arXiv:2602.09592v1 [math.LO] 10 Feb 2026

超级黑盒再探 1268

Saharon Shelah

Abstract. 设 $\kappa, \theta < \lambda$ 为基数，其中 λ 与 κ 正则。集中考虑一个简单情形，我们说三元组 $(\lambda, \kappa, \theta)$ 具有 *Super Black Box*，当下列条件成立时。

对某个平稳的 $S \subseteq \{\delta < \lambda : \text{共尾数}(\delta) = \kappa\}$ 且 $C = \langle C_\delta : \delta \in S \rangle$，其中 C_δ 是 δ 的一个序型为 κ 的闭无界集，对每个着色 $F = \langle F_\delta : \delta \in S \rangle$，且 $F_\delta \colon {}^{C_\delta}\lambda \to \theta$，存在 $\langle c_\delta : \delta \in S \rangle \in {}^{S}\theta$，使得对每个 $f : \lambda \to \theta$，对平稳多个 $\delta \in S$，我们有 $F_\delta(f \restriction C_\delta) = c_\delta$。

在一项早期工作中，已经证明（以及更多结果）对一类基数 λ，这对许多对 (κ, θ) 成立。（例如 $\kappa < \aleph_\omega$ 足够大且 $\beth_\omega(\theta) < \lambda$。）然而，最有趣的情形（至少就阿贝尔群而言）是 $\kappa = \aleph_0, \aleph_1$，这些在那里并未涵盖。

这里我们将讨论限制在 F 是所谓的 *continuous colouring*的情形，其中包括 F_δ 由某个

$$\langle F'_{\delta,\beta}(f \restriction (C_\delta \cap \beta)) : \beta \in C_\delta \rangle.$$

这涵盖了我们所考虑的情形。我们主要证明不带任何其他附加条件的结果：例如

- 对每一个 θ 和正则 κ，都存在这样的 λ。
  我们还讨论多个 C 的情形，以及 ${}^{\kappa}\mu$ 的相当自由子集的存在性。

注释内容

§0. 引言 p. 3

§1. 框架(label x) p. 8

§2. 黑盒性质 (标签 a) p.18

(我们对 λ ..=共尾数(2^μ) 证明它。)

§3. DBB 性质 (标签 b) p.26

这里允许有许多 $C_\delta \subseteq \delta$，但只要求 $\mu < \lambda \le 2^\mu < 2^\lambda$。

版本 2026-01-18。请参阅 https://shelah.logic.at/papers/1268/ 了解可能的更新。*Date*: 2026年1月16日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：03E05；次要分类 03E04。*Key words and phrases.* 集合论、可能共尾性、正规理想、黑盒、弱菱形原理。首次输入时间：2025年5月29日。作者感谢 Craig Falls 慷慨资助打字服务，并感谢 Matt Grimes 细致而精美的录入工作。作者感谢以色列科学基金会通过拨款 2320/23（2023-2027）部分资助本研究。类似 (例如) [Sh:950, 定理0.2$_{=\text{Ly5}}$] 的引用表示 y5 是 [Sh:950] 的 TeX文件中定理0.2的内部标签。读者请注意，我网站上的版本通常比 arXiv 上的版本更新。这是 Saharon Shelah 列表中的第 1268 篇出版物。

§4. 何时存在相当自由子集 $\Lambda \subseteq {}^{\kappa}\mu$？ p.32

例如，如果 μ 是强极限奇异基数，且 $\lambda \in (\mu, 2^{\mu})$，那么存在一个基数为 λ 的μ^{+}-自由集 $\Lambda \subseteq {}^{\mathrm{cf}(\mu)}\mu$ 。此前，这一结果对几乎所有这类 μ-基数都已为人所知。

§ 0. Introduction

我们继续探讨（但不依赖于） [She05] 和 [She13b],[1] 的工作，而 [She20]则提出了另一个可供探索的方向。与 [She05], 相比，我们将讨论范围限定于所谓的连续着色，但大幅放宽了对 κ的条件。

回顾 [She13b, 1.22$_{=\mathrm{Lh}.7}$]中的BB三分法定理，情形（B）将在本文第2节中进一步展开，而第3节将考察情形（C）和（A）。

关于阿贝尔群上的平凡对偶猜想，参见 [She20], [She07], 和[She13b]。

我们提出：

论题 0.1。带有基数算术假设来证明定理，比仅仅给出相容性结果（通常通过强迫）更好。在 $\mathbf{V}$ 中，此类假设的另一个候选对象是一个与其接近的内模型。

最著名的基数算术假设是广义连续统假设，因为它解决了许多问题，也使许多定理易于证明。但我们相信，假设广义连续统假设在特定基数处失效，同样也能带来启发。

与此相关的结果可应用于构造阿贝尔群和模。希望我们能够将目前的结果应用于 [AGS] 和 [S$^+$]。

定义 0.2。 1) 设 Λ 为一个由长度为 κ的序列组成的集合。若存在一个函数 $f:\Lambda\to\kappa$，使得

$$\langle\{\eta(i):f(\eta)\le i<\kappa\}:\eta\in\Lambda\rangle$$

是一个两两不交集的序列。

（此定义很容易推广到（例如） $\Lambda\subseteq[\mu]^\kappa$。）

2) 如果 Λ 的每个基数为 $<\mu$ 的子集都是自由的，我们就称 Λ 为 μ-自由。

我们希望构造合适的 λ-自由阿贝尔群。为此，可以使用以下事实：

$\boxplus_1$ 假设 μ 是强极限奇异基数，并且

$$\kappa:=\mathrm{cf}(\mu)<\mu<\lambda=\mathrm{cf}(\lambda)<2^\mu<2^\lambda.$$

那么，存在一个 ${}^\kappa\mu$ 的基数为 λ 的 μ-自由子集。

[为什么？ 若 $\mathrm{cf}(\mu)>\aleph_0$，这已在 She94 第 II 章 §3] 中得到证明。请注意，该处的证明已扩展到许多满足 $\mathrm{cf}(\mu)=\aleph_0$ 的基数。在 §4 中，我们将证明这对共尾数为 $\ge\aleph_0$ 的所有强极限基数都成立。]

另请回想（例如，参见 [She13b]）：

$\boxplus_2$ 假设 μ 和 κ 如上所述，且存在 $\chi<\chi^{<\kappa}=2^\mu$。那么存在 ${}^\kappa\mu$ 的一个基数为 2^μ的 μ-自由子集。

我们有合理的黑盒（见 [She05], [She13b]），这里还有更多内容。 [She05] 中的证明涵盖了许多具体情形（例如摘要中提到的结果）。比如，如果 $\lambda:=\mathrm{cf}(2^\mu)>\beth_\omega$，那么对于每个足够大的正则基数 $\kappa<\aleph_\omega$，我们

[1] 嗯，除了在第3节引用 [She13b] 的一项结果之外。

在某个 $C = \langle C_\delta$ 上有一个黑盒：$\delta \in S^\lambda_\kappa \rangle$。我们将在此证明对所有此类 κ 均成立。（见下文 0.4。）

约定 0.3. 0) 对于 $\varnothing \in D \subseteq \mathcal{P}(\lambda)$，令 $D^+ := \{A \subseteq \lambda : \lambda \setminus A \notin D\}$。

注意，如果 J 是 λ上的一个理想，那么 $J^+ = \mathcal{P}(\lambda) \setminus J$。

1) 令 $\mathrm{up}(\lambda)$ 为非空向上封闭的 $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\lambda)$ 的集合。

例如，λ 上的一个滤子就是这种集合的一个例子。

2) $\mathrm{cof}(\kappa)$ 是满足 $\mathrm{cf}(\delta) = \mathrm{cf}(\kappa)\}$ 且 $\mathrm{cof}(<\kappa) := \bigcup_{\theta<\kappa} \mathrm{cof}(\theta)$ 的序数 $\{\delta$ 的类。

（通常 κ 是正则基数。）

3）对于正则的 κ，$S^\lambda_\kappa := \lambda \cap \mathrm{cof}(\kappa) = \{\delta < \lambda : \mathrm{cf}(\delta) = \kappa\}$ 且 $S^\lambda_{<\kappa} := \lambda \cap \mathrm{cof}(<\kappa)$。

* * *

我们将力求简洁地陈述结果，而不追求尽可能广泛的适用性。以下是一项重要结果。

定理 0.4。“若 (A)，则(B)”，其中：

(A) (a) $\mu \geq \theta = \theta^{2^\kappa}$，$\kappa$ 是正则的，且 $\alpha < \mu \Rightarrow |\alpha|^\kappa \leq \mu$。$(b)$ $\lambda := \mathrm{cf}(2^\mu)$，且 $S \subseteq S^\lambda_\kappa$ 是平稳的。(c) 对于每个 $\delta \in S$，我们有 $C'_\delta \subseteq \delta = \sup(C'_\delta)$，且 $\mathrm{otp}(C'_\delta) = \kappa$。$(d)$ 对于所有 $\beta < \lambda$，我们都有 $C^\bullet_\beta \subseteq \beta$，使得 $2^{|C^\bullet_\beta|} \leq 2^\mu$。

(B) </style>存在：$\bar{} \ \delta \in S\rangle$，满足 $C_\delta \subseteq C'_\delta$ 且 $\sup(C_\delta) = \delta$，使得若$F_\beta : {}^{C^\bullet_\beta}(2^\mu) \to \theta$ 对于 $\beta < \lambda$ 成立，则存在$\langle c_{\delta,\beta} : \delta \in S, \ \beta \in C'_\delta\rangle$ 满足$c_{\delta,\beta} < \theta$，使得对每个 $\eta \in {}^\lambda(2^\mu)$，对于平稳多个 $\delta \in S$，我们有

$$\beta \in C_\delta \Rightarrow F_\beta(\eta \restriction C^\bullet_\beta) = c_{\delta,\beta}.$$

证明见第 24 页。

定理 0.5. 1) 在 $0.4(A)(a)$ 中，我们可以将要求$(\forall \alpha < \mu)\big[|\alpha|^\kappa \leq \mu\big]$ 弱化为“$\mathbf{U}_\kappa(\mu) = \mu > \theta$.”（见定义 $1.4(1)$。）

2) 我们可以通过使用$\mathbf{p}$ 来替换条款$0.4(\mathrm{A})(\mathrm{d})$，如$2.1(1)$中所示。

另一个结果如下。（有关上下文，请参见第3-4节——具体而言，即 3.1 和 3.2。）

定理 0.6。假设 μ 是强极限奇异基数，$\kappa :=$ 共尾数(μ)，

$$\kappa + \theta < \mu < \lambda = \mathrm{cf}(\lambda) < 2^\mu < 2^\lambda,$$

并且 S 是 S^λ_κ 的平稳子集。

然后我们可以找到$\bar{C} = \langle C^\delta_\gamma : \delta \in S, \ \gamma < \lambda\rangle$ 使得：

- $\bullet_1$ $C^\delta_\gamma \subseteq \delta = \sup(C^\delta_\gamma)$
- $\bullet_2$ $\mathrm{otp}(C^\delta_\gamma) = \kappa$

•$_3$ $\overline{C}$ 是一个 μ^+-自由序列。

这意味着：如果 $u \subseteq S \times \lambda$ 的基数为 $< \mu^+$，那么存在某个序列 $\langle \beta^\delta_\gamma : (\delta, \gamma) \in u\rangle$，满足 $\beta^\delta_\gamma \in C^\delta_\gamma$，使得

$$\langle C^\delta_\gamma \setminus \beta^\delta_\gamma : (\delta,\gamma) \in u\rangle$$

是一个两两不交集的序列。

•$_4$ 如果 $\mathbf{F}^\delta_\gamma : {}^{C^\delta_\gamma}(2^\mu) \to \theta$ 对于 $(\delta,\gamma) \in S \times \lambda$ 成立，那么我们可以找到一个

$$\bar{c}^\delta = \langle c^\delta_\gamma : \gamma < \lambda\rangle \in {}^\lambda\theta$$

使得对于任意 $\delta \in S$ 和 $f : \delta \to 2^\mu$，对某些（甚至“很多”）$\gamma < \lambda$，都有

$$\mathbf{F}^\delta_\gamma(f \restriction C^\delta_\gamma) = c^\delta_\gamma.$$

我们可以将定理 0.4 改述如下：

定理0.7. 假设0.4(A) 中的假设全部成立。则对某个 $C = \langle C_\delta : \delta \in S\rangle$ 满足 $C_\delta \subseteq \delta = \sup(C_\delta)$ 且 $C_\delta \subseteq C'_\delta$，我们有

$$\mathrm{BB}_*(\lambda, \overline{C}, \overline{C}^\bullet, 2^\mu, \theta, \kappa).$$

我们的意思是（κ 是正则的，并且）0.4 的子句$(A)(b)$-(d) 与(B) 全部成立。即

⊞ *(a)* κ是正则的。*(b)* $\lambda :=$ 共尾数(2^μ)且 $S \subseteq S^\lambda_\kappa$ 是平稳的。*(c)* 对每个 $\delta \in S$，我们有 $C_\delta \subseteq \delta = \sup(C_\delta)$，其中$\mathrm{otp}(C_\delta) = \kappa$。*(d)* 对所有 $\beta < \lambda$，我们有 $C^\bullet_\beta \subseteq \beta$ 使得 $2^{|C^\bullet_\beta|} \le 2^\mu$。（不失一般性$\beta \in \lambda \setminus \bigcup_\delta C_\delta \Rightarrow C^\bullet_\beta = \varnothing$。）*(e)* 若 $F_\beta : {}^{C^\bullet_\beta}(2^\mu) \to \theta$ 则存在$\langle c_{\delta,\beta} : \delta \in S,\ \beta \in C'_\delta\rangle$ 满足$c_{\delta,\beta} < \theta$，使得对每个 $\eta \in {}^\lambda(2^\mu)$，对平稳多个 $\delta \in S$，我们有

$$\beta \in C_\delta \Rightarrow F_\beta(\eta \restriction C^\bullet_\beta) = c_{\delta,\beta}.$$

我们还证明了双黑盒的一个类似结果。

定理0.8。我们有‘$(A) \wedge (B) \Rightarrow (C)$,’ 其中

(A) (a) $\theta + \kappa < \mu < \min\{\lambda, \lambda_*\} \le \lambda_* + \lambda \le 2^\mu$ (b) $\kappa \in$ 正则基数 $\cap\, \lambda$ (c) $S \subseteq S^\lambda_\kappa$ 是平稳的，并且 $\delta \in S \Rightarrow \mu^2 \mid \delta$. (d) $C = \langle C_\delta : \delta \in S\rangle$ 其中 $C_\delta \subseteq \delta = \sup(C_\delta)$, $\mathrm{otp}(C_\delta) = \kappa$，且$(e)$ D_δ 是 λ_*上的滤子。（默认情况下，若 λ_* 是正则的，则该滤子为闭无界滤子

$$\alpha \in C_\delta \Rightarrow \mu \mid \alpha.$$

r,

$\{A \subseteq \lambda_* : |\lambda_* \setminus A| < \lambda_*\}$ 若其为奇异的，且若 $\{\lambda_*\}$ 为有限的。）

(B) (a) μ 是强极限奇异基数，且 $\mu_* \le \mu^+$。(b) $\lambda_* :=$ 最小值$\{\partial : 2^\partial > 2^\mu\} \le$ 共尾数$(\lambda) \le 2^\mu$ (c) $\lambda < 2^\mu \wedge \mu_* := \mu^+$，或者存在 μ_*的自由子集 ${}^\kappa\mu$，其基数为 λ。

(C) 我们可以找到$\overline{C}^\bullet$ 使得

$$\mathrm{DBB}_*(\lambda, \overline{C}, \overline{C}^\bullet, 2^\mu, \theta, \kappa)$$

成立。这意味着

(a) 子句 $(A)(a)$-(d)均得到满足。
$(b)\ \bar{C}^{\bullet} = \langle C^{\delta}_{\gamma} :\ \delta \in S,\ \gamma < \lambda_* \rangle$，其中 $C^{\delta}_{\gamma} \subseteq \bigcup\limits_{\beta \in C_\delta} [\beta, \beta + \mu)$ 且

$$\beta \in C_\delta \Rightarrow \big|C^{\delta}_{\gamma} \cap [\beta, \beta + \mu)\big| = 1.$$

$(c)\ \bar{C}^{\bullet}$ 是 μ_*-自由 （定义见 $0.6\bullet_3$）。[2]
(d) 若 $F^{\delta}_{\gamma} :\ {}^{C^{\delta}_{\gamma}}(2^{\mu}) \to \theta$ （对于 $(\delta, \gamma) \in S \times \lambda_*$），则对于某个 $\langle c^{\delta}_{\gamma} :\ \gamma < \lambda_*,\ \delta \in S \rangle$ 对于 $c^{\delta}_{\gamma} < \theta$，对每个 $f :\ \lambda \to 2^{\mu}$ 并且平稳地许多 $\delta \in S$、一些[3] $\gamma < \lambda_*$，我们有

$$F^{\delta}_{\gamma}(f \restriction C^{\delta}_{\gamma}) = c^{\delta}_{\gamma}.$$

断言 0.9. 1）若$0.8(\mathrm{A})$ 成立且 $\lambda_* := 1$，则DBB_* 等价于BB_*。

2）在0.8 中（如0.6），我们可以将子句$(C)(d)$ 改为使用$\mathbf{F}^{\delta}_{\gamma} :\ {}^{C^{\bullet}_{\delta}}(2^{\mu}) \to \theta$，其中 $C^{\bullet}_{\delta} := \bigcup\limits_{\beta \in C_\delta} [\beta, \beta + \mu)$。

定义 0.10. 1）对于正则不可数基数 λ，令

$$\check{I}[\lambda] := \big\{S \subseteq \lambda : \text{some pair } (E, \bar{a}) \text{ satisfies part } (2) \text{ below}\big\}.$$

2）我们称 $(E, \bar{a})$ 为 $S \in \check{}I[\lambda]$ 的一个见证，当且仅当 $(S \subseteq \lambda$ and):

(A) E 是正则基数 λ 的一个闭无界集。**(B)** $\bar{a} = \langle a_\alpha :\ \alpha < \lambda \rangle$、$a_\alpha \subseteq \alpha$ 和 $\beta \in a_\alpha \Rightarrow a_\beta = \beta \cap a_\alpha$。**(C)** 对每个 $\delta \in E \cap S$，a_δ 都是 δ 的一个序型为 $< \delta$ 的无界子集。

3) 对于 $\kappa < \lambda$，我们定义 $\check{}\, I_\kappa[\lambda] := \big\{S \subseteq \lambda :\ S \cap S^{\lambda}_{\mathrm{cf}(\kappa)} \in \check{}I[\lambda]\big\}$。

根据 [She79], [She93]和 [She]:

断言 0.11. 设 λ 为正则不可数。

1) </style}我们有 $\check{}I[\lambda]$ 当且仅当可以找到一个见证 $(E, \bar{a})$ 满足:

$(a)\ \ \delta \in S \cap E \Rightarrow \mathrm{otp}(a_\delta) = \mathrm{cf}(\delta)$
$(b)\ \ \textit{If } \alpha \notin S \textit{ then } \mathrm{otp}(a_\alpha) < \mathrm{cf}(\delta) \textit{ for some } \delta \in S \cap E.$

2) $S \in \check{}I[\lambda]$ 当且仅当存在一对 $(\bar{E}, \bar{\mathscr{P}})$，它是其弱见证。这意味着:

(a) E 是正则不可数 λ的一个闭无界集。(b) $\bar{\mathscr{P}} = \langle \mathscr{P}_\alpha :\ \alpha < \lambda \rangle$，其中 $\mathscr{P}_\alpha \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$ 的基数为 $< \lambda$。(c) 如果 $\alpha < \beta < \lambda$ 且 $\alpha \in u \in \mathscr{P}_\beta$，则 $u \cap \alpha \in \mathscr{P}_\alpha$。$(d)$ 如果 $\delta \in E \cap S$，那么某个 $u \in \mathscr{P}_\delta$ 是 δ 的无界子集，序型为$\leq$共尾数(δ)。（我们可以只考虑 δ 为极限序数的情形。）

[2]也就是说，对于所有基数为 $< \mu_*$ 的 $u \subseteq S \times \lambda_*$，都存在$\langle \beta^{\delta}_{\gamma} :\ (\delta, \gamma) \in u \rangle$，使得

$$\langle C^{\delta}_{\gamma} \setminus \beta^{\delta}_{\gamma} : (\delta, \gamma) \in u \rangle$$

是一个两两不交集的序列。[3]如同 0.6 中一样，我们或许可以将其加强为“许多 $\gamma < \lambda$”，其中 $many$ 取某种定义。

3）假设$(\overline{S}、 E、 \overline{\mathscr{P}})$如第$(2)$部分所述，而 C 是 λ 的另一个闭无界集。那么，下文定义的三元组$(\overline{S_*}、 E_*、 \mathscr{P}_*)$也满足第$(2)$部分。

- $S_* := S \cap C$
- $E_* := \{\delta \in S : \ \delta = \sup(E \cap C \cap \delta)\}$
- $\overline{\mathscr{P}_*} = \langle \mathscr{P}^*_\alpha : \ \alpha < \lambda \rangle$，其中 $\mathscr{P}^*_\alpha := \{\{\sup(E \cap C \cap \beta) : \ \ \beta \in C\} : \ C \in \mathscr{P}_\alpha\}$

4) 如果 λ 是正则的，那么 $S^{\lambda^+}_{<\lambda} \in \breve{} I[\lambda]$。

§1. The framework

我们先引用 [She05] 中的一些定义（尽管那篇论文并非阅读前提）。我们将探讨 Sep(–) 的概念，并定义一些后续会用到的相关概念。

在第2节中，我们只会使用 Sep_3 （尽管实际上 Sep_2 就足以证明 0.4、0.5）。

约定 1.1。我们在此处称为 BB 的对象，在后面的各节中将记为 BB^0 。

定义 1.2。假设 $\lambda > \kappa$ 是正则基数，并令 $\chi \le \lambda$。令

$$S \subseteq \{\delta < \lambda : \mathrm{cf}(\delta) = \kappa\}$$

为 λ 的一个平稳子集。

1) 当满足以下条件时，我们称 $\mathbf{p} = \langle (C_\delta, C'_\delta) : \delta \in S \rangle$ 是一个（λ, κ, χ）-BB 参数：

(A) $C_\delta \subseteq \delta$，其 $\sup(C_\delta) = \delta$ 和 $|C_\delta| < \chi$，或者仅有 $\mathrm{otp}(C_\delta) \le \chi$。(B) $C'_\delta \subseteq \delta$，$\sup(C'_\delta) = \delta$，以及 $\mathrm{otp}(C'_\delta) = \kappa$。（我们不要求 C_δ 或 C'_δ在 δ 中是闭的。）（C) 对所有 $\alpha < \lambda$，集合

$$\{C_\delta \cap \alpha : \delta \in S,\ C'_\delta \ni \alpha\}$$

具有基数 $< \lambda$。

1A) 如果进一步满足，$\mathbf{p}$ 称为良好的：

$(\mathrm{C})^+$ For all $\alpha < \lambda$ the set[4] $\{(C_\delta \cap \alpha, C'_\delta \cap \alpha) : \delta \in S,\ C'_\delta \ni \alpha\}$ has cardinality $< \lambda$.

1B) 如果 $\mathbf{p}$ 仅满足 (1)(A)-(B)，则称其为一个弱（λ, κ, χ）-BB 参数。

2A) 当 D 是 λ上的滤子时，如果对每个闭无界集$E \subseteq \lambda$，我们称 $\mathbf{p}$确实 D-猜测闭无界集：

$$\{\delta \in S : C'_\delta \subseteq E\} \in D^+.$$

2B) 对于如上所述的$\mathbf{p}$ ，

(a) $\bar{\ }$ $\beta_\delta = \langle \beta_{\delta,\ i} :\ i < \kappa \rangle$ 将按递增次序列出 C'_δ 的元素。(b) $\beta_{\delta,\ <i} = \beta(\delta,\ <i) = \bigcup_{j<i} (\beta_{\delta,\ j} + 1)$。

2C) 当讨论多个 BB-参数时，或者当$\mathbf{p}$ 的具体含义无法从上下文中明确得知时，我们可以写作 $\lambda_{\mathbf{p}}$, $\kappa_{\mathbf{p}}$, $\beta^{\mathbf{p}}_{\delta\, i}$, 等。

2D) 如果$(\forall \delta \in S)[C_\delta = C'_\delta]$，那么我们可以写$\mathbf{p} = \langle C_\delta :\ \delta \in S \rangle$。当 $\chi = \min\{\theta : \delta \in S \Rightarrow \mathrm{otp}(C_\delta) \le \theta\}$时，可以省略 χ 。

3) 如果 $\theta \ge 2$、 $\partial \ge 2$和$F_\delta :\ {}^{C_\delta}\partial \to \theta$，我们称 $F = \langle F_\delta :\ \delta \in S \rangle$ 为$(\mathbf{p}\ \partial,\ \theta)$-着色。

4) 令 F $\bar{\ }$（以及 $\mathbf{p}\ \partial,\ \theta$）如上所述，并令 D 为 λ 上的一个滤子。（默认选择为闭无界滤子。）

[4] $C_\delta \cap \alpha$ 就足够了。

若对于每个 $\eta \in {}^{\lambda}\partial$，集合 $\{\delta \in S : \bar{F}_{\delta}(\eta \restriction C_{\delta}) = c_{\delta}\}$ 都属于 D^{+}（在默认情形下，是 λ 的一个平稳子集），则称 $\bar{c} \in {}^{S}\theta$（或 $\in {}^{\lambda}\theta$）为 $\mathbf{p}$-*D*-*F*-*BB*-序列。

5) 若从上下文中可以清楚看出 C 和 C'，则可以省略$\mathbf{p}$。

6) 当满足以下条件时，我们称 $C = \langle C_{\delta} : \delta \in S\rangle$ 是(λ,κ)-良好

(A) S 是 $\{\delta < \lambda$的平稳子集：$\mathrm{cf}(\delta) = \kappa\}$ 且属于$\check{}\ I_{\kappa}[\lambda]$。(B) $C_{\delta} \subseteq \delta = \sup(C_{\delta})$ (C) $\mathrm{otp}(C_{\delta}) = \kappa$(D) 对每个 $\beta < \lambda$，集合 $\{C_{\delta} \cap \beta : \beta \in C_{\delta}, \delta \in S\}$ 的基数为 $< \lambda$。

断言 1.3。假设 $\lambda > \kappa$ 是正则基数且 $\chi \in [\kappa,\lambda]$。

1) 若 S 是 $S^{\lambda}_{\kappa} := \{\delta < \lambda : \mathrm{cf}(\delta) = \kappa\}$ 的平稳子集，则存在一个弱(λ,κ,χ)-BB-参数$\mathbf{p}$，满足 $S_{\mathbf{p}} = S$。

1A) 若 $\chi = \lambda$，则我们可以省略“弱”，并令 $C_{\mathbf{p},\delta} := \delta$ 对所有 $\delta \in S$均成立。

1B) 若 $\lambda := \kappa^{+}$ 且 $S \subseteq S^{\lambda}_{<\kappa}$ 是平稳的，则我们可以补充“对于某个闭无界集 $E \subseteq \lambda$，存在一个良好 $\mathbf{p}$，使得 $C_{\mathbf{p}} = \langle C_{\delta} : \delta \in S \cap E\rangle$，且每个 C_{δ} 都是δ.的闭无界集”

2) 若 S 是 S^{λ}_{κ} 的平稳子集，且是$\check{}\ I_{\kappa}[\lambda]$的一个元素，则在第(1) 部分中，我们还可以补充“$\mathbf{p}$ 是良好的，其中对于某个 λ的闭无界集 E，有 $S_{\mathbf{p}} := S \cap E$。”

3) 若 $\lambda > \kappa^{+}$，则存在一个良好的(λ,κ,χ)-BB$_{*}$-参数。

4) 每个良好的(λ,κ,χ)-BB-参数都是一个(λ,κ,χ)-BB-参数，而每个(λ,κ,χ)-BB-参数都是弱参数。

证明。显然。

E.g. for part (3), use [She93, §1]. Part (1B) follows by [She91, 4.4]. $\square_{1.3}$

定义 1.4。设 $\kappa \le \mu$。

1) 我们将$\mathbf{U}_{\kappa}(\mu)$定义为

$$\min\big\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \subseteq [\mu]^{\kappa},\ (\forall v \in [\mu]^{\kappa})(\exists u \in \mathcal{U})\big[|u \cap v| = \kappa\big]\big\}.$$

2) 令$\mathbf{U}'_{\kappa}(\mu)$表示

$$\min\big\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq {}^{\kappa}\mu \text{ and } (\forall g \in {}^{\kappa}\mu)(\exists f \in \mathcal{F})(\exists^{\kappa} i < \kappa)\big[f(i) = g(i)\big]\big\}.$$

3) 若 $\mathcal{D} \in \mathrm{up}(\kappa)$，则令

$$\mathbf{U}_{\mathcal{D}}(\mu) := \min\big\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq {}^{\kappa}\mu \text{ and } (\forall g \in {}^{\kappa}\mu)(\exists f \in \mathcal{F})\big[\big\{i < \kappa : f(i) = g(i)\big\} \in \mathcal{D}\big]\big\}.$$

4) 因此，若 J 是 κ 上的理想（或是包含 $[X]^{\aleph_0}$ 的某个集合 X 上的理想），则可将$\mathbf{U}_{J}(\mu)$作为$\mathbf{U}_{J^{+}}(\mu)$的简写，以便与 [She05] 及其他人的记号保持一致。

显然，

观察 1.5。1）如果 $\mu \geq 2^\kappa$ 那么$\mathbf{U}_\kappa(\mu) = \mathbf{U}'_\kappa(\mu)$。

2）如果 $\mu = \mu^\kappa$（或者仅有 $\alpha < \mu \Rightarrow |\alpha|^\kappa \leq \mu$ 和 共尾数$(\mu) \neq \kappa$），那么 $\mathbf{U}_\kappa(\mu) = \mathbf{U}'_\kappa(\mu) = \mu$。

定义 1.6。

¯1）当我们写作 Sep(χ, μ, ∂, θ, Υ) 时，我们意指存在 $f = \langle f_\varepsilon : \varepsilon < \chi\rangle$使得：

（A） $f_\varepsilon : {}^\mu\partial \to \theta$（B）对于每个 $\varrho \in {}^\chi\theta$，集合[5] $\mathrm{Sol}_\varrho := \{\nu \in {}^\mu\partial : (\forall \varepsilon < \chi)[f_\varepsilon(\nu) \neq \varrho(\varepsilon)]\}$ 的基数为 $< \Upsilon$。（读者可以假设 $\Upsilon \leq \partial^\mu$，否则该条件为空。）

¯这样的序列 f将被称为 Sep(χ, μ, ∂, θ, Υ) 的一个见证。

1A) 如果 $\partial := \theta$，我们可以省略它。

2) 我们用 Sep(μ, ∂, θ) 表示：对于某个正则 $\Upsilon \leq 2^\mu$，Sep($\mu, \mu, \partial, \theta, \Upsilon$) 成立。

As in part (1A), $\mathrm{Sep}(\mu, \theta) := \mathrm{Sep}(\mu, \theta, \theta)$.

2A) Sep($< \mu, \theta$) 表示：对于某个 $\sigma < \mu$ 和 Υ（如第 (2) 部分所述），Sep($\sigma, \mu, \theta, \theta, \Upsilon$) 成立。

3) 我们可以写作 Sep_1 而非 Sep，以便将其与 1.8 中的 Sep_2 及 1.14 中的 Sep_3 区分开来。

在 [She05, 1.11$_{=\mathrm{Ld}.7}$] 中，我们证明了对于许多 μ 和 θ 的取值，Sep(μ, θ) 成立。下面是该定理的一个推广。

断言 1.7。如果以下条件至少有一个成立，那么我们有 $\mathrm{Sep}(\mu, \mu, 2^\mu, \theta, \Upsilon)$：

(a) $\mu = \mu^\theta$ 和 $\Upsilon := \theta$。*(b)* $U_\theta(\mu) = \mu$ 和 $\Upsilon := (2^{<\theta})^+ \leq 2^\mu$。*(c)* 我们有 $U_{[\sigma]^{<\theta}}(\mu) = \mu$ 和 $\Upsilon := (2^{<\sigma})^+ \leq 2^\mu$，其中某个 $\sigma \geq \theta$ 满足$\sigma^\theta \leq \mu$。*(d)* $\theta =$ 共尾数$(\theta) < \mu$，μ 是共尾数为 $\neq \theta$ 的强极限奇异基数，并且（例如）$\Upsilon := (2^{\theta + \mathrm{cf}(\mu)})^+$。*(e)* $\Upsilon := \beth_\omega(\theta) \leq \mu$。

证明。令 $\bar\eta = \langle \eta_\beta : \beta < 2^\mu\rangle$ 无重复地列出 ${}^\mu(2^\mu)$。令 $\chi := \left(2^{2^\mu}\right)^+$，并令$N \prec (\mathcal{H}(\chi), \in)$ 的基数为 μ，使得 $(\mu+1) \cup \{\bar\eta\} \subseteq N$。令 $f = \langle f_\varepsilon : \varepsilon < \mu\rangle$ 列出从 ${}^\mu(2^\mu)$ 到 θ 、且属于 N 的所有函数。只需证明

$\boxplus_1$ 对于每个 $\varrho \in {}^\mu(2^\mu)$，集合

$$\mathrm{Sol}_\varrho := \{\eta \in {}^\mu(2^\mu) : (\forall \varepsilon < \mu)[f_\varepsilon(\eta) \neq \varrho(\varepsilon)]\}$$

has cardinality $< \Upsilon$.

对于这一点，只需证明

[5]“Sol”代表 *solution*。

$\boxplus_2$ 对于基数为 Υ 的每个 $\Lambda \subseteq {}^{\mu}(2^{\mu})$，存在某个 $\varepsilon < \mu$，使得

$$\{f_{\varepsilon}(\eta) : \eta \in \Lambda\} = \theta.$$

（也就是说， $f_{\varepsilon} \restriction \Lambda$ 是到 θ上的满射。）

因此，取某个 $u \in [2^{\mu}]^{\Upsilon}$ （为简单起见，满足 $\mathrm{otp}(u) = \Upsilon$），令 $\{\eta_{\alpha} : \alpha \in u\}$ 列出 Λ的元素，且无重复。

情形 1： $\mu = \mu^{\theta}$ 和 $\Upsilon \mathrel{..}= \theta$。

对于 $\alpha \neq \beta \in u$，选择$\zeta_{\alpha,\ \beta} \in \mu$ 使得 $\nu_{\alpha}(\zeta_{\alpha,\ \beta}) \neq \nu_{\beta}(\zeta_{\alpha,\ \beta})$。令

$$v := \{\zeta_{\alpha,\beta} : \alpha \neq \beta \in u\}.$$

因此显然， $v \in [\mu]^{\leq \theta}$ 和 $g : {}^{v}2 \to \theta$ 都属于 N，其中 g 是这样的函数：它对每个 $\alpha \in u$ 将 $\eta_{\alpha} \restriction v \mapsto$映射到 $\mathrm{otp}(u \cap \alpha)$，并将 ${}^{v}2$的所有其他元素映射到零。令 $f : {}^{\mu}(2^{\mu}) \to \theta$ 由 $\eta \mapsto g(\eta \restriction v)$定义；显然，这同样是$N$ 的成员。因此，对于某个 $\varepsilon < \mu$，有 $f = f_{\varepsilon}$。

现在检查。

情形 2： $\mathbf{U}_{\theta}(\mu) = \mu$ 和 $\Upsilon \mathrel{..}= (2^{\theta})^{+} < 2^{\mu}$。

这只是情形 3 的一个特殊情形。

情形 3： $2^{\theta} \leq \mu$，且 $\mathbf{U}^{[\sigma]^{<\theta}}(\mu) = \mu$和 $\Upsilon \mathrel{..}= (2^{<\sigma})^{+}$对于某个 $\sigma \in [\theta, \mu]$。

我们将通过对 $i < \sigma$进行归纳，尝试选择 $(\alpha_i,\ \beta_i,\ \zeta_i)$，使得:

- $\alpha_i \neq \beta_i$ 是 u 的成员。
- $\alpha_i,\ \beta_i \in u \setminus \{\alpha_j, \beta_j : j < i\}$
- $\zeta_i < \mu$
- $\eta_{\alpha_i}(\zeta_i) = 0$ 和 $\eta_{\beta_i}(\zeta_i) = 1$.
- 若 $j < i$，则 $\eta_{\alpha_i}(\zeta_j) = \eta_{\beta_i}(\zeta_j)$。

子情形 A： 我们成功了。

令 $W_0 \mathrel{..}= \{\zeta_i : i < \sigma\}$ （因此 $W_0 \in [\mu]^{\sigma}$）。现在，利用‘$\mathbf{U}^{[\sigma]^{<\theta}}(\mu) = \mu$’，存在$W \in [W_0]^{\theta}$ 属于 N，接着按照情形 1 继续。

子情形 B： 对于某个 $i_* < \sigma$，我们在阶段 i_*卡住了。

作为$|u| = \Upsilon > 2^{|i_*|}$，存在 $\alpha \neq \beta$，来自 u，使得

$$\eta_{\alpha} \restriction \{\zeta_j : j < i_*\} = \eta_{\beta} \restriction \{\zeta_j : j < i_*\}.$$

这显然矛盾。

(Note that we can actually use $\Upsilon := \sum\limits_{i<\sigma} (2^{|i|})^{+}$ instead of $(2^{<\sigma})^{+}$.)

情形 4： $\theta =$ 共尾数$(\theta) < \mu$， μ 是共尾数为 $\neq \theta$ 的强极限奇异基数，并且 $\Upsilon \mathrel{..}=(2^{\theta+\mathrm{cf}(\mu)})^{+}$。

这也是情形 3 的一个特殊情形。

情形 5： $\Upsilon \mathrel{..}= \beth_{\omega}(\theta) \leq \mu$。

根据 [She00], ，这也属于情形 3。 $\square_{1.7}$

我们引入 Sep $=$Sep$_1$ 的以下变体，并将在本文中使用。

定义 1.8. 1) 令 Sep$_2(\chi,\mu,\partial,\theta,\kappa,\mathcal{D}$ 表示存在一个序列$\bar{f}=\langle f_{\varepsilon,i}:\varepsilon<\chi,\ i<\kappa\rangle$ 见证它。这意味着以下子句成立。

(A) $\mathcal{D}\in$up(κ) (B) $f_{\varepsilon,i}:{}^{\mu}\partial\to\theta$(C) 若 $\mathscr{P}_i\subseteq{}^{\mu}\partial$ 具有[6] 基数 $<\partial^{\mu}$ (对于 $i<\kappa$), 那么我们可以找到一个序列$\bar{\varrho}=\langle\varrho_i:i<\kappa\rangle$ 使得：(a) $\varrho_i\in{}^{\mu}\theta$(b) 若 $\bar{\nu}=\langle\nu_i:i<\kappa\rangle\in\prod\mathscr{P}_i$，则存在 $\varepsilon<\mu$ 和 $u\in\mathcal{D}$，使得$_{i<\kappa}$满足$i\in u\Rightarrow f_{\varepsilon,i}(\nu_i)=\varrho_i(\varepsilon)$。

——

2) 若 $\mathcal{D}_{..}=[\kappa]^{\kappa}$，则可省略它。Sep$_2(\mu,\theta,\kappa)$ 表示 Sep$_2(\mu,\mu,\theta,\theta,\kappa)$。

回顾定义 1.2,

定义 1.9。 1) 若存在一个$\mathbf{p}$-D-F-BB 序列，则称$\mathbf{p}$ 具有 (D,∂,θ)-F-*BB* 性质[7]，其中：

(A) $\mathbf{p}$ 是一个 (λ,κ,χ)-BB 参数。
(B) D 是 λ上的滤子。(C) F 是一个$(\mathbf{p},\partial,\theta)$-着色。

2) 若$\mathbf{p}$ 对每个 $(\mathbf{p},\partial,\theta)$-着色 F都具有 (D,∂,θ)-F-BB 性质，则称$\mathbf{p}$ 具有 (D,∂,θ)-BB 性质。

3) 若 D 是 λ上的闭无界滤子，则可省略它。

现在我们引用前一篇论文的主要断言—— [She05, 1.$10_{\text{=Ld.6}}$] ——但这里不会用到它。

断言 1.10. 假设

(a) $\lambda:=cf(2^{\mu})$ *(b)* D 是一个扩张闭无界滤子的 μ^+-完备滤子。*(c)* $\kappa=cf(\kappa)<\chi\le\lambda$*(d)* $\mathbf{p}=\langle(C_\delta,C'_\delta):\delta\in S\rangle$ 是一个良好的 (λ,κ,χ)-*BB* 参数，其中 $S\in D$。*(e)* $2^{<\chi}\le2^{\mu}$ 且 $\theta\le\mu$。*(f)* $\alpha<2^{\mu}\Rightarrow trp^{+}_{\kappa}(|\alpha|)\le2^{\mu}$（这意味着，每个具有 $|\alpha|$ 个节点和 κ 层的树都有 $<2^{\mu}$ 条 κ-分支。）*(g)* Sep$_1(\mu,\theta)$。

那么$\mathbf{p}$ 具有$(D,2^{\mu},\theta)$-BB-性质。（注意，这意味着可能有 $\theta>2$；也就是说，我们有多于两种颜色。）

---

[6]我们可以令这个序列在 i 中保持常数——若如此，我们可以用 $\mathscr{P}$ 代替 $\mathscr{P}=\langle\mathscr{P}_i:i<\kappa\rangle$。[7]之后，我们将写作“BB^0-性质”。

注 1.11. 1）如果（例如） μ 是强极限奇异基数， $\kappa =:$共尾数(μ)， $\lambda =:$共尾数(2^{μ})，并且$\kappa+\theta<\mu$, 那么 1.10 中唯一不能由此推出的假设是子句（f）（许多正则 $\kappa<\mu$ 确实满足该子句，参见 [She00]）。更多内容请参见 [She06]。

我们在这里的目标是涵盖更多 κ的情形，并构造这一性质的相关变体，使其更易于使用且有更多应用。

2) 根据 [She93, §1], , 有许多符合要求的 S （通常来自$\breve{}\, I_{\kappa}[\lambda]$）。不过，这限制了我们的选择。

3) “良好的$\mathbf{p}$”也是一种限制，因为该结果涵盖的 S更少。事实上，如果 $S\notin \breve{}\, I_{\kappa}[\lambda]$ ，那么就不存在满足$S_{\mathbf{p}}=:S$ 的良好$\mathbf{p}$ （因为我们无法找到 $\langle C'_{\delta}:\ \delta\in S\rangle$）。我们的另一个目标是消除这一假设。

4) 但我们希望能得到使用Sep2 或Sep3的平行结果。（这将在第2节中完成。）

5) 早期对Sep1(μ,θ)的定义使用的是“$\Upsilon<2^{\mu}\vee\Upsilon=:2^{\mu}\in$ 正则基数”，而不是“$\Upsilon\le 2^{\mu}\wedge\Upsilon\in$ 正则基数”。

这是一个自然的推广，因为这种记号是专为依赖于对 $\Upsilon\le 2^{\mu}$ 进行归纳的证明量身定制的。由于 Υ 论证是某个特定集合基数的上界，显然 Sep1$(\dots,\Upsilon)$ 蕴含 Sep1$(\dots,\Upsilon^{+})$。此外，由于每个后继序数都是正则的，如果 $\Upsilon<2^{\mu}$ ，那么 $\Upsilon^{+}<2^{\mu}\vee\Upsilon^{+}\in$ Reg。不过，我们必须重写现有证明以符合这个新定义，而这实在得不偿失。

命题 1.12。 假设 κ 是正则的， $\mu>\theta=\theta^{<\kappa}$，且 $\partial\in[2,2^{\mu}]$。若以下条件至少有一个成立，则有 Sep2$(\mu,\mu,\partial,\theta,\kappa)$。

(a) $\kappa\neq cf(\mu)$， $\alpha<\mu\Rightarrow|\alpha|^{\kappa}\le\mu$，且 *Sep1*$(\mu,\partial,\theta)$。*(b)* $U'_{\kappa}(\mu)=\mu\ge\beth_{\omega}(\theta+\kappa)$ *(c)* $U'_{\kappa}(\mu)=\mu$，且 *Sep1*(μ,∂,θ)。*(d)* 对某个满足 $\sigma^{\theta}\le\mu$ 且 $(2^{\sigma})^{+}<2^{\mu}$ 的 $\sigma\ge\theta$，有 $U^{[\sigma]^{<\theta}}(\mu)=\mu$。

证明。 **情形 (a)：**

¯设 $f^{\circ}=\langle f^{\circ}_{\varepsilon}:\ \varepsilon<\mu\rangle$是 Sep1$(\mu,\partial,\theta)$ 的见证（因此 f°_{ε}是从 ${}^{\mu}\partial$到θ的函数）。令

$$\mathcal{F}:=\{\nu\in{}^{\kappa}\mu:\mathrm{rang}(\nu)\text{ is a bounded subset of }\mu\}.$$

回顾定义 1.6(2)，令 Υ 为正则基数 $\le 2^{\mu}$ ，使得 Sep1$(\mu,\mu,\partial,\theta,\Upsilon)$ 成立。

由假设“$\alpha<\mu\Rightarrow|\alpha|^{\kappa}\le\mu$”，显然 $|\mathcal{F}|=\mu$。令 $\langle\nu_{\varepsilon}:\ \varepsilon<\mu\rangle$ 列出 $\mathcal{F}$的成员，我们将定义

$$\circledast_1\quad \bar{f}=\langle f_{\varepsilon,i}:\varepsilon<\mu,\ i<\kappa\rangle,\text{ where }f_{\varepsilon,i}:=f^{\circ}_{\nu_{\varepsilon}(i)}.$$

¯只需证明 f是 Sep2$(\mu,\mu,\partial,\theta,\kappa)$ 的见证。因此，设 $\mathscr{P}_i\subseteq{}^{\mu}\partial$的基数为 $<\partial^{\mu}=2^{\mu}$，其中 $i<\kappa$，我们需要按照 1.8(1)(C) 构造 $\bar{\varrho}$。

固定 $i<\kappa$，因此由1.6(1)(B)，对每个 $\rho\in{}^{\mu}\theta$ 该集合

$$\mathrm{Sol}_{\rho}:=\{\nu\in{}^{\mu}\theta:(\forall\varepsilon<\chi)[f^{\circ}_{\varepsilon}(\nu)\neq\rho(\varepsilon)]\}$$

的基数为 $< \Upsilon$。由于 $|\mathscr{P}_i| < 2^\mu$ 且[8] Υ =共尾数(Υ) $\le 2^\mu$，集合$\Lambda_i := \bigcup_{\nu\in\mathscr{P}_i} \mathrm{Sol}_\nu$的基数为 $< 2^\mu$，因此我们可以选取 $\varrho_i \in {}^\mu\partial \setminus \Lambda_i$。

只需证明 $\langle \varrho_i : i<\kappa\rangle$ 如所述即可。因此，设 $\bar\nu = \langle \nu_i : i<\kappa\rangle \in \prod_{i<\kappa} \mathscr{P}_i$，我们需要找到 $\varepsilon < \mu$ 和 $u \in [\kappa]^\kappa$，使其满足 1.8(1)(C)(b) 中的要求。

对于每个 $i<\kappa$，根据我们对 ϱ_i 的选择，我们知道 $\varrho_i \notin \mathrm{Sol}_{\nu_i}$。这意味着

$\circledast_2$ 存在 $\varepsilon_i < \mu$，使得 $f^\circ_{\varepsilon_i}(\nu_i) = \varrho_i(\varepsilon_i)$。

由于 $\mathrm{cf}(\mu) \ne \mathrm{cf}(\kappa)$，存在 $\zeta < \mu$，使得集合 $u := \{i<\kappa : \varepsilon_i < \zeta\}$ 的基数为 κ（其序型甚至为 κ）。

$\circledast_3$ 设 $\nu \in {}^\kappa\zeta$ 为序列

$$\nu(i) := \begin{cases} \varepsilon_i & \text{if } i \in u \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

并令 $\varepsilon < \mu$ 满足 $\nu = \nu_\varepsilon$。

现在，ε符合要求。

为什么？对于每个 $i \in u$，我们都有

$\circledast_4$ $f_{\varepsilon,i}(\nu_i) = f^\circ_{\nu_\varepsilon(i)}(\nu_*) = f^\circ_{\varepsilon_i}(\nu_i) = \varrho_i(\varepsilon_i)$.

[第一个等式是由 $\circledast_1$ 给出的定义，第二个等式由在 $\circledast_3$ 中选择 ν 得出，第三个等式则由在 $\circledast_2$ 中选择 ε_i 得出。]

情形（b）： 假设 $\mathbf{U}_\kappa(\mu) = \mu \ge \chi := \beth_\omega(\theta+\kappa)$。

由 1.7 的情形（e），这意味着 $\mathrm{Sep}_1(\mu,\theta)$，因此令 $f^\circ = \langle f^\circ_\varepsilon : \varepsilon<\mu\rangle$ 为一个见证。令 $\mathcal{F} \subseteq {}^\kappa\mu$ 为基数为 μ 的见证，使得 $\mathbf{U}'_\kappa(\mu) = \mu$。

其余部分与情形 (a) 的证明相同，只是最后我们同时选取 $u \in [\kappa]^\kappa$和 $\varepsilon<\mu$，使得

$$(\forall i \in u)\big[\nu_\varepsilon(i) = \varepsilon_i\big]$$

（根据我们对 $\mathcal{F}$ 的选取，这是可能的）。

情形 (c): 与情形 (b) 类似。

情形 (d): 类似地，利用 1.7(c)。 $\square_{1.12}$

断言 1.13. 1) $\mu = \mu^{\kappa+\theta}$ 蕴含 $\mathrm{Sep}_2(\mu,\mu,2^\mu,\theta,\kappa,\{\kappa\})$。

2) 假设 $\mathbf{U}_\kappa(\mu) = \kappa$ 且 $\mathbf{U}_{[\sigma]^{<\theta}}(\mu) = \mu$ 对某个 $\sigma \ge \theta$，满足 $\sigma^\theta \le \mu$ 且$(2^\theta)^+ < 2^\mu$。

于是我们有 $\mathrm{Sep}_2(\mu,\mu,2^\mu,\theta,\kappa,[\kappa]^\kappa)$。

证明。 1）如同 1.12 中情形 (a) 的证明，使用 $\mathcal{F} := {}^\kappa\mu$。

2) 使用 1.12 情形 (d) 以及情形 (a) 的证明。 $\square_{1.13}$

[8]请注意，如果 $\Upsilon := 2^\mu$ 是正则的，我们允许这样做。

定义 1.14. 假设 λ，χ，μ，∂，θ，κ 是基数（其中 ∂ 和 θ 可能是有限的），且 $\mathcal{D} \in \mathrm{up}(\kappa)$。

1) 令 $\mathrm{Sep}_3(\lambda;\ \chi,\ \mu,\ \partial,\ \theta,\ \kappa,\ \mathcal{D})$ 表示存在

$$\bar{f} = \langle f_{\varepsilon,i} : \varepsilon < \chi,\ i < \kappa \rangle$$

以及 $\overline{\mathscr{P}} = \langle \mathscr{P}_\xi :\ \xi < \lambda \rangle$，使得以下条件全部成立。

(A) $f_{\varepsilon,\ i} :\ {}^{\mu}\partial \to \theta$(B) $\mathscr{P}_\xi \subseteq {}^{\mu}\partial$，且 $\mathscr{P}$ 在 ξ 中严格 $\subset$ 递增，其并集为 ${}^{\mu}\partial$。

(C) 若 $\xi < \lambda$，则我们可以找到一个序列 $\bar{\varrho} = \langle \varrho_i :\ i < \kappa \rangle$，使得：(a) $\varrho_i \in {}^{\mu}\theta$(b) 若 $\bar{\nu} = \langle \nu_i :\ i < \kappa \rangle \in {}^{\kappa}(\mathscr{P}_\xi)$，则存在 $\varepsilon < \chi$ 和 $u \in \mathcal{D}$，使得

$$i \in u \Rightarrow f_{\varepsilon,i}(\nu_i) = \varrho_i(\varepsilon).$$

2) $\mathrm{Sep}_4(\lambda;\ \chi,\ \mu,\ \partial,\ \theta,\ \kappa,\ \mathcal{D})$ 的定义类似，但将 $\mathscr{P}$ 重新定义为 ${}^{\kappa}(\mu\partial)$ 的一个覆盖（因此每个 $\mathscr{P}_\xi \subset {}^{\kappa}(\mu\partial)$）。子句 (C) 保持不变，但为保持一致，(C)(b) 的前件改为“若 $\bar{\nu} = \langle \nu_i :\ i < \kappa \rangle \in \mathscr{P}_\xi$ .....”

3) 再次，$\mathcal{D}$ 的默认值为 $[\kappa]^{\kappa}$。对于 $\iota = 3,\ 4$，$\mathrm{Sep}_\iota(\lambda;\ \mu,\ \theta,\ \kappa)$ 表示 $\mathrm{Sep}_\iota(\lambda;\ \mu,\ \mu,\ \theta,\ \theta,\ \kappa)$。（也就是说，$\chi_{..} = \mu$ 和 $\partial_{..} = \theta$。）

观察 1.15。1) [**单调性：**] 若 $\chi_1 \le \chi_2$，$\mu_1 \le \mu_2$，$\partial_1 \ge \partial_2$，$\theta_1 \ge \theta_2$，且 $\mathcal{D}_1 \supseteq \mathcal{D}_2$，则

$$\mathrm{Sep}_3(\lambda;\chi_1,\mu_1,\partial_1,\theta_1,\kappa,\mathcal{D}_1) \Rightarrow \mathrm{Sep}_3(\lambda;\chi_2,\mu_2,\partial_2,\theta_2,\kappa,\mathcal{D}_2).$$

1A) Sep_4 也类似。

1B) Sep_1 也类似；也就是说，若 $\chi_1 \le \chi_2$，$\mu_1 \le \mu_2$，$\partial_1 \ge \partial_2$，$\theta_1 \ge \theta_2$，且 $\Upsilon_1 \le \Upsilon_2 \le 2^{\mu_1}$，[9] ，则

$$\mathrm{Sep}_1(\chi_1,\mu_1,\partial_1,\theta_1,\Upsilon_1) \Rightarrow \mathrm{Sep}_1(\chi_2,\mu_2,\partial_2,\theta_2,\Upsilon_2).$$

2) [**与 Sep_2 的联系：**] 假设 $\chi,\mu,\partial,\theta,\mathcal{D}$ 与 1.14 中的相同，且 共尾数$(\partial^\mu) > \kappa$。[10] 那么

$\mathrm{Sep}_2(\chi,\mu,\partial,\theta,\kappa,\mathcal{D}) \Rightarrow \mathrm{Sep}_3$(共尾数$(\partial^\mu)$; $\chi,\mu,\partial,\theta,\kappa,\mathcal{D}) \Rightarrow \mathrm{Sep}_4$(共尾数$(\partial^\mu)$; $\chi,\mu,\partial,\theta,\kappa,\mathcal{D}$)

证明。 1) 阅读定义。(1A) 和 (1B) 类似。

2)**第一个蕴含：**

设 $\langle \eta_\alpha :\ \alpha < \partial^\mu \rangle$ 列表 ${}^{\mu}\partial$，设 $\langle \Upsilon_\zeta :\ \zeta < \lambda \rangle$ 是一个以 ∂^μ 为极限的递增序列，其中各项都是序数，并设 $\mathscr{P}_{\zeta\ ..} = \{\eta_\alpha :\ \alpha < \Upsilon_\zeta\}$。

现在来验证。

第二个蕴含：

Let $\langle \mathscr{P}_\xi : \xi < \mathrm{cf}(\partial^\mu) \rangle$ exemplify $\mathrm{Sep}_3(\mathrm{cf}(\partial^\mu);\chi,\mu,\partial,\theta,\kappa,\mathcal{D})$（也就是说，它符合定义 1.14(1)。）现在，$\langle {}^{\kappa}(\mathscr{P}_\xi) : \xi <$ 共尾数$(\partial^\mu) \rangle$ 符合 1.14(2) 的要求。（注意，这里我们需要假设‘cf$(\partial^\mu) > \kappa$。’）$\square_{1.15}$

[9] 同样，只有当 2^{μ_1} 是正则的时，等号才成立。[10]

[10] 第二个 $\Rightarrow$中需要这一点。

结论 1.16. 我们有 $\mathrm{Sep}_3(\lambda;\ \mu,\ \mu,\ 2^\mu,\ \theta,\ \kappa,\ \mathcal{D})$ 当

(A) $\kappa =$共尾数$(\kappa)(B)$ 三元组$(\mu, 2^\mu, \theta)$ 至少满足1.7中的一个条件。
(C) $\mathbf{U}_{\mathcal{D}}(\mu) = \mu(D)$ $\lambda :=$ 共尾数(2^μ)。

证明。 由 1.7 的结论可知，对某个 Υ，有 $\mathrm{Sep}_1(\mu,\mu,2^\mu,\theta,\Upsilon)$。利用条款（$C$）并重复 1.12(a) 的证明，可得 $\mathrm{Sep}_2(\mu,\mu,2^\mu,\theta,\kappa,\mathcal{D})$。结合这一点和 1.15(2)，即可得出结论。$\square_{1.16}$

-

注 1.17. 1）我们可能需要弄清楚，在 Sep_ι 中何时确实需要“$\chi \neq \mu$”。

2）我们还可以考虑下面的定义。

定义 1.18。令 $\kappa \leq \mu$ 和 $\mathbb{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\kappa))$.

1) 我们定义 $\mathbf{U}_{\mathbb{S}}(\mu)$ 为

$$\min\big\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \subseteq [\mu]^\kappa,\ (\forall g \in {}^\kappa\mu)(\exists \mathcal{A} \in \mathbb{S})(\forall u \in \mathcal{A})\big[\mathrm{rang}(g \restriction u) \in \mathcal{U}\big]\big\}.$$

2)$\mathbf{U}'_{\mathbb{S}}(\mu)$ 表示

$$\min\big\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq {}^\kappa\mu \text{ and } (\forall g \in {}^\kappa\mu)(\exists \mathcal{A} \in \mathbb{S})(\forall u \in \mathcal{A})(\exists f \in \mathcal{F})[f \restriction u = g \restriction u]\big\}.$$

问题 1.19。 我们能否证明 $\mathrm{Sep}_\iota(\lambda;\ \mu,\ \theta,\ \kappa)$ 对于 $(\iota = 3,\ 4 \text{ and})\lambda \in (\mu,\ 2^\mu] \setminus \{\mathrm{cf}(2^\mu)\}$ 正则的存在性结果？我们能否否定它们?

嗯，和许多情形一样，我们有独立性结果。例如：

断言 1.20。 1) 假设 $\mu = \mu^{<\mu} < \chi = \chi^\mu$。令 $\mathbb{P} :=\mathrm{Cohen}_{\mu,\ \chi}$ （即添加 χ 个 μ-*Cohen* 的强迫）。

那么在 $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ 中，对任意正则 $\lambda \in [\mu^+, \chi] \setminus \{\mathrm{cf}(\chi)\}$，都有 $\mathrm{Sep}_3(\lambda;\ \mu, \theta, \kappa)$。

2) 若 $\theta \leq \mu < \lambda = \mathrm{cf}(\lambda) \leq 2^\mu$ 且 $\bar\eta = \langle \eta_\xi :\ \xi < \lambda\rangle \subseteq {}^\mu\theta$ 是一个 μ-*Luzin* 序列，则 $\mathrm{Sep}_3(\lambda;\ \mu, \mu, 2^\mu, \theta, \kappa, \{\kappa\})$。

回顾一下，“$\bar\eta$ 是一个 μ-*Luzin* 序列”是指：对于每个贫瘠的 μ-*Borel* 集$\mathbf{B} \subseteq {}^\mu\theta$，都存在 $\alpha_* < \ell g(\bar\eta)$ 使得

$$\alpha_* < \alpha < \ell g(\bar\eta) \Rightarrow \eta_\alpha \notin \mathbf{B}.$$

证明。 显然。 $\square_{1.20}$

断言 1.21。 设 $\mu = \mu^{<\mu} < \lambda = \mathrm{cf}(\lambda) < \chi \leq 2^\mu$，并假设（例如）强迫公理 $\mathbf{Ax}_{\mu,\chi}((1)^+_c, (2)^\varepsilon_c)$ 来自 [She22]。设 $S := \{\delta \in S^\lambda_\kappa :\ \mu^\kappa \mid \delta\}$.[11]

Then

(A) *For* $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa) < \mu$, *there exists* $\overline{C} = \langle C_\delta : \delta \in S\rangle$ *such that:*

[11]这里我们将 μ^κ 理解为序数的乘方。

(a) C_δ 是 δ 的一个无界子集，其序型为 κ。(b) C 是 μ^+-自由的（参见0.2）。（也就是说，若 $u \in [S^\lambda_\kappa]^{<\mu}$，则存在 $f \in \prod C_\delta$，使得 $\langle C_\delta \setminus f(\delta) : \delta \in u\rangle_{\delta\in u}$是一个两两不交集的序列。）

(B) 任意 $\bar{C}$ 如第 (A)部分所述，都具有 μ-一致化性质。也就是说，若 $\bar{f} = \langle f_\delta : \delta \in S^\lambda_\kappa\rangle$ 满足 $f_\delta \in {}^{C_\delta}\mu$，则存在 $f \in {}^\lambda\mu$ 使得（这里指 $\big|\{\alpha \in C_\delta : f_\delta(\alpha) \neq f(\alpha)\}\big| < \kappa$。）

$$(\forall \delta \in S^\lambda_\kappa)\big[f_\delta \subseteq^* f\big].$$

证明。 **子句 (A):**

选取 $\langle C^\circ_\delta : \delta \in S\rangle$，使得:

$(*)_\delta$ 若 $\delta \in S$（因此 $\mu^\kappa \mid \delta$），则 C°_δ 是 δ 的一个无界子集，序型为μ^κ。

现在我们定义一个强迫概念 $\mathbb{Q}$。

$(*)_{\mathbb{Q}}$ (a) $p \in \mathbb{Q}$ 当且仅当 p 具有如下形式 $\langle C_\delta : \delta \in u\rangle$，其中:

- $\bullet_1$ $u \in [S]^{<\mu}$
- $\bullet_2$ $C_\delta \subseteq C^\circ_\delta$ 在 δ 中也是无界的。
- $\bullet_3$ $\mathrm{otp}(C_\delta) = \kappa$(b) $\mathbb{Q} \models$ "$p \leq q$"当且仅当 $u_p \subseteq u_q$ 且 $C_{p,\delta} = C_{q,\delta}$ 对所有 $\delta \in u_p$。

显然， $\mathbb{Q}$ 对所有 $\alpha < \mu$ 都是策略上 α-完备的（即 [She22, 0.3(A)(1)$_{c=\mathrm{Lx2}}$]）。此外，这对 $\alpha = \mu$ 仍然成立，并且我们有 μ^+-cc 的版本 $(2)_b$ （来自[She22, 0.3(B)$_{=\mathrm{Lx2}}$]）。

条款 (B): 同样。 $\square_{1.21}$

T以下观察将给我们一些 b 界。

定义 1.22。对于 $\theta \in \kappa \cap$ 正则基数，令

$$\mathrm{inv}_\sigma(\kappa) := \text{最小}\big\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq [\kappa]^\kappa \text{ 且 } (\forall h \in {}^\kappa\sigma)(\exists i < \sigma)(\exists A \in \mathcal{A})\text{值域}(h \restriction A) \subseteq i\big\}.$$

观察 1.23。 1) 若 $\sigma =$ 共尾数$(\sigma) < \kappa = \kappa^{<\kappa} < \lambda = \lambda^\kappa$ 且 $\mathbb{Q}$ 是添加 κ多个 σ-*Cohen* 实数的强迫，则 $\Vdash_{\mathbb{Q}}$ "$\mathrm{inv}_\sigma(\kappa) = \lambda = 2^\kappa$"。

2)若 $\sigma =$ 共尾数$(\sigma) \leq \partial = \partial^\kappa$，且 $\mathbb{Q}$ 是一个 *calibre* 为 μ的$(<\partial)$-完备强迫概念，并且不压塌基数，那么在$\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$ 中，我们有$\mathrm{inv}_\sigma(\kappa)^{\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}} \leq (2^\kappa)^{\mathbf{V}}$。

§ 2. The Black Box property

定义 2.1. 1) 我们称$\mathbf{p} = (\langle (C_\delta, C'_\delta, C_\delta) : \delta \in S \rangle, \mathcal{D})$ 是一个 (λ, κ, χ)-BB[1]- 参数，当

(A) (a) $\lambda > \kappa$ 是正则的。(b) S 是 S^λ_κ的平稳子集。(B) $C_\delta \subseteq \delta$，且 $\sup(C_\delta) = \delta$。(C) (a) $C'_\delta \subseteq \delta$，$\sup(C'_\delta) = \delta$，且 $\mathrm{otp}(C'_\delta) = \kappa$。（我们不要求 C_δ 或 C'_δ 在 δ中是闭的。）(b) 令$\beta_\delta = \langle \beta_{\delta,\,i} : i < \kappa \rangle$ 按递增次序列出 C'_δ。(D) (a) $C_\delta = \langle C_{\delta,\,i} : i < \kappa \rangle$(b) $C_{\delta,\,i} \subseteq C_\delta \cap \beta_{\delta,\,i}$(c) $|C_{\delta,\,i}| < \chi$(E) 对所有 $\alpha < \lambda$，该集合的基数为 $< \lambda$。(F) $\mathcal{D} \in \mathrm{up}(\kappa)$。

$$\{C_{\delta,i} : \delta \in S,\ i < \kappa,\ \beta_{\delta,i} = \alpha\}$$

1A) 上文中，将 BB[1] 替换为 BB[2] 意味着将条款 (1)(D)(b) 加强为

(b′) $C_{\delta,i} := C_\delta \cap \beta_{\delta,i} \setminus \beta_{\delta,<i}$.

1B) 将 BB[1] 替换为 BB[3] 意味着将条款 (1)(D)(b) 加强为

(b″) $C_{\delta,i} := C_\delta \cap \beta_{\delta,i}$.

2) 我们称 $F = \langle F_{\delta,i} : \delta \in S,\ i < \kappa \rangle$ 是一个 连续$(\mathbf{p}\ \partial, \theta)$-BB[1]-着色，当 $(S = S_{\mathbf{p}}$ 且)

(A) $F_{\delta,i} : {}^{C_{\delta,i}}\partial \to \theta$ 对于 $\delta \in S$ 和 $i < \kappa$ （回顾 $C_{\delta,i} \subseteq C_\delta \cap \beta_{\delta,i}$）。(B) 对于 $\beta < \lambda$，集合 $\mathcal{F}_\beta := \{F_{\delta,i} : \delta \in S,\ i < \kappa,\ \beta_{\delta,i} = \beta\}$ 具有基数$< \lambda$。

2A) 对于如上所述的 F、∂和 θ，以及 λ上的滤子 D，我们称 $\bar{c} = \langle c_{\delta,i} : \delta \in S,\ i < \kappa \rangle \in {}^{S \times \kappa}\theta$ 是一个 $\mathbf{p}$-D-F-BB[1]-序列，当对每一个 $\eta \in {}^\lambda\partial$，集合

$$\{\delta \in S : (\exists^{\mathcal{D}} i < \kappa)[F_{\delta,i}(\eta \restriction C_{\delta,i}) = c_{\delta,i}]\}$$

是 D^+ 的成员（在默认情形下，是 λ 的平稳子集）。[12]

3) 我们称 γ，$\delta \in S$ 为 $\mathbf{p}$-相似，当且仅当:

- $\bullet_1$ $\mathrm{otp}(C_\gamma) = \mathrm{otp}(C_\delta)$ (Recall that we only demanded $\mathrm{otp}(C'_\gamma) = \mathrm{otp}(C'_\delta) = \kappa$.)
- $\bullet_2$ $i < \kappa \Rightarrow \mathrm{otp}(C_{\gamma,i}) = \mathrm{otp}(C_{\delta,i})$.

4) 当蕴含式 (A) $\Rightarrow$ (B)' 成立时，我们称 $F = \langle F_\delta : \delta \in S \rangle$ 为一致（$\mathbf{p}\ \partial$，θ）-着色，其中:

(A) (a) δ_1 和 δ_2 是$\mathbf{p}$-相似的。(b) $f_\ell : C_{\delta_\ell} \to \theta$ 适用于 $\ell = 1, 2$。

[12] 自然地，$(\exists^{\mathcal{D}} i < \kappa)\varphi_i$ 是 $(\exists u \in \mathcal{D})(\forall i \in u)\varphi_i$ 的简写。

(c) If $\gamma_\ell \in C_{\delta_\ell}$ for $\ell = 1, 2$, then
$$\mathrm{otp}(\gamma_1 \cap C_{\delta_1}) = \mathrm{otp}(\gamma_2 \cap C_{\delta_2}) \Rightarrow f_1(\gamma_1) = f_2(\gamma_2).$$

(B) $F_{\delta_1}(f_1) = F_{\delta_2}(f_2)$.

5) '$\langle F_{\delta,\,i} \colon \delta \in S,\ \ i < \kappa\rangle$ 是一个一致连续的 $(\mathbf{p}\ \partial,\ \theta)$-着色'的定义类似，但我们将 (4)(B) 替换为以下要求

(B)′ $i < \kappa \Rightarrow F_{\delta_1,i}(f_1 \restriction C_{\delta_1,i}) = F_{\delta_2,i}(f_2 \restriction C_{\delta_2,i})$.

6) 当我们写作 σ-一致而非一致时，这表示在条款 (4)(A)(a) 中，我们将'$\mathbf{p}$-相似'替换为'$\mathcal{E}$-等价'，其中 $\mathcal{E}$ 是 S 上的某个等价关系，且$\leq \sigma$ 的等价类满足

$$\gamma\ \mathcal{E}\ \delta \Rightarrow [\gamma \text{ is } \mathbf{p}\text{-similar to } \delta].$$

注 2.2. 1) 关于 BB^2 ——其想法是， C_δ 和$C_{\delta,i}$-s 是根据 C'_δ 和$\beta_{\delta,i}$ 来定义的（回想一下 $C'_\delta = \{\beta_{\delta,i} \colon\ i < \kappa\}$）。

一方面，我们可以选择$C_\delta \mathrel{..}= \delta$，此时 $\chi = \lambda$，并且可以选择$C_{\delta,i} \mathrel{..}= [\beta_{\delta,<i}, \beta_{\delta,i}]$。

另一方面，我们可以选择 $C'_\delta \mathrel{..}= C_\delta$ 并且
$$C_{\delta,i} := \begin{cases} \{\beta_{\delta,i-1}\} & \text{if } i \text{ is successor} \\ \varnothing & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这两种情况下，我们都得到条款 2.1(1)(E)；也就是说，
$$\beta < \lambda \Rightarrow \left|\{C_{\delta,i} : \delta \in S,\ i < \kappa,\ \beta_{\delta,i} = \beta\}\right| < \lambda.$$
这将在 2.5 的证明中用于第 $(*)_4$(d) 款。

2）一致性（定义见 2.1(4)-(6)）仅用于 2.12。

3）注意，在引理 2.5 中，我们可以选择 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathbf{p}} \mathrel{..}= \{\kappa\}$ ——最佳的、符合所需情形的情况。

但这样一来，对 Sep_3 的假设就更强，因此最好将其应用于 $\mathcal{D} \mathrel{..}= [\kappa]^\kappa$；这样我们就能加强 2.10、2.11 中的结论。

4）对于 BB^1 版本，我们可以省略 2.1(3)$\bullet_1$。

定义 2.3。 1）若对于每个连续的 $(\mathbf{p}\ \partial, \theta)$-着色 F，$\mathbf{p}$ 都具有 (D, ∂, θ)-F-BB^1-性质（见定义 2.1(2A)），则称 $\mathbf{p}$ 具有 连续 (D, ∂, θ)-BB^1-性质 。

也就是说，蕴含关系'(A) $\Rightarrow$ (B)'成立，其中：

(A) (a) $\mathbf{p}$ 是一个 (λ, κ, χ)-BB 参数。(b) D 是 λ上的一个滤子。(c) F 是一个连续$(\mathbf{p}\ \partial, \theta)$-着色。(B) 存在一个$\mathbf{p}$-$D$-$F$-$\mathrm{BB}^1$-序列。

2) 同样，如果 D 是 λ 加上 $S_{\mathbf{p}}$上的闭无界滤子，那么我们可以省略它。

讨论 2.4. 下一个断言与 1.10 有关。我们将讨论范围限制在连续着色上，但通过省略 1.10(*f*) 中的要求而有所收获；该要求限制了 κ （即 S的成员的共尾数）。此外，如果 $\lambda = \lambda^{<\lambda}$ （因此 $\lambda = 2^\mu$），那么我们可以选择 $\chi =: \lambda$。

引理 2.5. 我们有 '$(A) \Rightarrow (B)$'，其中

(A) *(a)* $\mu < \lambda =$ 共尾数$(\lambda) =$ 共尾数(2^μ) *(b)* D 是定义在 λ 上并扩张闭无界滤子的 μ^+-完备滤子。*(c)* $\kappa =$共尾数$(\kappa) < \chi \le \lambda$*(d)* $\mathbf{p} = (\langle (C_\delta, C'_\delta, C_\delta) : \delta \in S\rangle, \mathcal{D})$ 是一个 (λ, κ, χ)-BB^1-参数，其中$S \in D^+$。*(e)* $\theta \le \mu$ 且 $\theta^{<\chi} \le 2^\mu$。*(f)* $Sep_3(\lambda;\ \mu, \mu, \partial, \theta, \kappa, \mathcal{D})$。*(B)* $\mathbf{p}$ 具有连续的 $(D, 2^\mu, \theta)$-BB^1-性质。

注 2.6. 1) 若 $C_{\delta_1,\varepsilon_1} = C_{\delta_2,\varepsilon_2} \Rightarrow F_{\delta_1,\varepsilon_1} = F_{\delta_2,\varepsilon_2}$，那么在下面的证明中，我们可以将 $\mathcal{F}_\beta$ 替换为 $\mathcal{C}_\beta =: \{C_{\delta,i} : \delta \in S,\ i < \kappa,\ \beta_{\delta,i} = \beta\}$。

2）主要情形是 $\partial =: 2^\mu$。

证明。首先，

$(*)_1$ 设 $F = \langle F_{\delta,\ i} :\ \delta \in S,\quad i < \kappa\rangle$ 是一个连续的（$\mathbf{p}$ 2^μ，θ）-着色。只需证明存在一个 $\mathbf{p}$-D-F-序列。

现在由假设 (*A*)(*f*),

$(*)_2$ Let $\bar f = \langle f_{\varepsilon,i} : \varepsilon < \mu,\ i < \kappa\rangle$ and $\overline{\mathscr{P}} = \langle \mathscr{P}_\xi : \xi < \lambda\rangle$ exemplify
$$\mathrm{Sep}_3(\lambda; \mu, \mu, \partial, \theta, \kappa, \mathcal{D}).$$

$(*)_3$ 对每个 $\delta \in S$，选取 $\bar\varrho^\delta = \langle \varrho^\delta_i :\ i < \kappa\rangle \in {}^\kappa(^\mu\theta)$，使其满足定义1.14(1)(C)。（注意 $\delta \in S \Rightarrow \delta < \lambda$，因此此处的 δ 对应于定义中的下标ξ 。）

现在，对每个 $\varepsilon < \mu$，我们给出一个可能的 $\mathbf{p}$-D-F-序列 $\bar c_\varepsilon$:

$(*)_4$ $\bar c_\varepsilon = \langle c_{\varepsilon,\ \delta,\ i} :\ \delta \in S,\quad i < \kappa\rangle$，其中 $c_{\varepsilon,\ \delta,\ i} =: f_{\varepsilon,\ i}(\varrho^\delta_i) \in \theta$。$(*)_5$ 令 $\mathcal{F}_\beta =: \{F_{\delta,i} : \delta \in S,\quad i < \kappa,\quad \beta_{\delta,\ i} = \beta\}$，于是

- $\mathrm{dom}(F_{\delta,\ i}) = (C_{\delta,\ i})(^\mu\partial)$（也就是说，函数集合 $f :\ C_{\delta,\ i} \to {}^\mu\partial$。）
- 值域$(F_{\delta,\ i}) \subseteq \theta$
- 若 $F = F_{\delta,\ i} \in \mathcal{F}_\beta$，则我们可以将 C_F 作为 $C_{\delta,\ i}$ 的明确定义的简写。

$(*)_6$ 令 $\mathcal{C}' =: \bigcup \{C'_\delta : \delta \in S\}$

如果对于某个 $\varepsilon < \mu$，序列 $\bar c_\varepsilon$ 符合要求（即它是一个 $\mathbf{p}$-D-F-序列），那么我们就完成了。因此，为了导出矛盾，假设

$\boxplus_{6.1}$ 对于所有 $\varepsilon < \mu$，我们都可以选择 $\eta_\varepsilon \in {}^\lambda(^\mu\partial)$ 和 $E_\varepsilon \in D$，使得
$$\delta \in E_\varepsilon \Rightarrow \big\{i < \kappa : c_{\varepsilon,\delta,i} = F_{\delta,i}(\eta \restriction C_{\delta,i})\big\} \notin \mathcal{D}.$$

$(*)_7$ 对于每个 $\beta \in \mathcal{C}'$ 和 $F \in \mathcal{F}_\beta$，令

- $\rho_{\beta,F} := \langle F(\eta_\varepsilon \restriction C_F) : \varepsilon < \mu\rangle$ (so $\rho_{\beta,F} \in {}^{\mu}\theta$).
- $j_{\beta,F} := \min\{\zeta < \lambda : \rho_{\beta,F} \in \mathscr{P}_\zeta\}$
- $\zeta_\beta := \sup\{j_{\beta,F} : F \in \mathcal{F}_\beta\} < \lambda$

[为什么可以这样做? 因为根据 2.1(2)(B), $|\mathcal{F}_\beta| < \lambda =$ 的共尾数为 λ。]

$(*)_8$ 令 $E_* := \{\delta < \lambda : \delta$ 极限，且 $\beta < \delta \Rightarrow \zeta_\beta < \delta\}$.

(a) E_* 是一个 λ的闭无界集. (b) E_*

$= E_* \cap \bigcap E_\varepsilon \in D^{\varepsilon<\mu}$

[为什么这属于该滤子? 我们根据 $\boxplus_{6.1}$ 声明每个 $E_\varepsilon \in D$，而子句 (A) 根据我们的构造成立。根据假设 $(A)(b)$, D 包含所有闭无界集，且是 μ^+-完备的。]

$(*)_9$ 对于每个 $\delta \in E$，都存在 $\varepsilon = \varepsilon_\delta < \mu$，使得

$$\{i < \kappa : F_{\delta,i}(\eta_\varepsilon \restriction C_{\delta,i}) = c_{\varepsilon,\delta,i}\} \in \mathcal{D}.$$

[为什么? 根据 $\bar{\varrho}^\delta$ 的选择——也就是说，根据 Sep_3 的定义——因为 $\varepsilon < \mu \Rightarrow \eta_\varepsilon \in \mathscr{P}_\delta$。]

$(*)_{10}$ 对于某个 $\varepsilon < \mu$,

$$A_\varepsilon := \{\delta \in E \cap S : \varepsilon_\delta = \varepsilon\} \in D^+.$$

[为什么? 根据 $(*)_9$ 以及 D 是 μ^+-完备的这一事实。]

但这是一个矛盾。 $\square_{2.5}$

注 2.7. 能够成功预测$\langle F_{\delta,\,i}(\eta) \restriction C_{\delta,\,i} : \ i \in u\rangle$在某个 $u \in [\kappa]^\kappa$上的值固然很好，但若能对 $u = \kappa$成功则更好。

一种可能: 如果我们只假设 $\theta = \theta^{<\kappa}$，并对每个 $u \subseteq \kappa$ 由 $(S_{\mathbf{p}[u]}, C_{\mathbf{p}[u]}) := (S_{\mathbf{p}}, C_{\mathbf{p}})$ 来定义$\mathbf{p}[u]$，但是

$$C'_{\mathbf{p}[u],\delta} := \{\alpha \in C'_{\mathbf{p},\delta} : \mathrm{otp}(C'_{\mathbf{p},\delta} \cap \alpha) \in u\}?$$

或者使用一个回归函数 $h: \ u \to \kappa$? 下文将做与此相近的处理。

定义 2.8. 设$\mathbf{p}$ 为一个 $(\lambda, \ \kappa, \ \chi)$-$\mathrm{BB}^1$-参数。

对于 $A \in [\kappa]^\kappa$，我们定义一个 $(\lambda, \ \kappa, \ \chi)$-$\mathrm{BB}^1$-参数

$$\mathbf{p}_A = \mathbf{p}[A] = (\langle C_{A,\delta}, C'_{A,\delta}, \overline{C}_{A,\delta} : \delta \in S\rangle, \mathcal{D}_A)$$

by

- $C_{A,\delta} := C_\delta$
- $C'_{A,\delta} := \{\beta \in C'_\delta : \mathrm{otp}(C'_\delta \cap \beta) \in A\}$.
- $\overline{C}_{A,\delta} = \langle C_{A,\delta,i} : i < \kappa\rangle$ is defined by $C_{A,\delta,i} := C_{\delta,h_A^{-1}(i)}$, where $h_A : A \to \kappa$ is the function $i \mapsto \mathrm{otp}(A \cap i)$.[13]
- $\mathcal{D}_A := \{\kappa\}$

观察 2.9。 1) $\mathbf{p}_A$，如上所定义，确实是一个(λ, κ, χ)-BB^1-参数。

2) 若$\mathbf{p}$ 是良好的，则$\mathbf{p}_A$也是如此。

[13]请注意，由于该函数严格递增，因此它是可逆的。

断言 2.10。 假设$\mathbf{p}$是一个(λ,κ,χ)-BB^1-参数， $\mathcal{D}_{\mathbf{p}}:=[\kappa]^\kappa$, D是一个在 λ, $\partial=\partial^{2^\kappa}$上的$(2^\kappa)^+$-完备滤子，并且 $\theta=\theta^{2^\kappa}$。

那么，$\mathbf{p}$具有连续的（D、 ∂、 θ）-BB^1-性质，当且仅当$\mathbf{p}_A$对某个 $A\in[\kappa]^\kappa$ 具有连续的（D、 ∂、 θ）-BB^1-性质。

证明。 $\Leftarrow$蕴含关系显然，因此我们集中讨论 $\Rightarrow$。令$\mathbf{p}$为一个（λ、 κ、 χ）- BB^1-参数，并令 D 如上。

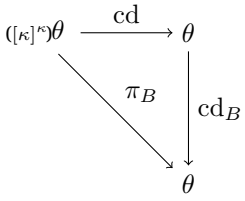
$\circledast_1$为导出矛盾，假设$\mathbf{p}_A$对所有 $A\in[\kappa]^\kappa$均不满足连续的（D、 ∂、 θ）-BB^1-性质。$\circledast_2$ (a) 因此，对于 $A\in[\kappa]^\kappa$，令其为一个连续的（$\mathbf{p}_A$、 ∂、 θ）-着色，见证这一失败。（即不存在$\mathbf{p}_A$-D-F_A-BB^1-序列 $\bar{c}\in{}^{S\times\kappa}\theta$。）(b) 现在，$F^A_{\delta,i}:{}^{C_{\delta,i}}\partial\to\theta$ 定义如下： $\bar{F}^1_A=\langle F^{A,1}_{\delta,i}:\delta\in S,\ i<\kappa\rangle$

—

- $\bullet_1$若 $i\in A$那么 $F^A_{\delta,i}:=F^{A,1}_{\delta,\mathrm{otp}(i\cap A)}$。
- $\bullet_2$若 $i\in\kappa\setminus A$ 那么 $F^A_{\delta,i}$ 恒为零。

自然地，我们取

$\circledast_3$ (a) cd：$({}^{[\kappa]^\kappa}\theta)\to\theta$ 和 cd*：$({}^{[\kappa]^\kappa}\partial)\to\partial$，两者都是双射。(b) 对于 $B\in[\kappa]^\kappa$，定义 cd$_B$： $\theta\to\theta$，使得下图交换:



其中 π_B 是将 $\langle\zeta_A$ 映射到 $A\in[\kappa]^\kappa\rangle\mapsto\zeta_B$的函数。(c) cd$^*_B:\partial\to\partial$ 将以类似方式定义。

接下来,

$\circledast_4$ 按如下方式选择 $F=\langle F_{\delta,i}:\ \delta\in S,\ i<\kappa\rangle$
dom$(F_{\delta,i})=:C_{\delta,i}\partial$，并对定义域中的 η，我们定义

$$F_{\delta,i}(\eta):=\mathrm{cd}\big(\langle F^A_{\delta,i}(\eta):A\in[\kappa]^\kappa\rangle\big).$$

根据我们的假设,

$\circledast_5$ 存在一个$\mathbf{p}$-D-F-BB^1-序列 $\bar{c}=\langle c_{\delta,i}:\ \delta\in S,\ i<\kappa\rangle\in{}^{S\times\kappa}\theta$。接下来,

$\circledast_6$ For every $A\in[\kappa]^\kappa$, we choose $\bar{c}_A:=\big\langle\mathrm{cd}_A(c_{\delta,i}):\delta\in S,\ i<\kappa\big\rangle$.

如果 $\bar{c}_A$ 是某个$^{\bar{}}A$ 的$\mathbf{p}_A$-D-F_A-BB^1-序列，那么我们就得出矛盾。

因此，假设:

$\circledast_7$ 对于每个 $A\in[\kappa]^\kappa$，都存在 $\eta_A\in{}^{\lambda}\partial$ 和 $E_A\in D$，使得

$$(\forall\delta\in S\cap E_A)(\exists i<\kappa)\big[F^{A,1}_{\delta,h_A^{-1}(i)}(\eta_A\restriction C_{\delta,h_A^{-1}(i)})\neq c^A_{\delta,h_A^{-1}(i)}\big].$$

$$(\text{Equivalently, } (\forall\delta\in S\cap E_A)(\exists i\in A)\big[F^A_{\delta,i}(\eta_A\restriction C_{\delta,i})\neq c^A_{\delta,i}\big].)$$

Now,

$\circledast_8$ $E:=\bigcap\limits_{A\in[\kappa]^\kappa}E_A\in D$.

[为什么？因为我们假设 D 是 $(2^\kappa)^+$-完备的。]

接下来,

$\circledast_9$ 定义 $\eta\in{}^{([\kappa]^\kappa)}\partial$ 为函数

$$\alpha\mapsto \mathrm{cd}^*\big(\langle\eta_A(\alpha):A\in[\kappa]^\kappa\rangle\big).$$

现在我们可以按照定理 2.5 的证明完成证明。 $\square_{2.10}$

结论 2.11。 假设定理 2.5 的子句 (A) 。另外，设 $\mathcal{D}_{\mathbf{p}}=[\kappa]^\kappa$、$2^\kappa\le\mu$ 和 $\theta^{2^\kappa}=\theta$。

对于某个 $A\in[\kappa]^\kappa$，$\mathbf{p}_A$ 具有$(D,2^\mu,\theta)$-BB^1-性质。

证明。 根据 2.5，我们知道

$(*)_1$ $\mathbf{p}$ 具有连续的 $(D,2^\mu,\theta)$-BB^1-性质。

设 $\partial_{..}=2^\mu$。我们想应用 2.10，因此先来检查其假设。首先，根据 2.5(A)(d)，$\mathbf{p}$ 是一个 (λ,κ,χ)-BB^1-参数，这是我们的一个假设。

我们还假设了 $\mathcal{D}_{\mathbf{p}}=[\kappa]^\kappa$ 和 $\theta^{2^\kappa}=\theta$，所以不必担心这些。

“D 是一个 μ^+-完备滤子”已在 2.5(A)(b) 中作了假设，并且我们又加入了 $2^\kappa\le\mu$，因此D 也是 $(2^\kappa)^+$-完备的。

最后，$\partial^{2^\kappa}=\partial$ 成立，因为我们定义了 $\partial_{..}=2^\mu$；因此（2^μ）$^\mu=2^\mu$，并且再次有$2^\kappa\le\mu$。

因此，2.10 中的结论成立，从而得到我们所需的结论。$\square_{2.11}$

结论 2.12。 1）我们可以将以下内容补充到2.5的结论中。

若 $\lambda_*=$共尾数$(\lambda_*)\ge\lambda$，则存在一个$\mathbf{p}^*$ 使得

(a) $\mathbf{p}^*$ 是一个良好的$(\lambda_*^+,\kappa,\chi)$-$\mathrm{BB}_*$-参数。$(b)$ $\mathbf{p}^*$ 具有连续的 λ-一致$(D,2^\mu,\theta)$-BB^0-性质。

2）若$\mathbf{p}$ 是一个具有(λ,κ,χ)-BB^0-性质的$(D,2^\mu,\theta)$-BB^0-参数，则$(\mathbf{p}\ \{\kappa\})$是一个具有$(D,2^\mu,\theta)$-BB^1-性质的(λ,κ,χ)-BB^1-参数。

证明。 1) 根据 [She91, §4], , 如同 [She05, §2]。

2）由定义可知，显然。 $\square_{2.12}$

注 2.13。对于 2.12，我们还可以说得更多：将 λ_*^+ 替换为 λ' 弱不可达基数或奇异基数的后继：参见 [She05]。

* * *

现在，我们可以按照引言中的承诺证明定理 0.4 了。

> 阅读本证明时，建议读者将第 4 页的定理 0.4、第 18 页的定义 2.1(1)以及第 20 页的引理 2.5放在手边。

Proof of 0.4: 我们如下定义一个 BB[1]-参数$\mathbf{p}$ （如定义 2.1 中所述）：

- $\bullet_1$ $(\lambda_{\mathbf{p}}\ \kappa_{\mathbf{p}}) := (\lambda,\kappa)$，取自 0.4(A)(a)-(b)（因此 $\lambda > \kappa$ 是正则的，且 2.1(1)(A)(a) 成立）。
- $\bullet_2$ $\chi := \min\{\sigma : 2^\sigma > \mu\}$ （因此 $\chi \le \mu$）。
- $\bullet_3$ $S_{\mathbf{p}} := S$，这是 S^λ_κ 根据 0.4(A)(b) 得到的平稳子集（因此 2.1(1)(A)(b) 成立）。
- $\bullet_4$ $C'_{\mathbf{p},\delta} := C'_\delta$ 根据 0.4(A)(c) 得到。它们满足 2.1(1)(C)(a)，因此我们令 $\bar\beta_\delta = \langle \beta_{\delta,i} : i < \kappa\rangle$ 按 2.1(1)(C)(b) 中的方式列出其元素。
- $\bullet_5$ 令 $C_{\mathbf{p},\delta} := \bigcup\limits_{i<\kappa} C^\bullet_{\beta_{\delta,i}}$，其中 $\langle C^\bullet_\beta : \beta < \lambda\rangle$ 已在 0.4(A)(d) 中给出。
- $\bullet_6$ 若 $\beta \in C'_\delta \wedge \mathrm{otp}(C'_\delta \cap \beta) = i$，则定义 $C_{\delta,i} := C^\bullet_\beta$。[14](a) 显然，每个 $C_{\delta,i} \subseteq C_{\mathbf{p},\delta} \cap \beta_{\delta,i}$，由此得到 2.1(1)(D)(b)。(b) 此外，$|C_{\delta,i}| < \chi$，因为根据 0.4(A)(d)，$2^{|C_{\delta,i}|} \le 2^\mu$，故 2.1(1)(D)(c) 成立。
- $\bullet_7$ $\mathcal{D}_{\mathbf{p}} := [\kappa]^\kappa$.

Now,

$\boxplus_1$ $\mathbf{p}$ 确实是一个 BB[1]-参数。

[为什么？我们尚未核对的唯一要求是条款 2.1(1)(E)。对于给定的 $\alpha < \lambda$，那里定义的集合是一个单元素集 $\{C^\bullet_{\beta_{\delta,i}}\}$，因此这一点很容易满足。]

令 D 为 λ 上的闭无界滤子。

$\boxplus_2$ 引理 2.5 中的所有假设都已满足。

为什么？由 0.4(A) 可知，2.5(A)(a) 成立。（我们在 0.4(A)(b) 中定义了 $\lambda := $共尾数$(2^\mu)$。）

子句 (A)(b) 根据我们上面对 D 的选择成立。

对于 (A)(c)，由 $\bullet_2$可得 $\chi \le \mu$。回想 $\theta = \theta^{2^\kappa}$ 和 $\theta < \mu$，显然 $\kappa < \chi$。由于 $\lambda := $ 共尾数(2^μ) $(> \mu)$，我们有 $\lambda \ge \chi$。

条款 (A)(d) 要求 $\mathbf{p}$ 是一个 BB[1]-参数，而我们刚刚已经证明了这一点。

对于 (A)(e)，注意到根据 0.4(A)(a)，$\theta \le \mu$。令 $\sigma < \chi$；根据我们对 χ的选择，必有 $2^\sigma \le \mu$，因此由于 $\theta < \mu$，我们有 $\theta^\sigma \le 2^\mu$。所以，$\theta^{<\chi} \le 2^\mu$，如所需。

最后，我们必须证明 (A)(f)：

$$\mathrm{Sep}_3(\lambda;\mu,\mu,\partial,\theta,\kappa,\mathcal{D}).$$

[14]注意，这一定义良好，因为对于任意由序数组成的集合 C，序列 $\langle \mathrm{otp}(\beta \cap C) : \beta \in C\rangle$ 严格递增。

[为什么这是真的？回想起 $\mathcal{D} ..= [\kappa]^\kappa$，我们将用 1.16 来证明。现在需要验证 1.16(A)-(D) 的要求均成立。子句 (A) 和 (D) 属于我们的假设，而“$\mathbf{U}_{\mathcal{D}}(\mu) = \mu$”成立，因为这等价于 $\mathbf{U}_\kappa(\mu) = \kappa$ (因为 $\mathcal{D} ..= [\kappa]^\kappa$)，而后者成立是因为 $\alpha < \mu \Rightarrow |\alpha|^\kappa \leq \mu$。

四个子句中的最后一个是 1.16(B)；若满足这一条，我们就能够得出 $\mathsf{Sep}_3(\lambda;\ \mu,\ \mu,\ \partial,\ \theta,\ \kappa,\ \mathcal{D})$。

翻回第 16 页，上面写着：“三元组 $(\mu,\ 2^\mu,\ \theta)$ 至少满足 1.7 中的一个条件。”在这些选项中，根据 0.4(A)，1.7(b) 成立，因此我们就完成了。]

由此得到 1.16 的结论，从而得到 2.5(A)(f)，并且已经证明了 $\boxplus_2$。

现在，根据引理 2.5 的结论，$\mathbf{p}$ 具有连续的 $(D,\ 2^\mu,\ \theta)$-BB^1-性质，因此根据 2.10，我们知道

$\boxplus_3$ 对于某个 $A \in [\kappa]^\kappa$，$\mathbf{p}_A$（如 2.8 中所定义）具有连续的 $(D,\ 2^\mu,\ \theta)$- BB^1-性质。

现在，为了完成证明，我们需要给出一个满足 $\overline{0}$.4(B) 的 $C = \langle C_\delta : \delta \in S\rangle$ s。我们选择 $\langle C^A_\delta \colon \delta \in S\rangle$，其中

$$C^A_\delta := \{\beta \in C_{\mathbf{p},\delta} : \mathrm{otp}(C_{\mathbf{p},\delta} \cap \beta) \in A\}.$$

现在来检验。 $\square_{0.4}$

Proof of 0.5。类似。 $\square_{0.5}$

§ 3. The DBB Property

以下结果依据 [She13b, 2.2$_{=\text{Ld.6}}$]。

定理 3.1. 我们有‘$(A)\ \Rightarrow (B)$’，其中

(A) (*a*) $\lambda := \min\{\partial :\ 2^\partial > 2^\mu\}$ （因此 $\lambda > \mu$ 是正则的）。（*b*）设 D 是定义在 λ 上、扩张余有界滤子的 μ^+-完备滤子。（*c*）$C = \langle C_\gamma : \gamma < \lambda\rangle$，其中 $C_\gamma \subseteq \bar{\mu}$。（*d*） $\theta \in [2,\mu]$（*e*）对某个 $\Upsilon < 2^\mu$，$Sep_1(\mu,\mu,\theta,\theta,\Upsilon)$ （或者也可能像之前一样是 $\Upsilon := 2^\mu \in Reg$）。

(*B*) 若 $\mathbf{F}^\gamma :\ {}^{C_\gamma}(2^\mu) \to \theta$ 对于 $\gamma < \lambda$，那么我们可以找到一个

$$\bar{c} = \langle c_\gamma : \gamma < \lambda\rangle \in {}^\lambda\theta$$

使得对于任意 $f :\ \mu \to 2^\mu$，对 D^+ 个 $\gamma < \lambda$，我们都有

$$\mathbf{F}_\gamma(f \restriction C_\gamma) = c_\gamma.$$

证明。由 [She13b, 2.2(β)$_{=\text{Ld.6}}$]。 $\square_{3.1}$

定义 3.2。设 $\lambda = \text{cf}(\lambda) > \mu \geq \kappa = \text{cf}(\kappa)$ 且 $\mu_* \leq \mu^+$。

1) 当满足以下条件时，我们称 $\mathbf{p}$ 为一个$(\lambda,\lambda_*,\mu,\mu_*,\kappa)$-*DBB* 参数[15]：

(A) (a) $\lambda \geq \lambda_* > \kappa$ 是正则基数。(b) $S \subseteq S^\lambda_\kappa$ 是 λ的平稳子集。(B) $\mathbf{p}$ 由 $C = C_0 = \langle C_\delta : \delta \in S\rangle$ 和 $C_1 = \langle C^\delta_\gamma : \delta \in S,\ \gamma < \lambda_*\rangle$ 组成，其中 (a) $\langle C_\delta : \delta \in S\rangle$ 与通常情况相同（即 $C_\delta \subseteq \delta = \sup(C_\delta)$ 且 $\text{otp}(C_\delta) = \kappa$），但我们增加要求 (b) $C^\delta_\gamma \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in C_\delta} [\alpha,\alpha+\mu)$，使得对于所有 $\delta \in S$、$\gamma < \lambda_*$ 和 $\alpha \in C_\delta$ 都成立。（因此 $\text{otp}(C^\delta_\gamma) = \kappa$。）(c) C_1 是一个 μ_*-自由序列。我们的意思是：若 $u \subseteq S \times \lambda_*$ 的基数为 $\leq \mu_*$，则存在某个序列 $\bar{\beta} = \langle \beta^\delta_\gamma : (\delta,\gamma) \in u\rangle$，满足 $\beta^\delta_\gamma \in C^\delta_\gamma$，使得

$$\alpha \in C_\delta \Rightarrow \alpha > \mu \wedge \mu \mid \alpha.$$

$$\left|C^\delta_\gamma \cap [\alpha,\alpha+\mu)\right| = 1$$

$$\langle C^\delta_\gamma \setminus \beta^\delta_\gamma : (\delta,\gamma) \in u\rangle$$

是一个由两两不交的集合组成的序列。

2) 如果除了上述条件外，$\mathbf{p}$ 还满足 $(\lambda,\lambda_*,\mu,\mu_*,\theta,\kappa)$-*DBB* 性质，则称其具有该性质，

[15] DBB 是 *Double Black Box.* 的缩写

(C) 如果 $\mathbf{F}^{\delta}_{\gamma}:{}^{C^{\delta}_{\gamma}}(2^{\mu})\to\theta$ 对于 $\gamma<\lambda_*$ 和 $\delta\in S$，那么我们可以找到序列

$$\bar{c}^{\delta}=\langle c^{\delta}_{\gamma}:\gamma<\lambda_*\rangle\in{}^{\lambda_*}\theta$$

使得对于任意的 $\delta\in S$ 和 $f:\delta\to 2^{\mu}$，存在某个 $\gamma<\lambda_*$，使得

$$\mathbf{F}^{\delta}_{\gamma}(f\restriction C^{\delta}_{\gamma})=c^{\delta}_{\gamma}.$$

3) 若我们说$\mathbf{p}$ 猜测闭无界集，则表示 $C_{\mathbf{p}}$ 也如此。

若 $\lambda_*=\lambda$，则可以省略它。类似地，若 $\mu_*=\mu^+$。

注 3.3。 1) 在定义 3.2 中，我们可以作如下修改：

- $\bullet_1$ 在条款 (1)(B) 中，我们添加 (B)(d) $D=\langle D_{\delta}:\delta\in S\rangle$，
  其中每个 D_{δ} 都是 λ_*上的一个滤子。
- $\bullet_2$ 然后在条款 (2)(C) 中，我们将“for some $\gamma<\lambda_*$”替换为“for D_{δ}-many $\gamma<\lambda_*$”。

2) 采用这一修改后，我们会在断言 3.4(1)⊞中增加一条：

⊞(f) $\bullet_1$ $D=\langle D_{\delta}:\delta\in S\rangle$，其中每个 D_{δ} 都是 λ_*上的滤子。

- $\bullet_2$ $\lambda_{\bullet}\in D_{\delta}$
- $\bullet_3$ $D_{\delta}\restriction\lambda_{\bullet}$ 是 $\lambda_{\bullet}$ 上一个扩展余有界滤子的 μ^+-完备滤子。

3) 3.4 的证明不会改变。

断言 3.4。 1) 如果以下条件对 ⊞ 成立，那么存在一个具有$(\lambda,\lambda_*,\mu,\mu_*,\theta,\kappa)$- *DBB* 性质的$\mathbf{p}$。

⊞ (a) $\kappa=\mathrm{cf}(\mu)<\mu(b)$ $\lambda_{\bullet}\le\lambda_*\le\lambda$，其中 λ 是正则的，且 $\lambda_{\bullet}:=$ 最小值$\{\partial:2^{\partial}>2^{\mu}\}$。$(c)$ $\bullet_1$ $\mathrm{pp}_{J^{\mathrm{bd}}_{\kappa}}(\mu)>\lambda$ 以及 $\mu_*:=\mu^+$，或者

$\bullet_2$ $\mu_*\le\mu$ 并且存在一个 μ_*-自由子集，它是 ${}^{\kappa}\mu$ 的子集，基数为 λ（见 §4）。(d) $\theta\in[2,\mu](e)$ $\mathrm{Sep}_1(\mu,\theta)$。

1A) 若(1)⊞ 成立，且 $S\subseteq\{\delta<\lambda:\mathrm{cf}(\delta)=\kappa$，并且 $\mu^2\mid\delta\}$ 在 λ 中平稳，则存在一个$\mathbf{p}$ 具有 $(\lambda,\lambda_*,\mu,\mu_*,\theta,\kappa)$-*DBB* 性质，且 $S_{\mathbf{p}}=S$。

1B) 若我们假设 $S\in\breve{I}_{\kappa}[\lambda]$，那么[16] 我们可以加上“$C_{\mathbf{p}}$ 是(λ,κ)-良好的”（见 1.2(6)）以及“$S_{\mathbf{p}}:=S$。”

1C) 此外，在 (1B) 中，我们可以将“$S_{\mathbf{p}}:=S$”替换为“$S_{\mathbf{p}}:=S\cap E$ 对某个闭无界集$E\subseteq\lambda$”，并添加“如果 $\beta\in C_{\mathbf{p},\,\delta_1}\cap C_{\mathbf{p},\,\delta_2}$ 那么 $C_{\mathbf{p},\,\delta_1}\cap\beta=C_{\mathbf{p},\,\delta_2}\cap\beta$。”

1D) 在 (1A) 和 (1B)中，我们都可以添加“$C_{\mathbf{p}}$ 猜测闭无界集。”

1E) 注意，如果 μ 是（例如）强极限奇异基数，则(1) ⊞(c) 即使在共尾数$(\mu)=\aleph_0$时仍然成立。

[16]请回忆，这样的 S 之所以存在，是因为 λ 和 κ 是正则的，且具有 $\lambda>\kappa^+$（如 $\lambda>\mu>\kappa$），因此我们可以应用 [She93，第1]节。

2) 在(1)部分中，我们可以将条款 $\boxplus(c)$ 替换为

$(c)'$ $\bullet_1$ $\mathrm{pp}_J(\mu) > \lambda$ *for some ideal* $J \supseteq [\kappa]^{<\kappa}$.
$\bullet_2$ $\mu = \mu^{<\kappa}$

2A) 如果我们将条件 3.2(1)(B)(c) 弱化为“(μ_*, J)-自由”，就可以采用上文的 $\bullet_1$ 。

3) 或者，

$(c)''$ $\bullet_1$ *As above.*
$\bullet_2$ $2^{\mu^{<\kappa}} < 2^\mu$.

注 3.5. 1) 关于定义 3.2(2)中的双重黑盒性质，我们可以允许 $\mathbf{F}^\delta_\gamma$ 的定义域为 ${}^{\mathcal{C}^\delta_\gamma}(2^\mu)$，其中 $\mathcal{C}^\delta_\gamma := \bigcup\limits_{\beta\in C^\delta} [\beta, \beta+\mu)$，值域为 $\subseteq \theta$。
(Alternatively, we may use $\mathcal{C}^\delta_\gamma := \{\beta : (\exists \beta' \in C^\delta_\gamma)[\beta + \mu^\gamma = \beta' + \mu]\}$.)
[为什么？ 因为 $\left|{}^\mu(2^\mu)\right| = 2^\mu$。]

2) 假设 $\lambda := 2^\mu \notin$是正则基数。那么，对于较弱版本的 DBB 性质，证明仍然成立；该版本将（3.2(1)(A)(a)）中的“λ 是正则的”替换为“$\mathrm{cf}(\lambda) > \kappa$”。（当然，我们仍要求 λ_* 和 κ 是正则的。）

3) 根据 §4，若 μ 是其上方的强极限奇异基数，则我们可以得到 $\mu_* := \mu^+$。

证明。 1) 首先，选择一个平稳的 $S \subseteq S^\lambda_\kappa$，使得

$$\delta \in S \Rightarrow \mu^2 \mid \delta.$$

接下来，按照3.2(1)(B)(a) 选择C；根据我们对 S 的选择，这是可行的。第三，根据$\boxplus$，选择一个 μ^+_*-自由序列

$$\langle \rho_\gamma : \gamma < \lambda\rangle \subseteq {}^\kappa\mu.$$

[为什么可以这样做？ 在子条款 $\boxplus(c)\bullet_1$ 中，这可由 [She94, Ch.II, §3] 得出；如果 $\bullet_2$ 成立，那么这显然成立。]

不失一般性 $\gamma < \lambda \Rightarrow \rho_\gamma(i) = i$ 模 κ。令 $\langle \rho^*_{\delta,\gamma} : \delta \in S,\ \gamma < \lambda\rangle$列表 $\langle \rho_\gamma :$ 无重复：我们可以这样做，因为 $|S \times \lambda| = \lambda$。

令 $\langle \beta^\delta_i : i < \kappa\rangle$ 按递增次序列出 C_δ，并令

- $\rho_{\delta,\gamma} := \langle \beta^\delta_i + \rho^*_{\delta,\gamma}(i) : i < \kappa\rangle$
- $C^\delta_\gamma := \mathrm{rang}(\rho_{\delta,\gamma})$.

令 D 为 λ上的闭无界滤子。因此

$$\mathbf{p} := (\lambda, \kappa, S, D, \langle C_\delta : \delta \in S\rangle, \langle C^\delta_\gamma : \delta \in S,\ \gamma < \lambda\rangle)$$

是良定义的。

接下来我们必须验证 $\mathbf{p}$ 确实是一个 $(\lambda, \lambda_*, \mu, \mu_*, \theta, \kappa)$-DBB 参数：也就是说，3.2(1) 的所有子句。

首先，定义开头对基数的要求成立，子句 (A) 亦然。

子句 3.2(B)(a)： 通过选择 $\langle C_\delta : \delta \in S\rangle$ 成立。

条款（B）（b）： 通过选择我们的 C^{δ}_{γ}-s 成立。

条款（B）（c）：

设 $u \in [S \times \lambda]^{<\mu_*}$。根据 $\langle \rho_\gamma$ 的选择：$\gamma < \lambda\rangle$，我们可以找到一个函数h：$u \to \kappa$，使得

$(*)_1$ 如果 $(\delta_1,\ \gamma_1) \neq (\delta_2,\ \gamma_2)$ 来自 u，且 $i \geq \max\big(h(\delta_1,\ \gamma_1)\ h(\delta_2,\ \gamma_2)\big)$，那么 $\rho^*_{\delta_1,\ \gamma_1}(i) \neq \rho^*_{\delta_2,\ \gamma_2}(i)$。

因此

$(*)_2$ 如果 $(\delta_1,\ \gamma_1) \neq (\delta_2,\ \gamma_2)$ 来自 u，且 $i_\ell \in \big[h(\delta_\ell,\ \gamma_\ell)\ \kappa\big)$ 对于 $\ell = 1,\ 2$，那么

$$\rho^*_{\delta_1,\gamma_1}(i_1) \neq \rho^*_{\delta_2,\gamma_2}(i_2).$$

[为什么？如果 $i_1 \neq i_2$，那么回忆 $\gamma < \lambda \Rightarrow \rho_\gamma(i) \equiv i$ 模 κ。$i_1 = i_2$ 情形就是 $(*)_1$。]

因此，条款（B）（d）确实成立。综上，我们证明了 $\mathbf{p}$ 是一个（$\lambda,\ \lambda_*,\ \mu,\ \mu_*,\ \theta,\ \kappa$）-DBB 参数。

最后，为什么它具有（$\lambda,\ \lambda_*,\ \mu,\ \mu_*,\ \theta,\ \kappa$）-DBB 性质？

给定 $\langle \mathbf{F}^{\delta}_{\gamma} : \gamma < \lambda_*,\ \ \delta \in S\rangle$ 如 3.2(2)(C) 中所述。为完成证明，我们需要按其中的要求构造出$\bar{c}_\delta = \langle c^{\delta}_{\gamma} : \gamma < \lambda_*\rangle$。

固定 $\delta \in S$，并令 h_δ：$\mu \to \delta$ 满足

$$\varepsilon < \mu \wedge \varepsilon \equiv i \bmod \kappa \Rightarrow h_\delta(\varepsilon) := \beta_{\delta,i} + \varepsilon.$$

由于$\langle \beta_{\delta,\ i}$：$i < \kappa\rangle$是递增的，并且对所有 $i < \kappa$都有 $\mu \,|\, \beta_{\delta,\ i}$，我们知道 h_δ是定义良好且一一对应的。

令 $\bar{C}'_\delta = \langle C'_{\delta,\gamma} : \gamma < \lambda_\bullet\rangle$ 定义为

$$C'_{\delta,\gamma} := \big\{\varepsilon < \mu : h_\delta(\varepsilon) \in C^{\delta}_{\gamma}\big\}.$$

对于 $\gamma < \lambda_\bullet$，将 $F_{\delta,\gamma}$：$^{C'_\delta{}_{,\gamma}}(2^\mu) \to \theta$ 定义为函数

$$f \mapsto \mathbf{F}^{\delta}_{\gamma}(f \circ h_\delta).$$

将 3.1 应用于 $\bar{C}'_\delta$与$\langle F_{\delta,\gamma} : \gamma < \lambda_\bullet\rangle$，我们得到那里所保证的序数序列 $\langle c^{\gamma}_{\delta} :$ $\gamma < \lambda_\bullet\rangle$。

由于 λ_* 可以是区间 $[\lambda_\bullet, \lambda]$ 中的任意基数，我们需要用额外的项来补齐该序列。只需对 $\gamma \in [\lambda_\bullet, \lambda_*)$ 令 $c^{\gamma}_{\delta} := 0$（且 $F_{\delta,\gamma}$ 恒为零），读者即可验证所得序列符合要求。

1A）同理。

1B-C）由 $\breve{}\, I_\kappa[\lambda]$ 的定义及断言 0.11。

1D) 使用 [She94，第 III 章，§1] 和 0.11(3)。

1E) 根据 §4。

2) 类似地，但在选择 $\bar{\rho} = \langle \rho_\gamma$ 时：$\gamma < \lambda\rangle$ 我们只要求它是 $(\mu^+,\ J)$-自由的。

Then we let $\mathrm{cd} : {}^{\kappa>}\lambda \to \lambda$ be a bijection.

3）同样如此。 $\square_{3.4}$

讨论 3.6。设 μ 是共尾数为 $\kappa<\mu$ 的强极限奇异基数，且 $\lambda=\lambda_* =:\min\{\partial: 2^\partial>2^\mu\}$。

(A) (a) 如果 $\lambda<2^\mu$ 和 $\kappa>\aleph_0$，那么 3.4$\boxplus$ 成立（参见 [She94]）。(b) 那么 $\lambda<2^\mu$ 和 $\kappa =:\aleph_0$呢？不过，我们知道 3.4$\boxplus$ 在许多情况下成立（例如，对于 $\mu<\mu_*$的一个闭无界集，其中 $\mu_* =:\beth_\delta>\kappa =:\mathrm{cf}(\mu_*)>\aleph_0$）。在 §4 中我们将证明它总是成立。(c) 3.4 似乎有助于构造（例如） μ^+-自由阿贝尔群。

(B) 但 $\lambda=\lambda_*=2^\mu$ 情形如何呢？在这种情形下，我们有 $\lambda=\lambda^{<\lambda}$，这是一个同样有助于构造的条件。我们能否构造一个基数为 λ^+的纠缠线性序？回想一下，根据 [She00]或 [She06]，我们有 $(D\ell)^*_\Lambda$。我们能否使用 λ的若干两两不相交子集？或者，针对某个正则 θ （例如 $\mathrm{cf}(2^{\aleph_0})$），找一个 ${}^\lambda\theta$ 的子集？(C) 同样，如果 $\lambda=2^\mu$，那么我们可以尝试使用$\mathfrak{d} =:\{\theta\in\mu\cap\mathrm{Reg}:(\exists\mu'\in(\mu,\lambda))[\mathrm{cf}(\mu')=\theta\wedge \mathrm{pp}^{\theta\text{-comp}}(\mu')=^+\lambda]\}$，如 [She13b] 中所示，只要 $\mathfrak{d} =:\{\kappa\}$ 不起作用。新的证明与 [She20],中的相同，使用 [She13a]。(D) 不过，我们可以在条款 (C) 中使用 BB_k。我们考虑上述的 $\mu_0<\ldots<\mu_{3n}$（即所有共尾数为 $\kappa<\mu_0$的强极限基数）。对每个 ℓ，我们按照 3.4 选择 p_ℓ，只是它们的自由性（按 [She20]的意义）满足其“乘积”是 $\aleph_{n\cdot\kappa^+}$-自由的，而且它们也具有其中所述的一个黑盒。

定义 3.7。1) 对于 $\Lambda_*\subseteq\Lambda_\bullet\subseteq{}^{\kappa>}\mu$，我们称 $\Lambda_\bullet$ 在 [17] $\bar{\Lambda_*}$之上是 (θ_2,θ_1)-自由的，当 $\theta_2\geq\theta_1$且对于每个基数为 $<\theta_2$的 $\Lambda\subseteq\Lambda_\bullet\setminus\Lambda_*$，都存在一个见证 (Λ,h)。其含义如下：

$\bar{}$(A) $\Lambda=\langle\Lambda_\gamma:\gamma<\gamma_*\rangle$ 是将 Λ 划分为 γ_* 个集合的划分，每个集合的基数均为$<\theta_1$ （因此 γ_* 是一个序数 $<\theta_2$）。(B) $h:\Lambda\to\kappa$。(C) 若 $\gamma<\gamma_*$、$\eta\in\Lambda_\gamma$，且 $i\in[h(\eta),\kappa)$，则$\eta(i)\notin\{\rho(j):\ j<\kappa,\ \rho\in\bigcup\Lambda_\beta\cup\Lambda_*\}_{\beta<\gamma}$

---

2) 对于 $\Omega\subseteq\{(\theta_2,\ \theta_1)\in\text{基数}\times\text{基数}:\ \theta_2\geq\theta_1\}$，当 $\Lambda_\bullet$ 对每个 $(\theta_2,\ \theta_1)\in\Omega$ 都是 $(\theta_2,\ \theta_1)$-自由的 over Λ_* 时，我们称 $\Lambda_\bullet$ 是 Ω-自由的 over Λ_*。

3) 假设 $\lambda=\mathrm{cf}(\lambda)>\mu\geq\kappa=\mathrm{cf}(\kappa)$，且 Ω 如第 (2) 部分所述。

我们称 $\mathbf{p}$ 是 $(\lambda,\ \lambda_*,\ \mu,\ \Omega\ \kappa)$-*DBB* 参数，当定义 3.2 的子句 (A) 和 (B)(a)-(b) 成立时，并且

$(\mathrm{B})(\mathrm{c})'$ $\bar{C}_1$ is Ω-free.

观察 3.8。假设（为清晰起见） $\Lambda_\bullet\subseteq{}^{\kappa>}\mu$ 是树状的。（也就是说，$\eta\neq\nu\in\Lambda_\bullet\wedge\eta(i)=\nu(j)\ \Rightarrow\ i=j\wedge\eta\restriction i=\nu\restriction i$。）

如果 $\Lambda_\bullet$ 在 $\varnothing$上具有基数 $<\theta$ 且是(θ,κ^+)-自由的，那么 $\Lambda_\bullet$ 是自由的。

证明。参见 [She20, §1]。 $\square_{3.8}$

[17]如果 λ_* 为空，我们可以省略它。

断言 3.9。 1) 若 $\boxplus$ 成立，则存在一个满足 $(\lambda, \lambda, \mu, \Omega\ \theta, \kappa)$-*DBB*- 性质的$\mathbf{p}$，其中

$\boxplus$ (a) $\kappa =$ 共尾数$(\mu) < \mu$(b)
$\lambda = \lambda^{<\lambda} = 2^{\mu}$(c) $\mathrm{pp}^{+}_{J^{\mathrm{bd}}_{\kappa}}(\mu) > \lambda$(d)
$\theta \in [2, \mu]$(e) Sep(μ， θ， Υ) 对于某个 $\Upsilon \leq \mu$。(f) $\Omega := \{(\kappa^{+\kappa}, \kappa^{+4})\}$

2) 与第(1)部分类似，但将子句 $\boxplus(f)$ 替换为

$(f)'$ $\Omega := \{(\theta^{+\kappa}, \theta^{+4}) : \theta \in [\kappa, \mu)\}$

3) 在第(1) 和(2)部分中，我们可以将子句 $\boxplus(c)$ 替换为

$(c)'$ $\bullet_1$ $\mathrm{pp}_J(\mu) \geq \lambda$ *for some ideal* $J \supseteq [\kappa]^{<\kappa}$.
$\bullet_2$ $\mu = \mu^{<\kappa}$

如3.4(2)中所述。

4) 如果 S 是 $\{\delta < \lambda$ 的平稳子集：共尾数$(\delta) = \kappa\}$，那么我们可以要求 $S_{\mathbf{p}} := S$，并且可以加上“$C_{\mathbf{p}} = \langle C_{\mathbf{p},\ \delta} :\ \delta \in S\rangle$ 猜测闭无界集。”如果 $S \in {}^{\smile}I_{\kappa}[\lambda]$，那么我们可以加上“$C_{\mathbf{p}}$ 是(λ, κ)-良好的。”

5) 在第(2)部分，我们可以将 $\mu = \mu^{<\kappa}$ 替换为 $2^{\mu^{<\kappa}} < 2^{\lambda}$。

注 3.10。 不需要 $\lambda = \lambda^{<\lambda}$；否则，3.4会给出更多内容。

证明。 1) 与3.4的证明类似，但在选择 $\bar{\rho}$ 时（证明开头），我们将“μ^{+}-自由”替换为“Ω-自由”。

[为什么这是可能的？在 [She20, 1.26=La51]证明的开头使用 θ （该证明依赖于 [She13a, 0.4-0.6=Ly19,y22,y40]）。]

2) 同上。

3) 与2.5(2)的证明类似。

4-5）清楚。 $\square_{3.9}$

§4. When do quite free subsets $\Lambda \subseteq {}^{\kappa}\mu$ exist?

我们知道，若 $\kappa =: \mathrm{cf}(\mu) < \mu < \lambda < \mathrm{pp}_J(\mu)$，其中 J 是 κ上的一个理想，那么存在一个 $<_J$-递增的 (μ^+, J)-自由序列 $\bar{f} \in {}^{\lambda}({}^{\kappa}\mu)$。这意味着，若$\mu$ 是具有不可数共尾数的强极限奇异基数，且 $\lambda \in (\mu, 2^\mu)$，那么存在一个基数为 λ的μ^+-自由子集 $\Lambda \subseteq {}^{\kappa}\mu$。对于许多满足 $\mathrm{cf}(\mu) = \aleph_0$ 的基数 μ，此结论也成立（参见 [She94]）。这有一些应用，例如可用于证明存在具有平凡对偶的 μ^+-自由阿贝尔群（TDC$_\mu$）。

我们打算对所有 μ-s 证明这一点。

这是“假设 GCH 的否定有助于证明有趣结果”这一论点的一个例子。上文我们讨论了奇异基数。那么正则基数呢？如果 $2^\theta = 2^{<\mu} < 2^\mu$ (因此 $\theta < \mu$)，那么根据与 Devlin 合作的一项早期结果 [DS78]，我们在 μ 上有弱菱形原理。对于本世纪的结果，[CS16] 与 Chernikov 表明，通过可能共尾性考量，对每个 μ，都存在 $\mu_0 =: \mu < \mu_1 < \ldots < \mu_n =: 2^\mu$，使得对 $n \le 6$，$\mathrm{trp}^+_{\kappa_\ell}(\mu_\ell) > \mu_{\ell+1}$（其中 $\kappa_\ell =: \mathrm{cf}(\mu_\ell) < \mu_\ell$）。（见下文 4.2。）

我们能得到自由性结果吗？这里我们来看看能否得到“对每个 $\ell < n$，都存在一个相当自由的子集 $\Lambda_\ell \subseteq \lim \mathcal{T}$，其基数为 μ_ℓ。”$_{\kappa_\ell}$

一个颇具代表性的简洁结果（在 §0 中有所引用）如下。

定理 4.1。若 μ 是强极限奇异基数，$\kappa := \mathrm{cf}(\mu)$，且 $\lambda \in (\mu, 2^\mu)$，则存在一个基数为 λ 的 μ^+-自由子集 $\Lambda \subseteq {}^{\kappa}\mu$。

回顾：

定义 4.2。1) 对于 $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa) \le \mu$，令 $\mathrm{trp}^+_\kappa(\mu)$ 为满足以下条件的最小 λ：不存在一个基数为 μ、具有 $\ge \lambda$ 条 κ-分支的子树 $\mathcal{T} \subseteq {}^{\kappa>}\mu$。

（trp 是树幂的缩写。）

2) 对于 J 上的理想 $\kappa < \mu$ 和 $\Lambda \subseteq {}^{\kappa}\mu$，若对每个 $\Lambda' \in [\Lambda]^{<\lambda}$ 都存在 $f: \Lambda' \to J$ 使得

$$\eta \neq \nu \in \Lambda' \wedge i \in \kappa \setminus \big(f(\eta) \cup f(\nu)\big) \Rightarrow \eta(i) \neq \nu(i).$$

3) 对于 J κ 上的理想以及 $\bar{A} = \langle A_\varepsilon : \varepsilon < \kappa \rangle$，令 $T^+_J(\bar{A})$ 为满足不存在 [18] $\Lambda \subseteq \prod_{\varepsilon<\kappa}(A_\varepsilon \cup \{0\})$ 基数为 λ，使得

$$\eta \neq \nu \in \Lambda \Rightarrow \big\{i < \kappa : 0 \neq \eta(i) \neq \nu(i) \neq 0\big\} \equiv \kappa \mod J.$$

3A) 令 $\mathbf{T}^+_J(\bar{A})$ 为满足下述条件的最小 λ：不存在满足 $\boxplus_{\bar{A},\Lambda}$ 的 Λ。

$\boxplus_{\bar{A},\Lambda}$ (a) $\Lambda \subseteq \bigcup\limits_{a \in J^+} \prod\limits_{i \in a}(A_i \cup \{0\})$

(b) $|\Lambda| \ge \lambda$

(c) $\eta \neq \nu \in \Lambda \Rightarrow \big\{i \in \mathrm{dom}(\eta) \cap \mathrm{dom}(\nu) : \eta(i) = \nu(i)\big\} \in J$.

[18] 我们添加 $\{0\}$，这样就不必担心 $A_\varepsilon =: \varnothing$。

3B) 在上文中，若 $\bar{A}$ 是常值序列 $\langle B:\ \varepsilon<\kappa\rangle$，则我们可以写作 T^+_J (B) 和 $\mathbf{T}_J$(B)。

3C) J 的默认值是 $[\kappa]^{<\kappa}$。如果省略 J，我们指的就是这个。

4) 对于 $\chi\geq\lambda\geq\theta\geq\sigma$，cov($\chi$，$\lambda$，$\theta$，$\sigma$) 表示存在一个基数为 $\leq\chi$ 的 $\mathscr{P}\subseteq[\lambda]^{<\theta}$，使得每个 $u\in[\lambda]^{<\theta}$ 都包含在 $<\sigma$ 个 $\mathscr{P}$ 成员的并集中。

观察 4.3。 1)不失一般性，我们可以将 4.2(2) 加强为

$$\eta\neq\nu\in\Lambda'\wedge\big[i\in\kappa\setminus f(\eta)\big]\wedge\big[j\in\kappa\setminus f(\nu)\big]\Rightarrow\eta(i)\neq\nu(j).$$

2) 同理可见 4.2(3)。

3) 如果 $\mu=\mu^{<\kappa}<\mu^{\kappa}$，那么 $\mathrm{trp}_\kappa(\mu)=\mu^\kappa$ （甚至 $\mathrm{trp}^+_\kappa(\mu)=(\mu^\kappa)^+$）。因此，如果 μ 是共尾数为 κ 的强极限基数，那么 $\mathrm{trp}_\kappa(\mu)=2^\mu$。

4) 如果 $\chi\geq\lambda\geq\theta>\sigma$ 且 σ 是正则不可数的，那么 $\mathrm{cov}(\chi,\lambda,\theta,\sigma)$ 成立当且仅当

$$\chi\geq\sup\big\{\mathrm{pp}_{\mathrm{cf}(\mu)\text{-comp}}(\mu):\mu\in[\theta,\lambda],\ \mathrm{cf}(\mu)\in[\sigma,\theta)\big\}.$$

5) 假设 $A=\langle A_\varepsilon:\ \varepsilon<\kappa\rangle$，其中 $|A_\varepsilon|\geq2^\kappa$，且 J 是 κ 上的理想，使得

$$u\in J^+\Rightarrow T^+_J(\bar{A})=T^+_{J{\restriction}u}(\bar{A}{\restriction}u).$$

那么，对于某个共尾数为 $\leq2^\kappa$ 的 σ，有 $\mathbf{T}^+_J(\bar{A})=T^+_J(\bar{A})$ 或 $\mathbf{T}^+_J(\bar{A})=\sigma$，且 $T^+_J(\bar{A})=\sigma^+$。

6) 在第 (5) 部分中，如果 $J:=[\kappa]^{<\kappa}$，那么 $\mathbf{T}^+_J(\bar{A})=T^+_J(\bar{A})$。

7) 在第 (5) 和 (6) 部分中，我们可以将 2^κ 替换为 $\mathrm{cf}(\mathcal{P}(\kappa)\setminus J,\subseteq)$。

证明。 1-2) 由于 $\mu\geq\kappa$，我们可以通过 $\eta'(i):=\mathrm{pr}(\eta(i),i)$ 定义函数 $\eta'\in{}^\kappa\mu$，其中 $i<\kappa$ （其中 $\mathrm{pr}:\mu\times\mu\to\mu$ 是某个双射），然后将 η 替换为 η'。

3) 经典的。

4) 根据 [She94]。

5) 显然$\mathbf{T}^+_J(\bar{A})\geq T^+_J(\bar{A})$。为得到‘$\leq$’方向，假设

$$\circledast_1\ \chi\in\big(2^\kappa,\mathbf{T}^+_J(\bar{A})\big)\ (\text{or just }\big|\mathcal{P}(\kappa)/J\big|<\chi<\mathbf{T}^+_J(\bar{A})).$$

对 $\alpha<\chi$，令 $\eta_\alpha\in\prod\limits_{i\in u_\alpha}A_i$ （其中 $u_\alpha\in J^+$）见证 $\circledast_1$。

对每个 $u\in J^+$，定义$W_u:=\{\alpha<\chi:\ u_\alpha=u\}$。若对某个 u，集合 W_u 的基数为 χ，则显然 $T^+_{J{\restriction}u}(\bar{A}{\restriction}u)>\chi$，证毕。

因此假设

$$u\in J^+\Rightarrow|W_u|<\chi;$$

回顾 $\chi>\big|\mathcal{P}(\kappa)/J\big|$，必然共尾数$(\chi)\leq\big|\mathcal{P}(\kappa)/J\big|$ 且 $\chi=$上确界$\big\{|W_u|:\ u\in J^+\big\}$。

现在 $\langle\eta_\alpha:\ \alpha\in W_u\rangle$ 本质上见证了“$T^+_{J{\restriction}u}(\bar{A}{\restriction}u)\geq|W_u|$”，我们就可以轻松完成了。

（注意，如果$\mathbf{T}^+_J(\bar{A}) > \chi^+$，那么我们本可以使用 χ^+ 而不是 χ。）

6) 对于 $A \in J^+ = \mathcal{P}(\kappa) \setminus J$，令 $h_A : \kappa \to A$ 为该函数的逆函数

$$i \mapsto \mathrm{otp}(A \cap i).$$

对于每个 $A_i \in A$（也就是说，对于每个 $i < \kappa$），令 pr_i 为 $(A_i \cup \{0\}) \times J^+$ 与 A_i 之间的一个双射。

与第 (3) 部分的证明开头相同，对于每个 $\alpha < \chi$，我们定义 $\eta'_\alpha \in \prod A_i$ 如下：$i<\kappa$。

$\circledast_\alpha$ For $\alpha < \chi$ and $i < \kappa$, we let $\eta'_\alpha(i) := \mathrm{pr}_i\big(h_{u_\alpha}(i), u_\alpha\big)$

现在 $\langle \eta'_\alpha : \alpha < \chi\rangle$ 见证了"$\mathbf{T}^+_J(\bar{A}) > \chi^+$。"

7) 留给读者。 $\square_{4.3}$

现在进入本节的主要结果：4.4、4.5、4.6。（读者可以重点关注"$\kappa_* = \kappa$、$\mu_* = \mu$"的情形，以及 4.4 的第 (1) 部分。）

断言 4.4。1) 如果以下子句 (a)-(e) 成立，那么存在一个(μ^+_*, J)-自由子集$\Lambda \subseteq {}^\kappa\mu$，其基数为 λ。

(a) $\kappa_* \le \kappa$ 是正则的，并且 J 是 κ上的一个 κ_*-完备理想。(b) $\kappa := \mathrm{cf}(\mu) < \mu_* \le \mu \le \lambda \le \chi(c)$ $\mu^\kappa \ge \chi^+(d)$ $\mathrm{cov}(\chi, \lambda, \mu_*, \kappa^+_*)(e)$ $\alpha < \mu_* \Rightarrow |\alpha|^\kappa < \mu$

2) 在第(1)部分中，我们可以将子句(c) 和(e) 替换为

$(c)'$ $T^+_J(\mu) > \chi^+$

$(e)'$ $\alpha < \mu \Rightarrow \mathbf{T}^+_J(|\alpha|) \le \chi^+$.

3) 如果我们弱化条款 '$T^+_J(\mu) > \chi^+$' 中的$(c)'$，改为'存在一个序数序列α，满足 $\mu = \bigcup \alpha_j$，其中每个 $\alpha_i < \mu$，且 $\mathbf{T}^+_{J_-}(\alpha) > \chi^+$，' 那么我们仍可得出结论：$j<\kappa$存在一个 μ^+_*-自由子集 $\bigcup_{u\in J^+} \prod_{i\in u} \alpha_i$。

证明。1) 我们将证明，(1) 部分可由 (2) 部分推出。为此，我们需要证明假设 (1)(a)-(e) 蕴含 (2)$(c)'$,$(e)'$。

关于条款 $(c)'$：由于 $\mathrm{cf}(\mu) = \kappa$，存在一个递增序列$\langle \mu_i : i < \kappa\rangle$，其极限为 μ。根据条款 (e)，不失一般性地，$\mu_i = (\mu_i)^\kappa > 2^\kappa$。由条款 (1)(c) 和基本的基数算术，

$$\big|\prod_i \mu_i\big| = \big|\sum_i \mu_i\big|^\kappa = \mu^\kappa.$$

因此存在一个序列 $\langle \eta_\alpha : \alpha < \chi^+\rangle$，其元素来自 $\prod \mu_i$ 且无重复，$i<\kappa$并且存在一个单射 $\mathrm{cd}_i : {}^i(\mu_i) \to \mu_i$，对每个 $i < \kappa$ 都成立。对于 $\alpha < \lambda$，我们将 $\nu_\alpha \in {}^\kappa\mu$ 定义为

$$i < \kappa \Rightarrow \nu_\alpha(i) := \mathrm{cd}_i(\eta_\alpha \restriction (i+1)).$$

显然，$\alpha<\beta<\chi^+ \Rightarrow \left|\left\{i<\kappa\colon \nu_\alpha(i)=\nu_\beta(i)\right\}\right|<\kappa$. 因此，根据关于 J 的假设，序列 $\langle \nu_\alpha\colon \alpha<\chi^+\rangle$ 见证了 $T^+_J(\mu)>\chi^+$。

至于条款 (2)(e)′，它直接由 (1)(e) 得出。

2）首先，

$(*)_1$ 设 $\mathscr{P}\subseteq[\lambda]^{<\mu_*}$ 为定义 4.2(4) 所保证的覆盖，回顾我们在条款 (1)(d) 中假设了 $\mathrm{cov}(\chi,\lambda,\mu_*,\kappa_*^+)$。（因此特别地，$|\mathscr{P}|\le\chi$。）$(*)_2$ 设 $\Lambda^*\subseteq {}^{\kappa}\mu$ 见证 $T^+_J(\mu)>\chi^+$（如条款 (2)(c)′ 中所假设）。注意这意味着 $|\Lambda^*|\ge\chi^+$。

我们将尝试通过对 $\alpha<\lambda$ 进行归纳来选取 η_α 与 $\bar a_\alpha$，使得

$(*)^\alpha_3$ (a) $\eta_\alpha\in\Lambda^*$(b) $\bar a_\alpha=\langle a^\alpha_u\colon u\in\mathscr{P}\rangle$(c) $a^\alpha_u\in J$(d) 若 $u\in\mathscr{P}$、$\beta\in u\cap\alpha$ 与 $i\in\kappa\setminus\left(a^\alpha_u\cup a^\beta_u\right)$，则 $\eta_\alpha(i)\neq\eta_\beta(i)$。

假设我们已成功推进至阶段 α，对于每个 $u\in\mathscr{P}$ let

$$S_{\alpha,u}:=\left\{\eta_\beta(i):\beta\in u\cap\alpha,\ i\in\kappa\setminus a^\beta_u\right\}.$$

因此 $S_{\alpha,\ u}\in[\mu]^{<|u|+\kappa}$；并且由于 $|u|+\kappa<\mu_*$，我们可以说 $S_{\alpha,\ u}\in[\mu]^{<\mu_*}$。

对于 $\eta\in\Lambda^*$，令

$$W_{\alpha,u,\eta}:=\eta^{-1}(S_{\alpha,u})$$

and

$$\Lambda_{\alpha,u}:=\left\{\eta\in\Lambda^*:W_{\alpha,u,\eta}\notin J\right\}.$$

Now

- $\bullet_{3.1}$ $|\Lambda_{\alpha,u}|<\mathbf{T}^+_J(S_{\alpha,u})$.

[为什么？因为 $\left|\{\eta\restriction W_{\alpha,u,\eta}\colon \eta\in\Lambda_{\alpha,\ u}\}\right|<\mathbf{T}^+_J(S_{\alpha,\ u})$，根据其定义。]

由于 $|S_{\alpha,\ u}|\le|u|+\kappa$，我们可以得出 $|\Lambda_{\alpha,\ u}|<\mathbf{T}^+_J(|u|+\kappa)$，因此

- $\bullet_{3.2}$ $|\Lambda_{\alpha,u}|\le\chi$.

[为什么？根据我们的假设中的条款（e）′。]

因此（回想（$*$）$_1$）

$(*)_4$ $\Lambda_\alpha:=\bigcup\limits_{u\in\mathscr{P}}\Lambda_{\alpha,u}$ has cardinality $\le|\mathscr{P}|+\chi=\chi<|\Lambda^*|$.

因此我们可以选取 $\eta_\alpha\in\Lambda^*\setminus\Lambda_\alpha$，现在：

（$*$）$_5$ 对于每个满足 $u\ni\alpha$ 的 $u\in\mathscr{P}$，我们都可以按（$*$）$^\alpha_3$ (d) 中的要求选取 a^α_u。

[为什么？因为 $\eta_\alpha\notin\Lambda_{\alpha,\ u}$.]

最后，令 $\Lambda:=\{\eta_\alpha:\alpha<\lambda\}$。

$(*)_6$ $\Lambda\in[\Lambda^*]^\lambda$ 是 μ^+-自由的。

为什么？首先，根据 $(*)_1$中 $\mathscr{P}$ 的定义， $\bigcup \mathscr{P} = \lambda$。因此，若 $\alpha < \beta < \lambda$，则存在某个 $u \in \mathscr{P}$，使得 $\beta \in u$。但根据我们的选择，$\eta_\beta \notin \Lambda_{\alpha,\, u}$，因此 $\eta_\alpha \neq \eta_\beta$。此外， $\eta_\alpha \neq_J \eta_\beta$（也就是说， $\{i < \kappa :\ \eta_\alpha(i) = \eta_\beta(i)\} \in J$）。因此 $|\Lambda| = \lambda$。

其次，令 $u^* \in [\lambda]^{<\mu_*}$。那么根据 $\mathscr{P}$ （在 $(*)_1$ 中）的选取，存在一个序列

$$\langle u_i : i < \kappa_* \rangle \subseteq \mathscr{P}$$

使得 $u^* \subseteq \bigcup u_i$。对于 $\alpha \in u^*$，令 $i_\alpha = i(\alpha) := \min\{i < \kappa_* :\ \alpha \in u_i\}$ 并令 $a^*_\alpha := a^\alpha_{u_{i(\alpha)}}$。令

$$W := \big\{(\alpha,\beta) \in u^* \times u^* : \big(\exists j \in \kappa \setminus (a^*_\alpha \cup a^*_\beta)\big)\big[\eta_\alpha(j) = \eta_\beta(j)\big]\big\}.$$

显然， $\alpha \in u^* \Rightarrow \big|\{\beta :\ (\alpha,\beta) \in W\}\big| \leq \kappa_*$。因此（注意到 W 是 u^* 上的一个对称关系），我们可以在 u 上找到一个等价关系 E，使得 $(\alpha,\beta) \in W \Rightarrow \alpha\ E\ \beta$，且每个等价类的基数均为 $\leq \kappa_*$。

对于 E 的一个等价类 S，令 $\langle \alpha^S_j :\ j < j_S \leq \kappa\rangle$ 将 S 无重复地列出。对于 $\alpha := \alpha^S_j \in S$，令

$$a_\alpha := a^*_\alpha \cup \big\{i \in \kappa_* : (\exists \varepsilon < j)\big[\eta_{\alpha^S_\varepsilon}(i) = \eta_\alpha(i)\big]\big\}.$$

这是 J 的一个成员，因为 $j < \kappa_*$ 且 J 是 κ_*-完备的（根据假设 (1)(a)），并且根据我们对 Λ 的选择。

因此 $\langle a_\alpha : \alpha \in u\rangle$ 见证了 $(*)_6$ 中的自由性要求。

3) 类似地，但在 $(*)_2$ 中，我们选择 Λ^* 来见证子句 (c)″。 $\square_{4.4}$

断言 4.5. 如果下面的子句 (a)-(f) 成立，则存在一个基数为 λ 的 (μ^+, J)-自由子集 $\Lambda \subseteq {}^\kappa\mu$。

- (a) J *is a* κ*-complete ideal on* κ.
- (b) $\kappa := \mathrm{cf}(\mu) < \mu < \mu_\bullet \leq \lambda \leq \chi$
- (c) $\mathbf{T}^+_J(\mu) > \chi^+$
- (d) $\kappa_\bullet := \mathrm{cf}(\mu_\bullet) \in [\kappa^+, \mu)$ *and*
$$\partial \in (\mu, \mu_\bullet) \wedge \mathrm{cf}(\partial) \in [\kappa^+, \mu) \Rightarrow \mathrm{pp}_{\mathrm{cf}(\partial)}(\partial) < \mu_\bullet.$$
- (e) $\lambda^+ < \mathrm{pp}^+_{J_\bullet}(\mu_\bullet)$, *where* $J_\bullet$ *is a* κ^+*-complete ideal on* $\kappa_\bullet$.[19]
- (f) $\alpha < \mu \Rightarrow |\alpha|^{\kappa_\bullet} < \mu$.

证明。首先，

$(*)_1$ There exists $\bar\alpha^\bullet = \langle \alpha^\bullet_i : i < \kappa\rangle \in {}^\kappa\mu$ such that $T^+_J(\bar\alpha^\bullet) > \chi^+$.
[为什么？根据假设 (c)，存在 $\Lambda \subseteq \bigcup {}^b\mu$ 见证 $\mathbf{T}^+_J(\mu) > \chi^+$.$_{b \in J^+}$

现在令 $\langle \mu_i :\ i < \kappa\rangle$ 递增，且极限为 μ；因此，对每个 $\eta \in \Lambda$，都存在一个递增函数 $h_\eta :\ \kappa \to \kappa$，使得 $i \in \mathrm{dom}(\eta) \Rightarrow \eta(i) < \mu_{h_\eta(i)}$。由于 $\big|\{h_\eta : \eta \in \Lambda\}\big| \leq 2^\kappa \leq \chi$，显然存在某个 $h \in {}^\kappa\kappa$，使得集合 $\Lambda_h := \{\eta \in \Lambda :\ h_\eta = h\}$ 的基数为 $\geq \chi^+$。

So let $\alpha^\bullet_i := \mu_{h(i)}$ witness $(*)_1$.

其次，

[19] 或者，也许 $J_\bullet$ 只是 $(\kappa + \text{共尾数}(J, \subseteq))^+$-完备的。

$(*)_2$ 我们可以对每个 $\lambda' \in (\mu,\ \mu_\bullet)$ 应用 4.4(2)，其中 $\kappa,\ \kappa,\ J,\ \mu,\ \mu,\ \lambda',\ \lambda'$ 在此代替 $\kappa_*,\ \kappa,\ J,\ \mu_*,\ \mu,\ \lambda,\ \chi$。

我们必须检查所有假设是否成立。

子句 (a)： 根据我们的假设中的子句 (a)，该子句成立。

子句 (b)： 根据我们的假设中的子句 (b)，该子句成立；回想一下 $\mu < \lambda' < \mu_\bullet$。

子句 (c)′： 根据 $(*)_1$。

子句 (d)： 根据假设 (d) 中的第二个短语以及 4.3(4)，该子句成立。

条款 (e),(e)′： 由假设 (f) 可直接推出。

因此我们得到

$(*)_3$ There is a (J,μ^+)-free $\Lambda \subseteq \prod\limits_{i<\kappa} d_i$ of cardinality $\mu_\bullet$.

[为什么？回顾 $\kappa_\bullet = $ 共尾数$(\mu_\bullet) < \mu < \mu_\bullet$，存在一个基数的递增序列 $\langle \lambda_\varepsilon : \varepsilon < \kappa_\bullet\rangle$ 满足 $\lambda_0 > \mu$，且极限为 $\mu_\bullet$。

应用我们刚刚在 $(*)_2$，中得到的 4.4(1)+(2) 的结论，对每个$\varepsilon < \kappa_\bullet$，存在一个 μ-自由子集 $\Lambda_\varepsilon \subseteq {}^\kappa\mu$，其基数为 $\lambda_{\varepsilon\circ}$ 对于每个 $\eta \in \Lambda_\varepsilon$，定义 $\nu^\varepsilon_\eta = \langle \kappa_\bullet \cdot \eta(i) + \varepsilon :\ i < \kappa\rangle$。现在 $\Lambda = \{\nu^\varepsilon_\eta :\ \varepsilon < \kappa_\bullet,\ \ \eta \in \Lambda_\varepsilon\}$ 正如所承诺的。]

$(*)_4$ 令 $\langle \eta^*_\alpha : \alpha < \mu_\bullet\rangle$ 列出 Λ 的成员，且无重复。

第三，应用定义 4.2(3)和假设的条款 (e)，回顾[She94，第 II 章，第 3 节。1]，

$(*)_5$ 存在一个 $<_{J_\bullet}$-递增序列 $\bar f = \langle f_\gamma :\ \gamma < \lambda^+\rangle \subseteq {}^{\kappa_\bullet}\mu_\bullet$ （因此序列中的所有函数两两 $\neq_{J_\bullet}$）。

根据 [她94]，

$(*)_6$ 不失一般性，$f \restriction \lambda = \langle f_\gamma :\ \gamma < \lambda\rangle$ 是一个 $J_\bullet$-自由序列，且 $\gamma < \lambda \Rightarrow f_\gamma < f_\lambda$。 $(*)_7$ 对于每个 $i < \kappa$，我们选取一个单射函数 g_i，使得

(a) $\mathrm{dom}(g_i) = \bigcup\limits_{b\in J^+_\bullet} {}^b(\alpha^\bullet_i)$

(b) $\mathrm{rang}(g_i) \subseteq \mu$

[为什么这样的 g_i 存在?

The set $W_i := \bigcup\limits_{b\in J^+_\bullet} {}^b(\alpha^\bullet_i)$ is a subset of $\bigcup\limits_{u\subseteq\kappa_\bullet} {}^u(\alpha^\bullet_i)$, which has cardinality $|\alpha^\bullet_i|^{\kappa_\bullet}$; 根据我们假设的子句（$f$），这一点显然成立。因此，存在一个从$W_i$ 到 μ的单射；这满足（$*$）$_7$，所以它将是我们的 $g_{i\circ}$]

$(*)_8$ 对于每个 $\gamma < \lambda$，我们选取 $\eta_\gamma \in {}^\kappa\mu$ 如下：

For each $i < \kappa$ let $\nu_{\gamma,i} := \left\langle \eta^*_{f_\gamma(\xi)}(i) : \xi < \kappa_\bullet\right\rangle \in {}^{\kappa_\bullet}(\alpha^\bullet_i)$. Now let

$$\eta_\gamma := \left\langle g_i(\nu_{\gamma,i}) : i < \kappa\right\rangle.$$

最后，

$(*)_9$ $\bar\eta = \langle \eta_\gamma : \gamma < \lambda\rangle$ is as promised.

为什么？显然，$\bar{\eta}$ 是由 ${}^{\kappa}\mu$的成员组成的无重复序列。设 $u \in [\lambda]^{\leq \mu}$，我们将证明 $\bar{\eta} \restriction u$ 是自由的。

$(*)_{9.1}$ 不失一般性 $|u| < \mu$。

[为什么？根据 [她19]。]

$(*)_{9.2}$ 我们可以找到 $\langle b^*_\gamma : \gamma \in u \rangle \subseteq J_\bullet$ 使得若 $\gamma \neq \varepsilon \in u$ 且 $j \in \kappa_\bullet \setminus \left(b^*_\gamma \cup b^*_\varepsilon\right)$，则 $f_\gamma(j) \neq f_\varepsilon(j)$。

[为什么？根据 $(*)_6$。]

$(*)_{9.3}$ 设 $W := \{f_\gamma(j) : \gamma \in u,\ j < \kappa_\bullet\}$（因此 $W \in [\mu_\bullet]^{<\mu}$）。因此存在一个序列 $\langle a_\beta : \beta \in W \rangle \in {}^{W}J$，它见证了 $\bar{f} \restriction W$ 是自由的。

$(*)_{9.4}$ 我们可以选择 $\langle a_\gamma : \gamma \in u \rangle$ 使得

- $a_\gamma \in J$
- $\{j < \kappa_\bullet : a_{f_\gamma(j)} \subseteq a_\gamma\} \in J^+_\bullet$.

[为什么？由于 $b_\gamma \in J^+_\bullet, b^*_\gamma \in J_\bullet$，且 $J_\bullet$ 是 κ^+-完备的。]

$(*)_{9.5}$ If $\gamma \neq \varepsilon \in u$ and $j \in \kappa \setminus \left(a_\gamma \cup a_\varepsilon\right)$ then $\eta_\gamma(j) \neq \eta_\varepsilon(j)$.

[为什么？把子句 $(*)_{9.1}$-$(*)_{9.4}$ 放在一起。]

现在我们完成了。 $\square_{4.5}$

命题 4.6。如果 μ 是强极限基数，$\kappa := \mathrm{cf}(\mu) < \mu$，且 $\lambda \in (\mu, 2^\mu)$，那么存在一个基数为 λ的μ^+-自由 $\lambda \subseteq {}^{\kappa}\mu$。

证明。令 $\Theta_{\mu,\kappa} := \{\chi \in (\mu, \lambda] : \mathrm{cf}(\chi) \in [\kappa^+, \mu) \text{ and } \mathrm{pp}^{\mathrm{cf}(\chi)\text{-complete}}(\chi) \geq \lambda^+\}$。

若 $\Theta_{\mu,\kappa}$ 为空，则我们可以应用 4.4。

[为什么？选取 $\kappa_* := \kappa, \mu_* := \mu, J := J^{\mathrm{bd}}_\kappa$，然后我们必须验证 4.4 的假设。子句 (a)、(b) 和 (c) 显然成立。子句 (e) 表示‘$\alpha < \mu \Rightarrow |\alpha|^\kappa < \mu$’，这可由 μ 是强极限基数推出。最后，子句 (d) 根据 4.2(4) 成立。]

So assume $\Theta_{\mu,\kappa} \neq \varnothing$. Let $\mu_\bullet := \min \Theta_{\mu,\kappa}$, and apply 4.5.

[为什么可以这样做？我们应当检查假设 4.5(a)-(f)。选取 $\chi := \lambda$, $\kappa_\bullet = \mu_\bullet$ $\kappa_\bullet$ $\kappa_\bullet$ $\mu_\bullet$ $:= \mathrm{cf}(\ )$，以及 $J_\bullet$ 一个定义在上的 -完备理想，满足 $\mathrm{pp}_{J_\bullet}(\ ) \geq \lambda^+$。

子句 (a) 和 (b) 显然成立。

子句 (c) 表示‘$T^+_J(\mu) > \chi^+$’，这成立，因为 $J := J^{\mathrm{bd}}_\kappa$，且 μ 是共尾数为 κ 的强极限基数。

在子句（d）中，第一个陈述（共尾数（$\mu_\bullet$）$\in [\kappa^+, \mu)$）由$\Theta_{\mu,\kappa}$ 的定义以及对 $\mu_\bullet$ 的选择得出。第二个陈述由同样的推理得出。

子句（e）成立，因为$\mu_\bullet \in \Theta_{\mu,\kappa}$ 以及对 $J_\bullet$的选择。

子句（f）成立，因为 $\mu > \kappa_\bullet$ 是强极限基数。] $\square_{4.6}$

讨论 4.7. 1）在 4.5 中，补上“$J_\bullet$ 是 $\kappa_\bullet$-完备的”并无妨碍。

2) 此外，如果我们加入“$\kappa_\bullet > 2^\kappa$”，那么可以将条款 4.5(c) 弱化为“$\mathbf{T}^+_J(\mu) > \chi^+$。”

References

[AGS] Mohsen Asgharzadeh、Mohammad Golshani 和 Saharon Shelah, *Representing a ring as endomorphism of an Abelian group* .[CS16] Arte

m Chernikov 和 Saharon Shelah, *On the number of Dedekind cuts and two-cardinal models of dependent theories* **15** 2016 4, 771 784, , J. Inst.

Math. Jussieu ( ), 第 – 期 arXiv: 1308.3099。MR 3569076[DS78] Keith J. Devlin 和 Saharon Shelah, *A weak version of ♢ which follows from* $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$, Israel J. Math.

29 1978 2 3, 239 247 0469756 ( ), 第 - – 期。MR S S. Shelah 等, , [+] *Tba* 《》, 准备中。初步编号: Sh:F2448。[She] Saharon Shelah, *Analytical Guide and Updates to [Sh:g]*, arXiv: math/9906022 对 [Sh:g] 的更正。[She79] , *On successors of singular cardinals*, Logic Colloquium '78（蒙斯，1978），Stud. Logic Foundations Math.，第 97 卷，North-Holland，阿姆斯特丹-纽约，1979 年，第 357–380 页。MR 567680[She91] , *Reflecting stationary sets and successors of singular cardinals*, Arch. Math. Logic 31 (1991)，第 1 期，25–53。MR 1126352[She93] , *Advances in cardinal arithmetic*，集合与逻辑中的有限与无限组合学（班夫，艾伯塔省，1991），NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.，第 411 卷，Kluwer Acad. Publ.，多德雷赫特，1993，arXiv: 0708.1979，第 355–383 页。MR 1261217[She94] , *Cardinal arithmetic*，Oxford Logic Guides，第 29 卷，The Clarendon Press，牛津大学出版社，纽约，1994。MR 1318912[She00] , *The generalized continuum hypothesis revisited*, Israel J. Math. 116 (2000), 285 321, 9809200 1759410 – arXiv: math/ 。MR She, , Arch. [05] *Super black box (ex. Middle diamond)* Math. Logic 44 5, 527 2005 0212249（）, 第 – 期 560, 2210145 arXiv: math/ 。MR She, , Ann. Pure [06] *More on the revised GCH and the black box* Appl. Logic 140 (2006)，第 1-3 期，133–160，arXiv: math/0406482。MR 2224056[She07] , $\aleph_n$*-free abelian group with no non-zero homomorphism to* $\mathbb{Z}$，Cubo 9 (2007)，第 2, 59 79, 0609634 2354353 – 期 arXiv: math/ 。MR She a, ˇ [13] *Non-reflection of the bad set for* $I_\theta[\lambda]$ *and pcf*，Acta Math. Hungar. 141 (2013)，第 1-2 期，11–35，arXiv: 1206.2048。MR 3102967[She13b] , *Pcf and abelian groups*，Forum Math. 25 (2013)，第 5 期，967–1038，arXiv: 0710.0157。MR 3100959[She19] , *Compactness in singular cardinals revisited*，Sarajevo J. Math. 15(28) (2019)，第 2 期，201–208，arXiv: 1401.3175。MR 4069744[She20] , *Quite free complicated Abelian groups, pcf and black boxes*，Israel J. Math. 240 (2020 1, 1 64, 1404 2775 4193126)，第 – 期 arXiv: 。MR She, , MLQ [22] *Forcing axioms for* λ*-complete* μ^+*-c.c* Math. Log. Q. 68 1, 6 2022 1310 4042 4413641（），第 –26 期，arXiv: 。MR

Einstein Institute of Mathematics, The Hebrew University of Jerusalem, 9190401, Jerusalem, Israel; and, Department of Mathematics, Rutgers University, Piscataway, NJ 08854-8019, USA

URL: https://shelah.logic.at/