_{i,\ j=1}^{\infty},\ \mathcal{C}_E\big)$到 算子的情形。与 Schauder 分解相关的扰动起着关键作用，使得我们能够应用引理 2.13。在继续证明定理 4.24之前，我们需要以下辅助引理。

引理 4.23。 设 E 是一个可分拟巴拿赫对称序列空间，满足c_0、 $\ell_2\not\hookrightarrow E$和 $\mathcal{T}_E\not\approx\mathcal{C}_E$。假设 T、$S\in\mathcal{B}\big([e_{\xi_i,\eta_j}]_{i,\ j=1}^{\infty},\ \mathcal{C}_E\big)$满足 $p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i]}T(\cdot)^{p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty}L_i]}}=T$和 $p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i]}S(\cdot)p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty}L_i]}=S$，并假设 $S|_{[e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\le i<j<\infty}}$是与 *Schauder* 分解 $\big\{[e_{\xi_i,\eta_j}]_{j=i+1}^{\infty}\big\}_{i=1}^{\infty}$相关联的$T|_{[e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\le i<j<\infty}}$的一个扰动，

那么，存在一个正整数的递增序列 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$、两个标准正交序列$\{\xi'_k\}_{k=1}^{\infty}$， 其中 $\xi'_k\in[\xi_i]_{i_{2k+1}\le i<i_{2k+2}}$，以及 $\{\eta'_k\}_{l=1}^{\infty}$， 其中 $\eta'_k\in[\eta_i]_{i_{2k}\le i<i_{2k+1}}$，还有一个有界算子$R:\ [e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,\ l=1}^{\infty}\to\mathcal{C}_E$， 其形式为

$$R(e_{\xi'_k,\eta'_l})=\begin{cases}x_{(k,l)}+y_{(l,k)}, & 1\le l\le k<\infty,\\ 0\quad, & otherwise,\end{cases}$$

使得 $S|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,\ l=1}^{\infty}}+R$ 是 $T|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,\ l=1}^{\infty}}$ 的一个小扰动，并且与 *Schauder* 分解 $\big\{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{\min\{k,l\}=s}^{\infty}\big\}_{s=1}^{\infty}$相关，其中

(1) $\{F_{(k,l)}\}_{1\le l\le k<\infty}$ 是 K的两两正交闭子空间序列，而$\{G_{(l,k)}\}_{1\le l\le k<\infty}$ 是 L的两两正交闭子空间序列，

(2)

$$\{x_{(k,l)}\}_{1\le l\le k<\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{F_{(k,l)}\}_{1\le l\le k<\infty}\otimes L\curvearrowleft\hat{b},$$

$$\{y_{(l,k)}\}_{1\le l\le k<\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}K\otimes\{G_{(l,k)}\}_{1\le l\le k<\infty}\curvearrowleft\tilde{b}.$$

此外，

$$\lim_{N\to\infty}\left\|P_{[\bigcup_{i=N}^{\infty}K_i],[\bigcup_{i=N}^{\infty}L_i]}R\right\|=0.$$

证明。 不失一般性，我们可以假设 $(T-S)|_{[e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\le i<j<\infty}}$ 是与 Schauder 分解 $\big\{[e_{\xi_i,\eta_j}]_{j=i+1}^{\infty}\big\}_{i=1}^{\infty}$相关的零算子的小扰动。根据引理 2.13，存在一个算子 $\tilde{R}\in\mathcal{B}\big([e_{\xi_i,\eta_j}]_{i,j=1}^{\infty},\mathcal{C}_E\big)$ 满足

$$\tilde{R}|_{[e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\le j\le i<\infty}}=(T-S)|_{[e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\le j\le i<\infty}}\quad\text{and}\quad\tilde{R}|_{[e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\le i<j<\infty}}=0,$$

˜且 R 是与 Schauder 分解$\{[e_{\xi_i,\eta_j}]_{\min\{i,j\}=s}^{\infty}\}_{s=1}^{\infty}$相关的 $T-S$ 的小扰动。

˜ ˜ ˜应用定理4.17 于 $R|_{[e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\le j\le i<\infty}}$，我们得到两个算子 R_1， R_2 $\in\mathcal{B}\big([e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,\ l=1}^{\infty},\ \mathcal{C}_E\big)$，它们满足定理 4.17 中的断言，因此 $(\tilde{R}_1+\tilde{R}_2)|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{1\le l\le k<\infty}}$˜是与 Schauder 分解$\{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k=l}^{\infty}\}_{l=1}^{\infty}$相关的 $R|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{1\le l\le k<\infty}}$ 的小扰动。利用引理 2.13，存在一个算子 $\tilde{Q}\in\mathcal{B}\big([e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,\ l=1}^{\infty},\ \mathcal{C}_E\big)$，满足˜ ˜$p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i]}Q(\cdot)p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty}L_i]}=Q$

$$\tilde{Q}|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{1\le l\le k<\infty}}=(\tilde{R}_1+\tilde{R}_2)|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{1\le l\le k<\infty}}\quad\text{and}\quad\tilde{Q}|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{1\le k<l<\infty}}=0,\tag{4.52}$$

˜ ˜且满足 Q 是与 Schauder 分解$\{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{\min\{k,l\}=s}^{\infty}\}_{s=1}^{\infty}$相关联的 $R|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,l=1}^{\infty}}$的小扰动。假设

$$\{x_{2k+1,2l}\}_{k,l=1}^{\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_{A_{2k+1}}\}_{k=1}^{\infty}\otimes\{L_{A_{2l}}\}_{l=1}^{\infty}\curvearrowleft\hat{a}$$

and

$$\{y_{2l,2k+1}\}_{k,l=1}^{\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_{A_{2l}}\}_{l=1}^{\infty}\otimes\{L_{A_{2k+1}}\}_{k=1}^{\infty}\curvearrowleft\tilde{a}.$$

˜我们断言 $R_2=0$。事实上，否则，$\hat{a}$或 $\tilde{a}$ 非零（见（4.51））。不失一般性，我们假设 ˆ $a\neq 0$。对于任意有限非零标量序列 $\{\alpha_{k,l}\}_{k,l=1}^{\infty}$，有

$$\begin{aligned}
&\|\hat{a}\|_{\infty}\Big\|\sum_{1\le l\le k<\infty}\alpha_{k,l}e_{\xi'_k,\eta'_l}\Big\|_{\mathcal{C}_E}\\
\le\ &\Big\|\sum_{1\le l\le k<\infty}\alpha_{k,l}\hat{a}\otimes(\cdot|e_{2l})e_{2k+1}\Big\|_{\mathcal{C}_E}\\
\le\ &\Big\|\sum_{1\le l\le k<\infty}\alpha_{k,l}\big(\hat{a}\otimes(\cdot|e_{2l})e_{2k+1}+\tilde{a}\otimes(\cdot|e_{2k+1})e_{2l}\big)\Big\|_{\mathcal{C}_E}\\
\overset{\text{Rem. 3.4}}{=}\ &\Big\|\sum_{1\le l\le k<\infty}\alpha_{k,l}\big(\tilde{Q}-\tilde{R}_1\big)(e_{\xi'_k,\eta'_l})\Big\|_{\mathcal{C}_E}\\
\overset{(4.50),(4.52)}{=}\ &\Big\|\sum_{k,l=1}^{\infty}\alpha_{k,l}\big(\tilde{Q}-\tilde{R}_1\big)(e_{\xi'_k,\eta'_l})\Big\|_{\mathcal{C}_E}\\
\le\ &\|\tilde{Q}-\tilde{R}_1\|\Big\|\sum_{k,l=1}^{\infty}\alpha_{k,l}e_{\xi'_k,\eta'_l}\Big\|_{\mathcal{C}_E}.
\end{aligned}$$

这说明三角投影 $T^{E,\{\xi'_k,\eta'_k\}_{k=1}^{\infty}}$ 是有界的，这与引理 4.20的结论相矛盾，因此 $R_2=0$。令 $R=R_1$。由此可知， R 是与 Schauder 分解 $\{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{\min\{k,l\}=s}^{\infty}\}_{s=1}^{\infty}$相关联的$(T-S)|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,l=1}^{\infty}}$的小扰动，因此$S|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,l=1}^{\infty}}+R$是与 Schauder 分解 $\{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{\min\{k,l\}=s}^{\infty}\}_{s=1}^{\infty}$相关联的$T|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,l=1}^{\infty}}$的小扰动。□

定理 4.24. 设 E 是一个可分拟巴拿赫对称序列空间，使得c_0、 $\ell_2\not\hookrightarrow E$和 $\mathcal{T}_E\not\approx\mathcal{C}_E$。令 $T\in\mathcal{B}\big([e_{\xi_i,\eta_j}]_{i,\ j=1}^{\infty},\mathcal{C}_E\big)$ 满足 $p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i]}T(\cdot)p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty}L_i]}=T$，并令$\{\varepsilon_l\}_{l=1}^{\infty}$ 为正数序列。

于是，存在一个正整数的严格递增序列 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$、两个标准正交序列$\{\xi'_k\}_{k=1}^{\infty}$ （其中 $\xi'_k\in[\xi_i]_{i_{2k+1}\le i<i_{2k+2}}$）和 $\{\eta'_k\}_{k=1}^{\infty}$ （其中 $\eta'_k\in[\eta_i]_{i_{2k}\le i<i_{2k+1}}$），以及两个算子$R_1$、 $R_2\in\mathcal{B}\big([e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,\ l=1}^{\infty}\mathcal{C}_E\big)$ 其形式为

$$R_1(e_{\xi'_k,\eta'_l})=x_{(k,l)}+y_{(l,k)}\quad\textit{for every } k,l\ge 1,\tag{4.53}$$

$$R_2(e_{\xi'_k,\eta'_l})=x_{2k+1,2l}+y_{2l,2k+1}\quad\textit{for every } k,l\ge 1,\tag{4.54}$$

使得 R_1+R_2 是$T|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,l=1}^{\infty}}$的扰动，与$\{\varepsilon_s\}_{s=1}^{\infty}$的 *Schauder* 分解$\{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{\min k,l=s}^{\infty}\}_{s=1}^{\infty}$相关，其中

(1) 存在两个序列 $\{F_{(k,l)}\}_{1\le l\le k<\infty}$ 和 $\{F_{(k,l)}\}_{1\le k<l<\infty}$，它们分别由 K的相互正交子空间构成；另存在两个序列 $\{G_{(l,k)}\}_{1\le l\le k<\infty}$ 和 $\{G_{(l,k)}\}_{1\le k<l<\infty}$，它们由 L 的相互正交子空间构成，使得

$$\{x_{(k,l)}\}_{1\le l\le k<\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{F_{(k,l)}\}_{1\le l\le k<\infty}\otimes L\curvearrowleft\hat{b},$$

$$\{y_{(l,k)}\}_{1\le l\le k<\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}K\otimes\{G_{(l,k)}\}_{1\le l\le k<\infty}\curvearrowleft\tilde{b},$$

and

$$\{x_{(k,l)}\}_{1\le k<l<\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{F_{(k,l)}\}_{1\le k<l<\infty}\otimes L\curvearrowleft\tilde{b}',$$

$$\{y_{(l,k)}\}_{1\le k<l<\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}K\otimes\{G_{(l,k)}\}_{1\le k<l<\infty}\curvearrowleft\hat{b}',$$

and $\left\|\begin{pmatrix}0&\tilde{b}\\ \hat{b}&0\end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{C}_E}\|\cdot\|_{\ell_2},\left\|\begin{pmatrix}0&\hat{b}'\\ \tilde{b}'&0\end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{C}_E}\|\cdot\|_{\ell_2}\le 16^{\frac{1}{r}-1}\|T\|\cdot\|\cdot\|_E$;

(2)这里有一个序列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$其模几乎处处收敛到某个函数，使得

$$\{x_{2k+1,2l}\}_{k,l=1}^{\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_{A_{2k+1}}\}_{k=1}^{\infty}\otimes\{L_{A_{2l}}\}_{l=1}^{\infty}\curvearrowleft$$

and

$$\{y_{2l,2k+1}\}_{k,l=1}^{\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_{A_{2l}}\}_{l=1}^{\infty}\otimes\{L_{A_{2k+1}}\}_{k=1}^{\infty}\curvearrowleft.$$

此外，我们有 $\lim_{N\to\infty}\left\|P_{[\bigcup_{i=N}^{\infty}K_i],[\bigcup_{i=N}^{\infty}L_i]}R_1\right\|=0$；如果 $T|_{[e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\le j\le i<\infty}}$是同构嵌入，那么 R_2 也是同构嵌入。

~ ~证明。应用定理 4.17于 $T|_{[e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\le j\le i<\infty}}$，我们得到两个算子 $R_1,R_2\in\mathcal{B}([e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,l=1}^{\infty},\mathcal{C}_E)$ 满足定理 4.17中的断言，从而$(\tilde{R}_1+\tilde{R}_2)|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{1\le l\le k<\infty}}$ 是 $T|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{1\le l\le k<\infty}}$ 关于 Schauder 分解$\{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k=l}^{\infty}\}_{l=1}^{\infty}$的一个小扰动，其中 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一个严格递增的正整数序列，且有两个标准正交序列 $\{\xi'_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足 $\xi'_k\in[\xi_i]_{i_{2k+1}\le i<i_{2k+2}}$ 且 $\{\eta'_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足 $\eta'_k\in[\eta_i]_{i_{2k}\le i<i_{2k+1}}$。

将引理 4.23 应用于算子$T|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,l=1}^{\infty}}$和 $(\tilde{R}_1+\tilde{R}_2)|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,l=1}^{\infty}}$（以及它们的转置），我们得到一个算子 $R\in\mathcal{B}([e_{\xi''_s,\eta''_t}]_{s,t=1}^{\infty},\mathcal{C}_E)$，使得$(\tilde{R}_1+\tilde{R}_2)|_{[e_{\xi''_s,\eta''_t}]_{s,t=1}^{\infty}}+R$是与 Schauder 分解$\{[e_{\xi''_s,\eta''_t}]_{\min\{s,t\}=m}^{\infty}\}_{m=1}^{\infty}$相关的$T|_{[e_{\xi''_s,\eta''_t}]_{s,t=1}^{\infty}}$的小扰动，其中存在一个由正整数组成的严格递增序列 $\{l_s\}_{s=1}^{\infty}$，以及两个标准正交序列 $\{\eta''_s\}_{s=1}^{\infty}$，满足 $\eta''_s\in[\eta'_l]_{l_{2s+1}\le l<l_{2s+2}}$ 和 $\xi''_s\in[\xi'_l]_{l_{2s}\le l<l_{2s+1}}$。此外，我们可以假设存在来自 $\mathcal{C}_E$ 的$x_{(s,t)}$ 和$y_{(t,s)}$，使得

$$R(e_{\xi''_{s+1},\eta''_t})=\begin{cases}0, & t\le s,\\ x_{(s,t)}+y_{(t,s)}, & t>s,\end{cases}$$

具有与引理4.23中（1）相同的性质。

注意

$$\xi''_s\in[\xi'_l]_{l_{2s}\le l<l_{2s+1}}=[\xi'_l]_{l_{2s}\le l\le l_{2s+1}-1}\subset[\xi_i]_{i_{2l_{2s}+1}\le i<i_{2(l_{2s+1}-1)+2}}\subset[\xi_i]_{i_{2l_{2s}}\le i<i_{2l_{2s+1}}}$$

and

$$\eta''_s\in[\eta'_l]_{l_{2s+1}\le l<l_{2s+2}}=[\eta'_l]_{l_{2s+1}\le l\le l_{2s+2}-1}\subset[\eta_i]_{i_{2l_{2s+1}}\le i<i_{2(l_{2s+2}-1)+1}}\subset[\eta_i]_{i_{2l_{2s+1}}\le i<i_{2l_{2s+2}}}.$$

记 $i'_s=i_{2l_{s+1}}$。则，$\{i'_s\}_{s=1}^{\infty}$ 是一个正整数的严格递增序列，并令

$$\xi'''_s:=\xi''_{s+1}\in[\xi'_l]_{l_{2s+2}\le l<l_{2s+3}}\subset[\xi_i]_{i'_{2s+1}\le i<i'_{2s+2}}$$

and

$$\eta'''_s:=\eta''_s\in[\eta'_l]_{l_{2s+1}\le l<l_{2s+2}}\subset[\eta_i]_{i'_{2s}\le i<i'_{2s+1}},$$

~ ~其 ℓ_2-范数均为 1。根据注记 3.6，算子$R_1|_{[e_{\xi_s'''},\eta_t''']_{s,\ t=1}^{\infty}}$ 和 $R_2|_{[e_{\xi_s'''},\eta_t''']_{s,\ t=1}^{\infty}}$ 也具有定理 4.17中所述结论的性质。不失一般性，我们可以假设存在$x_{(s,t)}$ 和 $y_{(t,s)}$ ，它们来自 $\mathcal{C}_E$ ，使得

$$\tilde{R}_1(e_{\xi_s''',\eta_t'''}) = \begin{cases} x_{(s,t)} + y_{(t,s)}, & t \le s, \\ 0, & t > s, \end{cases}$$

Let

$$R_1 = \tilde{R}_1|_{[e_{\xi_s''',\eta_t'''}]_{s,t=1}^{\infty}} + R \quad \text{and} \quad R_2 = \tilde{R}_2|_{[e_{\xi_s''',\eta_t'''}]_{s,t=1}^{\infty}}.$$

我们得到所需的算子。不失一般性，我们可以假设

$$\{x_{(k,l)}\}_{1\le l\le k<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{F_{(k,l)}\}_{1\le l\le k<\infty} \otimes L \curvearrowleft \hat{b},$$

$$\{y_{(l,k)}\}_{1\le l\le k<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} K \otimes \{G_{(l,k)}\}_{1\le l\le k<\infty} \curvearrowleft \tilde{b},$$

and

$$\{x_{(k,l)}\}_{1\le k<l<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{F_{(k,l)}\}_{1\le k<l<\infty} \otimes L \curvearrowleft \tilde{b}',$$

$$\{y_{(l,k)}\}_{1\le k<l<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} K \otimes \{G_{(l,k)}\}_{1\le k<l<\infty} \curvearrowleft \hat{b}',$$

其中 $\{F_{(k,l)}\}_{1\le l\le k<\infty}$ 与 $\{F_{(k,l)}\}_{1\le k<l<\infty}$ 均为 K的两两正交子空间序列，且 $\{G_{(l,)k}\}_{1\le l\le k<\infty}$ 与 $\{G_{(l,k)}\}_{1\le k<l<\infty}$ 均为两两正交的子~ 空间序列，属于 L。注意（由定理4.17 与注记3.6），算子 b 与 b 满足

$$\left\|\left(\begin{smallmatrix} 0 & \tilde{b} \\ \hat{b} & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E} \|\cdot\|_{\ell_2} \le 16^{\frac{1}{r}-1} \left\|T|_{[e_{\xi_i},\eta_j]_{1\le j\le i<\infty}}\right\| \cdot \|\cdot\|_E .$$

采用与引理4.7 （2）的证明类似的论证，我们得到：对任意 $\varepsilon > 0$，存在两个正整数 N_1 与 N_2 ，使得对任意序列 $\{\alpha_s\}_{s=1}^{\infty} \in E$ 以及任意正整数$n > N_2$ ，满足

$$\begin{aligned}
&\left(2^{1-\frac{1}{r}} \left\|\left(\begin{smallmatrix} 0 & \tilde{b}' \\ \hat{b}' & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E} - \varepsilon\right) \left\|\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m e_m\right\|_{\ell_2} \\
\le &\left\|\left(P_{[\bigcup_{j=N_1+1}^{\infty} K_i],[\bigcup_{i=1}^{N_1} L_i]} + P_{[\bigcup_{j=1}^{N_1} K_i],[\bigcup_{i=N_1+1}^{\infty} L_i]}\right) R \left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m e_{\xi_{n+m}''',\eta_{n+m+1}'''}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E} \\
\le &\left\|\left(P_{[\bigcup_{j=N_1+1}^{\infty} K_i],[\bigcup_{i=1}^{N_1} L_i]} + P_{[\bigcup_{j=1}^{N_1} K_i],[\bigcup_{i=N_1+1}^{\infty} L_i]}\right) R|_{[e_{\xi_{n+m}''',\eta_{n+m+1}'''}]_{m=1}^{\infty}}\right\| \cdot \left\|\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m e_{\xi_{n+m}''',\eta_{n+m+1}'''}\right\|_{\mathcal{C}_E} \\
= &\left\|\left(P_{[\bigcup_{j=N_1+1}^{\infty} K_i],[\bigcup_{i=1}^{N_1} L_i]} + P_{[\bigcup_{j=1}^{N_1} K_i],[\bigcup_{i=N_1+1}^{\infty} L_i]}\right) R|_{[e_{\xi_{n+m}''',\eta_{n+m+1}'''}]_{m=1}^{\infty}}\right\| \left\|\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m e_m\right\|_E
\end{aligned}$$

回顾可知，$(\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2)|_{[e_{\xi_s''},\eta_t'']_{s,\ t=1}^{\infty}} + R$是$T|_{[e_{\xi_s''},\eta_t'']_{s,\ t=1}^{\infty}}$的一个小扰动，与 Schauder 分解 $\{[e_{\xi_s''},\eta_t'']_{\min\{s,t\}=m}^{\infty}\}_{m=1}^{\infty}$相关联。由引理2.10，我们有

$$\left\|(R + \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 - T)|_{[e_{\xi_{n+m}'''},\eta_{n+m+1}'''}]_{m=1}^{\infty}\right\| \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

此外，我们有

$$\tilde{R}_1|_{[e_{\xi_{n+m}'''},\eta_{n+m+1}'''}]_{m=1}^{\infty} = 0,$$

and

$$\left(P_{[\bigcup_{j=N_1+1}^{\infty} K_i],[\bigcup_{i=1}^{N_1} L_i]} + P_{[\bigcup_{j=1}^{N_1} K_i],[\bigcup_{i=N_1+1}^{\infty} L_i]}\right) \tilde{R}_2|_{[e_{\xi_{n+m}'''},\eta_{n+m+1}'''}]_{m=1}^{\infty} = 0$$

当 n 足够大时。仿照（4.38）进行类似推理，并令 $n \to \infty$，我们得到

$$\left(2^{1-\frac{1}{r}} \left\|\left(\begin{smallmatrix} 0 & \tilde{b}' \\ \hat{b}' & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E} - \varepsilon\right) \left\|\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m e_m\right\|_{\ell_2} \le 8^{\frac{1}{r}-1} \|T\| \left\|\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m e_m\right\|_E$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意选取的，因此可得

$$\left\|\begin{pmatrix} 0 & \tilde{b'} \\ b' & 0 \end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{C}_E} \|\cdot\|_{\ell_2} \le 16^{\frac{1}{r}-1}\|T\|\cdot\|\cdot\|_E .$$

证明完成。 □

注4.25。

(1) 定理 4.24 在将条件 $\mathcal{T}_E \not\approx \mathcal{C}_E$ 替换为条件$T^{E,\ \{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$ 无界时仍然成立。(2) 由于 $\lim_{N\to\infty}\left\|(T-(R_1+R_2))^{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,\ l=N}^{\infty}}\right\|=0$ 且 $\lim_{N\to\infty}\left\|P_{[\bigcup_{i=N}^{\infty}K_i],\ [\bigcup_{i=N}^{\infty}L_i]}R_1\right\|=0$，因此可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty}\left\|P_{[\bigcup_{i=N}^{\infty}K_{A_i}],[\bigcup_{i=N}^{\infty}L_{A_i}]}T|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{N\le l\le k<\infty}}\right\| \\
\le\ &\lim_{N\to\infty}2^{\frac{1}{r}-1}\left\|R_2|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{N\le l\le k<\infty}}\right\| \\
\overset{\text{Th 4.24 (2)}}{=}\ &2^{\frac{1}{r}-1}\left\|R_2|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{1\le l\le k<\infty}}\right\| \\
\overset{\text{Th 4.24 (2)}}{=}\ &\lim_{N\to\infty}2^{\frac{1}{r}-1}\left\|R_2|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{N\le k<l<\infty}}\right\| \\
\le\ &4^{\frac{1}{r}-1}\lim_{N\to\infty}\left\|P_{[\bigcup_{i=N}^{\infty}K_{A_i}],[\bigcup_{i=N}^{\infty}L_{A_i}]}T|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{N\le k<l<\infty}}\right\|
\end{aligned}$$

设 E 是一个 Lorentz 序列空间（即，$E:=\{x\in c_0:\ \|x\|_E:=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n;x)\phi_n<\infty\}$，其中 $\{\phi_n\}_{n\ge1}$ 是一个递减至 0 的正序列），满足 $E\supset\ell_2$（即，$\|\cdot\|_E\le\|\cdot\|_{\ell_2}$），且 E 具有平凡 Boyd 指数。例如，令 $\phi_n=\frac{1}{n}$。特别地，E 是一个 KB-空间，并且恰好包含两个彼此不等价的对称基本序列 [49, 定理 4.e.5]。现在，考虑一个算子 $T:[e_{\xi_i,\eta_j}]_{i,\ j=1}^{\infty}\subset\mathcal{C}_1\to\mathcal{C}_E$，其定义为

$$T:\sum_{i,j}\alpha_{i,j}e_{\xi_i,\eta_j}\longmapsto\sum_{j\le i}\alpha_{i,j}e_{\xi_i,\eta_j}.$$

由于

$$\left\|\sum_{j\le i}\alpha_{i,j}e_{\xi_i,\eta_j}\right\|_{\mathcal{C}_E}\le\left\|\sum_{j\le i}\alpha_{i,j}e_{\xi_i,\eta_j}\right\|_2\le\left\|\sum_{i,j}\alpha_{i,j}e_{\xi_i,\eta_j}\right\|_2\le\left\|\sum_{i,j}\alpha_{i,j}e_{\xi_i,\eta_j}\right\|_1,$$

由此可知，T 是一个有界算子。此外，c_0，$\ell_2\not\hookrightarrow\ell_1$，$E$，以及 $\mathcal{T}_1\not\approx\mathcal{C}_1$ 和$\mathcal{T}_E\not\approx\mathcal{C}_E$。注意，

$$\lim_{N\to\infty}\left\|P_{[\bigcup_{i=N}^{\infty}K_{A_i}],[\bigcup_{i=N}^{\infty}L_{A_i}]}T|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{N\le l\le k<\infty}}\right\|=1$$

and

$$\lim_{N\to\infty}\left\|P_{[\bigcup_{i=N}^{\infty}K_{A_i}],[\bigcup_{i=N}^{\infty}L_{A_i}]}T|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{N\le k<l<\infty}}\right\|=0.$$

这表明，定理 4.24 的结论对于 T两个不同的对称算子理想 $\mathcal{C}_F$和 $\mathcal{C}_E$之间的有界算子 c_0 即使在 $\ell_2\not\hookrightarrow E$、$F$、以及$\mathcal{T}_E\not\approx\mathcal{C}_E$ 和 $\mathcal{T}_F\not\approx\mathcal{C}_F$的情况下也不成立。

定理 4.26。设 E 是一个可分拟巴拿赫对称序列空间，满足c_0、$\ell_2\not\hookrightarrow E$和 $\mathcal{T}_E\not\approx\mathcal{C}_E$。如果 $T\in\mathcal{B}\big([e_{\xi_i,\eta_j}]_{i,\ j=1}^{\infty},\ \mathcal{C}_E\big)$ 满足$T|_{[e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\le j\le i<\infty}}$是一个同构嵌入，则存在一个正整数的递增序列 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$，以及两个标准正交序列 $\{\xi'_k\}_{k=1}^{\infty}$，其中 $\xi'_k\in[\xi_i]_{i_{2k+1}\le i<i_{2k+2}}$，和 $\{\eta'_k\}_{k=1}^{\infty}$，其中 $\eta'_k\in[\eta_i]_{i_{2k}\le i<i_{2k+1}}$，使得$T|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,\ l=1}^{\infty}}$是一个同构嵌入，并且 T $\big([e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,\ l=1}^{\infty}\big)$ 在 $\mathcal{C}_E$ 中是可补的。

证明。不失一般性，我们假设 $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 H 的两个相互正交的有限维子空间序列，且 $[\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i]=[\bigcup_{i=1}^{\infty}L_i]=H$。

应用定理 4.24 于 T，我们得到两个算子 R_1，$R_2\in\mathcal{B}\big([e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,\ l=1,\ }^{\infty}\mathcal{C}_E\big)$，它们满足定理 4.24 中的断言，其中 R_2 是同构嵌入，因为 $T|_{[e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\le j\le i<\infty}}$是同构嵌入。特别地，存在一个正数 C 使得

$$\|R_2(x)\|_{\mathcal{C}_E}\ge C\|x\|_{\mathcal{C}_E}\quad\text{for all } x\in[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,l=1}^{\infty}. \tag{4.55}$$

注意（参见上文定理 4.24 ）

$$\left\|(T-(R_1+R_2))|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,l=n}^{\infty}}\right\|\to 0 \quad \text{and} \quad \left\|P_{[\bigcup_{k=n}^{\infty}K_k],[\bigcup_{k=n}^{\infty}L_k]}R_1\right\|\to 0 \quad \text{as } n\to\infty.$$

因此，对于给定的足够小的正数 $(1+2^{1-\frac{1}{r}})\delta < 4^{1-\frac{1}{r}}C$，存在一个正整数 N_0 使得

$$\left\|(T-(R_1+R_2))|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,l=N_0}^{\infty}}\right\|, \left\|P_{[\bigcup_{k=N_0}^{\infty}K_k],[\bigcup_{k=N_0}^{\infty}L_k]}R_1\right\| \le \delta. \tag{4.56}$$

现在我们选取一个正整数 $N>N_0$ 使得 $\{1,2,\dots,N_0\}\cap\bigcup_{k=2N}^{\infty}A_k=\emptyset$ （见记号 4.8）。特别地，我们有 $R_2|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k=N,\ l=N}^{\infty}}\overset{(4.54)}{=} P_{[\bigcup_{k=N}^{\infty}K_k],\ [\bigcup_{k=N}^{\infty}L_k]}R_2|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k=N,\ l=N}^{\infty}}$。于是，对于任意 $x\in[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k=N,\ l=N}^{\infty}$，我们有

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|_{\mathcal{C}_E} &\ge \left\|P_{[\bigcup_{k=N}^{\infty}K_k],[\bigcup_{k=N}^{\infty}L_k]}T(x)\right\|_{\mathcal{C}_E}\\
&\overset{(4.56)}{\ge} 2^{1-\frac{1}{r}}\left\|P_{[\bigcup_{k=N}^{\infty}K_k],[\bigcup_{k=N}^{\infty}L_k]}(R_1+R_2)(x)\right\|_{\mathcal{C}_E}-\delta\|x\|_{\mathcal{C}_E}\\
&\ge 4^{1-\frac{1}{r}}\|R_2(x)\|_{\mathcal{C}_E}-2^{1-\frac{1}{r}}\left\|P_{[\bigcup_{k=N}^{\infty}K_k],[\bigcup_{k=N}^{\infty}L_k]}R_1(x)\right\|_{\mathcal{C}_E}-\delta\|x\|_{\mathcal{C}_E}\\
&\ge (4^{1-\frac{1}{r}}C-2^{1-\frac{1}{r}}\delta-\delta)\|x\|_{\mathcal{C}_E}.
\end{aligned}$$

这表明 $T|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{l=N,\ k=N}^{\infty}}$ 是一个同构嵌入。接下来，我们将证明，对于充分大的 N， $T([e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k=N,\ l=N}^{\infty})$ 在 $\mathcal{C}_E$ 中可补。

不失一般性，我们可以假设

$$\{x_{2k+1,2l}\}_{k,l=1}^{\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_{A_{2k+1}}\}_{k=1}^{\infty}\otimes\{L_{A_{2l}}\}_{l=1}^{\infty}\curvearrowleft\hat{a}\in\mathcal{B}(\hat{H})$$

且 $\hat{a}\neq 0$。因此，存在 $\xi,\ \eta\in\hat{}H$，使得 $\alpha:=(\hat{a}\eta|\xi)\neq 0$。我们可以选取两个标准正交序列 $\{\xi''_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{\eta''_k\}_{k=1}^{\infty}$，它们属于 H，并且对每个 $k\ge 1$，都有 $\xi''_k\in K_{A_{2k+1}}$, $\eta''_k\in L_{A_{2k}}$，

$$\{p_{[\xi''_k]}x_{2k+1,2l}p_{[\eta''_l]}\}_{k,l=1}^{\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_{A_{2k+1}}\}_{k=1}^{\infty}\otimes\{L_{A_{2l}}\}_{l=1}^{\infty}\curvearrowleft\alpha(\cdot|\eta)\xi.$$

因此，我们得到

$$P_{[\xi''_k]_{k=N}^{\infty},[\eta''_k]_{k=N}^{\infty}}(x_{2k'+1,2l'}+y_{2l',2k'+1})=p_{[\xi''_{k'}]}x_{2k'+1,2l'}p_{[\eta''_{l'}]}=\alpha(\cdot|\eta''_{l'})\xi''_{k'}=\alpha e_{\xi''_{k'},\eta''_{l'}}$$

对所有 k'， $l'\ge N$。设置 $W:=P_{[\xi''_k]_{k=N}^{\infty},\ [\eta''_k]_{k=N}^{\infty}}R_2|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k=N,\ l=N}^{\infty}}$，我们有

$$W(e_{\xi'_{k'},\eta'_{l'}})=P_{[\xi''_k]_{k=N}^{\infty},[\eta''_k]_{k=N}^{\infty}}R_2(e_{\xi'_{k'},\eta'_{l'}})=\alpha e_{\xi''_{k'},\eta''_{l'}}\qquad\text{for all } k',l'\ge N. \tag{4.57}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\left\|P_{[\xi''_k]_{k=N}^{\infty},[\eta''_k]_{k=N}^{\infty}}TW^{-1}-I_{[e_{\xi''_k,\eta''_l}]_{k,l=N}^{\infty}}\right\|\\
\le\ &\left\|P_{[\xi''_k]_{k=N}^{\infty},[\eta''_k]_{k=N}^{\infty}}T|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,l=N}^{\infty}}-W\right\|\|W^{-1}\|\\
=\ &\alpha^{-1}\left\|P_{[\xi''_k]_{k=N}^{\infty},[\eta''_k]_{k=N}^{\infty}}(T-R_2)|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,l=N}^{\infty}}\right\|\\
\le\ &\frac{2^{\frac{1}{r}-1}}{\alpha}\left\|(T-(R_1+R_2))|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,l=N_0}^{\infty}}\right\|+\frac{2^{\frac{1}{r}-1}}{\alpha}\left\|P_{[\bigcup_{k=N_0}^{\infty}K_k],[\bigcup_{k=N_0}^{\infty}L_k]}R_1\right\|\\
\overset{(4.56)}{\le}\ &\frac{2^{\frac{1}{r}}\delta}{\alpha}.
\end{aligned}$$

若取 $\delta<\alpha/2^{\frac{1}{r}}$，则可得 $P_{[\xi''_k]_{k=N}^{\infty},\ [\eta''_k]_{k=N}^{\infty}}TW^{-1}$ 是从 $[e_{\xi''_k,\eta''_l}]_{k=N,\ l=N}^{\infty}$ 到 $[e_{\xi''_k,\eta''_l}]_{k=N,\ l=N}^{\infty}$ 上的一个同构。因此，我们有

$$\begin{aligned}
\operatorname{im}(P_{[\xi''_k]_{k=N}^{\infty},[\eta''_k]_{k=N}^{\infty}})=[e_{\xi''_k,\eta''_l}]_{k,l=N}^{\infty}\ &=\ \operatorname{im}(P_{[\xi''_k]_{k=N}^{\infty},[\eta''_k]_{k=N}^{\infty}}TW^{-1})\\
&\overset{(4.57)}{=} P_{[\xi''_k]_{k=N}^{\infty},[\eta''_k]_{k=N}^{\infty}}\big(T([e_{\xi''_k,\eta''_l}]_{k,l=N}^{\infty})\big),
\end{aligned}$$

并且 $P_{[\xi''_k]_{k=N}^{\infty},\ [\eta''_k]_{k=N}^{\infty}}|_{T\ ([e_{\xi''_k,\eta''_l}]_{k=N,\ l=N}^{\infty})}$ 是到其像 $[e_{\xi''_k,\eta''_l}]_{k=N,\ l=N}^{\infty}$ 上的同构。由下式给出的映射

$$\left(P_{[\xi_k'']_{k=N}^{\infty},[\eta_k'']_{k=N}^{\infty}}|_{T([e_{\xi_k'',\eta_l''}]_{k,l=N}^{\infty})}\right)^{-1}P_{[\xi_k'']_{k=N}^{\infty},[\eta_k'']_{k=N}^{\infty}}$$

是从 $\mathcal{C}_E$到 $T([e_{\xi_k'',\eta_l''}]_{k,\ l=N}^{\infty})$上的有界投影。 □

注记 4.27. 假设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{T}_{E,\{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}})$ 是一个同构嵌入，当 $c_0, \ell_2 \not\hookrightarrow E$。令 $K_i = [\xi_i]$ 并且 $L_i = [\eta_i]$ 对每个 i。由注记 4.3 (2) 和定理 4.17，可得两个算子 $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2 \in \mathcal{B}\big([e_{\xi_k',\eta_l'}]_{k,l=1}^{\infty}, \mathcal{C}_E\big)$ 满足定理 4.17 中的断言，并且

$$\tilde{R}_2(e_{\xi_k',\eta_l'}) = x_{2k+1,2l} \qquad \text{for every } k,l \geq 1,$$

（即 $y_{2l,2k+1} = 0$）。采用与定理 4.26 相同的方法，可以证明存在一个充分大的正整数 N，使得 $T([e_{\xi_k',\eta_l'}]_{N\leq k<l<\infty})$ 在 $\mathcal{T}_{E,\{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$ 中可补。然而请注意，我们无法保证 $R_2([e_{\xi_k',\eta_l'}]_{1\leq k<l<\infty}) \subset \mathcal{T}_{E,\{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$。尽管如此，从定理 4.26 的证明可以看出，只需找到一个投影 $P_{[\xi_k'']_{k=N}^{\infty},[\eta_k'']_{k=N}^{\infty}}$，使得对于每个 $1 \leq l' \leq k' < \infty$，$P_{[\xi_k'']_{k=N}^{\infty},[\eta_k'']_{k=N}^{\infty}}(x_{2k'+1,2l'}) \in \mathcal{T}_{E,\{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$。这可以通过构造 R_2（见引理 4.10）和 (4.8) 来实现。

结合定理 4.26 和注 4.27，我们将 [7, 定理 5.4] 推广到拟巴拿赫空间的情形。

定理 4.28. 假设 E 是一个可分拟巴拿赫对称序列空间，且满足$c_0, \ell_2 \not\hookrightarrow E$。若 X 是 $\mathcal{C}_E$ 的一个子空间，并且与 $\mathcal{C}_E$同构，则存在 X 的一个子空间 Y，它既与 $\mathcal{C}_E$ 同构，又是 $\mathcal{C}_E$中的可补子空间。

注 4.29. 对于一般的（拟）巴拿赫空间，上述性质称为可补齐次性，参见定义 5.20。一个自然的问题是，一般的对称序列空间是否具有可补齐次性。众所周知，c_0 和 ℓ_p，$1 \leq p < \infty$具有这一性质（参见 [49,定理 2.a.3]）。此外，Johnson 的两条观察值得注意：

- 加权Lorentz序列空间是可补齐次的。这可以通过使用 [49, 定理4.e.3] 以及标准扰动论证得到。
- 若 X 是 L_p(0,1)的一个子空间 $1 < p < 2$，且该子空间具有对称基并包含 L_p(0,1)的一个同构副本，则 X 不是可补齐次的。事实上，这样的空间的存在性可见于 [36, 例10.4]。由于 L_p(0,1)是可补齐次的（见 [36,定理9.1]），由此可知存在 X 的一个可补子空间，它是 L_p(0,1)的一个同构副本。若 X 是可补齐次的，则由此可得 X 同构于 L_p(0,1)的一个可补子空间。由经典的Pe-lczy´nski分解技巧，我们有 $X \approx L_p$(0,1)。这与 L_p(0,1)没有对称基这一事实相矛盾。

事实上，[36, 定理 9.1] 表明，一大类重排不变函数空间都是可补齐次的。然而，对于对称序列空间，类似的结果仍然未知。

定义 4.30. 设 X、Y 和 Z 是（拟）巴拿赫空间。回顾一下，有界算子 $T: X \to Y$ 称为 Z-严格奇异（例如，见 [54,第 25]页），如果对于 X 中任何一个与 Z同构的子空间，T 在该子空间上的限制都不是同构嵌入。

我们将证明一个有些出乎意料的结果，即定理 4.32，它指出，在 $\mathcal{B}(\mathcal{C}_E)$的设置下，$\mathcal{C}_E$-严格奇异性等价于 $\mathcal{T}_E$-严格奇异性。在继续证明定理 4.32之前，我们需要以下引理。

引理4.31。 设 E 是一个可分拟巴拿赫对称序列空间，满足c_0、$\ell_2 \not\hookrightarrow E$。设 X 是 $\mathcal{C}_E$的一个子空间，且与 $\mathcal{T}_E$同构。那么存在一个序列$\{x_{i,j}\}_{i,\ j=1}^{\infty}$ 属于 $\mathcal{C}_E$，使得

$$x_{i,j} \in \begin{cases} X, & 1 \leq j \leq i < \infty, \\ \mathcal{C}_E, & 1 \leq i < j < \infty, \end{cases}$$

且$\{x_{i,j}\}_{i,\ j=1}^{\infty} \sim \{e_{\xi_i,\eta_j}\}_{i,\ j=1}^{\infty}$。

证明。 不妨设 $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 H 的两个相互正交的有限维子空间序列，且满足 $[\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i] = [\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i] = H$。由于 $X \approx \mathcal{T}_E$，可知存在一个同构 T，将 $\{e_{\xi_i,\eta_j}\}_{1\le j\le i<\infty}$ 映 onto X。

将定理 4.17 应用于 T，我们得到两个算子 $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2 \in \mathcal{B}\big([e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,l=1}^{\infty}, \mathcal{C}_E\big)$ 满足˜定理 4.17中的断言。特别地，由于 T 是同构嵌入， R_2 也是同构嵌入；因此，存在一个正数 C 使得

$$\|\tilde{R}_2(x)\|_{\mathcal{C}_E} \ge C\|x\|_{\mathcal{C}_E} \quad \text{for all } x \in [e_{\xi'_k,\eta_l}]_{l,k=1}^{\infty}.$$

根据引理 2.13，存在一个有界算子 $S : [e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,\ l=1}^{\infty} \to \mathcal{C}_E$ 使得

$$S(e_{\xi'_k,\eta'_l}) = \begin{cases} T(e_{\xi'_k,\eta'_l}) & , \quad 1 \le l \le k < \infty, \\ (\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2)(e_{\xi'_k,\eta'_l}), & \quad 1 \le k < l < \infty. \end{cases}$$

and

$$\big\|(S - (\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2))|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{l,k=n}^{\infty}}\big\| \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

对定理 4.26第一个断言的证明作必要变更后重复进行，我们可找到一个正数 N，使得 $\big\{S(e_{\xi'_k,\ \eta'_l})\big\}_{k,\ l=N}^{\infty} \sim \{e_{\xi'_k,\eta'_l}\}_{k,\ l=N}^{\infty}$且对于所有 $N \le l \le k <\infty$， $S(e_{\xi'_k,\ \eta'_l}) \in X$。□

定理 4.32. 假设 E 是一个满足 $c_0, \ell_2 \not\hookrightarrow E$ 的（拟）巴拿赫对称序列空间。那么，算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_E)$ 是 $\mathcal{C}_E$-严格奇异的，当且仅当它是 $\mathcal{T}_E$-严格奇异的。

证明。 当 $\mathcal{T}_E \approx \mathcal{C}_E$ 时，证明是平凡的。

现在假设 $\mathcal{T}_E \not\approx \mathcal{C}_E$。令 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_E)$。若 T 是 $\mathcal{T}_E$-严格奇异的，那么显然T 是 $\mathcal{C}_E$-严格奇异的。

反过来，若 T 不是 $\mathcal{T}_E$-严格奇异的，那么存在 $\mathcal{C}_E$的一个子空间 X ，它与$\mathcal{T}_E$同构，并且 $T|_X$ 是一个同构嵌入。根据引理4.31，存在 $\mathcal{C}_E$ 中的序列 $\{x_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty}$，使得对所有 $j \le i$ 都有 $x_{i,j} \in X$ ，且 $\{x_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty} \sim \{e_{\xi_i,\eta_j}\}_{i,j=1}^{\infty}$，其中 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$是两个标准正交序列。考虑算子 $T|_{[x_{i,j}]_{i,j=1}^{\infty}}$；应用定理 4.26 即可完成证明。□

当 E 是可分巴拿赫对称序列空间时，关于$\mathcal{T}_{E,\{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$ （见（2.10））在 C_E 中可补的若干等价条件，已在 [43] 和[4]中得到系统研究。本节最后，我们应用前述结论证明：若 E 是一个可分（拟）巴拿赫对称序列空间，且满足 $c_0, \ell_2 \not\hookrightarrow E$，那么 $\mathcal{T}_E$ 同构于 $\mathcal{C}_E$ 的一个可补子空间，当且仅当$\mathcal{T}_{E,\{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$ 在 $\mathcal{C}_E$中可补。这加强了 [43]和 [4]中的经典结果（见上文定理 2.8）。特别地，$\mathcal{T}_1$ 不同构于 $\mathcal{C}_1$的任何可补子空间；这一点将用于证明 $\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{C}_1$ 是一个 Wintner 空间，即推论 7.12。

定理 4.33. 假设 E 是一个可分拟巴拿赫对称序列空间，使得c_0， $\ell_2 \not\hookrightarrow E$。下列各项等价：

(a) 三角投影 $T^{E,\ \{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$ 在张成空间$\big(\{e_{\xi_i,\eta_j}\}_{i,\ j=1}^{\infty}\big)$上有界；(b) $\mathcal{T}_{E,\ \{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$ 在 $\mathcal{C}_E$中可补；(c) $\mathcal{T}_E$ 同构于 $\mathcal{C}_E$的一个可补子空间；(d) $\mathcal{T}_E \approx \mathcal{C}_E$。

证明。 (a)$\Longrightarrow$(b)$\Longrightarrow$(c)：这是显然的。

(c)$\Longrightarrow$(d)：设 Q 为 $\mathcal{C}_E$ 上的投影，使得 $\mathrm{im}(Q) \approx \mathcal{T}_E$。特别地， Q 不是$\mathcal{T}_E$-严格奇异的。由定理 4.32， Q 不是 $\mathcal{C}_E$-严格奇异的。因此， $\mathcal{C}_E$ 同构于 Z 的一个子空间 $\mathcal{T}_E$。由定理4.28， Z 包含一个与 $\mathcal{C}_E$同构的子空间，该子空间在 $\mathcal{C}_E$中是可补的。由于 $\mathcal{T}_E$ 可视为 $\mathcal{C}_E$的子空间，因此可得

$\mathcal{C}_E$ 同构于 $\mathcal{T}_E$的一个可补子空间。接下来，我们运用经典的佩尔琴斯基分解技巧来证明 $\mathcal{T}_E \approx \mathcal{C}_E$。存在 $\mathcal{C}_E$ 的两个子空间 X 和 Y，使得

$$\mathcal{C}_E \approx \mathcal{T}_E \oplus X \quad \text{and} \quad \mathcal{T}_E \approx \mathcal{C}_E \oplus Y.$$

根据命题 4.19,

$$\mathcal{C}_E \approx \mathcal{T}_E \oplus X \approx \mathcal{T}_E \oplus \mathcal{T}_E \oplus X \approx \mathcal{T}_E \oplus \mathcal{C}_E,$$

类似地， $\mathcal{T}_E \approx \mathcal{T}_E \oplus \mathcal{C}_E$。因此， $\mathcal{T}_E \approx \mathcal{C}_E$。

(d)⟹(a): 现在，对每个 i，我们可以令 $K_i = [\xi_i]$ 和 $L_i = [\eta_i]$，并令 T为从$[e_{\xi_i,\eta_j}]_{i,\ j=1}^{\infty}$到$\mathcal{T}_{E,\ \{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$的一个同构。反之，假设 $T^{E,\ \{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$无界。

根据注记 4.25 (1)，将定理 4.24 应用于 T，我们得到两个算子 R_1，$R_2 \in \mathcal{B}([e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,\ l=1}^{\infty},\ \mathcal{C}_E)$，其中 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$是一个严格递增的正整数序列，且 $\{\xi'_k\}_{k=1}^{\infty}$和 $\{\eta'_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是两个标准正交序列，满足 $\xi'_k \in [\xi_i]_{i_{2k+1}\le i<i_{2k+2}}$ 和 $\eta'_k \in [\eta_i]_{i_{2k}\le i<i_{2k+1}}$，并满足定理 4.24中的断言，从而 R_2 是一个同构嵌入，且

$$\left\|(T-(R_1+R_2))|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,l=N}^{\infty}}\right\| \to 0 \tag{4.58}$$

and

$$\left\|P_{[\bigcup_{k=N}^{\infty}K_k],[\bigcup_{k=N}^{\infty}L_k]}R_1\right\| \to 0 \quad \text{as } N\to\infty. \tag{4.59}$$

此外，根据注记 4.3 (2) 以及 R_2 (参见定理 4.24 的证明和引理4.10)，我们知道

$$R_2(e_{\xi'_k,\eta'_l}) = x_{2k+1,2l} \qquad \text{for every } k,l\ge 1,$$

并且我们可以选取一个由正整数组成的严格递增序列 $\{m_i\}_{i=2}^{\infty}$，使得

$$\left\{p_{K'_{2k+1}}x_{2k+1,2l}p_{L'_{2l}}\right\}_{k,l=1}^{\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K'_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty}\otimes\{L'_{2l}\}_{l=1}^{\infty} \curvearrowleft \hat{a}_0 \in \mathcal{B}(\hat{H}) \tag{4.60}$$

以及$\hat{a}_0\neq 0$，其中$K'_{2k+1} = [\bigcup_{i=m_{2k+1}+1}^{m_{2k+2}}K_i]$ 和 $L'_{2k} = [\bigcup_{i=m_{2k}+1}^{m_{2k+1}}L_i]$ 对每个 $k\ge 1$都成立。

由（4.58）和（4.59），可得

$$\left\|P_{K'_{2N+1},L'_{2N+2}}(T-R_2)|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,l=N}^{\infty}}\right\| \to 0 \quad \text{as } N\to\infty.$$

注意，$P_{K'_{2N+1},\ L'_{2N+2}}\left(\mathcal{T}_{E,\ \{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}\right) = \{0\}$，因此 $P_{K'_{2N+1},\ L'_{2N+2}}T = 0$。这给出

$$\left\|P_{K'_{2N+1},L'_{2N+2}}R_2|_{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,l=N}^{\infty}}\right\| \to 0 \quad \text{as } N\to\infty.$$

然而，我们有

$$\left\|P_{K'_{2N+1},L'_{2N+2}}R_2(e_{\xi'_N,\eta'_{N+1}})\right\|_{\mathcal{C}_E} = \|\hat{a}_0\|_{\mathcal{C}_E} \qquad \text{for all } N,$$

这就产生了矛盾。 □

5. Arazy-type decomposition theorem for operators on $\mathcal{C}_p$ and its applications

5.1. 上的算子分解 $\mathcal{C}_p$。 当 $E=\ell_p, 0<p<\infty$时，我们简记 $\mathcal{C}_{\ell_p}$ 为 $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{T}_{\ell_p}$ 为$\mathcal{T}_p$, $\mathcal{T}_{\ell_p,\ \{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$ 为 $\mathcal{T}_{p,\ \{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$，并将 $\|\cdot\|_{\ell_p}$ 简记为 $\|\cdot\|_p$。注意， $\|\cdot\|_p$ 是 $\min\{p,1\}$-次可加的（例如参见 [51]），因此 $\|\cdot\|_p$ 的凹性模为 $2^{\max\{\frac{1}{p},1\}-1}$。

本节中，除非另有说明，我们总是假设 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 H中的两个正交归一向量序列，而 $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 H的两个相互正交的有限维子空间序列。回忆一下，对于子集 $A\subset\mathbb{N}$，我们记

$$K_A = \left[\bigcup_{i\in A}K_i\right], \qquad L_A = \left[\bigcup_{i\in A}L_i\right], \tag{5.1}$$

and

$$K = \left[\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i\right] \quad \text{and} \quad L = \left[\bigcup_{i=1}^{\infty}L_i\right]. \tag{5.2}$$

假设 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一个归一化序列，满足$x_k = p_{K_k}x_kp_{L_k}$ 在 $\mathcal{C}_p$ 对每个 k都成立。那么$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 与 $\left\{e_k^{\ell_p}\right\}_{k=1}^{\infty}$ 的单位基 ℓ_p等距等价。此外，对于 $0<p<2$，有 $\left\{e_k^{\ell_p}\right\}_{k=1}^{\infty}\sim\left\{e_k^{\ell_2}\oplus e_k^{\ell_p}\right\}_{k=1}^{\infty}$。作为定理A.6、推论A.7 和注记3.5的推论，我们得到 [5, 引理 24]的以下变体。

定理 5.1。设 $0 < p < 2$。假设 $\{x_k\}_{k=2}^{\infty}$ 是 $\mathcal{C}_p$ 中的一个有界序列，它没有任何与 ℓ_p 的单位基等价的子序列，其形式为

$$x_k = p_{[\bigcup_{l=1}^{k} K_l]} x_k p_{[\bigcup_{l=1}^{k} L_l]} - p_{[\bigcup_{l=1}^{k-1} K_l]} x_k p_{[\bigcup_{l=1}^{k-1} L_l]} \qquad k = 2, 3, \ldots.$$

对于给定的正数序列 $\{\varepsilon_i\}_{i=2}^{\infty}$，存在一个正整数的递增子序列 $\{k_i\}_{i=2}^{\infty}$，以及一个属于 $\mathcal{C}_p$ 的序列 $\{y_i\}_{i=2}^{\infty}$，其形式为

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left(a_{i,j} + a_{j,i}\right) \qquad i = 2, 3, \ldots,$$

使得对于每个 $i \geq 2$，都有 $\|x_{k_i} - y_i\|_p \leq \varepsilon_i$，其中

(1) $K_i' = [\bigcup_{l=k_{i-1}+1}^{k_i} K_l]$ *and* $L_i' = [\bigcup_{l=k_{i-1}+1}^{k_i} L_l]$ *for every* $i \geq 1$ *(put* $n_0 = 0$*),*

(2) $\{a_{i,j}\}_{1 \leq i \neq j < \infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K_i'\}_{i=1}^{\infty} \otimes \{L_j'\}_{j=1}^{\infty}$,

(3) $\{a_{i,j}\}_{i=j+1}^{\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K_i'\}_{i=2}^{\infty} \otimes \{L_j'\}_{j=1}^{\infty} \curvearrowleft d_j$ *are consistent for all* $j \geq 1$*, and*

$$\|d_j\|_p \leq \varepsilon_j \|d_1\|_p \qquad \textit{for every } j \geq 2,$$

b.s(4) $\{a_{j,i}\}_{i=j+1}^{\infty} \boxplus \{K_j'\}_{j=1}^{\infty} \otimes \{L_i'\}_{i=2}^{\infty} \curvearrowleft d_j'$ 对所有 $j \geq 1$ 都相容，并且

$$\|d_j'\|_p \leq \varepsilon_j \|d_1'\|_p \qquad \textit{for every } j \geq 2.$$

根据标准扰动论证（例如，参见推论 A.7），我们得到以下推论（类似结果参见 [5, 命题 2。3], [12,命题 4], 以及 [26] ）。

推论 5.2。设 $0 < p < 2$。假设 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{C}_p$ 中的一个半归一化 σ-弱零序列，且对于每个 k，都有 $p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i]} x_k p_{[\bigcup_{j=1}^{\infty} L_i]} = x_k$；该序列不包含任何与 ℓ_p 的单位基等价的子序列。对于给定的 $\varepsilon > 0$，存在两个正整数的递增子序列 $\{k_i\}_{i=2}^{\infty}$ 和 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$，以及一个属于 $\mathcal{C}_p$ 的序列 $\{y_i\}_{i=2}^{\infty}$，其形式为

$$y_i = a_i + b_i \qquad i = 2, 3, \ldots,$$

使得对于每个有限非零标量序列 $\{t_i\}_{i=2}^{\infty}$，我们有

$$\left\| \sum_{i=2}^{\infty} t_i (x_{k_i} - y_i) \right\|_p \leq \varepsilon \left\| \sum_{i=2}^{\infty} t_i x_{k_i} \right\|_p,$$

其中

(1) $K_i' = [\bigcup_{l=n_{i-1}+1}^{n_i} K_l]$ 且 $L_i' = [\bigcup_{l=n_{i-1}+1}^{n_i} L_l]$ 对于每个 $i \geq 1$ （取 $n_0 = 0$），

b.s(2) $\{a_i\}_{i=2}^{\infty} \boxplus \{K_i'\}_{i=2}^{\infty} \otimes L_1' \curvearrowleft$，b.s(3) $\{b_i\}_{i=2}^{\infty} \boxplus K_1' \otimes \{L_i'\}_{i=2}^{\infty} \curvearrowleft$。

下一个命题是 [11, 定理 2.2]的推论。为保证完备性，我们在下文给出证明。

命题 5.3。设 $1 \leq p < \infty$，并且 $\{F_i\}_{i=2}^{\infty}$ 和 $\{G_i\}_{i=2}^{\infty}$ 是 H中的两个由两两正交的闭子空间构成的序列。假设

$$\{x_{k,l}\}_{k,l=1}^{\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{F_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty} \otimes \{G_{2l}\}_{l=1}^{\infty} \curvearrowleft x,$$

$$\{y_{l,k}\}_{k,l=1}^{\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{F_{2l}\}_{l=1}^{\infty} \otimes \{G_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty} \curvearrowleft y,$$

且 $\left\| \left(\begin{smallmatrix} 0 & y \\ x & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\|_p = 1$。则 $\{x_{k,l} + y_{l,k}\}_{k,l=1}^{\infty} \simeq \{e_{\xi_k,\eta_l}\}_{k,l=1}^{\infty}$ 以及 $[x_{k,l} + y_{l,k}]_{k,l=1}^{\infty}$ 在 1-可补的 $\mathcal{C}_p$ 中（投影算子见下文的 （5.3） ）。

证明。注意到 $\{x_{k,l}+y_{l,k}\}_{k,\,l=1}^{\infty} \simeq \{x\otimes\ (\cdot|e_{2l})\ e_{2k+1}+y\otimes\ (\cdot|e_{2k+1})\ e_{2l}\}_{k,\,l=1}^{\infty}$。根据命题 2.6，有 $\{x_{k,l}+y_{l,k}\}_{k,\,l}^{\infty} \simeq \{e_{\xi_k,\eta_l}\}_{k,\,l}^{\infty}$。

令 $\lambda_{2i-1} := s_i(x)$ 且 $\lambda_{2i} := s_i(y)$，对每个 i均成立。我们有 $(\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|^p)^{1/p}=1$。这意味着存在一个范数为 1 的序列 $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}\in\ell_{p'}$，使得 $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\mu_i=1$。此外，存在两个由 H 中的正交归一向量构成的序列 $\{\xi_{k,i}\}_i$ 和 $\{\eta_{k,i}\}_i$，满足 $\xi_{k,\,i}\in F_k$ 以及 $\eta_{k,\,i}\in G_k$，对每个k，i 均成立，使得

$$x_{k,l}=\sum_i \lambda_{2i-1}e_{\xi_{2k+1,i},\eta_{2l,i}} \qquad \text{and} \qquad y_{l,k}=\sum_i \lambda_{2i}e_{\xi_{2l,i},\eta_{2k+1,i}}.$$

定义

$$D_i=[\xi_{2k+1,i}]_{k=1}^{\infty} \qquad \text{and} \qquad E_i=[\eta_{2l,i}]_{l=1}^{\infty},$$
$$D_i'=[\xi_{2l,i}]_{l=1}^{\infty} \qquad \text{and} \qquad E_i'=[\eta_{2k+1,i}]_{k=1}^{\infty}$$

对每个 i均成立。对于任意 $a\in\mathcal{C}_p$，我们有

$$\begin{aligned}
\|a\|_p \geq& \Big(\sum_i \big(\|p_{D_i}ap_{E_i}\|_p^p+\|p_{D_i'}ap_{E_i'}\|_p^p\big)\Big)^{1/p}\\
=&\left(\sum_i\left(\left\|\textstyle\sum_{k,l}(a\eta_{2l,i}|\xi_{2k+1,i})e_{\xi_{2k+1,i},\eta_{2l,i}}\right\|_p^p+\left\|\textstyle\sum_{k,l}(a\eta_{2k+1,i}|\xi_{2l,i})e_{\xi_{2l,i},\eta_{2k+1,i}}\right\|_p^p\right)\right)^{1/p}\\
=&\left(\sum_i\left(\left\|\textstyle\sum_{k,l}(a\eta_{2l,i}|\xi_{2k+1,i})(\cdot|e_l)e_k\right\|_p^p+\left\|\textstyle\sum_{k,l}(a\eta_{2k+1,i}|\xi_{2l,i})(\cdot|e_l)e_k\right\|_p^p\right)\right)^{1/p}\\
\geq&\sum_i\left(\mu_{2i-1}\left\|\textstyle\sum_{k,l}(a\eta_{2l,i}|\xi_{2k+1,i})(\cdot|e_l)e_k\right\|_p+\mu_{2i}\left\|\textstyle\sum_{k,l}(a\eta_{2k+1,i}|\xi_{2l,i})(\cdot|e_l)e_k\right\|_p\right)\\
\geq&\left\|\sum_{k,l}\sum_i\Big(\mu_{2i-1}(a\eta_{2l,i}|\xi_{2k+1,i})+\mu_{2i}(a\eta_{2k+1,i}|\xi_{2l,i})\Big)(\cdot|e_l)e_k\right\|_p\\
=&\left\|\sum_{k,l}\sum_i\Big(\mu_{2i-1}(a\eta_{2l,i}|\xi_{2k+1,i})+\mu_{2i}(a\eta_{2k+1,i}|\xi_{2l,i})\Big)(x_{k,l}+y_{l,k})\right\|_p.
\end{aligned}$$

因此，存在一个作用于 $\mathcal{C}_p$ 的压缩算子，其定义为

$$P: a\in\mathcal{C}_p\longmapsto\sum_{k,l}\sum_i\Big(\mu_{2i-1}(a\eta_{2l,i}|\xi_{2k+1,i})+\mu_{2i}(a\eta_{2k+1,i}|\xi_{2l,i})\Big)(x_{k,l}+y_{l,k}). \tag{5.3}$$

注意

$$\begin{aligned}
&P(x_{k',l'}+y_{l',k'})\\
=&\sum_{k,l}\sum_i\Big(\mu_{2i-1}\big((x_{k',l'}+y_{l',k'})\eta_{2l',i}|\xi_{2k'+1,i}\big)+\mu_{2i}\big((x_{k',l'}+y_{l',k'})\eta_{2k'+1,i}|\xi_{2l',i}\big)\Big)(x_{k,l}+y_{l,k})\\
=&\sum_i\big(\mu_{2i-1}\lambda_{2i-1}+\mu_{2i}\lambda_{2i}\big)(x_{k',l'}+y_{l',k'})\\
=&x_{k',l'}+y_{l',k'},
\end{aligned}$$

对每个 k'和 l'均成立。因此，我们有 $P|_{[x_{k,l}+y_{l,k}]_{k,\,l=1}^{\infty}}=\mathrm{id}_{[x_{k,l}+y_{l,k}]_{k,\,l=1}^{\infty}}$。此外，$\mathrm{im}(P)\subset[x_{k,l}+y_{l,k}]_{k,\,l=1}^{\infty}$；因此，$P^2=P$。于是，$P$是从 $\mathcal{C}_p$到 $[x_{k,l}+y_{l,\,k}]_{k,\,l=1}^{\infty}$的压缩投影。□

当 $E=\ell_p$，$1\leq p<2$时，如果在定理 4.1 的证明中将定理 A.6（分别为推论 A.7）替换为定理 5.1（分别为推论 5.2），则可在定理 T_1，$T_2=0$ 中得到 4.1。当 $E=\ell_p$，$2<p<\infty$时，引理 4.7 意味着定理 $T_3=0$ 4.1 中的 。

定理 5.4。设 $E=\ell_p$，$0<p\neq 2<\infty$。

(1) 若 $0<p<2$，则 $T_1=T_2=0$ 在定理 4.1中成立。

(2) 若 $2<p<\infty$，则 $T_3=0$ 在定理 4.1中成立。

因此，当 4.16 时，引理 4.17 在证明定理 $\mathcal{C}_E=\mathcal{C}_p$、$0<p<2$中并非必需，由此得到以下结果。

定理 5.5. 设 $0<p<2$ 和 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{T}_{p,\{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^\infty},\mathcal{C}_p)$ 满足$p_{[\bigcup_{i=1}^\infty K_i]}T(\cdot)p_{[\bigcup_{i=1}^\infty L_i]}=T$。给定一个正数序列 $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^\infty$，存在一个递增的正整数序列 $\{i_k\}_{k=1}^\infty$ 以及两个算子 $\tilde{R}_1,\tilde{R}_2\in\mathcal{B}\big([e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k,l=1}^\infty,\mathcal{C}_p\big)$，其形式为

$$\tilde{R}_1(e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}})=\begin{cases}x_{(2k+1,2l)}+y_{(2l,2k+1)}, & 1\le l\le k<\infty,\\ 0, & otherwise,\end{cases}$$

$$\tilde{R}_2(e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}})=x_{2k+1,2l}+y_{2l,2k+1}\quad for\ every\ k,l\ge 1,$$

使得$\big(\tilde{R}_1+\tilde{R}_2\big)|_{\mathcal{T}_{p,\ \{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2k}}\}_{k=1}^\infty}}$是与 $\big\{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k=l}^\infty\big\}_{l=1}^\infty$ 所对应的 *Schauder* 分解相关联的 $T|_{\mathcal{T}_{p,\ \{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2k}}\}_{k=1}^\infty}}$ 的扰动，其中

(1) $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ 是 $\mathbb{N}$的互不相交子集序列，且 $\{F_{(2k+1,2l)}\}_{1\le l\le k<\infty}$ 和$\{G_{(2l,2k+1)}\}_{1\le l\le k<\infty}$ 是 H 的两两正交的闭子空间序列，使得

$$F_{(2k+1,2l)}\subset K_{A_{2k+1}}\quad\text{and}\quad G_{(2l,2k+1)}\subset L_{A_{2k+1}}\quad for\ every\ 1\le l\le k<\infty.$$

(2)

$$\begin{aligned}&\{x_{(2k+1,2l)}\}_{1\le l\le k<\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{F_{(2k+1,2l)}\}_{1\le l\le k<\infty}\otimes L\curvearrowleft\hat{b},\\ &\{y_{(2l,2k+1)}\}_{1\le l\le k<\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}K\otimes\{G_{(2l,2k+1)}\}_{1\le l\le k<\infty}\curvearrowleft\tilde{b},\\ &\text{且}\ \left\|\begin{pmatrix}\hat{A}&0\\ \tilde{b}\hat{b}&0\end{pmatrix}\right\|_p\le 4^{\max\{\frac{1}{p},1\}-1}\|T\|,\end{aligned}$$

(3)

$$\{x_{2k+1,2l}\}_{k,l=1}^\infty\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_{A_{2k+1}}\}_{k=1}^\infty\otimes\{L_{A_{2l}}\}_{l=1}^\infty\curvearrowleft$$

and

$$\{y_{2l,2k+1}\}_{k,l=1}^\infty\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_{A_{2l}}\}_{l=1}^\infty\otimes\{L_{A_{2k+1}}\}_{k=1}^\infty\curvearrowleft\ .$$

注 5.6. 与定理 4.17相比，定理5.5 （见上文）使我们能够选取子序列$\{\xi_{i_{2k+1}}\}_{k=1}^\infty$（取自 $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$）以及子序列 $\{\eta_{i_{2k}}\}_{k=1}^\infty$（取自 $\{\eta_i\}_{i=1}^\infty$），使得$\big(\tilde{R}_1+\tilde{R}_2\big)|_{\mathcal{T}_{p,\ \{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2k}}\}_{k=1}^\infty}}$是 $T|_{\mathcal{T}_{p,\ \{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2k}}\}_{k=1}^\infty}}$ 的扰动，而定理 4.17则需要新的序列 $\{\xi'_k\}_{k=1}^\infty$和 $\{\eta'_k\}_{k=1}^\infty$。

~若 $\mathcal{C}_E=\mathcal{C}_p$，$2<p<\infty$，则我们有 $R_1=0$，见于定理 4.17的证明中。

定理 5.7. 设 $2<p<\infty$ 与 $T\in\mathcal{B}\big(\mathcal{T}_{p,\ \{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^\infty},\ \mathcal{C}_p\big)$ 满足$p_{[\bigcup_{i=1}^\infty K_i]}T\ (\cdot)p_{[\bigcup_{i=1}^\infty L_i]}=T$。给定由正数构成的序列 $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^\infty$，存在由正整数构成的递增序列 $\{i_k\}_{k=1}^\infty$、两个标准正交序列 $\{\xi'_k\}_{k=1}^\infty$（满足 $\xi'_k\in[\xi_i]_{i_{2k+1}\le i<i_{2k+2}}$）与 $\{\eta'_k\}_{k=1}^\infty$（满足 $\eta'_k\in[\eta_i]_{i_{2k}\le i<i_{2k+1}}$），以及算子 $\tilde{R}\in\mathcal{B}\big([e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k,\ l=1}^\infty,\ \mathcal{C}_p\big)$，其具有如下形式

$$\tilde{R}(e_{\xi'_k,\eta'_l})=x_{2k+1,2l}+y_{2l,2k+1}\qquad for\ every\ k,l\ge 1,$$

其中

$$\{x_{2k+1,2l}\}_{k,l=1}^\infty\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_{A_{2k+1}}\}_{k=1}^\infty\otimes\{L_{A_{2l}}\}_{l=1}^\infty\curvearrowleft$$

$$\{y_{2l,2k+1}\}_{k,l=1}^\infty\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_{A_{2l}}\}_{l=1}^\infty\otimes\{L_{A_{2k+1}}\}_{k=1}^\infty\curvearrowleft,$$

且 $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ 是 $\mathbb{N}$的互不相交子集序列，使得 $R|_{\mathcal{T}_{p,\ \{\xi'_k,\eta'_k\}_{k=1}^\infty}}$ 是 $T|_{\mathcal{T}_{p,\ \{\xi'_k,\tilde{\eta'_k}\}_{k=1}^\infty}}$的扰动，该扰动与 $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^\infty$上的 *Schauder* 分解 $\big\{[e_{\xi'_k,\eta'_l}]_{k=l}^\infty\big\}_{l=1}^\infty$ 相关。

它是 众所周知， $\mathcal{C}_p$ 具有以下性质：对于 $\mathcal{C}_p$ 中满足以下条件的任意序列 $\{z_{i,j}\}_{i,\ j=1}^{\infty}$ g

$$\{z_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{F_i\}_{i=1}^{\infty} \otimes \{G_j\}_{j=1}^{\infty} \curvearrowleft c,$$

其中 $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 H的两两正交的闭子空间序列，并且 $\|c\|_p = 1$, 我们有

$$\{z_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty} \simeq \{e_{\xi_i,\eta_j}\}_{i,j=1}^{\infty}.$$

这一性质使我们无需使用用定理 4.9 和4.10 ，而可以采用更简单的论证：令

$$x_{(k,l)} = x_{(k,l),1}, \quad y_{(l,k)} = y_{1,(l,k)}, \quad x_{k,l} = x_{(k,1),l}, \quad y_{l,k} = y_{l,(1,k)}$$

(其中 $x_{(k,l),\ 1}$， $y_{1,\ (l,k),}$ $x_{(k,1),\ l}$ 和$y_{l,\ (1,k)}$ 由定理4.1给出，并注意到它们的支撑均为有限维投影）。由此我们得到定理 5.5和 5.7的算子扰动版本。

定理 5.8。 设 $0 < p < 2$ 和 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{T}_{p,\ \{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}, \mathcal{C}_p)$ 满足 $p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i]} T(\cdot)^{p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i]}} = T$。给定正数 ε, 存在两个由正整数组成的递增序列 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$， 以及两个形如.....的算子 $\tilde{R}_1$, $\tilde{R}_2 \in \mathcal{B}\big([e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k,\ l=1}^{\infty}, \mathcal{C}_p\big)$

$$\tilde{R}_1(e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}) = \begin{cases} x_{(2k+1,2l)} + y_{(2l,2k+1)}, & 1 \le l \le k < \infty, \\ 0, & otherwise, \end{cases}$$

$$\tilde{R}_2(e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}) = x_{2k+1,2l} + y_{2l,2k+1} \qquad for\ every\ k,l \ge 1,$$

使得 $\big\|T|_{\mathcal{T}_{p,\ \{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2k}}\}_{k=1}^{\infty}}} - (R_1 + R_2)\ |_{\mathcal{T}_{p,\ \{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2k}}\}_{k=1}^{\infty}}}\big\| \le \varepsilon$， 其中

（1） $K_k' = [\bigcup_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} K_i]$ 并且 $L_k' = [\bigcup_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} L_i]$ 对每个 $k \ge 1$ 都成立（令 $n_0 = 0$）， （2） $\{F_{(2k+1,2l)}\}_{1\le l\le k<\infty}$ 和 $\{G_{(2l,2k+1)}\}_{1\le l\le k<\infty}$ 是 H 中两列两两正交的闭子空间，满足

$$F_{(2k+1,2l)} \subset K_{2k+1}' \quad \text{and} \quad G_{(2l,2k+1)} \subset L_{2k+1}' \quad \text{for every } 1 \le l \le k < \infty.$$

(3)

$$\{x_{(2k+1,2l)}\}_{1\le l\le k<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{F_{(2k+1,2l)}\}_{1\le l\le k<\infty} \otimes L_1' \curvearrowleft \hat{b}_1,$$

$$\{y_{(2l,2k+1)}\}_{1\le l\le k<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} K_1' \otimes \{G_{(2l,2k+1)}\}_{1\le l\le k<\infty} \curvearrowleft \tilde{b}_1,$$

并且 $\left\|\begin{pmatrix} 0 & \tilde{b}_1 \\ \hat{b}_1 & 0 \end{pmatrix}\right\|_p \le 4^{\max\{\frac{1}{p},1\}-1}\|T\|,$

(4)

$$\{x_{2k+1,2l}\}_{k,l=1}^{\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K_{2k+1}'\}_{k=1}^{\infty} \otimes \{L_{2l}'\}_{l=1}^{\infty} \curvearrowleft$$

and

$$\{y_{2l,2k+1}\}_{k,l=1}^{\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K_{2l}'\}_{l=1}^{\infty} \otimes \{L_{2k+1}'\}_{k=1}^{\infty} \curvearrowleft .$$

定理 5.9。 设 $2 < p < \infty$ 和 $T \in \mathcal{B}\ (\mathcal{T}_{p,\ \{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}},\ \mathcal{C}_p)$ 满足 $p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i]} T\ (\cdot)\ ^{p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i]}} = T$。给定一个由正数组成的序列 $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^{\infty}$， 存在两列严格递增的正整数序列 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$， 以及一个具有如下形式的算子 $\tilde{R} \in \mathcal{B}\big([e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k,\ l=1}^{\infty},\ \mathcal{C}_p\big)$

$$\tilde{R}(e_{\xi_k',\eta_l'}) = x_{2k+1,2l} + y_{2l,2k+1} \qquad for\ every\ k,l \ge 1,$$

其中

$$\{x_{2k+1,2l}\}_{k,l=1}^{\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K_{2k+1}'\}_{k=1}^{\infty} \otimes \{L_{2l}'\}_{l=1}^{\infty} \curvearrowleft$$

$$\{y_{2l,2k+1}\}_{k,l=1}^{\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K_{2l}'\}_{l=1}^{\infty} \otimes \{L_{2k+1}'\}_{k=1}^{\infty} \curvearrowleft ,$$

并且 $K_k' = [\bigcup_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} K_i]$ 并且 $L_k' = [\bigcup_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} L_i]$ 对每个 $k \ge 1$ （取 $n_0 = 0$），使得 $\big\|T|_{\mathcal{T}_{p,\ \{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2k}}\}_{k=1}^{\infty}}} - \tilde{R}|_{\mathcal{T}_{p,\ \{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2k}}\}_{k=1}^{\infty}}}\big\| \le \varepsilon$。

注 5.10. 若将 $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ 选为 $K_i = [\xi_i]$、$L_i = [\eta_i]$ 和 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{T}_{p、\{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}、\mathcal{C}_p})$ 且 $\mathrm{im}(T) \subset \mathcal{T}_{p、\{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$），那么定理 5.8 和定理 5.9 中的“$y_{(2l,2k+1)}$”和“$y_{2l、2k+1}$”部分均为 0。在这种情况下，使用定理 5.8 和定理 5.9（而非定理 5.5 和定理 5.7）的一个优点是，它们保证算子 R_1、R_2 和 R 的值域包含于 $\mathcal{T}_{p、\{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}$中；相比之下，定理 5.5 和定理 5.7 则是研究代数 $\mathcal{B}(\mathcal{T}_p)$ 的有用工具。

定理 5.11. 设 $0 < p \neq 2 < \infty$ 与 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{T}_{p,\{\xi_i,\eta_i\}_{i=1}^{\infty}}, \mathcal{C}_p)$ 满足 $p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i]} T(\cdot)\, p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i]} = T$。给定正数 ε，存在两个由正整数构成的递增序列 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ 与 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$，以及一个序列

$$\{a_{k,l}\}_{k,l=1}^{\infty} \overset{b.s}{\boxplus} \left\{[\xi_i]_{i_{2k+1}\le i<i_{2k+2}}\right\}_{k=1}^{\infty} \otimes \left\{[\eta_i]_{i_{2l}\le i<i_{2l+1}}\right\}_{l=1}^{\infty} \curvearrowleft a$$

满足 $\|a\|_p = 1$，以及一个算子 $\tilde{R} \in \mathcal{B}\big([a_{k,l}]_{k,l=1}^{\infty}, \mathcal{C}_p\big)$ 具有如下形式

$$\tilde{R}(a_{k,l}) = x_{2k+1,2l} + y_{2l,2k+1} \qquad for\ every\ k,l \ge 1,$$

其中

$$\{x_{2k+1,2l}\}_{k,l=1}^{\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K'_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty} \otimes \{L'_{2l}\}_{l=1}^{\infty} \curvearrowleft$$

$$\{y_{2l,2k+1}\}_{k,l=1}^{\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K'_{2l}\}_{l=1}^{\infty} \otimes \{L'_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty} \curvearrowleft,$$

并且对每个 $k \ge 1$（令 $n_0 = 0$）都有 $K'_k = [\bigcup_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} K_i]$ 与 $L'_k = [\bigcup_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} L_i]$，使得 $\big\|T|_{[a_{k,l}]_{1\le l\le k<\infty}} - \tilde{R}|_{[a_{k,l}]_{1\le l\le k<\infty}}\big\| \le \varepsilon$。

证明。若 $2 < p < \infty$，则结论由定理 5.9得出。

假设 $0 < p < 2$。利用定理 5.8，我们得到算子 R_1 和 R_2，它们满足定理 5.8 中的陈述以及 $\big\|T|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{1\le l\le k<\infty}} - (R_1+R_2)|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{1\le l\le k<\infty}}\big\| \le \frac{\varepsilon}{2^{\max\{\frac{1}{p},1\}}}$。我们选取一个正整数 N使得 $N^{1/2-1/p} < \frac{\varepsilon}{2^{\max\{\frac{1}{p},1\}+1}\left(1+8^{\max\{\frac{1}{p},1\}-1}\|T\|\right)}$。令

$$a_{k,l} = \frac{1}{N^{1/p}} \sum_{m=1}^{N} e_{\xi'_{2(Nk+m)+1},\eta'_{2(Nl+m)}} \qquad \text{for every } k,l \ge 1. \tag{5.4}$$

根据定理 3.5，我们知道

$$\{a_{k,l}\}_{k,l=1}^{\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \left\{[\xi'_{2(Nk+m)+1}]_{m=1}^{N}\right\}_{k=1}^{\infty} \otimes \left\{[\eta'_{2(Nl+m)}]_{m=1}^{N}\right\}_{l=1}^{\infty} \curvearrowleft \frac{1}{N^{1/p}} \sum_{m=1}^{N} (\cdot|e_m)e_m.$$

对于任意有限非零标量序列 $\{\alpha_{k,l}\}_{k,\ l=1}^{\infty}$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\Big\|\tilde{R}_1\Big(\sum_{k,l=1}^{\infty}\alpha_{k,l}a_{k,l}\Big)\Big\|_p\\
=\quad&\frac{1}{N^{1/p}}\Big\|\sum_{k,l=1}^{\infty}\alpha_{k,l}\sum_{m=1}^{N}\tilde{R}_1\Big(e_{\xi'_{2(Nk+m)+1},\eta'_{2(Nl+m)}}\Big)\Big\|_p\\
=\quad&\frac{1}{N^{1/p}}\Big\|\sum_{k,l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{N}\alpha_{k,l}\big(x_{(2(Nk+m)+1,2(Nl+m))}+y_{(2(Nl+m),2(Nk+m)+1)}\big)\Big\|_p\\
\le\quad&\frac{2^{\max\{\frac{1}{p},1\}-1}}{N^{1/p}}\Bigg(\Big\|\sum_{1\le l\le k<\infty}\sum_{m=1}^{N}\alpha_{k,l}x_{(2(Nk+m)+1,2(Nl+m))}\Big\|_p\\
&\qquad+\Big\|\sum_{1\le l\le k<\infty}\sum_{m=1}^{N}\alpha_{k,l}y_{(2(Nl+m),2(Nk+m)+1)}\Big\|_p\Bigg)\\
\overset{\text{Th 5.8 (3)}}{\le}\quad&\frac{8^{\max\{\frac{1}{p},1\}-1}}{N^{1/p}}\Bigg(\|T\|\Big(N\sum_{1\le l\le k<\infty}|\alpha_{k,l}|^2\Big)^{1/2}+\|T\|\Big(N\sum_{1\le l\le k<\infty}|\alpha_{k,l}|^2\Big)^{1/2}\Bigg)\\
=\quad&2\cdot 8^{\max\{\frac{1}{p},1\}-1}N^{1/2-1/p}\|T\|\Big(\sum_{1\le l\le k<\infty}|\alpha_{k,l}|^2\Big)^{1/2}\\
\overset{(\|\cdot\|_2\le\|\cdot\|_p)}{\le}\quad&\frac{\varepsilon}{2^{\max\{\frac{1}{p},1\}}}\Big\|\sum_{k,l=1}^{\infty}\alpha_{k,l}e_{\xi_k,\eta_l}\Big\|_p=\frac{\varepsilon}{2^{\max\{\frac{1}{p},1\}}}\Big\|\sum_{k,l=1}^{\infty}\alpha_{k,l}a_{k,l}\Big\|_p.
\end{aligned}
$$

˜令 $R=R_2|_{[a_{k,l}]_{k,\,l=1}^{\infty}}$ 我们有

$$
\begin{aligned}
&\big\|T|_{[a_{k,l}]_{1\le l\le k<\infty}}-\tilde{R}|_{[a_{k,l}]_{1\le l\le k<\infty}}\big\|\\
\le&2^{\max\{\frac{1}{p},1\}-1}\Big(\big\|\tilde{R}_1|_{[a_{k,l}]_{1\le l\le k<\infty}}\big\|+\big\|T|_{[a_{k,l}]_{1\le l\le k<\infty}}-(\tilde{R}_1+\tilde{R}_2)|_{[a_{k,l}]_{1\le l\le k<\infty}}\big\|\Big)\le\varepsilon,
\end{aligned}
$$

˜并且由定理 3.5， R 即为所需的算子。 □

已知 $T^{p,\,\{\xi_k,\eta_k\}_{k=1}^{\infty}}$ 在 $0<p\le 1$ 下无界（见例 4.22）。现在，采用与定理 5.5 和定理 4.24的证明类似的方法，我们得到定理4.24 关于 $\mathcal{C}_p$ 在 $0<p\le 1$时的一个变体。

定理 5.12。 设 $0<p\le 1$。假设 $T\in\mathcal{B}\big([e_{\xi_i,\eta_j}]_{i,\,j=1}^{\infty},\mathcal{C}_p\big)$ 满足 $p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i]}T(\cdot)^{p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty}L_i]}}=T$。给定一个正数序列 $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^{\infty}$，存在一个由正整数组成的严格递增序列 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$，以及两个形式如下的算子 $R_1,R_2\in\mathcal{B}\big([e_{\xi_{i_{2k}},\eta_{i_{2l}}}]_{k,\,l=1}^{\infty},\mathcal{C}_p\big)$

$$
\begin{aligned}
R_1(e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}})&=x_{(k,l)}+y_{(l,k)}\qquad \textit{for every } k,l\ge 1,\\
R_2(e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}})&=x_{2k+1,2l}+y_{2l,2k+1}\qquad \textit{for every } k,l\ge 1.
\end{aligned}
$$

使得 R_1+R_2 是与 $\{\varepsilon_s\}_{s=1}^{\infty}$ 的 ***Schauder*** 分解$\big\{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{\min k,l=s}^{\infty}\big\}_{s=1}^{\infty}$ 相关联的 $T|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k,\,l=1}^{\infty}}$ 的扰动，其中

(1) 存在两列 $\{F_{(k,l)}\}_{1\le l\le k<\infty}$ 和 $\{F_{(k,l)}\}_{1\le k<l<\infty}$，它们由 K的两两正交子空间构成；另存在两列 $\{G_{(l,k)}\}_{1\le l\le k<\infty}$ 和 $\{G_{(l,k)}\}_{1\le k<l<\infty}$，它们由 L 的两两正交子空间构成，使得

$$
\begin{aligned}
&\{x_{(k,l)}\}_{1\le l\le k<\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{F_{(k,l)}\}_{1\le l\le k<\infty}\otimes L\curvearrowleft\hat{b},\\
&\{y_{(l,k)}\}_{1\le l\le k<\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}K\otimes\{G_{(l,k)}\}_{1\le l\le k<\infty}\curvearrowleft\tilde{b},\\
\textit{and}\quad&\\
&\{x_{(k,l)}\}_{1\le k<l<\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{F_{(k,l)}\}_{1\le k<l<\infty}\otimes L\curvearrowleft\tilde{b}',
\end{aligned}
$$

$$\{y_{(l,k)}\}_{1\le k<l<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} K\otimes\{G_{(l,k)}\}_{1\le k<l<\infty}\curvearrowleft \hat{b}',$$

and $\left\|\begin{pmatrix}0&\tilde{b}\\ \hat{b}&0\end{pmatrix}\right\|_p, \left\|\begin{pmatrix}0&\hat{b'}\\ \tilde{b'}&0\end{pmatrix}\right\|_p \le 4^{\frac{1}{p}-1}\|T\|,$

(4) 存在一个序列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$，其元素是 $\mathbb{N}$ 的互不相交子集，使得

$$\{x_{2k+1,2l}\}_{k,l=1}^{\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K_{A_{2k+1}}\}_{k=1}^{\infty}\otimes\{L_{A_{2l}}\}_{l=1}^{\infty}\curvearrowleft$$

and

$$\{y_{2l,2k+1}\}_{k,l=1}^{\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K_{A_{2l}}\}_{l=1}^{\infty}\otimes\{L_{A_{2k+1}}\}_{k=1}^{\infty}\curvearrowleft .$$

注 5.13. 与定理4.24相比，定理 5.12允许我们选取一个子序列$\{\xi_{i_{2k+1}}\}_{k=1}^{\infty}$，它是 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$的子序列，以及一个子序列 $\{\eta_{i_{2k}}\}_{k=1}^{\infty}$，它是 $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$的子序列，使得 R_1+R_2是$T|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k,\ l=1}^{\infty}\text{的一个扰动}}$；而定理 4.24则只给出新的序列。

Argu按照定理 5.11证明中的论证作必要变更，我们得到以下定理.

定理 5.14. 设 $0<p\le 1$。假设 $T\in\mathcal{B}\big([e_{\xi_i,\eta_j}]_{i,\ j=1}^{\infty},\mathcal{C}_p\big)$ 满足 $p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i]}T(\cdot)^{p}{}_{[\bigcup_{i=1}^{\infty}L_i]}=T$。给定一个正数 ε。那么存在一个严格递增的正整数序列 $\{i'_k\}_{k=1}^{\infty}$，一个序列

$$\{a_{k,l}\}_{k,l=1}^{\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \Big\{[\xi_i]_{i'_{2k+1}\le i<i'_{2k+2}}\Big\}_{k=1}^{\infty}\otimes\Big\{[\eta_i]_{i'_{2l}\le i<i'_{2l+1}}\Big\}_{l=1}^{\infty}\curvearrowleft a$$

其中 $\|a\|_p=1$，且算子 $R\in\mathcal{B}\big([a_{k,l}]_{k,\ l=1}^{\infty},\mathcal{C}_p\big)$ 具有如下形式

$$R(a_{k,l})=x_{2k+1,2l}+y_{2l,2k+1}\qquad \textit{for every } k,l\ge 1,$$

其中

$$\{x_{2k+1,2l}\}_{k,l=1}^{\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K_{A_{2k+1}}\}_{k=1}^{\infty}\otimes\{L_{A_{2l}}\}_{l=1}^{\infty}\curvearrowleft,$$

$$\{y_{2l,2k+1}\}_{k,l=1}^{\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K_{A_{2l}}\}_{l=1}^{\infty}\otimes\{L_{A_{2k+1}}\}_{k=1}^{\infty}\curvearrowleft,$$

且 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{N}$ 的互不相交子集序列，使得 $\big\|T|_{[a_{k,l}]_{k,\ l=1}^{\infty}}-R\big\|\le\varepsilon$。

5.1.1. $\mathcal{C}_p$-严格奇异算子。

定理 5.15. 设 $0<p\le 1$，且 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{C}_p)$。以下命题等价：

(1) T 是 $\mathcal{C}_p$-严格奇异的。(2) 对于 $\mathcal{C}_p$ 的每个满足 $X\approx\mathcal{C}_p$ 的子空间 X 以及任意的 $\varepsilon>0$，存在一个子空间 $Y\subset X$，使得 $Y\approx\mathcal{C}_p$ 且 $\|T|_Y\|<\varepsilon$。(3) T 是 $\mathcal{T}_p$-严格奇异的。

证明。 为方便起见，我们只证明 $p=1$的情形。 $p<1$ 的情形可用类似的论证证明。

(2)$\Longrightarrow$(1)：这直接由 $\mathcal{C}_1$-严格奇异算子的定义得出。

(1)$\Longrightarrow$(2)：假设 T 是定义在 $\mathcal{C}_1$上的严格奇异算子。考虑任意满足 $X\approx\mathcal{C}_1$ 的子空间 $X\subset\mathcal{C}_1$ 以及任意的 $\varepsilon>0$。令 $S:\ \mathcal{C}_1\to X$ 为一个线性同构。由定理 5.14，存在 $\mathcal{C}_1$ 的一个子空间 Z，满足 $Z\cong\mathcal{C}_1$，以及一个算子 $R\in\mathcal{B}(Z,\mathcal{C}_1)$，使得存在一个常数$\beta\ge 0$ 使得

$$\|R(z)\|_1=\beta\|z\|_1\qquad \text{for all } z\in Z,$$

且 $\|TS|_Z-R\|<\varepsilon/(2\|S^{-1}\|)$。因此，对于任意 $z\in Z$，有

$$\|TS(z)\|_1\ge\|R(z)\|_1-\|(TS-R)(z)\|_1\ge\big(\beta-\varepsilon/(2\|S^{-1}\|)\big)\|z\|_1.$$

由于 T是 $\mathcal{C}_1$-严格奇异的，因此 $\beta\le\varepsilon/(2\|S^{-1}\|)$。令 $Y=S(Z)$，我们有

$$\|T|_Y\|\le\|TS|_Z\|\cdot\|S^{-1}\|\le\big(\|TS|_Z-R\|+\|R\|\big)\|S^{-1}\|<\big(\varepsilon/(2\|S^{-1}\|)+\beta\big)\|S^{-1}\|<\varepsilon.$$

等价关系 (1) $\Longleftrightarrow$(3) 可由定理 4.32得到。 □

注 5.16。 在定理 5.15 (2) 中，我们并未声称 $T|_Y$ 的限制 T 是紧的，即使 T 在 $\mathcal{C}_1$上是 $\mathcal{C}_1$ -严格奇异的，并且 $T|_Z$ 对每个子空间 Z 都 $\mathcal{C}_1$ 满足 $Z \approx \ell_2$ （注意，这样的 Y 必然包含一个同构于 ℓ_2的子空间）。例如，设 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 H的一个正交归一基，并设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_1)$ 满足

$$Te_{\xi_i,\xi_j} = e_{\xi_{2^i(2j+1)},\xi_1} \qquad \text{for every } 1 \le i,j < \infty.$$

注意，$[e_{\xi_{2^i(2j+1)},\xi_1}]_{i,\ j\ge 1}$ 与 ℓ_2 同构，且 T 是一个 $\mathcal{C}_1$-严格奇异算子。对于 $\mathcal{C}_1$ 中满足 $Z \approx \ell_2$的任意子空间Z ，根据 [5, 命题 2.2 (i)] （或引理 6.10），存在一个正整数N，使得 $(I - P_{[\xi_i]_{i=N}^{\infty},\ [\xi_i]_{i=N}^{\infty}})|_Z$是一个同构嵌入。注意， T是 $\operatorname{im}(I - P_{[\xi_i]_{i=N}^{\infty},\ [\xi_i]_{i=N}^{\infty}}) = [e_{\xi_i,\xi_j}]_{\min\{i,j\}\le N}$上的同构嵌入，并且

$$\begin{aligned}&\left\|T(I - P_{[\xi_i]_{i=N}^{\infty},[\xi_i]_{i=N}^{\infty}})(z)\right\|_1\\ &\le \left(\left\|TP_{[\xi_i]_{i=N}^{\infty},[\xi_i]_{i=N}^{\infty}}(z)\right\|_1^2 + \left\|T(I - P_{[\xi_i]_{i=N}^{\infty},[\xi_i]_{i=N}^{\infty}})(z)\right\|_1^2\right)^{1/2} = \|Tz\|_1\end{aligned}$$

对于每个 $z \in Z$都成立。因此， $T|_Z$是一个同构嵌入（因此，对于任意满足 $Y \approx \mathcal{C}_1$的 $Y \subset X$， $T|_Y$ 都不是紧算子）。

定理 5.17。 设 $0 < p < \infty$。那么 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{T}_p)$ 是 $\mathcal{T}_p$-严格奇异的，当且仅当对于 $\mathcal{T}_p$ 中任意满足 $X \approx \mathcal{T}_p$ 的子空间 X 以及任意 $\varepsilon > 0$，都存在一个子空间 $Y \subset X$，使得 $Y \approx \mathcal{T}_p$ 且 $\|T|_Y\| < \varepsilon$。

证明。 若 $p = 2$，则 $\mathcal{T}_2 \cong \ell_2$。这由以下事实可得：归一化块基序列在 ℓ_2 与 ℓ_2 的单位基等距同构。

若 $p \neq 2$，则通过作必要变更，按照定理 5.15 中等价命题 (1) $\iff$ (2) 的证明进行论证，即可证明该等价性；其中用定理 5.14 替代定理 5.11。□

事实是 $\mathcal{C}_p \approx \mathcal{T}_p$ 对于任意 $1 < p < \infty$ 结合定理 5.17 和定理 5.15 可得以下推论。

推论 5.18. 设 $0 < p < \infty$。那么 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_p)$ 是 $\mathcal{C}_p$-严格奇异的，当且仅当对于 $\mathcal{C}_p$ 中任意满足 $X \approx \mathcal{C}_p$ 的子空间 X 以及任意 $\varepsilon > 0$，都存在子空间 $Y \subset X$，使得 $Y \approx \mathcal{C}_p$ 且 $\|T|_Y\| < \varepsilon$。

注 5.19. 设 B 是一个拟巴拿赫空间。定理 5.15和 5.17 的直接推论是，所有 $\mathcal{C}_p$-严格奇异算子在 $\mathcal{B}(B,\mathcal{C}_p)$ $0 < p \le 1$构成的集合对加法封闭。特别地，所有 $\mathcal{C}_p$-严格奇异算子在 $\mathcal{C}_p$ 加法下封闭，因此构成 $\mathcal{B}(\mathcal{C}_p)$的一个理想；对于 $\mathcal{T}_p$, $0 < p < \infty$也有同样的结论。更一般的结果见第 6 节。

5.2. $\mathcal{C}_1$ **是** 1^+**-可补齐次的**。这一性质在巴拿赫空间理论中得到了广泛研究，此处我们采用 [18]中的术语。

定义 5.20。[18] 若（拟）巴拿赫空间 X 满足： X 的每个与 X 同构的子空间都包含一个更小的子空间，该子空间与 X 同构且是 X中的可补子空间，则称其为可补齐次的。

定义 5.21。若（拟）巴拿赫空间 X 满足： X 的每个与 X 同构的子空间都包含一个更小的子空间，该子空间与 X 是λ-同构的，且是 X中的 λ-可补子空间，则称其为 λ-可补齐次的，其中$1 \le \lambda < \infty$。

定义 5.22。若（拟）巴拿赫空间 X 满足：对于每个常数 $k > \lambda$， X 都是 k-可补齐次的，则称其为 λ^+-可补齐次的，其中$1 \le \lambda < \infty$。

Arazy [5] 证明了 $\mathcal{T}_p$, $1 \le p < \infty$, 是 2^+-可补齐次的，并且在 [7, 定理 5.4]（另见 [10]）中证明了 $\mathcal{C}_1$ 是可补齐次的。下面，我们证明它们是 1^+-可补齐次的。

定理 5.23。 $\mathcal{C}_1$ 是 1^+-可补齐次的。

证明。设 $\mathcal{C}_1=[e_{\xi_i,\eta_j}]_{i,j=1}^{\infty}$, $K_i=[\xi_i]$ 和 $L_i=[\eta_i]$。设 X 是 $\mathcal{C}_1$ 的子空间，且满足 $X\approx\mathcal{C}_1$，因此存在一个同构嵌入 $T\in\mathcal{B}([e_{\xi_i,\eta_j}]_{i,j=1}^{\infty})$，其像 $\mathrm{im}(T)=X$。存在一个正数 c，使得对于任意 $y\in[e_{\xi_i,\eta_j}]_{i,j=1}^{\infty}$，都有 $\|T(y)\|_1\geq c\|y\|_1$。

令 $\delta\,(<c)$ 为一个充分小的正数。由定理 5.14，存在一个由范数为 1 的算子生成的序列 $\{a_{k,l}\}_{k,\,l=1}^{\infty}$，以及一个算子 $R\in\mathcal{B}\big([a_{k,l}]_{k,\,l=1}^{\infty},\ \mathcal{C}_1\big)$，满足：

(1) 存在一个由 $\mathbb{N}$的互不相交子集构成的序列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$，以及一个序列

$$\{x_{2k+1,2l}\}_{k,l=1}^{\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_{A_{2k+1}}\}_{k=1}^{\infty}\otimes\{L_{A_{2l}}\}_{l=1}^{\infty}\curvearrowleft,$$

$$\{y_{2l,2k+1}\}_{k,l=1}^{\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K_{A_{2l}}\}_{l=1}^{\infty}\otimes\{L_{A_{2k+1}}\}_{k=1}^{\infty}\curvearrowleft,$$

使得

$$R(a_{k,l})=x_{2k+1,2l}+y_{2l,2k+1}\qquad\text{for every } k,l\geq 1.$$

(2) $\big\|T|_{[a_{k,l}]_{k,\,l=1}^{\infty}}-R\big\|\leq\delta$。

显然，$[x_{2k+1,2l}+y_{2l,2k+1}]_{k,\,l=1}^{\infty}\cong\mathcal{C}_1$。由定理 5.3，$[x_{2k+1,2l}+y_{2l,2k+1}]_{k,\,l=1}^{\infty}$ 在 $[e_{\xi_i,\eta_j}]_{i,\,j=1}^{\infty}$ 中是 1-可补的。另一方面，存在一个非负数 β，使得

$$\|R(y)\|_1=\beta\|y\|_1\qquad\text{for every } y\in[a_{k,l}]_{k,l=1}^{\infty}.$$

于是，$\beta\|y\|_1\geq\|T(y)\|_1-\|(R-T)(y)\|_1\geq(c-\delta)\|y\|_1$。因此，$\beta\geq c-\delta$。注意，$TR^{-1}$是一个同构嵌入，并且

$$\begin{aligned}\Big\|TR^{-1}-\iota_{[x_{2k+1,2l}+y_{2l,2k+1}]_{k,l=1}^{\infty}\hookrightarrow[e_{\xi_i,\eta_j}]_{i,j=1}^{\infty}}\Big\|&\leq\|T|_{[a_{k,l}]_{k,l=1}^{\infty}}-R\|\cdot\|R^{-1}\|\\&\leq\delta(c-\delta)^{-1}<1.\end{aligned}$$

因此，$T([a_{k,l}]_{k,\,l=1}^{\infty})$ 与 $[x_{2k+1,2l}+y_{2l,2k+1}]_{k,\,l=1}^{\infty}\cong\mathcal{C}_1$ 是 $c(c-2\delta)^{-1}$-同构的。由于 $[x_{2k+1,2l}+y_{2l,2k+1}]_{k,\,l=1}^{\infty}$ 是 $[e_{\xi_i,\eta_j}]_{i,\,j=1}^{\infty}$ 中的 1-可补子空间，由引理 2.14 可知，$T([a_{k,l}]_{k,\,l=1}^{\infty})$ 是 $c(c-2\delta)^{-1}$-可补的。由于 δ 可以任意选取，因此 $\mathcal{C}_1$ 是 1^+-可补齐次的。□

以下结果改进了 Arazy 的一项结果 [5], ; 他证明了 Schatten p-类的下三角部分 $\mathcal{T}_p$ 2^+ 是可补齐次的。

定理 5.24. 设 $1\leq p<\infty$。那么，$\mathcal{T}_p$ 是 1^+-可补齐次的。

证明. 若 $p=2$，则 $\mathcal{T}_2\cong\ell_2$，此情形的证明显然。

假设 $p\neq 2$。令 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H、$K_i=[\xi_i]$ 和 $L_i=[\eta_i]$的两个标准正交基，并令 $\mathcal{T}_p=[e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\leq j\leq i<\infty}$。设 X 是 $\mathcal{T}_p$ 的一个子空间，且满足 $X\approx\mathcal{T}_p$。特别地，存在一个同构嵌入 $T\in\mathcal{B}([e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\leq j\leq i<\infty},\ \mathcal{C}_p)$，使得 $\mathrm{im}(T)=X$。存在一个正数 c，使得对于任意 $y\in[e_{\xi_i,\eta_j}]_{i,\,j=1}^{\infty}$，都有 $\|T(y)\|_p\geq c\|y\|_p$。

设 δ 为充分小的正数。根据注记 5.10 和定理 5.11，存在一个序列 $\{a_{k,l}\}_{k,l=1}^{\infty}$，它由一个范数为 1 的算子生成；还存在一个算子$\tilde{R}\in\mathcal{B}\big([a_{k,l}]_{k,l=1}^{\infty},\mathcal{C}_p\big)$，满足：

(1) 存在一个由正整数组成的严格递增序列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$，以及一个序列

$$\{x_{2k+1,2l}\}_{k,l=1}^{\infty}\overset{\text{b.s}}{\boxplus}\{K'_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty}\otimes\{L'_{2l}\}_{l=1}^{\infty}\curvearrowleft\tag{5.5}$$

使得

$$\tilde{R}(a_{k,l})=x_{2k+1,2l}+y_{2l,2k+1}\qquad\text{for every } k,l\geq 1,$$

其中，对于每个 $k\geq 1$（其中 $n_0=0$），$K'_k=[\bigcup_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}K_i]$ 和 $L'_k=[\bigcup_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}L_i]$，

(2) $\big\|T|_{[a_{k,l}]_{1\leq l\leq k<\infty}}-\tilde{R}|_{[a_{k,l}]_{1\leq l\leq k<\infty}}\big\|\leq\delta$.

注意 $[x_{2k+1,2l}]_{1\le l\le k<\infty} \cong \mathcal{T}_p$，以及 $[x_{2k+1,2l}]_{1\le l\le k<\infty} \subset [e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\le j\le i<\infty}$。根据定理 5.3，存在一个压缩投影 P 从 $[e_{\xi_i,\eta_j}]_{i=1,\ j=1}^{\infty}$ 到 $[x_{2k+1,2l}]_{k=1,\ l=1}^{\infty}$ 由（5.3）给出。由（5.5）以及定理 5.3中 P 的构造，$P|_{[e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\le j\le i<\infty}}$ 是从 $[e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\le j\le i<\infty}$ 到 $[x_{2k+1,2l}]_{1\le l\le k<\infty}$ 的压缩投影。其余证明与定理5.23的证明相同。□

6. The largest proper ideal in $\mathcal{B}(\mathcal{C}_E)$

在本节中，我们始终假设 E 是可分巴拿赫对称序列空间，并证明 $\mathcal{B}(\mathcal{C}_E)$ 有一个（唯一的）最大真理想。请注意，本节中的大多数结果都可以推广到拟巴拿赫空间。不过，为了证明第 7 节的主要结果，本节中我们只考虑巴拿赫空间。

设 X 是巴拿赫空间。回顾一下，若算子 $S \in \mathcal{B}(X)$ 存在 $A, B \in \mathcal{B}(X)$ 使得 $S = ATB$，则称其经由.....分解 $T \in \mathcal{B}(X)$。Dosev 和 Johnson [23], 给出了以下有用的记号

$$\mathcal{M}_X = \{T \in \mathcal{B}(X) : I_X \text{ does not factor through } T\}. \tag{6.1}$$

显然，$\mathcal{M}_X$ 在 $\mathcal{B}(X)$ 中的算子左乘或右乘下保持不变。因此，要证明 $\mathcal{M}_X$ 是理想，只需证明 $\mathcal{M}_X$ 对加法封闭。此外，若 $\mathcal{M}_X$是理想，则它自动是 $\mathcal{B}(X)$ 中的最大真理想（因而是闭的[1]）。

以下结果想必为专家所熟知，也是多篇论文中所用思想的基础（例如参见 [18,24,64]）。为求完整起见，我们在下文给出一个简短证明。

引理6.1. 设 X 是一个巴拿赫空间，T 是 X上的有界算子。以下条件等价：

(1) $T \notin \mathcal{M}_X$.(2) 存在一个子空间 $Y \subset X$，满足 $Y \approx X$，使得 $T|_Y$ 是同构嵌入，且 TY 在 X中是可补的。(3) 存在一个可补子空间 $Y \subset X$，满足 $Y \approx X$，使得 $T|_Y$ 是同构嵌入，且 TY 在 X中是可补的。

证明。(1)⟹(2)：若 $T \notin \mathcal{M}_X$，则存在两个算子 $A, B \in \mathcal{B}(X)$，使得 $ATB = I_X$。由此可知 A是满射，B 和 $T|_{\mathrm{im}(B)}$均为同构嵌入，且 TBA是投影算子。空间 $Y := \mathrm{im}(B)$是 X 的一个子空间，具有所需性质。

(2)⟹(1)：根据假设，存在一个同构嵌入算子 $B \in \mathcal{B}(X)$，其像 $\mathrm{im}(B) = Y$，以及一个从 X 到 TY的投影 P。因此，我们可以将 X 上的一个算子 A 记为 $A(x) = (TB)^{-1}P(x)$。由此可得 $ATB(x) = (TB)^{-1}PTB(x) = (TB)^{-1}TB(x) = x$，即 $ATB = I_X$。因此，$T \notin \mathcal{M}_X$。

(3)⟹(2)：这是显然的。

(2)⟹(3)：设 P是从 X到 TY的投影。那么，$(T|_Y)^{-1}PT$是从 X到 Y的投影。□

定理 5.15 刻画了 $\mathcal{B}(\mathcal{C}_1)$ 中属于 $\mathcal{C}_1$-严格奇异的算子。下面，对于更一般的巴拿赫空间，我们给出一个基于上述 (6.1) 中所给集合的刻画（然而，它不能直接导出定理 5.15 中的范数估计）。

推论6.2。设 X 是一个可补齐次巴拿赫空间。则，集合 $\mathcal{M}_X$与 X上所有 X-严格奇异算子的集合重合。

注记6.3。容易看出，引理6.1 和推论6.2 对拟巴拿赫空间也成立。因此，对于 $0 < p < 1$，上所有 $\mathcal{C}_p$-严格奇异算子的集合 $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_p}$根据定理4.28 和注记5.19，与 $\mathcal{B}(\mathcal{C}_p)$ 重合，因此它是 $\mathcal{B}$中的最大真理想。

下面的命题来自 [23, 命题5.1]。

命题 6.4。设 X 为巴拿赫空间。当且仅当对每个 $T \in \mathcal{B}(X)$，都有 $T \notin \mathcal{M}_X$ 或 $I - T \notin \mathcal{M}_X$时，$\mathcal{M}_X$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 中的最大真理想。

[1] Since $\mathrm{d}(I_X, \mathcal{M}_X) \ge 1$, it follows that $\overline{\mathcal{M}_X} \ne \mathcal{B}(X)$, and thus $\mathcal{M}_X = \overline{\mathcal{M}_X}$.

下面的引理给出了 $\mathcal{M}_X$ 成为 $\mathcal{B}(X)$ 中最大理想的一个充分条件。该引理背后的思想对于研究巴拿赫空间的主性很有用；也就是说，如果对于 X 的任意分解，都将其写成两个巴拿赫空间的直和，并且至少有一个直和项与 X同构，则称巴拿赫空间 X 为主空间。

引理 6.5。 设 X 是一个巴拿赫空间。假设对任意 $T \in \mathcal{B}(X)$，存在一个标量 α、一个与 X同构的巴拿赫空间 Y，以及 $J \in \mathcal{B}(Y, X)$、$K \in \mathcal{B}(X, Y)$，其中 $KJ = I_Y$，使得

$$\|KTJ - \alpha I_Y\| < 1/2. \tag{6.2}$$

那么 $\mathcal{M}_X$ 是 $\mathcal{B}(X)$中的最大真理想。

证明。 对任意 $T \in \mathcal{B}(X)$，我们选取一个标量 α、一个与 X同构的巴拿赫空间 Y，以及$J \in \mathcal{B}(Y, X)$、$K \in \mathcal{B}(X, Y)$，其中 $KJ = I_Y$满足（6.2）。

若 $|\alpha| \geq 1/2$，则由（6.2）可知， KTJ是 Y上的可逆算子。令 Q 为从 X 到 Y的一个同构。我们有

$$(Q^{-1}(KTJ)^{-1}K)T(JQ) = Q^{-1}(KTJ)^{-1}(KTJ)Q = I_X,$$

并且 $Q^{-1}(KTJ)^{-1}K$， $JQ \in \mathcal{B}(X)$。因此， I_X可经由 T分解，从而 $T \notin \mathcal{M}_X$（见上文（6.1））。

若 $|\alpha| < 1/2$，则 $|1 - \alpha| > 1/2$，并且

$$\|K(I_X - T)J - (1 - \alpha)I_Y\| = \|KTJ - \alpha I_Y\| < 1/2.$$

同样的论证可得 $I_X - T \notin \mathcal{M}_X$。

根据命题 6.4，证明得证。 □

Arazy [6,引理 2.1]表明 $\mathcal{T}_E$ 满足引理 6.5中的假设。因此，我们得到以下定理。

定理 6.6. 设 E 是一个可分巴拿赫对称序列空间。那么，$\mathcal{M}_{\mathcal{T}_E}$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{T}_E)$中的最大真理想。

为了证明第7节的主要结果，我们需要一些辅助结果。这些结果的灵感来自 Arazy 的论文 [6, 引理 2.1 和定理 3.1]。下面的引理 6.7 可视为 [6, 引理 2.1]的一个变体。

现在，设 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 H 的两组标准正交基，并令

$$\mathcal{T}_E = [e_{\xi_i, \eta_j}]_{1 \leq j \leq i < \infty}.$$

引理 6.7。 对于任意算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{T}_E, \mathcal{C}_E)$ 以及正数序列 $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^{\infty}$，存在一个正整数递增序列 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$和一个标量 α，使得

$$P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=1}^{\infty}, [\eta_{i_{2k}}]_{k=1}^{\infty}} T|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}}, \eta_{i_{2l}}}]_{1 \leq l \leq k < \infty}}$$

是与 $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^{\infty}$ 上的 *Schauder* 分解 $\left\{[e_{\xi_{i_{2k+1}}, \eta_{i_{2l}}}]_{k=l}^{\infty}\right\}_{l=1}^{\infty}$ 相关联的 $\alpha I_{[e_{\xi_{i_{2k+1}}, \eta_{i_{2l}}}]_{1 \leq l \leq k < \infty}}$ 的扰动。

证明。 注意，对每个 j， $\{T(e_{\xi_i, \eta_j})\}_{i=j}^{\infty}$ 都是弱零的。根据标准扰动论证，我们可以假设存在一个正整数递增序列 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$T(e_{\xi_{i_{2k+1}}, \eta_j}) = p_{[\xi_s]_{s=1}^{i_{2k+2}-1}} T(e_{\xi_{i_{2k+1}}, \eta_j}) p_{[\eta_s]_{s=1}^{i_{2k+2}-1}} - p_{[\xi_s]_{s=1}^{i_{2k}}} T(e_{\xi_{i_{2k+1}}, \eta_j}) p_{[\eta_s]_{s=1}^{i_{2k}}}$$

对每个 $k \geq 1$ 和 $1 \leq j \leq i_{2k}$。对于每个 $1 \leq l \leq k < \infty$，我们可以写成

$$p_{[\xi_{i_{2s+1}}]_{s=1}^{\infty}} T(e_{\xi_{i_{2k+1}}, \eta_{i_{2l}}}) = \sum_{j=1}^{i_{2k+2}-1} \alpha_j^{(k,l)} e_{\xi_{i_{2k+1}}, \eta_j}, \tag{6.3}$$

其中 $\alpha_j^{(k,l)}$ 是一个标量。通过对 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$取子序列这一常规的对角过程，我们可以假设存在一个序列 $\left\{a^{(l)} := (\alpha_j^{(l)})_{j=1}^{\infty}\right\}_{l=1}^{\infty}$ 属于 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$，使得

$$\left(\alpha_1^{(k,l)}, \alpha_2^{(k,l)}, \ldots, \alpha_{i_{2k+2}}^{(k,l)}, 0, 0, \ldots\right) \longrightarrow a^{(l)} \quad \text{as } k \to \infty \quad \text{(by product topology)}.$$

容易看出，对每个 l都有 $\|a^{(l)}\|_{\ell_2} \le \|T\|$。选取一个由充分小的正数组成的序列 $\{\delta_l\}_{l=1}^{\infty}$。进一步对 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$取子序列后，我们可以假设（此处，i_{2k+2} 充分大于 i_{2k}）

$$\sum_{s=l+1}^{\infty} |\alpha_{i_{2s}}^{(l)}| \le \delta_l, \tag{6.4}$$

且（此处， i_{2k+1} 充分大于 i_{2k}）

$$\sum_{s=1}^{k} |\alpha_{i_{2s}}^{(k,l)} - \alpha_{i_{2s}}^{(l)}| \le \delta_k \qquad \text{for every } 1 \le l \le k < \infty. \tag{6.5}$$

对于每个固定的 $l \ge 1$，以及任意有限非零标量序列 $\{t_k\}_{k=l}^{\infty}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left\| p_{[\xi_{i_{2s+1}}]_{s=1}^{\infty}} T \left(\sum_{k=l}^{\infty} t_k e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}} \right) p_{[\eta_{i_{2s}}]_{s=1}^{\infty}} - \sum_{k=l}^{\infty} t_k \sum_{s=1}^{l} \alpha_{i_{2s}}^{(l)} e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2s}}} \right\|_{\mathcal{C}_E} \\
\overset{(6.3)}{=} &\left\| \sum_{k=l}^{\infty} t_k \left(\sum_{s=1}^{k} \alpha_{i_{2s}}^{(k,l)} e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2s}}} - \sum_{s=1}^{l} \alpha_{i_{2s}}^{(l)} e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2s}}} \right) \right\|_{\mathcal{C}_E} \\
= &\left\| \sum_{k=l}^{\infty} t_k \sum_{s=1}^{k} (\alpha_{i_{2s}}^{(k,l)} - \alpha_{i_{2s}}^{(l)}) e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2s}}} - \sum_{k=l+1}^{\infty} t_k \sum_{s=l+1}^{k} \alpha_{i_{2s}}^{(l)} e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2s}}} \right\|_{\mathcal{C}_E} \\
\overset{(6.5)}{\le} &\sum_{k=l}^{\infty} |t_k| \delta_k + \left\| \sum_{k=l+1}^{\infty} \sum_{s=l+1}^{k} t_k \alpha_{i_{2s}}^{(l)} e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2s}}} \right\|_{\mathcal{C}_E} \\
\le &\left(\sum_{k=l}^{\infty} |\delta_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=l}^{\infty} |t_k|^2 \right)^{1/2} + \sum_{s=l+1}^{\infty} \left\| \sum_{k=s}^{\infty} t_k \alpha_{i_{2s}}^{(l)} e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2s}}} \right\|_{\mathcal{C}_E} \\
\le &\left(\sum_{k=l}^{\infty} |\delta_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=l}^{\infty} |t_k|^2 \right)^{1/2} + \sum_{s=l+1}^{\infty} |\alpha_{i_{2s}}^{(l)}| \left(\sum_{k=l}^{\infty} |t_k|^2 \right)^{1/2} \\
\overset{(6.4)}{\le} &\left(\delta_l + \left(\sum_{k=l}^{\infty} |\delta_k|^2 \right)^{1/2} \right) \left\| \sum_{k=l}^{\infty} t_k e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}} \right\|_{\mathcal{C}_E}.
\end{aligned}$$

根据定理 2.12，不失一般性，我们可以假设

$$p_{[\xi_{i_{2s+1}}]_{s=1}^{\infty}} T(e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}) p_{[\eta_{i_{2s}}]_{s=1}^{\infty}} = \sum_{s=1}^{l} \alpha_{i_{2s}}^{(l)} e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2s}}} \qquad \text{for every } 1 \le l \le k < \infty. \tag{6.6}$$

对于任意有限标量序列 $\{t_l\}_{l=1}^{k}$，我们有

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{l=1}^{k} t_l \sum_{s=1}^{l} \alpha_{i_{2s}}^{(l)} e_{i_{2s}} \right\|_{\ell_2} &= \left\| \sum_{l=1}^{k} t_l \Big(\cdot \Big| \sum_{s=1}^{l} \alpha_{i_{2s}}^{(l)} e_{i_{2s}} \Big) e_{i_{2k+1}} \right\|_{\mathcal{C}_E} \\
&= \left\| \sum_{l=1}^{k} t_l \sum_{s=1}^{l} \alpha_{i_{2s}}^{(l)} e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2s}}} \right\|_{\mathcal{C}_E} \le \|T\| \left(\sum_{l=1}^{k} |t_l|^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

这意味着 $\{\sum_{s=1}^{l} \alpha_{i_{2s}}^{(l)} e_{i_{2s}}\}_{l=1}^{\infty}$ 是 ℓ_2 中的弱零序列。

由于 $\{\alpha_{i_{2l}}^{(l)}\}_{l=1}^{\infty}$ 是一个有界标量序列，不失一般性，我们可以假设$\{\alpha_{i_{2l}}^{(l)}\}_{l=1}^{\infty}$ 收敛到一个标量 α。接下来，我们用归纳法构造一个正整数的严格递增序列 $\{n_l\}_{l=1}^{\infty}$。作为归纳的起始步骤，我们选取 n_1 使得 $|\alpha_{i_{2n_1}}^{(n_1)} - \alpha| \le \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2}}$。如果已经选定了 n_1、……、$n_{l-1}(l \ge 2)$，那么，注意到

$$(\alpha_{i_{2n_1}}^{(m)}, \ldots, \alpha_{i_{2n_{l-1}}}^{(m)}) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} 0 \quad \text{as } m \to \infty,$$

我们可以选取一个足够大的整数 $n_l > n_{l-1}$，使得

$$\left(\sum_{s=1}^{l-1} |\alpha_{i_{2n_s}}^{(n_l)}|^2 \right)^{1/2} \le \frac{\varepsilon_l}{\sqrt{2}}$$

and

$$|\alpha_{i_{2n_l}}^{(n_l)} - \alpha| \le \frac{\varepsilon_l}{\sqrt{2}}.$$

归纳法至此完成。为简便起见，对于每个 l，我们仍将 $i_{2l} := i_{2n_l}$ 和 $i_{2l+1} := i_{2n_l+1}$ 记作……，因此

$$\left(\sum_{s=1}^{l-1}\left|\alpha_{i_{2s}}^{(l)}\right|^2\right)^{1/2} \quad \text{and} \quad \left|\alpha_{i_{2l}}^{(l)} - \alpha\right| \le \frac{\varepsilon_l}{\sqrt{2}} \qquad \text{for every } l \ge 2.$$

因此

$$\left\|\alpha e_{i_{2l}} - \sum\nolimits_{s=1}^{l} \alpha_{i_{2s}}^{(l)} e_{i_{2s}}\right\|_{\ell_2} \le \varepsilon_l \qquad \text{for every } l \ge 1. \tag{6.7}$$

对于每个固定的 $l \ge 1$，对于任意有限非零的标量序列 $\{t_k\}_{k=l}^{\infty}$，有

$$\begin{aligned}
&\left\|p_{[\xi_{i_{2s+1}}]_{s=1}^{\infty}} T\left(\sum\nolimits_{k=l}^{\infty} t_k e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}\right) p_{[\eta_{i_{2s}}]_{s=1}^{\infty}} - \sum\nolimits_{k=l}^{\infty} t_k \alpha e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}\right\|_{\mathcal{C}_E} \\
\overset{(6.6)}{=}\ &\left\|\sum\nolimits_{k=l}^{\infty} t_k \left(\left(\sum\nolimits_{s=1}^{l} \alpha_{i_{2s}}^{(l)} e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2s}}}\right) - \alpha e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}\right)\right\|_{\mathcal{C}_E} \\
=\ &\left\|\sum\nolimits_{k=l}^{\infty} t_k \left(\cdot \left|\alpha e_{i_{2l}} - \sum\nolimits_{s=1}^{l} \alpha_{i_{2s}}^{(l)} e_{i_{2s}}\right) e_{i_{2k+1}}\right\|_{\mathcal{C}_E} \\
\overset{(6.7)}{\le}\ &\varepsilon_l \left(\sum\nolimits_{k=l}^{\infty} |t_k|^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

因此

$$P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=1}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=1}^{\infty}} T|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{1\le l\le k<\infty}}$$

是与 $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^{\infty}$ 的 Schauder 分解相关联的 $\alpha I_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{1\le l\le k<\infty}}$ 的扰动 $\left\{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k=l}^{\infty}\right\}_{l=1}^{\infty}$。□

引理 6.8。设 $\mathcal{T}_E \not\approx \mathcal{C}_E$。对于任意算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_E)$ 以及正数序列 $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^{\infty}$，存在一个严格递增的正整数序列 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和一个标量 α，使得

$$P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=1}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=1}^{\infty}} T|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k,l=1}^{\infty}}$$

是与 $\left\{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{\min\{k,l\}=s}\right\}_{s=1}^{\infty}$ 相关、针对 $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^{\infty}$ 的 *Schauder* 分解的 $\alpha I_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k,l=1}^{\infty}}$ 扰动。

证明。应用关于 $T|_{[e_{\xi_i,\eta_j}]_{1\le j\le i<\infty}}$ 的引理 6.7 和引理 2.13，存在一个严格递增的正整数序列 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$、一个标量 α，以及一个算子 $S \in \mathcal{B}([e_{\xi_{2k+1},\eta_{2l}}]_{k,l=1}^{\infty}, \mathcal{C}_E)$，使得

$$\begin{aligned}
S|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{1\le l\le k<\infty}} &= \alpha I_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{1\le l\le k<\infty}}, \\
S|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{1\le k<l<\infty}} &= P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=1}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=1}^{\infty}} T|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{1\le k<l<\infty}},
\end{aligned}$$

and

$$P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=1}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=1}^{\infty}} T|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k,l=1}^{\infty}}$$

是与 $\left\{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{\min\{k,l\}=s}\right\}_{s=1}^{\infty}$ 相关、针对 $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^{\infty}$ 的 Schauder 分解的 S 扰动。对 $[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k,l=1}^{\infty}$ 的上三角部分作类似论证，不失一般性，我们可以假设存在一个标量 α'，使得

$$S|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{1\le k<l<\infty}} = \alpha' I_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{1\le k<l<\infty}}.$$

注意到

$$(\alpha-\alpha')T^{E,\{\xi_{2k+1},\eta_{2k}\}_{k=1}^{\infty}} = S|_{\mathrm{span}(\{e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}\}_{k,l=1}^{\infty})} - \alpha' I_{\mathrm{span}(\{e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}\}_{k,l=1}^{\infty})}.$$

若 $\alpha \ne \alpha'$，则可得三角投影 $T^{E,\{\xi_{2k+1},\eta_{2k}\}_{k=1}^{\infty}}$（定义见（2.11））是有界的，这与定理 2.8 矛盾。因此，$S = \alpha I_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k,l=1}^{\infty}}$，证明至此完成。□

定理 6.9. 设 E 是一个可分巴拿赫对称空间。集合 $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_E}$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{C}_E)$ 中的最大真理想。

证明. 若 $\mathcal{C}_E \approx \mathcal{T}_E$，则由定理 6.6可得结论。若 $\mathcal{C}_E \not\approx \mathcal{T}_E$，则由引理6.8 和6.5可得结论。□

现在，我们考虑 $\mathcal{C}_E = \mathcal{C}_p$、 $1 \le p < 2$ 的情形。本节最后，我们证明下面的命题6.11，该命题将在下一节中发挥作用。在证明命题6.11 之前，我们需要以下引理。

引理 6.10. 设 $1 \le p < 2$。对于任意有界算子 $T\colon \ell_2 \to \mathcal{C}_p$，有

$$\|P_{[\xi_i]_{i=N}^{\infty},[\eta_i]_{i=N}^{\infty}} T\| \to 0 \quad \text{as } N \to \infty. \tag{6.8}$$

证明。 注意，$\|P_{[\xi_i]_{i=N}^{\infty},\ [\eta_i]_{i=N}^{\infty}} T\|$ 随着 N 增大而递减。令 $c := \lim_{N\to\infty} \|P_{[\xi_i]_{i=N}^{\infty},\ [\eta_i]_{i=N}^{\infty}} T\|$。现在假设 $c > 0$。由于对所有 $n \in \mathbb{N}^+$，$\lim_{N\to\infty} \|P_{[\xi_i]_{i=N}^{\infty},\ [\eta_i]_{i=N}^{\infty}} T|_{[e_i]_{i=1}^{n}}\| = 0$，因此对于每个 N 和 n，

$$\begin{aligned}\|P_{[\xi_i]_{i=N}^{\infty},[\eta_i]_{i=N}^{\infty}} T|_{[e_i]_{i=n+1}^{\infty}}\| &\ge \lim_{N\to\infty} \|P_{[\xi_i]_{i=N}^{\infty},[\eta_i]_{i=N}^{\infty}} T|_{[e_i]_{i=n+1}^{\infty}}\| \\ &\ge \lim_{N\to\infty} \|P_{[\xi_i]_{i=N}^{\infty},[\eta_i]_{i=N}^{\infty}} T|_{[e_i]_{i=1}^{\infty}}\| - \lim_{N\to\infty} \|P_{[\xi_i]_{i=N}^{\infty},[\eta_i]_{i=N}^{\infty}} T|_{[e_i]_{i=1}^{n}}\| \\ &\ge c.\end{aligned}$$

通过标准的扰动论证，存在两个正整数递增序列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$，以及 ℓ_2 中的一个归一化不相交序列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得对于每个 k，都有$f_k \in [e_i]_{i=n_k+1}^{n_{k+1}}$，从而

$$\left\| P_{[\xi_i]_{i=m_k+1}^{m_{k+1}},[\eta_i]_{i=m_k+1}^{m_{k+1}}} T(f_k) \right\|_p \ge c/2 \qquad \text{for every } k.$$

由于算子 $P_{\{[\xi_i]_{i=m_k+1}^{m_{k+1}},[\eta_i]_{i=m_k+1}^{m_{k+1}}\}_{k=1}^{\infty}} T|_{[f_k]_{k=1}^{\infty}}$ 是从 ℓ_2 到 $\mathcal{C}_p$的有界算子，因此可得 $(c/2)$ $\|\cdot\|_{\ell_p} \le \|\cdot\|_{\ell_2}$，这与 $p < 2$矛盾。□

命题 6.11。 对于任意算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_1)$ 以及正数序列 $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^{\infty}$，存在一个正整数递增序列 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和一个标量 α，使得

$$P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=1}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=1}^{\infty}} T|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k,l=1}^{\infty}}$$

是与 ${}^{\alpha I}{}_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k,\ l=1}^{\infty}}$ 针对 $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^{\infty}$ 的 *Schauder* 分解$\left\{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{\min\{k,l\}=s}\right\}_{s=1}^{\infty}$ 相关的扰动，并且

$$\left\| P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=N}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=N}^{\infty}} (T-\alpha I)|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k,l=1}^{\infty}} \right\| \to 0 \quad \text{as } N \to \infty.$$

证明。 由引理 6.8，只需证明

$$\lim_{N\to\infty} \left\| P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=N}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=N}^{\infty}} (T-\alpha I)|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k,l=1}^{\infty}} \right\| = 0.$$

对于任意正整数 n，我们有

$$\begin{aligned} & \left\| P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=N}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=N}^{\infty}} (T-\alpha I)|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k,l=1}^{\infty}} \right\| \\ \le\ & 2 \left\| P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=N}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=N}^{\infty}} (T-\alpha I)|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{\min\{k,l\}\le n}} \right\| \\ & \quad + \left\| P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=N}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=N}^{\infty}} (T-\alpha I)|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k,l=n+1}^{\infty}} \right\| \\ \overset{\text{Lem 6.8}}{\le}\ & 2 \left\| P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=N}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=N}^{\infty}} (T-\alpha I)|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{\min\{k,l\}\le n}} \right\| + 2\sum_{l=n+1}^{\infty} \varepsilon_l. \end{aligned}$$

注意到$[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{\min\{k,l\}\le n} \approx \ell_2$，根据引理 6.10，我们有$\left\| P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=N}^{\infty},\ [\eta_{i_{2k}}]_{k=N}^{\infty}} (T-\alpha I)|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{\min\{k,l\}\le n}} \right\| \to 0$当 $N \to \infty$ 时，因此，

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \left\| P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=N}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=N}^{\infty}} (T-\alpha I)|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k,l=1}^{\infty}} \right\| \le 2\sum_{l=n+1}^{\infty} \varepsilon_l.$$

不失一般性，我们可以假设 ε_l 足够小，使得 $\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon_l<\infty$。由于 n 是任意取定的，且 $\sum_{l=n+1}^{\infty}\varepsilon_l\to 0$ 当 $n\to 0$ 时，故

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\left\|P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=N}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=N}^{\infty}}(T-\alpha I)|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k,l=1}^{\infty}}\right\|=0.$$

证明完成。 □

注 6.12. 与命题 6.11 类似的结果 $\mathcal{T}_p$，$1\le p<2$。

7. The structure of commutator on $\mathcal{C}_1$

本节中，我们将前几节得到的结果应用于刻画 $\mathcal{C}_1$ 上的交换子。

现在，设 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 H 的两组标准正交基。

7.1. 每个 $T\in\mathcal{M}_{\mathcal{C}_1}$ 都是一个交换子。

定义 7.1。巴拿赫空间 X 的闭子空间序列 $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ 称为 X 关于 $1\le p<\infty$ 的ℓ_p-分解，或称为 $p=0$，如果满足以下两个条件。

(1) $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ 是 X 的 Schauder 分解，并且存在一个正常数 K，使得对于每个满足 $x_i\in X_i$ 的收敛级数 $\sum_{i=0}^{\infty}x_i\in X$，

$$\frac{1}{K}\left\|(\|x_i\|)_{i=1}^{\infty}\right\|_p\le\left\|\sum_{i=0}^{\infty}x_i\right\|_X\le K\left\|(\|x_i\|)_{i=1}^{\infty}\right\|_p;$$

(2) 空间 $X_i(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots)$ 与 X 一致地线性同构。

下面的引理综合了 Dosev 的若干结果 [22, 引理 5、推论 7 和定理 8]，其证明可见 [19, 引理 4.7]。

~**引理 7.2**。设 $\mathcal{D}=\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ 是巴拿赫空间 X 的一个 ℓ_p-分解，且 $P_n=\sum_{i=0}^{n}P_{\mathcal{D},\ i}$，其中 $P_{\mathcal{D},\ i}$ 是从 $X=\sum_{i=0}^{\infty}X_i$ 到 X_i 的自然投影。假设 $T\in\mathcal{B}(X)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\left\|(I-\widetilde{P}_n)T(I-P_{\mathcal{D},0})\right\|=\lim_{n\to\infty}\left\|T(I-\widetilde{P}_n)\right\|=0.$$

那么，T 是 $\mathcal{B}(X)$中的一个交换子。

为方便起见，下面陈述经典的佩尔琴斯基分解技巧，参见例如 [1,定理 2.2.3]。

引理 7.3. 假设 $1\le p<\infty$。设 X 是满足 $X\approx(\sum X)^p$的巴拿赫空间，且 Y是 X的一个可补子空间。若 Y 包含一个与X同构的可补子空间，则 $Y\approx X$。

根据定理 5.23、引理 6.2 和引理 6.9，

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}_1}=\{T\in\mathcal{B}(\mathcal{C}_1):T\text{ is }\mathcal{C}_1\text{-strictly singular}\}\tag{7.1}$$

是 $\mathcal{B}(\mathcal{C}_1)$中的最大真理想（因此是范数闭的）。

引理7.4. 对于任意算子 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{C}_1)$，存在一个正整数递增序列 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和一个标量 α，使得

$$\left\|P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=N}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=N}^{\infty}}(T-\alpha I)P\right\|\to 0\quad\text{as } N\to\infty,$$

and

$$P(T-\alpha I)P\in\mathcal{M}_{\mathcal{C}_1},$$

其中 $P:=P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=1}^{\infty},\ [\eta_{i_{2k}}]_{k=1}^{\infty}}$。

证明。 根据引理 6.11，存在一个递增序列 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$，其元素为正整数，且存在一个标量α 使得

$$\left\|P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=N}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=N}^{\infty}}(T-\alpha I)|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k,l=1}^{\infty}}\right\|\to 0\quad \text{as } N\to\infty.$$

设 $P:=P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=1}^{\infty},\ [\eta_{i_{2k}}]_{k=1}^{\infty}}$。那么，我们有

$$\begin{aligned}&\left\|P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=N}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=N}^{\infty}}(T-\alpha I)P\right\|\\ =&\left\|P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=N}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=N}^{\infty}}(T-\alpha I)|_{[e_{\xi_{i_{2k+1}},\eta_{i_{2l}}}]_{k,l=1}^{\infty}}P\right\|\to 0\quad \text{as } N\to\infty.\end{aligned}$$

观察以下分解

$$P(T-\alpha I)P=\left(P-P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=N}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=N}^{\infty}}\right)(T-\alpha I)P+P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=N}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=N}^{\infty}}(T-\alpha I)P.$$

我们有

$$\left(P-P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=N}^{\infty},\ [\eta_{i_{2k}}]_{k=N}^{\infty}}\right)(T-\alpha I)P\to P(T-\alpha I)P\quad \text{as } N\to\infty.$$

由于当 $N>1$ 时 $\operatorname{im}(P-P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=N}^{\infty},\ [\eta_{i_{2k}}]_{k=N}^{\infty}})\approx\ell_2$，由 (7.1) 可得 $P-P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=N}^{\infty},\ [\eta_{i_{2k}}]_{k=N}^{\infty}}\in\mathcal{M}_{\mathcal{C}_1}$。此外，由于 $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_1}$ 是范数闭理想，因此

$$P(T-\alpha I)P\in\mathcal{M}_{\mathcal{C}_1}.$$

证明至此完成。 □

下面，我们证明本节的主要结果。

定理7.5. 每个 $T\in\mathcal{M}_{\mathcal{C}_1}$ 都是一个交换子。

证明. 由引理 7.4，存在一个由正整数组成的严格递增序列 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ 以及一个标量α 使得

$$\left\|P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=N}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=N}^{\infty}}(T-\alpha I)P\right\|\to 0\quad \text{as } N\to\infty,$$

and

$$P(T-\alpha I)P\in\mathcal{M}_{\mathcal{C}_1},$$

其中 $P:=P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=1}^{\infty},\ [\eta_{i_{2k}}]_{k=1}^{\infty}}$。

注意到 $\alpha P=PTP-P(T-\alpha I)P$且 $PTP\in\mathcal{M}_{\mathcal{C}_1}$，我们有 $\alpha P\in\mathcal{M}_{\mathcal{C}_1}$。由于 $P\notin\mathcal{M}_{\mathcal{C}_1}$(见(7.1))，可得 $\alpha=0$。因此，我们有

$$\left\|P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=N}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=N}^{\infty}}TP\right\|\to 0\quad \text{as } N\to\infty.$$

由引理 7.3，我们有 $\ker(P)=(I-P)\mathcal{C}_1\approx\mathcal{C}_1$。对于每个 $k\in\mathbb{N}^+$，定义

$$A_k:=\{i_{2^k(2l+1)+1}\}_{l=1}^{\infty}\quad\text{and}\quad B_k:=\{i_{2^k(2l+1)}\}_{\mu=1}^{\infty},$$

and

$$P_{A_k,B_k}:=P_{[\xi_i]_{i\in A_k},[\eta_i]_{i\in B_k}}.$$

那么，$P_{A_k,B_k}P$ 是一个投影，且满足

$$P_{A_k,B_k}P(\mathcal{C}_1)=[e_{\xi_i,\eta_j}]_{i\in A_k,j\in B_k}\cong\mathcal{C}_1$$

对每个 $k\in\mathbb{N}^+$ 均成立。取一个正数序列 $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得 $\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k<\infty$。对于每个$k\in\mathbb{N}^+$，根据定理 5.15 和 5.23，我们可以选取$[e_{\xi_i,\eta_j}]_{i\in A_k}$的一个闭子空间 $X_{k\ ,j\in B_k}$，使得 X_k 与 $\mathcal{C}_1$ 2-同构，且在 $[e_{\xi_i,\eta_j}]_{i\in A_k,j\in B_k}$ 中 2-可补，并且 $\|T|_{X_k}\|\le\delta_k$。对于每个k，令 Q_k 为从$[e_{\xi_i,\eta_j}]_{i\in A_k,j\in B_k}$ 到 X_k 的一个投影，满足 $\|Q_k\|\le 2$。注意到

$$\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}X_k\right]\cong\left(\sum_{k=1}^{\infty}\oplus X_k\right)_1\approx\left(\sum_{v=1}^{\infty}\oplus\mathcal{C}_1\right)_1,$$

且级数$\sum_{k=1}^{\infty}Q_kP_{A_k,\ B_k}P$强收敛，由此在 $\mathcal{C}_1$ 到$[\bigcup_{k=1}^{\infty}X_k]$之间诱导出一个投影。令

$$X_0=\ker\left(\sum_{k=1}^{\infty}Q_kP_{A_k,B_k}P\right)\supset\ker(P)\approx\mathcal{C}_1.$$

注意，$\ker(P)$ 是 $\mathcal{C}_1$ 的可补子空间，因此也是 $\ker\left(\sum_{k=1}^{\infty} Q_k P_{A_k,\ B_k} P\right)$ 的可补子空间。由引理 7.3，X_0 与 $\mathcal{C}_1$同构。因此，$\mathcal{D} = \{X_k\}_{k=0}^{\infty}$是$\ell_1$-分解，且满足 $\mathcal{C}_1$

$$P_{\mathcal{D},0} = I - \sum_{k=1}^{\infty} Q_k P_{A_k,B_k} P, \quad \text{and} \quad P_{\mathcal{D},k} = Q_k P_{A_k,B_k} P \quad \text{for all } k \in \mathbb{N},$$

其中 $P_{\mathcal{D},\ k}$ 表示从 $X = \sum_{k=0}^{\infty} X_k$ 到 X_k的自然投影。

记 $\widetilde{P}_n := \sum_{k=0}^{n} P_{\mathcal{D},\ k}$。于是，由三角不等式可得

$$\left\|T(I - \widetilde{P}_n)\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|TP_{\mathcal{D},k}\| \leq 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \delta_k.$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty} \left\|T(I - \widetilde{P}_n)\right\| = 0. \tag{7.2}$$

另一方面，由 $\|Q_k\| \leq 2$ 和可知

$$\begin{aligned}(I - \widetilde{P}_n)T(I - P_{\mathcal{D},0}) &= (I - \widetilde{P}_n)TP(I - P_{\mathcal{D},0}) \\ &= \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} Q_k P_{A_k,B_k} P\right) TP \left(\sum_{k=1}^{\infty} Q_k P_{A_k,B_k} P\right)\end{aligned}$$

that

$$\left\|(I - \widetilde{P}_n)T(I - P_{\mathcal{D},0})\right\| \leq 4 \left\|P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=2^n}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=2^n}^{\infty}} TP\right\|.$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(I - \widetilde{P}_n)T(I - P_{\mathcal{D},0})\right\| = 0. \tag{7.3}$$

由（7.2）、（7.3）以及引理 7.2，T 是一个交换子。 □

7.2. 关于 $\mathcal{C}_1$ 上交换子的刻画。 设 X 和 Y 是巴拿赫空间 Z的两个（闭）子空间，令

$$\mathrm{d}(S_X, Y) = \inf\{\|x - y\| : x \in S_X,\ y \in Y\},$$

其中 $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ 是 X的单位球面。

以下两个定理是研究巴拿赫空间上交换子的重要工具，参见 [18, 引理 2.13、2.14 及定理 2.15]。其证明所依据的思想可追溯至 [2], [22]和 [23]。

定理7.6。 设 $p \in [1,\infty] \cup \{0\}$，且 X 是一个可补齐次巴拿赫空间，同构于 $(\sum X)_p$。若 T 是 X 上的有界线性算子，且存在 X 的一个子空间 Y，它同构于 X，使得 $T|_Y$是一个同构，并且 $d(S_Y, TY) > 0$，则 T 是一个交换子。

定理7.7。 设 $p \in [1,\infty] \cup \{0\}$，且 X 是一个可补齐次巴拿赫空间，同构于$(\sum X)_p$。假设 X 上所有 X-严格奇异算子构成 $\mathcal{B}(X)$中的一个理想。若 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_1)$ 满足

(1) 对每个标量 λ'，$T - \lambda' I$ 都不是 X-严格奇异算子；(2) 存在一个标量 λ 以及 X 的一个子空间 Y，该子空间同构于 X，使得$(T - \lambda I)|_Y$ 是X-严格奇异的，

那么 T 是一个交换子。

定理7.8。 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_1)$ 满足：对所有 $\lambda \in \mathbb{C}$，$T - \lambda I$ 都不是 $\mathcal{C}_1$-严格奇异算子。那么 T 是一个交换子。

证明。 回顾 [5, p.300]

$$\mathcal{C}_1 \approx \left(\sum \mathcal{C}_1\right)_1.$$

根据引理7.4，存在一个正整数的严格递增序列 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ 以及一个标量 α使得

$$\left\|P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=N}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=N}^{\infty}} (T - \alpha I)P\right\| \to 0 \quad \text{as } N \to \infty,$$

and

$$P(T-\alpha I)P \in \mathcal{M}_{\mathcal{C}_1}$$

其中 $P:=P_{[\xi_{i_{2k+1}}]_{k=1}^{\infty},[\eta_{i_{2k}}]_{k=1}^{\infty}}$。

(1) 若 $(I-P)TP$不是 $\mathcal{C}_1$-严格奇异的，则存在 $\mathcal{C}_1$的一个子空间 X，它与$\mathcal{C}_1$同构，使得 $(I-P)TP$在 X上是一个同构。记作 $Y=PX$。于是 $Y\approx\mathcal{C}_1$。由于 $(I-P)|_{TY}$是一个同构嵌入，因此存在一个正数 c，使得

$$\|(I-P)(y')\|_1 \geq c\|y'\|_1 \qquad \text{for every } y'\in TY.$$

对于任意 $y\in S_Y=S_{PX}$和 $y'\in TY$，我们有 $\|(I-P)(y-y')\|_1=\|(1-P)(y')\|_1\geq c\|y'\|_1$。因此，

$$\begin{aligned}\|y-y'\|_1 &= \frac{c\|y-y'\|_1+\|I-P\|\cdot\|y-y'\|_1}{c+\|I-P\|}\\ &\geq \frac{c\big(\|y-y'\|_1+\|y'\|_1\big)}{c+\|I-P\|}\geq\frac{c}{c+\|I-P\|}.\end{aligned}$$

因此，$d(S_Y,\ TY)>0$。根据定理7.6，T是一个交换子。

(2) 若 $(I-P)TP$是 $\mathcal{C}_1$-严格奇异的，则由恒等式

$$(T-\alpha I)P=(I-P)TP+P(T-\alpha I)P$$

并且 $P(T-\alpha I)P\in\mathcal{M}_{\mathcal{C}_1}$，由此可得 $(T-\alpha I)|_{[e_{i_{2k+1}},i_{2l}]_{k,\ l=1}^{\infty}}$ 是 $\mathcal{C}_1$-严格奇异的。由定理7.7，T是一个交换子。□

定理 7.9。算子 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{C}_1)$ 是一个交换子，当且仅当对所有 $\lambda\neq 0$，$T-\lambda I$ 都不是 $\mathcal{C}_1$-严格奇异的。因此，$\mathcal{C}_1$ 是一个 *Wintner* 空间。

证明。必要性直接由商Banach代数 $\mathcal{B}(\mathcal{C}_1)/\mathcal{M}_{\mathcal{C}_1}$的 Wintner定理（即定理 1.1）得出。

充分性。假设对所有$T-\lambda I\notin\mathcal{M}_{\mathcal{C}_1}\ \ \lambda\neq 0$均成立。若$T\in\mathcal{M}_{\mathcal{C}_1}$，则由定理7.5可知 T 是 $\mathcal{C}_1$上的一个交换子。若$T\notin\mathcal{M}_{\mathcal{C}_1}$，则$T-\lambda I\notin\mathcal{M}_{\mathcal{C}_1}$ 对所有标量 λ均成立。由定理7.8可知，算子 T 是 $\mathcal{C}_1$上的一个交换子。□

下面的推论是定理4.32 和7.9的直接推论。

推论 7.10. 算子 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{C}_1)$ 是交换子，当且仅当对于所有 $\lambda\neq 0$，$T-\lambda I$ 都不是 $\mathcal{T}_1$-严格奇异的。

注记 7.11. 利用第 5 节和第6 节中得到的结果，并对上述证明作必要变更，可以证明，对于任意 $1\leq p<\infty$，算子 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{T}_p)$ 是交换子，当且仅当对于所有 $\lambda\neq 0$，都不是 $\mathcal{T}_p$-严格奇异的 $\lambda\neq 0$。

推论 7.12. $\mathcal{T}_1\oplus\mathcal{C}_1$ 是一个 *Wintner* 空间。

证明。由于 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{C}_1$ 都是 Wintner 空间（见 [19, 定理 5.4] 以及定理 7.9 上文），由 [23,推论 5.4] 可知，要证明该结论，只需验证以下两个事实:

- 所有算子 T： $\mathcal{T}_1\to\mathcal{T}_1$ 经由.....分解 $\mathcal{C}_1$（即，存在两个算子 A： $\mathcal{T}_1\to\mathcal{C}_1$和 B： $\mathcal{C}_1\to\mathcal{T}_1$ 使得 $T=BA$）都属于最大真理想 $\mathcal{M}_{\mathcal{T}_1}$ 在 $\mathcal{B}(\mathcal{T}_1)$ 中（定理6.6）。
- 所有经由.....分解的算子 T： $\mathcal{C}_1\to\mathcal{C}_1$ 都属于最大真理想 $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_1}$ 在$\mathcal{B}(\mathcal{C}_1)$ 中。

事实 1 的证明：若 $T\notin\mathcal{M}_{\mathcal{T}_1}$，则存在两个算子 U、$V\in\mathcal{B}(\mathcal{T}_1)$，使得 $UTV=I_{\mathcal{T}_1}$（见上文(6.1)）。由于 T经由 $\mathcal{C}_1$分解，即 $T=AB$，其中 $A:\mathcal{T}_1\to\mathcal{C}_1$ 且 $B:\mathcal{C}_1\to\mathcal{T}_1$，因此 $\mathcal{T}_1$ 同构于 $\mathcal{C}_1$[1]的一个可补子空间。由定理 4.33，可得$\mathcal{T}_1\approx\mathcal{C}_1$，矛盾。

[1]回顾以下众所周知的事实：设 X_0 和 X_1 是两个巴拿赫空间，且设 $T_0:\ X_0\to X_1$ 和$T_1:\ X_1\to X_0$ 是两个有界线性算子。假设 $T_1\circ T_0=\mathrm{id}_{X_0}$。那么，$X_0$ 同构于 X_1的一个可补子空间。引理 3.1 的 [33]中给出了这一事实的简短证明。

事实 2 的证明：假设存在 $A\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{T}_1$ 和 $B\colon \mathcal{T}_1 \to \mathcal{C}_1$，使得 $T = AB$。由于 $\mathcal{T}_1$ 具有无条件有限维分解，由 [4, 引理 4.5 和定理 4.7] 可知 $\mathcal{C}_1$ 不同构于 $\mathcal{T}_1$的任何子空间。因此， A 是 $\mathcal{C}_1$-严格奇异的，因而 $T = AB$ 也为 $\mathcal{C}_1$-严格奇异。因此， $T \in \mathcal{M}_{\mathcal{C}_1}$。□

推论7.12 的证明以及以下事实：

- [7, 推论 3.2]： $\ell_p \not\hookrightarrow \mathcal{C}_q$ 当 $p \neq 2$ 且 $1 \leq p \neq q < \infty$时。特别地， $\mathcal{T}_p$， $\mathcal{C}_p \not\hookrightarrow \mathcal{C}_q$。
- $\mathcal{C}_p \oplus \mathcal{C}_2 \approx \mathcal{C}_p \oplus \ell_2 \approx \mathcal{C}_p$ 对任意 $1 \leq p < \infty$ 和 $\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{C}_2 \approx \mathcal{T}_1 \oplus \ell_2 \approx \mathcal{T}_1$。
- $\mathcal{C}_p \approx \mathcal{T}_p$ 对任意 $1 < p < \infty$。

由此得到以下推论。

推论 7.13。对于任意 X_1、…、$X_n \in \{\mathcal{C}_p\colon \ 1 \leq p < \infty\} \cup \{\mathcal{T}_p\colon \ 1 \leq p < \infty\}$， $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ 是 *Wintner* 空间。

Acknowledgment

Jinghao Huang 得到了中国国家自然科学基金（编号：12031004、12301160 和 12471134）的资助。Fedor Sukochev 得到了澳大利亚研究理事会（编号：DP230100434）的资助。Zhizheng Yu 谨向徐全华教授致以诚挚谢意，感谢他慷慨的支持与鼓励。我们衷心感谢 William B. Johnson 教授慷慨地分享他的想法（参见注记 4.29）。

Appendix A. σ-weakly null sequences in $\mathcal{C}_E$

在本节中，我们考虑可分拟 Banach 算子理想 $\mathcal{C}_E$ 中的序列；这些序列关于 $\mathcal{B}(H)$ 的 σ-弱算子拓扑收敛于 0，并推广了在 [7, 节 2]中建立的结果。为方便读者，我们用块序列的术语完整呈现论证。

注意，拟 Banach 对称理想中的任何弱零序列 $\mathcal{C}_E$ （即关于 $\sigma(\mathcal{C}_E, \mathcal{C}_E^*)$-拓扑收敛到 0 的序列）必然是 σ-弱零的。

本节中，在 E 为一般的可分拟巴拿赫对称序列空间的情形下，各项结果的证明与巴拿赫空间中的证明非常相似。在本节中，我们始终

- 假设 $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}$ 的凹性模为 κ，并且
- 用 $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ 表示 H中的两个相互正交的有限维子空间序列。

以下定理已在 [6, 引理 2.5] 中通过希尔伯特空间上算子的矩阵表示得到了证明。下面，我们给出一个更直观且更为自足的证明。

定理 A.1. 设 E 为可分拟巴拿赫对称空间。假设 $\{x_k\}_{k=2}^{\infty}$ 是 $\mathcal{C}_E$ 中的一个有界序列，且

$$x_k = p_{[\bigcup_{l=1}^{k} K_l]} x_k p_{[\bigcup_{l=1}^{k} L_l]} - p_{[\bigcup_{l=1}^{k-1} K_l]} x_k p_{[\bigcup_{l=1}^{k-1} L_l]}, \qquad k = 2, 3, \ldots.$$

对于给定的正数序列 $\{\varepsilon_i\}_{i=2}^{\infty}$，存在一个严格递增的正整数序列 $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$，以及一个形如以下形式的序列 $\{y_i\}_{i=2}^{\infty}$，属于 $\mathcal{C}_E$

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left(a_{i,j} + a_{j,i}\right) + a_{i,i} \qquad i = 2, 3, \ldots,$$

使得对每个 $i \geq 2$ 都有 $\|x_{k_i} - y_i\|_{\mathcal{C}_E} \leq \varepsilon_i$，其中

(1) $K_i' = [\bigcup_{l=k_{i-1}+1}^{k_i} K_l]$ *and* $L_i' = [\bigcup_{l=k_{i-1}+1}^{k_i} L_l]$ *for every* $i \geq 1$ *(put* $k_0 = 0$*),*

(2) $\{a_{i,j}\}_{(i,j)\neq(1,1)} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K_i'\}_{i=1}^{\infty} \otimes \{L_j'\}_{j=1}^{\infty}$,

(3) $a_{i,i} = p_{K_i'} x_{k_i} p_{L_i'}$ *for every* $i \geq 2$,

(4) $\{a_{i,j}\}_{i=j+1}^{\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K_i'\}_{i=2}^{\infty} \otimes \{L_j'\}_{j=1}^{\infty} \curvearrowleft$ *are consistent*[1] *for all* $j \geq 1$,

(5) $\{a_{j,i}\}_{i=j+1}^{\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K_j'\}_{j=1}^{\infty} \otimes \{L_i'\}_{i=2}^{\infty} \curvearrowleft$ *are consistent for all* $j \geq 1$.

证明。选取一个递减的正数序列 $\{\delta_i\}_{i=1}^{\infty}$，使得 $\delta_i \leq \varepsilon_i/2$ 且 $\sum_{i=1}^{\infty} \kappa^{i+1}\delta_i \leq 1$。记

$$x_k = \sum_{l=1}^{k-1} \left(c_{k,l} + c_{l,k}\right) + c_{k,k} \qquad k = 2, 3, \ldots,$$

其中 $c_{k,\ l} = p_{K_k} x_{\max\{k,l\}} p_{L_l}$对每个 $(k,\ \ l) \neq (1,\ \ 1)$。将引理 3.9 和注记 3.10 应用于下三角序列 $\{c_{k,l}\}_{1\leq j\leq i<\infty}$ 以及 $\{c_{k,l}\}_{1\leq i\leq j<\infty}$的上三角序列，可得存在一个由正整数组成的严格递增序列 $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和一个序列 $\{b_{k_i,l}\}_{1\leq l\leq k_{i-1}} \cup \{b_{l,k_i}\}_{1\leq l\leq k_{i-1}}$ 使得

(1) $\|c_{k_i,\ l} - b_{k_i,\ l}\|_{\mathcal{C}_E},\ \ \|c_{l.k_i} - b_{l,\ k_i}\|_{\mathcal{C}_E} \leq \delta_i\delta_l$ 对每个 $i \geq 2$ 和 $1 \leq l \leq k_{i-\ 1}$,

(2) $\{b_{k_i,l}\}_{l\leq k_{i-1}<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K_{k_i}\}_{i=1}^{\infty} \otimes \{L_l\}_{l=1}^{\infty} \curvearrowleft$ 对所有 l均相容,

(3) $\{b_{l,k_i}\}_{l\leq k_{i-1}<\infty} \overset{\text{b.s}}{\boxplus} \{K_l\}_{l=1}^{\infty} \otimes \{L_{k_i}\}_{i=1}^{\infty} \curvearrowleft$ 对所有 l均相容。

接下来，对所有 $1 \leq j < i < \infty$，令

$$a_{i,j} := \sum_{l=k_{j-1}+1}^{k_j} b_{k_i,l}, \tag{A.1}$$

$$a_{j,i} := \sum_{l=k_{j-1}+1}^{k_j} b_{l,k_i}, \tag{A.2}$$

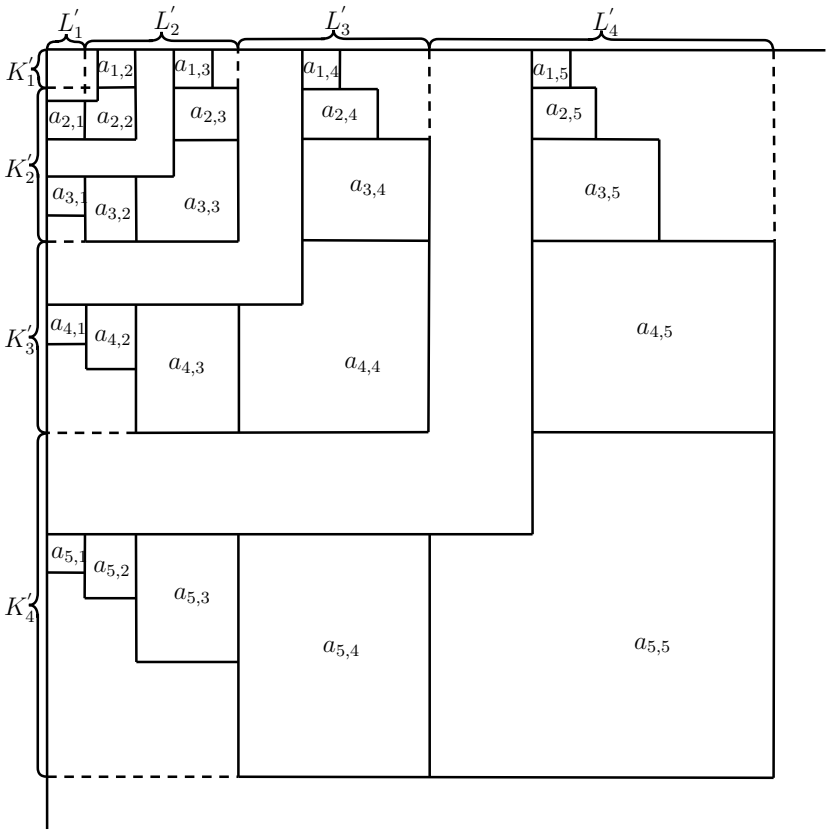
and

$$a_{i,i} = p_{K_i'} x_{k_i} p_{L_i'}, \tag{A.3}$$

其中，对每个 $i \geq 1$，$K_i' = [\bigcup_{l=k_{i-1}+1}^{k_i} K_l]$ 和 $L_i' = [\bigcup_{l=k_{i-1}+1}^{k_i} L_l]$。$a_{i,\ j}$ 的位置如以下图片所示。

[1]参见定义 3.7，即存在一个等距映射序列$\{u_i : K_i' \to H'\}_{i=2}^{\infty}$，一个等距映射序列 $\{v_j : L_j' \to H'\}_{j=1}^{\infty}$，以及一个序列 $\{d_j\}_{j=1}^{\infty}$ 属于 $\mathcal{C}_E(H')$，使得

$$u_i a_{i,j} v_j^* = d_j \qquad \text{for every } 1 \leq i < j < \infty.$$



设置

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} \big(a_{i,j} + a_{j,i}\big) + a_{i,i}, \qquad i = 2, 3, \ldots,$$

我们有

$$\begin{aligned}
\|x_{k_i} - y_i\|_{\mathcal{C}_E} &= \left\| \sum_{l=1}^{k_i-1} \big(c_{k,l} + c_{l,k}\big) + c_{k_i,k_i} - \left(\sum_{j=1}^{i-1} \big(a_{i,j} + a_{j,i}\big) + a_{i,i} \right) \right\|_{\mathcal{C}_E} \\
&= \left\| \sum_{l=1}^{k_{i-1}} \big(c_{k,l} + c_{l,k}\big) - \big(a_{i,j} + a_{j,i}\big) + \left(\sum_{l=k_{i-1}+1}^{k_i-1} \big(c_{k,l} + c_{l,k}\big) + c_{k_i,k_i} - a_{i,i} \right) \right\|_{\mathcal{C}_E} \\
&\le \sum_{l=1}^{k_{i-1}} \kappa^{l+1} \big(\|c_{k_i,l} - b_{k_i,l}\|_{\mathcal{C}_E} + \|c_{l.k_i} - b_{l,k_i}\|_{\mathcal{C}_E} \big) \\
&\le \sum_{l=1}^{k_{i-1}} 2\kappa^{l+1} \delta_i \delta_l \le \varepsilon_i
\end{aligned}$$

对每个 $i \ge 2$。由注记 3.6，证明至此完成。 □

利用标准扰动论证，可以得到以下推论。

推论 A.2. 设 E 为一个可分准巴拿赫对称空间。假设 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{C}_E$ 中的有界 σ-弱零序列，且对每个 k都有 $p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i]} x_k p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i]} = x_k$。对于给定的正数序列 $\{\varepsilon_i\}_{i=2}^{\infty}$，存在两个递增序列 $\{k_i\}_{i=2}^{\infty}$ 和 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$，由

正整数，以及 $\mathcal{C}_E$ 中具有如下形式的序列 $\{y_i\}_{i=2}^{\infty}$

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left(a_{i,j} + a_{j,i}\right) + a_{i,i} \qquad i = 2, 3, \ldots,$$

使得 $\|x_{k_i} - y_i\| \le \varepsilon_i$ 对每个 $i \ge 2$都成立，其中

(1) $K_i' = [\bigcup_{l=n_{i-1}+1}^{n_i} K_l]$ 且对每个 $i \ge 1$ 都有 $L_i' = [\bigcup_{l=n_{i-1}+1}^{n_i} L_l]$（令 $n_0 = 0$），b.s(2) $\{a_{i,j}\}_{(i,j)\neq(1,1)} \boxplus \{K_i'\}_{i=1}^{\infty} \otimes \{L_j'\}_{j=1}^{\infty}$，(3) $a_{i,\ i} = p_{K_i'} x_{k_i} p_{L_i'}$ 对每个 $i \ge 2$都成立，b.s(4) $\{a_{i,j}\}_{i=j+1}^{\infty} \boxplus \{K_i'\}_{i=2}^{\infty} \otimes \{L_j'\}_{j=1}^{\infty} \curvearrowleft$ 对所有 $j \ge 1$均相容，b.s(5) $\{a_{j,i}\}_{i=j+1}^{\infty} \boxplus \{K_j'\}_{j=1}^{\infty} \otimes \{L_i'\}_{i=2}^{\infty} \curvearrowleft$ 对所有 $j \ge 1$均相容。

设 E 为拟巴拿赫对称序列空间。若对于 E 中满足 $x_\alpha \downarrow 0$ 的任意向下有向网 $\{x_\alpha\}_\alpha$，只要 $\|x_\alpha\|_E \downarrow_\alpha 0$，就有 $\|\cdot\|_E$ 在 E 上序连续，则称拟范数 $\|\cdot\|_E$ 在 E 上序连续；等价地，E 可分 [52, 定理 3.17]。若对于 E^+ 中任意满足 $\sup_\beta \|a_\beta\|_E < \infty$ 的向上有向序列 $\{a_\beta\}$，都存在 $a \in E^+$，使得 $a_\beta \uparrow a$ 属于 E，且 $\|a\|_E = \sup_\beta \|a_\beta\|_E$，则称 E 具有 Fatou 性质 [21, 定义 5.3.7]。

若某个巴拿赫对称序列空间 E 可分且具有 Fatou 性质，则称其为 Kantorovich–Banach 空间（简称 KB 空间）。众所周知，对称序列空间 E 是 KB 空间，当且仅当 c_0 不同构于 E 的某个子空间（参见例如 [17, 定理 2.2] 或 [21,定理 5.9.6]）。下文将给出拟巴拿赫对称序列空间情形的证明。

命题 A.3. 设 E 是一个拟巴拿赫对称序列空间。那么，E 具有 *Fatou* 性质和序连续范数，当且仅当 c_0 不同构于 E的一个子空间。

证明. “蕴含关系（⇒）”。由于 E 可分，因此 E 不与ℓ_∞重合，即 $E \subset c_0$。反设存在一个从 c_0 到 E的同构 T。根据 [44, 引理 2.1]，c_0 的标准基等价于 E 的标准基的一个块基 $(y_i)_{i=1}^{\infty}$（为方便起见，我们将其记为 $y_i = T(e_i^{c_0})$）。由 E的 Fatou 性质可知，E 的单位球关于逐点收敛在 ℓ_∞ 中是闭的（例如参见 [34, 第5]页或 [21, 定理 5.1.10]）。因此，对于任意 $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_\infty$，我们有

$$\begin{aligned}
\left\|T^{-1}\right\| \|\alpha\|_{\ell_\infty} &= \sup_{1\le n<\infty} \left\|T^{-1}\right\| \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^{c_0}\right\|_{c_0} \le \sup_{1\le n<\infty} \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(e_i^{c_0})\right\|_E \\
&= \sup_{1\le n<\infty} \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right\|_E \overset{\text{Fatou property}}{=} \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i\right\|_E \\
&\overset{\text{Fatou property}}{=} \sup_{1\le n<\infty} \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right\|_E = \sup_{1\le n<\infty} \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(e_i^{c_0})\right\|_E \\
&\le \|T\| \sup_{1\le n<\infty} \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^{c_0}\right\|_{c_0} = \|T\| \sup_{1\le n<\infty} \|\alpha\|_{\ell_\infty},
\end{aligned}$$

这意味着 ℓ_∞ 嵌入到 E中。这与 E的可分性矛盾。

“蕴含关系（⇐）”。假设 E 不可分，即存在一个元素 $0 \le x \in E$，它不是序连续的 [52, 定理 3.17]。换言之，存在一个正数δ 以及 $\mathcal{B}(H)$中的一列两两正交投影 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得

$$\|p_n x\|_E \ge \delta$$

对所有 $n \ge 1$。对任意 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots) \in c_0$，我们有

$$\|\alpha\|_{c_0} \le \frac{1}{\delta} \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n p_n x\right\|_E \le \frac{1}{\delta} \left\|\sup_{n\ge1} |\alpha_n| x\right\|_E = \frac{\|\alpha\|_{c_0}}{\delta} \|x\|_E,$$

这是一个矛盾。因此， E 是可分的。现在，只需证明：对 E 中满足 $\|x_n\|_E = 1$的任意递增正元序列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ，存在满足$x_n \uparrow x$的 $x \in E$ 。用反证法假设 $x \notin E$。存在 $\delta > 0$ ，使得对任意 $N > 0$，$\sup_{m\geq 1} \|x_{N+m} - x_N\|_E > \delta$（否则，对任意 n，存在一个数 $N_n > 0$ 使得$\sup_{m\geq 1} \|x_{N_n+m} - x_{N_n}\|_E \leq \frac{1}{2^n}$，这意味着 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 依范数收敛于 x ）。因此，存在序列 $\{N_n\}_{n\geq 1}$ 使得

$$\left\|x_{N_{n+1}} - x_N\right\|_E > \delta.$$

因此，对于任意有限序列 $\alpha = (\alpha_1、\ \alpha_2、\ \cdots \alpha_k)$，我们有

$$\begin{aligned}
\|\alpha\|_{c_0}\,\delta &\leq \sup_{1\leq n\leq k} \alpha_n \left\|x_{N_{n+1}} - x_{N_n}\right\|_E \\
&\leq \left\|\sum_{n=1}^{k} \alpha_n (x_{N_{n+1}} - x_{N_n})\right\|_E \leq \left\|\sum_{n=1}^{k} \|\alpha\|_{c_0} (x_{N_{n+1}} - x_{N_n})\right\|_E \\
&= \|\alpha\|_{c_0} \left\|\sum_{n=1}^{k} (x_{N_{n+1}} - x_{N_n})\right\|_E \leq \|\alpha\|_{c_0} \sup_{1\leq n\leq k} \|x_{N_n}\|_E = \|\alpha\|_{c_0},
\end{aligned}$$

这与 c_0 不能嵌入 E 的假设矛盾。 □

下述引理见 [7, 第 310 页，注记]。为完整起见，我们在下文给出一个简短证明。

引理 A.4。 设 E 是一个拟巴拿赫对称序列空间，且具有 $c_0 \not\hookrightarrow E$。假设 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{C}_E$ 中的一个序列，且具有不交右支撑（或不交左支撑），并且

$$\sup_{n\geq 1} \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k\right\|_{\mathcal{C}_E} < \infty.$$

那么，我们有

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq 0} \left\|\sum_{k=m}^{m+n} a_k\right\|_{\mathcal{C}_E} = 0$$

证明。 反设。存在一个正数 δ 和一个正整数序列 $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ ，使得

$$\left\|\sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} a_j\right\|_{\mathcal{C}_E} > \delta \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

定义 $b_n := \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} a_j$ 对每个 n。存在一个有限维子空间的严格递增序列 $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，使得 $\|p_{G_n} b_n\| > \kappa^{-1}\delta$ 对每个 n （例如参见 [21, 定理 5.5。12]）。利用推论 3.11，我们推得 $\lim_{n\to\infty} \|p_G b_n\| = 0$ 对每个有限维子空间 G 中的 H都成立。事实上，否则就存在一个子序列 $\{p_G b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ，它是 $\{p_G b_n\}_{n=1}^{\infty}$的单位基的同构副本 ℓ_2。这与 $\sup_{m\geq 1} \|\sum_{k=1}^{m} b_k\|_{\mathcal{C}_E} < \infty$矛盾。因此，存在一个正整数的严格递增序列 $\{n_m\}_{m=0}^{\infty}$ ，使得

$$\left\|p_{G_{n_{m-1}}{}^{\perp} \cap G_{n_m}} b_{n_m}\right\|_{\mathcal{C}_E} > \kappa^{-2}\delta.$$

令 $c_m := p_{G_{n_{m-1}}{}^{\perp} \cap G_{n_m}} b_{n_m}$。注意， $\{c_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是一个半规范化无条件基序列，且 $\sup_{N\geq 1} \|\sum_{m=1}^{N} c_m\|_{\mathcal{C}_E} < \infty$，因此 $\{c_m\}_{m=1}^{\infty}$ 等价于 c_0的单位向量基。然而，空间 $[c_m]_{m=1}^{\infty}$ 同构于 E 的一个子空间（例如参见 [35, 命题 3.3]） ，这就产生了矛盾。□

注记 A.5. 设 E 是一个可分巴拿赫对称序列空间，且 $1 \leq p \neq 2 < \infty$。注意， $\mathcal{C}_E$ 不包含同构于 ℓ_p （分别为 c_0）的子空间，当且仅当 E 不包含同构于 ℓ_p （分别为 c_0）的子空间 [7, 推论 3.2.]。

为简便起见，从现在起我们只考虑可分巴拿赫对称序列空间 E，尽管本节的大多数结果对拟巴拿赫对称序列空间仍然成立。

下面的定理是 [7, 推论 2.8。]的推广。

定理 A.6. 假设 E 是一个拟巴拿赫对称序列空间，且满足 $c_0 \not\hookrightarrow E$，并且$\{x_k\}_{k=2}^{\infty}$ 是 $\mathcal{C}_E$ 中的一个有界序列，满足

$$x_k = p_{[\bigcup_{l=1}^{k} K_l]} x_k p_{[\bigcup_{l=1}^{k} L_l]} - p_{[\bigcup_{l=1}^{k-1} K_l]} x_k p_{[\bigcup_{l=1}^{k-1} L_l]} \qquad k = 2, 3, \cdots .$$

对于任意正数序列 $\{\varepsilon_i\}_{i=2}^{\infty}$，存在一个严格递增的正整数序列 $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$以及 $\mathcal{C}_E$ 中的一个序列 $\{y_i\}_{i=2}^{\infty}$，其形式为

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left(a_{i,j} + a_{j,i}\right) + a_{i,i}, \qquad i = 2, 3, \ldots,$$

使得对于每个 $i \geq 2$，都有 $\|x_{k_i} - y_i\|_{\mathcal{C}_E} \leq \varepsilon_i$，其中

(1) $K_i' = [\bigcup_{l=k_{i-1}+1}^{k_i} K_l]$ 且对于每个 $i \geq 1$， $L_i' = [\bigcup_{l=k_{i-1}+1}^{k_i} L_l]$ （令 $k_0 = 0$），几乎处处(2) $\{a_{i,j}\}_{(i,j)\neq(1,1)} \boxplus \{K_i'\}_{i=1}^{\infty} \otimes \{L_j'\}_{j=1}^{\infty}$，(3) $a_{i,\ i} = p_{K_i'} x_{k_i} p_{L_i'}$ 对于每个 $i \geq 2$都成立，几乎处处(4) $\{a_{i,j}\}_{i=j+1}^{\infty} \boxplus \{K_i'\}_{i=2}^{\infty} \otimes \{L_j'\}_{j=1}^{\infty} \curvearrowleft d_j$ 对所有 $j \geq 1$均相容，并且几乎处处(5) $\{a_{j,i}\}_{i=j+1}^{\infty} \boxplus \{K_j'\}_{j=1}^{\infty} \otimes \{L_i'\}_{i=2}^{\infty} \curvearrowleft d_j'$ 对所有 $j \geq 1$均相容，并且

$$\|d_j\|_{\mathcal{C}_E} \leq \varepsilon_j \|d_1\|_{\mathcal{C}_E} \qquad for\ every\ j \geq 2,$$

$$\|d_j'\|_{\mathcal{C}_E} \leq \varepsilon_j \|d_1'\|_{\mathcal{C}_E} \qquad for\ every\ j \geq 2.$$

证明。设 $\{\delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为充分小的正数序列，并令 $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$,$\{y_i\}_{i=2}^{\infty}$ 属于 $\mathcal{C}_E$ 且 $\{a_{i,j}\}_{(i,j)\neq(1,1)}$ 如定理 A.1的证明中所述。定理 A.1的证明所用的论证表明

(1) 存在等距映射序列 $\{w_i : K_i' \to \ell_2\}_{i=2}^{\infty}$、等距映射序列 $\{\omega_l : L_l \to \ell_2\}_{l=1}^{\infty}$，以及一个 $\mathcal{C}_E(\ell_2)$ 中的 $\{b_l\}_{l=1}^{\infty}$ 序列，使得

$$w_i b_{k_i,l} \omega_l{}^* = b_l$$

对每个 $1 \leq l \leq k_{i-1} < \infty$;

(2) 存在等距映射序列 $\{w_l' : K_l \to \ell_2\}_{l=1}^{\infty}$、等距映射序列 $\{\{\omega_i' : L_i' \to \ell_2\}_{i=2}^{\infty}$，以及一个 $\mathcal{C}_E(\ell_2)$ 中的 $\{b_l'\}_{l=1}^{\infty}$ 序列，使得

$$w_l' b_{l,k_i} \omega_i'{}^* = b_l'$$

对每一个 $1 \leq l \leq k_{i-1} < \infty$。

注意

$$\sup_{n\geq 1} \left\| \sum_{l=1}^{n} b_l \otimes (\cdot|e_l) e_1 \right\|_{\mathcal{C}_E} = \sup_{n\geq 1} \left\| \sum_{l=1}^{n} b_{k_{n+1},l} \right\|_{\mathcal{C}_E} \leq \sup_{n\geq 1} \|y_n\|_{\mathcal{C}_E} < \infty$$

and

$$\sup_{n\geq 1} \left\| \sum_{l=1}^{n} b_l' \otimes (\cdot|e_1) e_l \right\|_{\mathcal{C}_E} = \sup_{n\geq 1} \left\| \sum_{l=1}^{n} b_{l,k_{n+1}} \right\|_{\mathcal{C}_E} \leq \sup_{n\geq 1} \|y_n\|_{\mathcal{C}_E} < \infty.$$

根据引理 A.4，如有必要，取 $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的一个子序列，我们可以假设

$$\left\| \sum_{l=k_{i-1}+1}^{k_i} b_l \otimes (\cdot|e_l) e_1 \right\|_{\mathcal{C}_E} \leq \varepsilon_i \left\| \sum_{l=1}^{k_1} b_l \otimes (\cdot|e_l) e_1 \right\|_{\mathcal{C}_E}$$

and

$$\left\| \sum_{l=k_{i-1}+1}^{k_i} b_l' \otimes (\cdot|e_1) e_l \right\|_{\mathcal{C}_E} \leq \varepsilon_i \left\| \sum_{l=1}^{k_1} b_l' \otimes (\cdot|e_1) e_l \right\|_{\mathcal{C}_E}.$$

回顾一下， $\{a_{i,j}\}_{(i,j)\neq(1,1)}$ 由（A.1）、（A.2）和（A.3）定义。只需定义

$$d_j = \sum_{l=k_{j-1}+1}^{k_j} b_l \otimes (\cdot|e_l)e_1 \qquad \text{for every } j \geq 1,$$

以及两列等距映射

$$u_i : \xi \in K_i' \longmapsto w_i(\xi) \otimes e_1 \in \ell_2 \otimes_2 \ell_2 \qquad \text{for every } i \geq 2.$$

and

$$v_j : \sum_{l=k_{j-1}+1}^{k_j} \xi_l \in L_j' = \sum_{l=k_{j-1}+1}^{k_j} L_l \longmapsto \sum_{l=k_{j-1}+1}^{k_j} \omega_l(\xi_l) \otimes e_l \in \ell_2 \otimes_2 \ell_2.$$

对每个 $i \geq 2$。因此，根据注记 3.4 (2),

$$u_i a_{i,j} v_j^* = d_j \qquad \text{for every } 1 \leq i < j < \infty.$$

类似地，我们可以定义 $\{d_i'\}_{i=1}^{\infty}$ $\{u_i'\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{v_j'\}_{j=2}^{\infty}$。证明完毕。 □

推论 A.7. 设 $\varepsilon > 0$。在定理 *A.6* 的假设和结论下，进一步假设 $\{x_k\}_{k=2}^{\infty}$ 在 $\mathcal{C}_E$ 中是半归一化的，并选取 $\{\varepsilon_i\}_{i=2}^{\infty}$，使得 ε_i 足够小。设 $a_i = a_{i,1}$, $b_i = a_{1,i}$, $c_i = a_{i,i}$, 以及

$$z_i = a_i + b_i + c_i \qquad \text{for every } i \geq 2.$$

我们有

$$\left\| \sum_{i=2}^{\infty} t_i (x_{k_i} - z_i) \right\|_{\mathcal{C}_E} \leq \varepsilon \left\| \sum_{i=2}^{\infty} t_i x_{k_i} \right\|_{\mathcal{C}_E} \tag{A.4}$$

对每个有限非零标量序列 $\{t_i\}_{i=2}^{\infty}$。

证明。 由于巴拿赫空间与拟巴拿赫空间的证明只有细微差别，我们不妨假设 $\kappa = 1$。

取一个正数 δ，使得对每个 $k \geq 2$，都有 $\|x_k\|_{\mathcal{C}_E} \geq \delta > 0$。对于每个有限非零标量序列 $\{t_i\}_{i=2}^{\infty}$，我们有

$$\left\| \sum_{i=2}^{\infty} t_i (x_{k_i} - y_i) \right\|_{\mathcal{C}_E} \leq \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i |t_i| \leq \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \cdot \sup_{i\geq 2} |t_i| \leq \left(\sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \right) \frac{2}{\delta} \left\| \sum_{i=2}^{\infty} t_i x_{k_i} \right\|_{\mathcal{C}_E}.$$

另一方面，由于

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=2}^{\infty} t_i z_i \right\|_{\mathcal{C}_E} &\overset{(2.6)}{\geq} \left\| (P_{[\cup_{i=2}^{\infty} K_i'], L_1'} + P_{K_1', [\cup_{i=2}^{\infty} L_i']}) \sum_{i=2}^{\infty} t_i z_i \right\|_{\mathcal{C}_E} \\
&= \left\| \sum_{i=2}^{\infty} t_i (a_i + c_i) \right\|_{\mathcal{C}_E} \\
&= \left\| \sum_{i=2}^{\infty} t_i (a_{i,1} + a_{1,i}) \right\|_{\mathcal{C}_E} \\
&\overset{\text{Th } 3.8}{=} \left\| \begin{pmatrix} 0 & d_1' \\ d_1 & 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{C}_E} \left(\sum_{i=2}^{\infty} |t_i|^2 \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i=2}^{\infty} t_i(y_i - z_i)\Big\|_{\mathcal{C}_E} &= \Big\|\sum_{i=3}^{\infty} t_i \sum_{j=2}^{i-1}\big(a_{i,j} + a_{j,i}\big)\Big\|_{\mathcal{C}_E} \\ &\le \sum_{j=2}^{\infty}\Big\|\sum_{i=j+1}^{\infty} t_i(a_{i,j} + a_{j,i})\Big\|_{\mathcal{C}_E} \\ &\le \sum_{j=2}^{\infty}\big(\|d_j\|_{C_E} + \|d_j'\|_{\mathcal{C}_E}\big)\Big(\sum_{i=2}^{\infty}|t_i|^2\Big)^{1/2} \\ &\le \sum_{j=2}^{\infty}\varepsilon_j\big(\|d_1\|_{\mathcal{C}_E} + \|d_1'\|_{\mathcal{C}_E}\big)\Big(\sum_{i=2}^{\infty}|t_i|^2\Big)^{1/2} \\ &\le 2\Big(\sum_{j=2}^{\infty}\varepsilon_j\Big)\Big\|\sum_{i=2}^{\infty} t_i z_i\Big\|_{\mathcal{C}_E}.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon > 0$。取一个适当的序列 $\{\varepsilon_i\}_{i=2}^{\infty}$，则有（A.4）。事实上，令

$$\varepsilon' := \max\left\{\Big(\sum_{i=2}^{\infty}\varepsilon_i\Big)\frac{2}{\delta},\ 2\Big(\sum_{j=2}^{\infty}\varepsilon_j\Big)\right\}.$$

令

$$X = \sum_{i=2}^{\infty} t_i x_{k_i},\ Y = \sum_{i=2}^{\infty} t_i y_i,\ Z = \sum_{i=2}^{\infty} t_i z_i,$$

我们有

$$\|X - Y\| \le \varepsilon'\|X\| \quad \text{and} \quad \|Y - Z\| \le \varepsilon'\|Z\|.$$

Then

$$(1 - \varepsilon')\|Z\| \le \|Y\| \le (1 + \varepsilon')\|X\|,$$

最后

$$\|X - Z\| \le \|X - Y\| + \|Y - Z\| \le \varepsilon'\|X\| + \varepsilon'\|Z\| \le \varepsilon'(1 + \frac{1 + \varepsilon'}{1 - \varepsilon'})\|X\|.$$

若 $\{\varepsilon_j\}$ 满足 $\varepsilon'(1 + \frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'}) < \varepsilon$，则不等式（A.4）成立。 □

通过标准扰动论证，我们得到以下两个推论。

推论 A.8。设 E 是一个拟巴拿赫对称序列空间，且 $c_0 \not\hookrightarrow E$，$\{x_k\}_{k=2}^{\infty}$ 是一个有界的 σ-弱零序列（即在 $\mathcal{B}(H)$的 σ-弱拓扑下收敛到0 ），其中 $\mathcal{C}_E$满足对每个 k都有 $p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i]} x_k p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i]} = x_k$。给定一个正数序列 $\{\varepsilon_i\}_{i=2}^{\infty}$，则存在两个正整数递增序列 $\{k_i\}_{i=2}^{\infty}$ 和 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$，以及一个 $\mathcal{C}_E$中的序列 $\{y_i\}_{i=2}^{\infty}$，其形式为

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1}\big(a_{i,j} + a_{j,i}\big) + a_{i,i} \qquad i = 2, 3, \ldots,$$

使得对每个 $i \ge 2$都有 $\|x_{k_i} - y_i\|_{\mathcal{C}_E} \le \varepsilon_i$，其中

(1) $K_i' = [\bigcup_{l=n_{i-1}+1}^{n_i} K_l]$ 且对每个 $i \ge 1$ （令 $n_0 = 0$），
$L_i' = [\bigcup_{l=n_{i-1}+1}^{n_i} L_l]$ 几乎处处(2) $\{a_{i,j}\}_{(i,j)\ne(1,1)} \boxplus \{K_i'\}_{i=1}^{\infty} \otimes \{L_j'\}_{j=1}^{\infty}$，(3) $a_{i,i} = p_{K_i'} x_{k_i} p_{L_i'}$ 对每个 $i \ge 2$，几乎处处(4) $\{a_{i,j}\}_{i=j+1}^{\infty} \boxplus \{K_i'\}_{i=2}^{\infty} \otimes \{L_j'\}_{j=1}^{\infty} \curvearrowleft d_j$ 对所有 $j \ge 1$均相容，并且

$$\|d_j\|_{\mathcal{C}_E} \le \varepsilon_j\|d_1\|_{C_E} \qquad \textit{for every } j \ge 2,$$

几乎处处(5) $\{a_{j,i}\}_{i=j+1}^{\infty} \boxplus \{K'_j\}_{j=1}^{\infty} \otimes \{L'_i\}_{i=2}^{\infty} \curvearrowleft d'_j$ 对所有 $j \geq 1$均相容，并且

$$\|d'_j\|_{\mathcal{C}_E} \leq \varepsilon_j \|d'_1\|_{\mathcal{C}_E} \qquad for\ every\ j \geq 2.$$

推论 A.9。 设 E 是一个拟巴拿赫对称序列空间，满足 $c_0 \not\hookrightarrow E$，且$\{x_k\}_{k=2}^{\infty}$是 $\mathcal{C}_E$ 中的一个半归一化 σ-弱零序列，其中对每个 k都有$p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i]} x_k p_{[\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i]} = x_k$。对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在两个正整数递增序列 $\{k_i\}_{i=2}^{\infty}$ 和 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$，以及一个 $\mathcal{C}_E$ 中的序列 $\{y_i\}_{i=2}^{\infty}$，其形式为

$$y_i = a_i + b_i + c_i \qquad i = 2, 3, \ldots,$$

使得对于任意有限非零标量序列 $\{t_i\}_{i=2}^{\infty}$，都有

$$\left\| \sum_{i=2}^{\infty} t_i (x_{k_i} - y_i) \right\|_{\mathcal{C}_E} \leq \varepsilon \left\| \sum_{i=2}^{\infty} t_i x_{k_i} \right\|_{\mathcal{C}_E},$$

其中

(1) $K'_i = [\bigcup_{l=n_{i-1}+1}^{n_i} K_l]$ 且对每个 $i \geq 1$ 都有 $L'_i = [\bigcup_{l=n_{i-1}+1}^{n_i} L_l]$ （令 $n_0 = 0$），
b.s(2) $\{a_i\}_{i=2}^{\infty} \boxplus \{K'_i\}_{i=2}^{\infty} \otimes L'_1 \curvearrowleft$，b.s(3) $\{b_i\}_{i=2}^{\infty} \boxplus K'_1 \otimes \{L'_i\}_{i=2}^{\infty} \curvearrowleft$，(4) 对每个 $i \geq 2$都有$c_i = p_{K'_i} x_{k_i} p_{L'_i}$。

Appendix B. Two standard results in quasi-Banach spaces

以下是巴拿赫空间中一个经典结果的推广（例如参见 [49,第47]）。证明只需稍作修改，沿用类似的方法即可得到。

事实 B.1. 设 X 是一个拟巴拿赫空间，$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X的一个 *Schauder* 分解。定义部分和映射 $S_n : X \to X$ 如下：

$$S_n x = \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

其中，对每个 k，$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 且 $x_k \in X_k$。于是

$$\sup_{n \geq 1} \|S_n\| < \infty.$$

证明。 假设 X 上拟范数的凹性模不大于 κ。考虑 X 上的一个新拟范数，记为下式：

$$|||x||| = \sup_{n \geq 1} \|S_n x\|,$$

由于 $n \to \infty$，根据 $S_n x \to x$ 可知 $\sup_{n \geq 1} \|S_n x\|$ 有限。因此，对任意 $x \in X$，都有 $\|x\| \leq \kappa |||x|||$。由开映射定理 [55, 2。12 推论（b）], 我们只需证明 $(X, |||\cdot|||)$ 是完备的。

假设 $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ 是 $(X, |||\cdot|||)$ 中的柯西序列。特别地，$\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ 在原拟范数 $\|\cdot\|$下收敛到某个 $y \in X$，且对于每个固定的 k，序列 $\{P_k y_m\}_{m=1}^{\infty}$ 在原范数[1], 下收敛到某个 $z_k \in X$，其中 $P_k = S_k - S_{k-1}$ 且 $S_0 = 0$。对于任意$l, n \in \mathbb{N}^+$，我们有

$$\begin{aligned} \left\| y - \sum_{k=1}^{n} z_k \right\| &\overset{(2.1)}{\leq} \kappa \varlimsup_{m \to \infty} \|y_m - S_n y_m\| \\ &\leq \kappa^2 \varlimsup_{m \to \infty} \|y_m - y_l\| + \kappa^3 \|y_l - S_n y_l\| + \kappa^3 \varlimsup_{m \to \infty} \|S_n y_l - S_n y_m\| \\ &\leq \kappa^3 \|y_l - S_n y_l\| + 2\kappa^3 \varlimsup_{m \to \infty} |||y_m - y_l|||. \end{aligned}$$

[1]由于 $\|P_k y_m - P_k y_{m'}\| \leq \kappa(\|S_k(y_m - y_{m'})\| + \|S_{k-1}(y_m - y_{m'})\|) \leq 2\kappa |||y_m - y_{m'}|||$，因此 $\{P_k y_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是原范数下的柯西序列。

因此，由 $\|y_l - S_n y_l\| \to 0$，当 $n \to \infty$ 时，我们有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\| y - \sum_{k=1}^{n} z_k \right\| \le 2\kappa^3 \overline{\lim_{m\to\infty}} |||y_m - y_l|||.$$

此外，由于 $\lim_{l,m\to\infty} |||y_m - y_l||| = 0$ 且 l 是任意取定的，因此可得 $\lim_{n\to\infty} \left\| y - \sum_{k=1}^{n} z_k \right\| = 0$。于是，$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = y$，根据 y 关于该分解的展开的唯一性，对于每个 n，都有 $S_n y = \sum_{k=1}^{n} z_k$。现在，

$$|||y_m - y||| = \sup_{n\ge1} \|S_n y_m - S_n y\| \le \sup_{n\ge1} \overline{\lim_{l\to\infty}} \kappa \|S_n y_m - S_n y_l\| \le \kappa \overline{\lim_{l\to\infty}} |||y_m - y_l|||.$$

这意味着 $\lim_{m\to\infty} |||y_m - y||| = 0$，并且 $(X, |||\cdot|||)$ 是完备的。 □

以下事实对于巴拿赫空间理论的专家而言当然是众所周知的，它是 [49, 命题 2.a.2 和 2.c.5.(i)] 的直接推论。事实上，该结果对于拟巴拿赫空间也成立，证明只需稍作调整。为确保完整性，我们在下文给出证明。

事实 B.2. 设 $X_1, \dots, X_n$ 是拟巴拿赫空间。若 ℓ_p，$0 < p < \infty$（或 c_0）不同构于 $X_1, \dots, X_n$ 中任意一个空间的子空间，则 ℓ_p（或 c_0）不同构于 $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$[2] 的子空间。

证明。只需证明 $n = 2$ 的情形。由定理 2.4，不失一般性，我们可以假设 $X_1 \oplus X_2$ 的拟范数是 r-次可加的。假设 T 是从 ℓ_p 到 $X_1 \oplus X_2$ 的一个同构嵌入映射。特别地，存在一个正数 c 使得

$$\|T(a)\| \ge c^{1/r} \|a\|_p \qquad \text{for any } a \in \ell_p.$$

设 P 是从 $X_1 \oplus X_2$ 到 X_1 的投影。由于 $\ell_p \not\hookrightarrow X_1$，可知对每个 n，$PT|_{[e_k^{\ell_p}]_{k=n}^{\infty}}$ 都不是同构嵌入。这表明存在一个由正整数组成的严格递增序列 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$，以及一个满足 $a_i \in [e_k^{\ell_p}]_{k=n_i+1}^{n_{i+1}}$ 且对每个i 都满足 $\|a_i\|_p = 1$ 的序列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \ell_p$，使得

$$\|PT(a_i)\|^r < \frac{c}{2^{i+1}}.$$

事实上，开始归纳法时，取 $n_1 = 0$，并假设已经选取了 n_1、$\dots$、n_i。由于$PT|_{[e_k^{\ell_p}]_{k=n_i+1}^{\infty}}$ 不是同构嵌入，因此存在一个算子 $a_i' \in [e_k^{\ell_p}]_{k=n_i+1}^{\infty}$，满足 $\|a_i'\|_p = 1$，使得 $\|PT(a_i')\|^r < \frac{c}{2^{i+1}} \frac{1}{2^r}$。令 $a_i' = \sum_{k=n_i+1}^{\infty} a_i'(k) e_k^{\ell_p}$。存在一个正整数 $n_{i+1} > n_i$，使得 $a_i'' := \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} a_i'(k) e_k^{\ell_p}$ 满足 $\|a_i''\|_p \ge \frac{1}{2}$，且 $\|PT(a_i'')\|^r < \frac{c}{2^{i+1}} \frac{1}{2^r}$。令 $a_i := \frac{a_i''}{\|a_i''\|_p}$，则有 $\|a_i\|_p = 1$，并且 $\|PT(a_i)\|^r < \frac{c}{2^{i+1}}$。归纳法至此完成。

由于 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \simeq \{e_i^{\ell_p}\}_{i=1}^{\infty}$，可得$\|PT|_{[a_i]_{i=1}^{\infty}}\|^r < c/2$。因此，我们有

$$\|(I-P)T(a)\|^r \ge \|T(a)\|^r - \|PT(a)\|^r \ge c\|a\|_p^r - \frac{c}{2}\|a\|_p^r \ge \frac{c}{2}\|a\|_p^r$$

对所有 $a \in [a_i]_{i=1}^{\infty} \cong \ell_p$均成立。这意味着 ℓ_p 同构于 X_2的一个子空间，这与我们的假设相矛盾。由于 c_0 和 ℓ_p 的证明完全相同，我们省略 c_0情形的证明。□

[2]这里的直和赋予乘积拓扑。由于 $n < \infty$，可得所有诱导乘积拓扑的拟范数都等价。因此，我们不指定拟范数的具体选择。

References

[1] F. Albiac、N. Kalton、 *Topics in Banach Space Theory*，《数学研究生教材》第233卷，第2版，施普林格，纽约（2016）[2] C. Apostol， *Commutators on ℓ_p spaces*，Rev. Roum. Math. Appl. 17（1972），1513–1534。[3] C. Apostol， *Commutators on c0 spaces and on ℓ_∞ spaces*，Rev. Roum. Math. Pures Appl. 18（1973），1025–1032。[4] J. Arazy， *Some remarks on interpolation theorems and the boundedness of the triangular projection in unitary matrix spaces* 1978 453 495 ，

Integral Equations Operator Theory。第I卷（ ），–。[5] J. Arazy， *On large subspaces of the Schatten p-classes*，Compositio Math. 41（1980），297–336。[6] J. Arazy， *A remark on complemented subspaces of unitary matrix spaces*，Proc. Amer. Math. Soc. 79（1980），601–608。[7] J. Arazy， *Basic sequences、 embedding、 and the unique of the symmetric structure in unitary matrix spaces*，J. Funct. Anal. 40（1981），302–340。[8] J. Arazy， *More on convergence in unitary matrix spaces*，Proc. Amer. Math. Soc. 83（1981），第1期，44–48。[9] J. Arazy， *On stability of unitary matrix spaces*，Proc. Amer. Math. Soc. 87（1983），第2期，317–321。[10] J. Arazy， *Isomorphisms of unitary matrix spaces. Banach space theory and its applications (Bucharest, 1981)*，1 1983 –6，Lecture Notes in Math.，991，施普林格，柏林，。[11] J. Arazy、Y. Friedman， *The isometries of C^m、$_p$ ^{n} into C_p*，Israel J. Math. 26（1977），151–165。[12] J. Arazy、J. Lindenstrauss， *Some linear topological properties of the space C_p of operator on Hilbert space*，Compositio Math. 30（1975），151–165。[13] S. Astashkin、J. Huang、F. Sukochev， *Lack of isomorphic embeddings of symmetric function spaces into operator ideals* **280** 5 2021 108895, 34 ，J. Funct. Anal.（ ）（ ），论文编号[14] K、Beanland、T. Kania、N.J. Laustsen， *Closed ideals of operators on the Tsirelon and Schreier spaces*，J. Funct. Anal. 279（2020），108668，28页。[15] A. Bikchentaev、F. Sukochev， *Inequalities for the block projection operators*，J. Funct. Anal. 280（2021），第7期，论文编号108851，18页。[16] A. Brown、C. Pearcy， *Structure of commutators of operators*，Ann. of Math. 82（1965），112–127。[17] A. Bukhvalov、A. Veksler、G. Lozanovskii， *Banach lattices—some Banach aspects of their theory*，Russian Math. Surveys，34(2)（1979），159–212。[18] D. Chen、W. B. Johnson、B. Zheng， *Commutators on $(\sum \ell_q)_p$*，Studia Math. 206(2)（2011），284–290。[19] L. Cheng、Z. Yu， *Representation of commutators on Schatten p-classes*，J. Noncommut. Geom. 18（2024），第2期，741–770。[20] V. Chilin、A. Krygin、F. Sukochev， *Extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators*，Integral Equations Operator Theory 15（1992），第2期，186–226。[21] P. Dodds、B. de Pagter、F. Sukochev， *Noncommutative Integration and Operator Theory*，数学进展，第349卷，Birkh¨auser，Cham，瑞士，2023。[22] D. Dosev， *Commutators on ℓ_1*，J. Funct. Anal. 256（2009），3490–3509。[23] D. Dosev、W. B. Johnson， *Commutators on ℓ_∞*，Bull. London Math. Soc. 42（2010），155–169。[24] D. Dosev、W. B. Johnson、G. Schechtman， *Commutators on L_p、 $1 \le p < \infty$*，J. Amer. Math. Soc. 26（2013），101–127。[25] I.A. Feldman、I.C. Gohberg、A.S. Markus， *Normally solvable operators and ideals associated with them*，Bul. Akad. ˇStiince RSS Moldoven. 10(76)（1960），51–70。[26] Y. Friedman， *Subspace of $LC(H)$ and C_p*，Proc. Amer. Math. Soc. 53(1)（1975），117—122。[27] C. Gao、J. Huang、F. Sukochev、Z. Yu， *On isomorphic embeddings of noncommutative Lorentz spaces*，准备中。[28] I.C. Gohberg、M.G. Krein， *Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space (translated from Russian)* **24** ，Amer. Math. Soc. Translation。[29] F. Hernandez、E. Semenov、P. Tradacete， *Rearrangement invariant spaces with Kato property*，Funct. Approx. Comment. Math. 50（2014），第2期，215–232。[30] F. Hiai， *Log-majorizations and norm inequalities for exponential operators*，线性算子（华沙，1994），Banach Center Publ.，第38卷，Polish Acad. Sci. Inst. Math.，华沙，1997，第119–181页。[31] J. R. Holub， *On subspaces of norm ideals*，Bull. Amer. Math. Soc. 79（1973），446–448。[32] J. Huang、G. Levitina、F. Sukochev， *Completeness of symmetric δ-normed spaces of τ-measurable operators*，Studia Math. 237（2017），第3期，201–219。[33] J. Huang、F. Sukochev、D. Zanin， *Isomorphisms between symmetric spaces over infinite and finite von Neumann algebras* ，已提交的手稿。[34] J. Huang、F. Sukochev、D. Zanin， *Lack of isomorphic embedding from Lorentz function spaces into Lorentz operator ideals* ，即将发表。[35] J. Huang、O. Sadovskaya、F. Sukochev， *On Arazy's problem concerning isomorphic embeddings of ideals of compact operators* **406** 2022 108530, 21 ，Adv. Math.（ ），论文编号，页数。[36] W.B. Johnson、B. Maurey、G. Schechtman、L. Tzafriri， *Symmetric structures in Banach spaces*，Mem. Amer. Math. Soc. 19（1979），239–264。[37] N. J. Kalton， *Spectral characterization of sums of commutators.*I，J. Reine Angew. Math.504（1998），115–125。

[38] N.J. Kalton、N. T. Peck、J.W. Roberts *An F-Space Sampler*，伦敦数学会讲义，第 89 卷，剑桥大学出版社，1984 年。[39] N. Kalton、F. Sukochev， *Symmetric norms and spaces of operators*，J. Reine Angew. Math. 621 (2008)，81–121。[40] T. Kania、N. Laustsen *Uniqueness of the maximal ideal of the Banach algebra of bounded operators on* C **11** 2012 4831 4850 $([0,\omega_1])$，J. Funct. Anal. ( )，–。[41] T. Kania、N. Laustsen，*Uniqueness of the maximal ideal of operators on the* ℓ_p*-sum of* ℓ_∞^n $n \in \mathbb{N}$ *for* ( )，$1 < p < \infty$ **160** 2016 413 421 Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. ( )，–。[42] T. Kato，*Perturbation theory for nullity deficiency and other quantities of linear operators*，J. Analyse Math. 6 (1958)，273–322。[43] S. Kwapien、A. Pe lczy nski， *The main triangle projection in matrix spaces and its applications*，Studia Math. 34 (1970)，43–68。[44] A. Kaminska、Y. Raynaud，*Copies of* ℓ^p *and* c_0 *in general quasi-normed Orlicz–Lorentz sequence spaces*，载于：Function Spaces，载于：Contemp. Math.，第 435 卷，2007 年，第 207–227 页。[45] D. Leung， *Ideals of operators on* $(\oplus\ell^\infty(n))\ell_1$，Proc. Amer. Math. Soc. 143 (2015)，3047–3053。[46] D. Leung， *Maximal ideals in some spaces of bounded linear operators*，Proc. Edinb. Math. Soc. 61 (2018)，251–264。[47] G. Levitina、A. Pietsch、F. Sukochev、D. Zanin，*Completeness of quasi-normed operator ideals generated by s-numbers* **25** 2014 1, 49 58 ，Indag. Math. ( )，第 – 期。[48] P.-K. Lin、B. Sari、B. Zheng，*Norm closed ideals in the algebra of bounded linear operators on Orlicz sequence spaces* **142** 2014 1669 1680 ，Proc. Amer. Math. Soc. ( )，–。[49] J. Lindenstrauss、L. Tzafriri， *Classical Banach spaces. I.* 数学及其边界领域丛书，第 92 卷，施普林格出版社，柏林—纽约，(1977) xiii+188 页[50] S. Lord、F. Sukochev、D. Zanin，*Singular traces: Theory and applications*，德格鲁伊特数学研究丛书，46。德格鲁伊特出版社，柏林，2013 年。[51] C. A. McCarthy， c_p，Israel J. Math. 5 (1967)，249–271。[52] A. Nekvinda、D. Pe˘sa，*On the Properties of Quasi-Banach Function Spaces*，J. Geom. Anal. 34 (2024)，第 8 期，论文编号 231，共 29 页。[53] A. Pietsch， *History of Banach spaces and linear operators*，Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，2007 年。[54] M. Popov、B. Randrianantoanina， *Narrow operators on function spaces and vector lattices*，德格鲁伊特数学研究丛书，45。Walter de Gruyter & Co.，柏林，2013 年。[55] W. Rudin， *Functional Analysis*，第二版 [M]。纽约：麦格劳-希尔公司，1991 年。[56] R. Schatten， *Norm ideals of completely continuous operators*，数学及其边界领域丛书，新系列第 27 卷，施普林格出版社，柏林，1960 年。[57] K. Shoda， *Some theorems on matrices*，Jpn. J. Math. 13(3) (1937)，361–366。[58] B. Simon， *Trace ideals and their applications*。第二版。数学调查与专著丛书，第 120 卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005 年。[59] F. Sukochev，*Completeness of quasi-normed symmetric operator spaces* 25 2014 2, , Indag. Math. (新系列) ( )，第 – 期。376 388 [60] F. Sukochev、D. Zanin，*Symmetric Banach sequence spaces respect Weyl submajorization*，Proc. Amer. Math. Soc. 151(7) (2023)，2907–2917。[61] M. Tarbard，*Hereditarily indecomposable separable* $\mathcal{L}_\infty$ *spaces with* ℓ_1 *dual having few operators but not very few operators* **85** 2012 737 769 , , J. London Math. Soc. ( )，–。[62] R.J. Whitley， *Strictly singular operators and their conjugates*，Trans. Amer. Math. Soc. 113 (1964)，252–261。[63] A. Wintner， *The unboundedness of quantum-mechanical matrices*，Phys. Rev 71 (1947)，738–739。[64] B. Zheng， *Commutators on* $(\sum \ell_q)\ell_1$，J. Math. Anal. Appl. 413 (2014)，155–169。

Institute for Advanced Study in Mathematics of HIT, Harbin Institute of Technology, Harbin, 150001, China*Email address*: jinghao.huang@hit.edu.cn

School of Mathematics and Statistics, University of NSW, Sydney, 2052, Australia
Email address: f.sukochev@unsw.edu.au

Institute for Advanced Study in Mathematics of HIT, Harbin Institute of Technology, Harbin, 150001, China*Email address*: zhizheng.yu@hit.edu.cn