arXiv:2602.09607v1 [math.AC] 10 Feb 2026

关于完全二分图边理想商环的希尔伯特深度

ANDREEA I. BORDIANU[1],MIRCEA CIMPOEAŞ[2]

Abstract. 设 $n \geq m$ 为两个正整数，$S_{n,m} = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ 和 $I_{n,m} = (x_i y_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m) \subset S_{n,m}$ 为完全二分图的边理想。记 $h(n,m) = \mathrm{hdepth}(S_{n,m}/I_{n,m})$。我们证明，$h(n,m) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$，且当 m 属于以 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 为中心的某个区间时等号成立。此外，我们为 $h(n,n)$ 找到了若干紧界，并证明了 $h(n,m)$ 与 $h(n,m')$ 之间的若干不等式。

1. Introduction

设 K 为一个域，S 为 K 上的多项式环。设 M 为一个有限生成的分次 S-模。M 的希尔伯特深度记为 $\mathrm{hdepth}(M)$，它是与 M 具有相同希尔伯特级数的有限生成分次 S-模 N 的最大深度；更多细节请参见 [4, 6]。人们可能会认为，一旦知道一个模的希尔伯特函数，计算其希尔伯特深度就很容易。但事实证明，即使对于极大理想的幂，计算希尔伯特深度也会涉及困难的组合计算；参见 [5]。我们认为，希尔伯特深度这一不变量在文献中受到了不应有的低估，值得给予更多关注并开展更多研究。

在 [1, 定理 2.4] 中，证明了如果 $0 \subset I \subsetneq J \subset S$ 是两个平方自由单项式理想，那么

$$\mathrm{hdepth}(J/I) = \max\{q \ : \ \beta_k^q(J/I) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{q-j}{k-j} \alpha_j(J/I) \geq 0 \text{ for all } 0 \leq k \leq q\},$$

其中 $\alpha_j(J/I)$ 是 J 中次数为 j 的平方自由单项式的数量 $\setminus I$，适用于 $0 \leq j \leq n$。

设 $n, m \geq 1$ 为两个整数。利用上述对希尔伯特深度的刻画，[2]，中证明了：若 $I_{n,m} = (x_i y_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m) \subset S_{n,m} = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$，则 $\mathrm{hdepth}(I_{n,m}) = \lfloor \frac{n+m+2}{2} \rfloor$。注意，$I_{n,m}$ 是完全二分图 $\overline{K}_{n,m}$ 的边理想。

[1]*Andreea I. Bordianu*，布加勒斯特理工大学应用科学学院，布加勒斯特，060042，电子邮箱：andreea.bordianu@stud.fsa.upb.ro[2]*Mircea Cimpoeaş*，布加勒斯特国立理工科技大学应用科学学院，布加勒斯特，060042，罗马尼亚；以及 Simion Stoilow 数学研究所研究组 5，邮政信箱 1-764，布加勒斯特 014700，罗马尼亚，电子邮箱：mircea.cimpoeas@upb.ro，mircea.cimpoeas@imar.ro 2020 数学主题分类。05A18，06A07，13C15，13P10，13F20。关键词和短语。希尔伯特深度；单项式理想；完全二分图。

虽然 hdepth($I_{n,m}$) 的公式相对容易得到，但计算 hdepth($S_{n,m}/I_{n,m}$) 的问题似乎非常困难。在 [3, 定理 2.6], 中，证明了

$$\operatorname{hdepth}(S_{n,1}/I_{n,1}) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \lfloor \sqrt{n} \rfloor - 2, \text{ for all } n \geq 1.$$

此外，在 [3, 定理], 中已证明，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在某个整数 $A = A(\varepsilon) \geq 0$，使得

$$\operatorname{hdepth}(S_{n,1}/I_{n,1}) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \lfloor \varepsilon n \rfloor + A - 2.$$

作为直接 由上述结果可得以下渐近行为 :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{hdepth}(S_{n,1}/I_{n,1}) = \frac{1}{2}.$$

我们的目标是将这些结果推广到一般情形。记

$$h(n,m) := \operatorname{hdepth}(S_{n,m}/I_{n,m}).$$

在推论 2.4 中，我们注意到

$$h(n,m) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \text{ for all } 1 \leq m \leq n.$$

在定理 3.1 中，我们证明：若 $h(n,m) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$，则

(1) $n = 2s$ and $m = s + t$, such that $t \in \left(\frac{1-\sqrt{1+8s}}{2}, \frac{1+\sqrt{1+8s}}{2} \right)$.

(2) $n = 2s+1$ and $m = s + 1 + t$, such that $t \in \left(\frac{1-\sqrt{9+16s}}{2}, \frac{1+\sqrt{9+16s}}{2} \right)$.

在定理 3.2 中，我们证明

$$\left\lfloor \frac{n}{2} + \sqrt{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \ln 2} \right\rfloor - 1 \leq h(n,n) \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} + \sqrt{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \ln 2} \right\rfloor, \text{ for all } n \geq 2.$$

在定理 3.3 中，我们证明

(1) 对所有 $1 \leq m \leq m' \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $h(n,m) \geq h(n,m')$。

(2) 对所有 $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq m \leq m' \leq n$, $h(n,m) \leq h(n,m')$。

(3) $h(n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) = h(n, \lceil \frac{n}{2} \rceil) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$。(4) 对所有 $1 \leq m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $h(n,m) \geq h(n, n-m)$。(5) 对所有 $1 \leq m \leq n$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq h(n,m) \leq h(n,1)$。

作为推论 3.4，我们证明了

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} h(n, m(n)) = \frac{1}{2},$$

其中，对于所有 $n \geq 1$，有 $1 \leq m(n) \leq n$。

在猜想 4.1 中，我们基于计算机实验提出了若干不等式。在命题 4.2 中，我们证明了，如果猜想 4.1 成立，那么

$$h(n,n) \geq \left\lfloor \frac{n-1}{2} + \sqrt{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \ln 2} \right\rfloor,$$

这改进了定理 3.2 给出的界。

2. Preliminaries

设 $n \geq m \geq 1$ 为两个整数。完全二分图 $K_{n,\ m}$ 是顶点集上的图

$$V(\mathcal{K}_{n,m}) = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\},$$

其边集为

$$E(K_{n,m}) = \{\{x_i, y_j\} \ : \ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}.$$

设 $S_{n,\ m} = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$。$K_{n,\ m}$ 的边理想为理想

$$I_{n,m} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \cap (y_1, \ldots, y_m) = (x_i y_j \ : \ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m) \subset S_{n,m}.$$

首先，我们回顾以下结果。

定理 2.1. （见 [2,定理 2.9]）我们有

$$\operatorname{hdepth}(I_{n,m}) = \left\lfloor \frac{n+m+2}{2} \right\rfloor.$$

然而，一般而言，计算 hdepth($S_{n,m}/I_{n,m}$) 似乎非常困难。以下定理给出了一个上界：

定理 2.2。 *(*[2,定理 2.6]*)* 我们有

$$\operatorname{hdepth}(S_{n,m}/I_{n,m}) \leq \left\lceil n+m+\frac{1}{2} - \sqrt{2nm+\frac{1}{4}} \right\rceil.$$

此外，我们有以下结果：

定理 2.3。 *(*[2,定理 2.7]*)* 我们有

$$\operatorname{hdepth}(S_{n,m}/I_{n,m}) = \max\{q \leq n+m \ : \ \binom{q-n}{2\ell} + \binom{q-m}{2\ell} \geq \binom{q}{2\ell},\ \textit{for all } 1 \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor\}.$$

此外，若 $n \leq 2m-2$，则 $\operatorname{hdepth}(S/I) < m$。此外，若$n \geq 2m-1$，则 $m \leq \operatorname{hdepth}(S/I) \leq n-m+1$。

由上述 上述定理可轻易得出 hdepth($S_{n,\ m}/I_{n,\ m}$) 的下界 ：

推论 2.4。我们有 $\operatorname{hdepth}(S_{n,\ m}/I_{n,\ m}) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$。 –

证明。令 $q := \lceil \frac{n}{2} \rceil$。对于任意 $1 \leq \ell \leq \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$，我们有

$$\begin{aligned}\binom{q-n}{2\ell} + \binom{q-m}{2\ell} \geq \binom{q-n}{2\ell} &= \binom{n-q+2\ell-1}{2\ell} = \binom{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 2\ell - 1}{2\ell} \\ &\geq \binom{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1}{2\ell} \geq \binom{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{2\ell} = \binom{q}{2\ell}.\end{aligned}$$

因此，结论由定理 2.3 得出。 □

3. Main results

令 $S_{n,\ m} = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ 和 $I_{n,\ m} = (x_1,\ \ldots,\ x_n) \cap (y_1,\ \ldots,\ y_m) \subset S_{n,\ m}$。为方便起见，我们记

$$h(n, m) := \operatorname{hdepth}(S_{n,m}/I_{n,m}).$$

我们直接证明如下结果：

定理 3.1. 我们有：(1) 若 $n = 2s$ 且 $m = s + t$，使得 $t \in \left(\frac{1-\sqrt{1+8s}}{2}, \frac{1+\sqrt{1+8s}}{2}\right)$，则 $h(n, m) = s$。(2) 若 $n = 2s+1$ 且 $m = s+1+t$，使得 $t \in \left(\frac{1-\sqrt{9+16s}}{2}, \frac{1+\sqrt{9+16s}}{2}\right)$，则 $h(n, m) = s + 1$。

证明。(1) 根据推论 2.4，我们有 $h(n, m) \geq s$。设 $q = s + 1$ 且 $\ell = 1$。则：

$$\binom{q-n}{2\ell} + \binom{q-m}{2\ell} = \binom{1-s}{2} + \binom{1-t}{2} < \binom{s+1}{2},$$

当且仅当

$$(1-s)(-s) + (1-t)(-t) < s(s+1),$$

这等价于

$$t^2 - t - 2s < 0.$$

现在，结论由定理 2.3 得出。

（2）根据推论 2.4，我们有 $h(n,\ m) \geq s + 1$。令 $q = s + 2$ 和 $\ell = 1$。则：

$$\binom{q-n}{2\ell} + \binom{q-m}{2\ell} = \binom{1-s}{2} + \binom{1-t}{2} < \binom{s+2}{2},$$

当且仅当

$$(1-s)(-s) + (1-t)(-t) < (s+1)(s+2),$$

这等价于

$$t^2 - t - 4s - 2 < 0.$$

现在，结论由定理 2.3 得出。 □

定理 3.2。使用上述记号，我们有：

$$\left\lfloor \frac{n}{2} + \sqrt{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \ln 2} \right\rfloor - 1 \leq h(n, n) \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} + \sqrt{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \ln 2} \right\rfloor,\ \textit{for all } n \geq 2.$$

证明。令 $q := \left\lfloor \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n \ln 2}{2}} \right\rfloor - 1$。我们证明第一个不等式。

(a) 情形 $n = 2k$ 和 $q - k = 2s - 1$。我们有 $q = k + \left\lfloor \sqrt{k \ln 2} \right\rfloor - 1$。由于 $\left\lfloor \sqrt{k \ln 2} \right\rfloor = 2s$，因此

$$k \geq \frac{4s^2}{\ln 2}. \tag{3.1}$$

根据定理 2.3，要证明 $h(n,n) \geq q$，只需证明

$$2\binom{n-q+2\ell-1}{2\ell} = 2\binom{k-2s+2\ell}{2\ell} \geq \binom{k+2s-1}{2\ell}, \text{ for all } 1 \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor. \tag{3.2}$$

事实上，只需证明 $\ell = s$ 的情形下的 (3.2)，即

$$2\binom{k}{2s} \geq \binom{k+2s-1}{2s}, \tag{3.3}$$

因为由此很容易推出所有其他情形。

注意，(3.3) 等价于

$$\prod_{j=1}^{2s-1}\left(1+\frac{2s}{k-j}\right) \leq 2. \tag{3.4}$$

利用 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e$ 这一事实，对于 $x>0$，由 (3.1) 可得

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{2s-1}\left(1+\frac{2s}{k-j}\right) &\leq \left(1+\frac{2s}{k-2s+1}\right)^{2s-1} \leq \left(1+\frac{2s\ln 2}{4s^2-(2s-1)\ln 2}\right)^{2s-1} \\ &= \left(\left(1+\frac{2s\ln 2}{4s^2-(2s-1)\ln 2}\right)^{\frac{4s^2-(2s-1)\ln 2}{2s\ln 2}}\right)^{\ln 2\cdot\frac{4s^2-2s}{4s^2-(2s-1)\ln 2}} \\ &< \left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{4s^2-2s}{4s^2-(2s-1)\ln 2}} = 2^{\frac{4s^2-2s}{4s^2-2s+1}} < 2.\end{aligned}$$

因此，所需的 (3.4) 成立。

(b) 情形 $n = 2k$ 和 $q-k = 2s$。我们有 $q = k + \left\lfloor \sqrt{k\ln 2} \right\rfloor$ ~~-1~~。由于 $\left\lfloor \sqrt{k\ln 2} \right\rfloor = 2s$ ~~$+1$~~，因此

$$k \geq \frac{(2s+1)^2}{\ln 2}. \tag{3.5}$$

根据定理 2.3，为了证明 $h(n,\ n) \geq q$，只需证明

$$2\binom{n-q+2\ell-1}{2\ell} = 2\binom{k-2s+2\ell-1}{2\ell} \geq \binom{k+2s}{2\ell}, \text{ for all } 1 \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor. \tag{3.6}$$

事实上，只需证明 $\ell = s$ 的 (3.2)，即

$$2\binom{k-1}{2s} \geq \binom{k+2s}{2s}, \tag{3.7}$$

这很容易由此推出，其他所有情形亦然。

注意，(3.7) 等价于

$$\prod_{j=1}^{2s}\left(1+\frac{2s+1}{k-j}\right)\leq 2. \tag{3.8}$$

利用 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e$ 这一事实，对于 $x>0$，由 (3.5) 可得

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{2s}\left(1+\frac{2s+1}{k-j}\right)&\leq\left(1+\frac{2s+1}{k-2s}\right)^{2s}\leq\left(1+\frac{(2s+1)\ln 2}{(2s+1)^2-2s\ln 2}\right)^{2s}\\&=\left(\left(1+\frac{(2s+1)\ln 2}{(2s+1)^2-2s\ln 2}\right)^{\frac{(2s+1)^2-2s\ln 2}{(2s+1)\ln 2}}\right)^{\ln 2\cdot\frac{4s^2+2s}{4s^2+4s+1-2s\ln 2}}\\&<\left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{4s^2+2s}{4s^2+2s+1}}=2^{\frac{4s^2+2s}{4s^2+2s+1}}<2.\end{aligned}$$

因此，(3.8) 成立，证毕。

(c) 情形 $n=2k+1$ 和 $q-k=2s$。我们有 $q=k+\left\lfloor\sqrt{k}\ln 2-0.5\right\rfloor$。由于 $\left\lfloor\sqrt{k}\ln 2-0.5\right\rfloor=2s$，可得

$$k\geq\frac{(2s+0.5)^2}{\ln 2}. \tag{3.9}$$

根据定理 2.3，要证明 $h(n,n)\geq q$，只需证明

$$2\binom{n-q+2\ell-1}{2\ell}=2\binom{k-2s+2\ell}{2\ell}\geq\binom{k+2s}{2\ell},\ \text{for all } 1\leq\ell\leq\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor. \tag{3.10}$$

事实上，只需对 $\ell=s$ 证明 (3.10)，即

$$2\binom{k}{2s}\geq\binom{k+2s}{2s}, \tag{3.11}$$

由此很容易得出所有其他情形。

注意，(3.11) 等价于

$$\prod_{j=0}^{2s-1}\left(1+\frac{2s}{k-j}\right)\leq 2. \tag{3.12}$$

利用 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e$ 这一事实，对于 $x>0$，由 (3.9) 可得

$$\begin{aligned}\prod_{j=0}^{2s-1}\left(1+\frac{2s}{k-j}\right) &\le \left(1+\frac{2s}{k-2s+1}\right)^{2s} \le \left(1+\frac{2s\ln 2}{(2s+0.5)^2-(2s-1)\ln 2}\right)^{2s}\\ &= \left(1+\frac{2s\ln 2}{4s^2+2s+0.25-2s\ln 2+\ln 2}\right)^{2s} < \left(1+\frac{\ln 2}{2s}\right)^{2s}\\ &= \left(\left(1+\frac{\ln 2}{2s}\right)^{\frac{2s}{\ln 2}}\right)^{\ln 2} < e^{\ln 2}=2.\end{aligned}$$

因此，(3.12) 成立，证毕。

(d) $n=2k+1$ 和 $q-k=2s+1$的情形。我们有 $q=k+\left\lfloor\sqrt{k\ln 2-0.5}\right\rfloor$。由于$\left\lfloor\sqrt{k\ln 2-0.5}\right\rfloor=2s+1$，因此

$$k \ge \frac{(2s+1.5)^2}{\ln 2}. \tag{3.13}$$

根据定理 2.3，为了证明 $h(n,\ n)\ge q$，只需证明

$$2\binom{n-q+2\ell-1}{2\ell} = 2\binom{k-2s+2\ell-1}{2\ell} \ge \binom{k+2s+1}{2\ell},\ \text{for all } 1\le \ell \le \left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor. \tag{3.14}$$

事实上，只需对 $\ell=s$证明 (3.14)，即

$$2\binom{k-1}{2s} \ge \binom{k+2s+1}{2s}, \tag{3.15}$$

因为其余所有情况都可由此轻易得出。

注意，(3.15) 等价于

$$\prod_{j=1}^{2s}\left(1+\frac{2s+2}{k-j}\right) \le 2. \tag{3.16}$$

利用 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e$ 这一事实，对于 $x>0$，由 (3.13) 可得

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{2s}\left(1+\frac{2s+2}{k-j}\right) &\le \left(1+\frac{2s+2}{k-2s}\right)^{2s} \le \left(1+\frac{(2s+2)\ln 2}{(2s+1.5)^2-2s\ln 2}\right)^{2s}\\ &= \left(1+\frac{(2s+2)\ln 2}{4s^2+6s+2.25-2s\ln 2}\right)^{2s} < \left(1+\frac{\ln 2}{2s}\right)^{2s}\\ &= \left(\left(1+\frac{\ln 2}{2s}\right)^{\frac{2s}{\ln 2}}\right)^{\ln 2} < e^{\ln 2}=2.\end{aligned}$$

因此，(3.12) 成立，证毕。

设 $q:=\left\lfloor \frac{n+1}{2}+\sqrt{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor \ln 2}\right\rfloor+1$。我们证明第二个不等式。

(a) 情形 $n=2k$ 和 $q-k=2s+1$。我们有 $q=k+\left\lfloor \frac{1}{2}+\sqrt{k\ln 2}\right\rfloor+1$。由于 $\left\lfloor \frac{1}{2}+\sqrt{k\ln 2}\right\rfloor=2s$，因此

$$2s\leq \frac{1}{2}+\sqrt{k\ln 2}<2s+1,$$

由此我们推得

$$\frac{(2s-0.5)^2}{\ln 2}\leq k<\frac{(2s+0.5)^2}{\ln 2}. \tag{3.17}$$

根据定理 2.3，为了证明 $h(n,n)<q$，只需证明存在 $1\leq \ell\leq \left\lfloor \frac{q}{2}\right\rfloor$ 使得

$$2\binom{n-q+2\ell-1}{2\ell}=2\binom{k-2s+2\ell-2}{2\ell}<\binom{k+2s+1}{2\ell}. \tag{3.18}$$

我们断言，对于 $\ell=s+1$，(3.18) 成立，即

$$2\binom{k}{2s+2}<\binom{k+2s+1}{2s+2}. \tag{3.19}$$

注意到 (3.19) 等价于

$$\prod_{j=1}^{2s+1}\left(1+\frac{2s+2}{k-j}\right)>2. \tag{3.20}$$

利用 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}>e$ 这一事实，对于 $x>0$，由 (3.17) 可得

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{2s+1}\left(1+\frac{2s+2}{k-j}\right)&>\left(1+\frac{2s+2}{k-1}\right)^{2s+1}\geq\left(1+\frac{(2s+2)\ln 2}{(2s+0.5)^2-\ln 2}\right)^{2s+1}\\&>\left(1+\frac{(s+1)\ln 2}{2s^2+s}\right)^{2s+1}\\&=\left(\left(1+\frac{(s+1)\ln 2}{2s^2+s}\right)^{\frac{2s^2+s+(s+1)\ln 2}{(s+1)\ln 2}}\right)^{\ln 2\cdot\frac{(2s+1)(s+1)}{2s^2+s+(s+1)\ln 2}}\\&>\left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{2s^2+3s+1}{2s^2+s+(s+1)\ln 2}}>2.\end{aligned}$$

因此，(3.20) 成立，正如所需。

(b) 情形 $n = 2k$ and $q - k = 2s$。我们有 $q = k + \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{k \ln 2} \right\rfloor + 1$。由于 $\left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{k \ln 2} \right\rfloor = 2s - 1$，可得

$$2s - 1 \leq \frac{1}{2} + \sqrt{k \ln 2} < 2s,$$

由此我们推得

$$\frac{(2s - 1.5)^2}{\ln 2} \leq k < \frac{(2s - 0.5)^2}{\ln 2}. \tag{3.21}$$

根据定理 2.3，要证明 $h(n, n) < q$，只需证明存在 $1 \leq \ell \leq \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ 使得

$$2\binom{n - q + 2\ell - 1}{2\ell} = 2\binom{k - 2s + 2\ell - 1}{2\ell} < \binom{k + 2s}{2\ell}. \tag{3.22}$$

我们声称 (3.22) 对 $\ell = s$ 成立，也就是说

$$2\binom{k - 1}{2s} < \binom{k + 2s}{2s}. \tag{3.23}$$

注意到 (3.23) 等价于

$$\prod_{j=1}^{2s} \left(1 + \frac{2s + 1}{k - j}\right) > 2. \tag{3.24}$$

利用以下事实：$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} > e$，对于 $x > 0$，由 (3.21) 可得

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{2s} \left(1 + \frac{2s + 1}{k - j}\right) &> \left(1 + \frac{2s + 1}{k - 1}\right)^{2s} \geq \left(1 + \frac{(2s + 1)\ln 2}{(2s - 0.5)^2 - \ln 2}\right)^{2s} \\
&> \left(1 + \frac{(2s + 1)\ln 2}{4s^2 - 2s}\right)^{2s} \\
&= \left(\left(1 + \frac{(2s + 1)\ln 2}{4s^2 - 2s}\right)^{\frac{4s^2 - 2s + (2s+1)\ln 2}{(2s+1)\ln 2}}\right)^{\ln 2 \cdot \frac{4s^2 + 2s}{4s^2 - 2s + (2s+1)\ln 2}} \\
&> \left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{4s^2 + 2s}{4s^2 - 2s + (2s+1)\ln 2}} > 2.
\end{aligned}$$

因此，(3.24) 成立，证毕。

(c) 情形 $n = 2k + 1$ 和 $q - k = 2s + 2$。我们有 $q = k + \left\lfloor \sqrt{k \ln 2} \right\rfloor + 2$。由于 $\left\lfloor \sqrt{k \ln 2} \right\rfloor = 2s$，因此

$$2s \leq \sqrt{k \ln 2} < 2s + 1,$$

由此我们推得

$$\frac{4s^2}{\ln 2} \leq k < \frac{(2s+1)^2}{\ln 2}. \tag{3.25}$$

根据定理 2.3，为了证明 $h(n,\ n) < q$，只需证明存在 $1 \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$ 使得

$$2\binom{n-q+2\ell-1}{2\ell} = 2\binom{k-2s+2\ell-2}{2\ell} < \binom{k+2s+2}{2\ell}. \tag{3.26}$$

我们断言，对 $\ell = s+1$，式 (3.22) 成立，即

$$2\binom{k}{2s+2} < \binom{k+2s+2}{2s+2}. \tag{3.27}$$

注意，式 (3.27) 等价于

$$\prod_{j=0}^{2s+1}\left(1+\frac{2s+2}{k-j}\right) > 2. \tag{3.28}$$

利用 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} > e$ 这一事实，对于 $x > 0$，由式 (3.21) 可得

$$\begin{aligned}\prod_{j=0}^{2s+1}\left(1+\frac{2s+2}{k-j}\right) &> \left(1+\frac{2s+2}{k}\right)^{2s+2} \geq \left(1+\frac{(2s+2)\ln 2}{(2s+1)^2}\right)^{2s+2} \\ &= \left(\left(1+\frac{(2s+2)\ln 2}{(2s+1)^2}\right)^{\frac{(2s+1)^2+(2s+2)\ln 2}{(2s+2)\ln 2}}\right)^{\ln 2\cdot\frac{(2s+2)^2}{4s^2+4s+1+(2s+2)\ln 2}} \\ &> \left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{4s^2+8s+4}{4s^2+6s+3}} = 2^{\frac{4s^2+8s+4}{4s^2+6s+3}} > 2.\end{aligned}$$

因此，式 (3.28) 成立，证毕。

(d) 情形 $n = 2k+1$ 和 $q-k = 2s+1$。我们有 $q = k + \left\lfloor \sqrt{k\ln 2} \right\rfloor + 2$。由于 $\left\lfloor \sqrt{k\ln 2} \right\rfloor = 2s-1$，因此

$$2s-1 \leq \sqrt{k\ln 2} < 2s,$$

由此我们可推得

$$\frac{(2s-1)^2}{\ln 2} \leq k < \frac{4s^2}{\ln 2}. \tag{3.29}$$

根据定理 2.3，为了证明 $h(n,\ n) < q$，只需证明存在 $1 \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$，使得

$$2\binom{n-q+2\ell-1}{2\ell} = 2\binom{k-2s+2\ell-1}{2\ell} < \binom{k+2s+1}{2\ell}. \tag{3.30}$$

我们断言 (3.30) 对于 $\ell = s$ 成立，即

$$2\binom{k-1}{2s} < \binom{k+2s+1}{2s}. \tag{3.31}$$

注意到 (3.31) 等价于

$$\prod_{j=1}^{2s}\left(1+\frac{2s+2}{k-j}\right) > 2. \tag{3.32}$$

利用以下事实：对于 $x \geq 0$, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} > e$，由 (3.21) 可得

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{2s}\left(1+\frac{2s+2}{k-j}\right) &> \left(1+\frac{2s+2}{k}\right)^{2s} \geq \left(1+\frac{(s+1)\ln 2}{2s^2}\right)^{2s} \\ &= \left(\left(1+\frac{(s+1)\ln 2}{2s^2}\right)^{\frac{2s^2+(s+1)\ln 2}{(s+1)\ln 2}}\right)^{\ln 2\cdot\frac{2s^2+2s}{2s^2+(s+1)\ln 2}} \\ &> \left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{2s^2+2s}{2s^2+(s+1)\ln 2}} = 2^{\frac{2s^2+2s}{2s^2+(s+1)\ln 2}} > 2.\end{aligned}$$

因此，(3.32) 成立，证毕。

□

定理 3.3。 使用上述记号，我们有：

(1) $h(n,m) \geq h(n,m')$ 对所有 $1 \leq m \leq m' \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 均成立。(2) $h(n,m) \leq h(n,m')$ 对所有 $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq m \leq m' \leq n$ 均成立。(3) $h(n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) = h(n, \lceil \frac{n}{2} \rceil) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$。(4) $h(n,m) \geq h(n, n-m)$ 对所有 $1 \leq m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 均成立。(5) $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq h(n,m) \leq h(n,1)$ 对所有 $1 \leq m \leq n$ 均成立。

证明。 (1) 令 $q = h(n, m')$。注意，根据推论 2.4, $q \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。由定理 2.3 可得

$$\binom{q-n}{2\ell} + \binom{q-m'}{2\ell} \geq \binom{q}{2\ell}, \text{ for all } 1 \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor.$$

由于 $m \leq m'$，可知对于所有 $1 \leq \ell \leq \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$, $\binom{q-m}{2\ell} \geq \binom{q-m'}{2\ell}$。因此

$$\binom{q-n}{2\ell} + \binom{q-m}{2\ell} \geq \binom{q}{2\ell}, \text{ for all } 1 \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor.$$

因此，由定理 2.3 可知, $h(n, m) \geq q$，证毕。

(2) 设 $q = h(n, m')$。注意，根据推论 2.4, $q \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。另一方面，根据定理 2.3，我们有 $q \leq m$ 并且

$$\binom{q-n}{2\ell} + \binom{q-m}{2\ell} \geq \binom{q}{2\ell}, \text{ for all } 1 \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor.$$

由于 $m' \geq m \geq q$，因此可得

$$\binom{q-m}{2\ell} = \binom{m-q+2\ell-1}{2\ell} \leq \binom{m'-q+2\ell-1}{2\ell} = \binom{q-m'}{2\ell}, \text{ for all } 1 \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor.$$

因此，由定理 2.3 可得 $h(n,m') \geq q$，证毕。

(3) 由定理 3.1 可立即得出。

(4) 设 $q = h(n, n-m)$。由推论 2.4 和定理 2.3 可知 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq q \leq n-m$ 且

$$\binom{q-n}{2\ell} + \binom{q-n+m}{2\ell} \geq \binom{q}{2\ell}, \text{ for all } 1 \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor. \tag{3.33}$$

为了完成证明，我们还需证明

$$\binom{q-n}{2\ell} + \binom{q-m}{2\ell} \geq \binom{q}{2\ell}, \text{ for all } 1 \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor. \tag{3.34}$$

我们选取一个满足 $1 \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$ 的整数 ℓ。

若 $2\ell \geq 2q-n+1$，则 $\binom{q-n}{2\ell} = \binom{n-q+2\ell-1}{2\ell} \geq \binom{q}{2\ell}$，因此，(3.34) 成立。现在，假设 $2\ell \leq 2q-n$。那么

$$\binom{q-n+m}{2\ell} = \binom{n-m-q+2\ell-1}{2\ell} \leq \binom{q-m-1}{2\ell} \leq \binom{q-m}{2\ell}.$$

由 (3.33) 可知，(3.34) 也成立。因此，结论由定理 2.3 得出。

(5) 由推论 2.4、(1) 和 (4) 可得。 □

我们用 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ 表示正整数集。

推论 3.4 推论。设 $m: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是一个函数，使得 $m(n) \leq n$，对所有 $n \geq 1$ 均成立。那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} h(n, m(n)) = \frac{1}{2}.$$

证明。 根据 [3, 推论 2.7], ，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} h(n, 1) = \frac{1}{2}.$$

另一方面，由定理 3.3(5)，我们有

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq h(n, m(n)) \leq h(n, 1), \text{ for all } 1 \leq m \leq n.$$

所需结论立即得出。 □

4. A conjecture and a sharper bound for $h(n,n)$

基于计算机实验，我们提出如下猜想：

猜想 4.1. 令 s为正整数。则：

(a) $\prod_{j=1}^{2s} \left(1 + \frac{2s+1}{k-j}\right) \leq 2$, *for* $k \geq \frac{(2s+0.5)^2}{\ln(2)}$.

(b) $\prod_{j=1}^{2s+1}\left(1+\binom{2s+2}{k-j}\right)\le 2$，当 $k\ge \frac{(2s+1.5)^2}{\ln(2)}$ 时。(c) $\prod_{j=0}^{2s-1}\left(1+\binom{2s}{k-j}\right)\le 2$，当 $k\ge 4s^2\ln(2)$时。(d) $\prod_{j=2}^{2s+1}\left(1+\binom{2s+2}{k-j}\right)\le 2$，当 $k\ge (2s+1)^2\ln(2)$ 时。

命题 4.2。如果猜想 *4.1* 成立，那么

$$h(n,n)\ge\left\lfloor\frac{n-1}{2}+\sqrt{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\ln 2}\right\rfloor.$$

证明。证明思路与定理 2 的证明类似。令 $q=\left\lfloor\frac{n-1}{2}+\sqrt{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\ln 2}\right\rfloor$，并考虑以下几种情况：

(a) $n=2k$ and $\left\lfloor -0.5+\sqrt{k\ln 2}\right\rfloor=2s$。注意，$k\ge\frac{(2s+0.5)^2\ln(2)}{}$。我们有 $q=k+2s$。根据定理 2.3，为了证明 $h(n,n)\ge q$，只需证明

$$2\binom{n-q+2\ell-1}{2\ell}=2\binom{k-2s+2\ell-1}{2\ell}\ge\binom{k+2s}{2\ell},\ \text{for all } 1\le\ell\le\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor. \tag{4.1}$$

事实上，只需对 $\ell=s$ 证明 (4.1)，即

$$2\binom{k-1}{2s}\ge\binom{k+2s}{2s},$$

这等价于 $\prod_{j=1}^{2s}\left(1+\binom{2s+1}{k-j}\right)<2$。由于 $k\ge\frac{(2s+0.5)^2\ln(2)}{}$，结论由猜想 4.1(a) 得出。

(b) $n=2k$ 与 $\left\lfloor -0.5+\sqrt{k\ln 2}\right\rfloor=2s+1$。注意 $k\ge\frac{(2s+1.5)^2\ln(2)}{}$。我们有 $q=k+2s+1$。根据定理 2.3，为了证明 $h(n,n)\ge q$，只需证明

$$2\binom{n-q+2\ell-1}{2\ell}=2\binom{k-2s+2\ell-2}{2\ell}\ge\binom{k+2s+1}{2\ell},\ \text{for all } 1\le\ell\le\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor. \tag{4.2}$$

事实上，只需对 $\ell=s+1$ 证明 (4.2)，即

$$2\binom{k}{2s+2}\ge\binom{k+2s+1}{2s+2},$$

这等价于 $\prod_{j=1}^{2s+1}\left(1+\binom{2s+2}{k-j}\right)\le 2$。由于 $k\ge\frac{(2s+1.5)^2\ln(2)}{}$，结论可由猜想 4.1(b) 得出。

(c) $n = 2k+1$和 $\left\lfloor \sqrt{k\ln 2} \right\rfloor = 2s$。注意到 $k \geq {}^{4s^2}\!/_{\ln(2)}$。我们有 $q = k+2s$。根据定理 2.3，要证明 $h(n,n) \geq q$，只需证明

$$2\binom{n-q+2\ell-1}{2\ell} = 2\binom{k-2s+2\ell}{2\ell} \geq \binom{k+2s}{2\ell}, \text{ for all } 1 \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor. \tag{4.3}$$

事实上，只需证明 $\ell = s$ 的 (4.3)，即 $2\binom{k}{2s} \geq \binom{k+2s}{2s}$，这等价于 $\prod_{j=0}^{2s-1}\left(1+\frac{2s}{k-j}\right) \leq 2$。由于 $k \geq {}^{4s^2}\!/_{\ln(2)}$，结论由猜想 4.1(c) 得出。

(d) $n = 2k+1$ 且 $\left\lfloor \sqrt{k\ln 2} \right\rfloor = 2s+1$。注意 $k \geq {}^{(2s+1)^2}\!/_{\ln(2)}$。我们有 $q = k+2s+1$。根据定理 2.3，要证明 $h(n,\ n) \geq q$，只需证明

$$2\binom{n-q+2\ell-1}{2\ell} = 2\binom{k-2s+2\ell-1}{2\ell} \geq \binom{k+2s+1}{2\ell}, \text{ for all } 1 \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor. \tag{4.4}$$

事实上，只需对 $\ell = s+1$ 证明 (4.4)，即

$$2\binom{k+1}{2s+2} \geq \binom{k+2s+1}{2s+2},$$

这等价于 $\prod_{j=2}^{2s+1}\left(1+\frac{2s+2}{k-j}\right) \leq 22$。由于 $k \geq {}^{(2s+1)^2}\!/_{\ln(2)}$，结论由猜想 4.1(d) 得出。

□

注意，命题 4.2 给出的界比定理 3.2 中的界更精确。**致谢**。 我们谨向 Mihai Cipu 教授致以谢意，感谢他提出的宝贵意见，这些意见帮助我们改进了本文。

References

[1] S. B˘al˘anescu, M. Cimpoeaș, C. Krattenthaller, 单项式理想的希尔伯特深度，即将发表于《交换代数》，arXiv:2306.09450v4 (2024)。[2] S. B˘al˘anescu, M. Cimpoeaș, 某些单项式理想的希尔伯特深度及其应用，《布加勒斯特理工大学科学通报》，A辑 **87(4)** (2025), 53–66。[3] S. B˘al˘anescu, M. Cimpoeaș, M. Cipu, 星图边理想的商环的希尔伯特深度，arXiv:2501.16742 (2025)。[4] W.Bruns, C.Krattenthaler, J.Uliczka, *Koszul* 复形中的 *Stanley* 分解与希尔伯特深度，《交换代数杂志》**2(3)** (2010), 327–357。[5] W. Bruns, C. Krattenthaler and J. Uliczka, 极大理想幂的希尔伯特深度，《交换代数及其与几何的联系》，当代数学 555 (2011), 1–12。[6] J. Uliczka, 关于多项式环上分次模的希尔伯特级数的注记，《数学手稿》**132**(2010), 159–168。