arXiv:2602.09623v1 [math.CO] 10 Feb 2026

图的无团复形的壳性

RAKESH GHOSH 和 S SELVARAJA

Abstract. 我们研究 t-无团复形的组合性质和代数性质。这是一类与有限简单图相关联的单纯复形，并将经典的独立复形推广。对于图 G 和整数 $t \geq 2$，其 t-无团复形 $\mathsf{CF}_t(G)$ 是定义在 G 的顶点集上的单纯复形，其面是诱导出大小为 t的团的子集。

我们的主要结果给出了 t-无团复形具有可壳性及相关可分解性质的充分条件。具体而言，我们证明，若 G是无t-菱形的弦图（特别地，若它是块图），则 $\mathsf{CF}_t(G)$ 是（$t-2$）-可分解的，因而是可壳化的。我们还考察了通过团附加对图进行修改如何影响可壳性。作为涉及胡须和团扩张的早期构造的推广，我们引入如下操作：给定图 H、子集 $S \subseteq V(H)$和整数 $t \geq 2$，构造图 $\mathsf{Cl}(H,\ S,\ t)$，方法是在 S 中的每个顶点上附加一个大小至少为 t的团。我们证明，$\mathsf{CF}_t(H \setminus S)$ 可壳化，当且仅当 $\mathsf{CF}_t(\mathsf{Cl}(H,\ S,\ t))$ 可壳化。这为构造可壳复形提供了一种灵活的方法，尤其是在 S 为圈覆盖时。此外，我们扩展了团加叶的概念，并证明，对于任何具有团顶点划分的图，所得的 t-团加叶会产生一个纯且可壳化的t-无团复形，因此该复形是 Cohen-Macaulay 的。

最后，我们建立一个 Froberg 型结果，将弦性与线性分解联系起来。我们证明，对于任意弦图 G，补图 t-团簇$\mathcal{CH}_t(G)$的边理想在任意域上都存在一个 t-线性分解。

1. Introduction

本文研究一类由图产生的单纯复形，它们通过禁止特定大小的团来定义。这些复形称为无团复形，自然地作为图的经典-团理想 的 Stanley-Reisner 复形出现。更确切地说，对于图 $G = (V(G)\ E(G))$ 和整数$t \geq 2$，无团复形 $\mathsf{CF}_t(G)$ 是定义在 $V(G)$ 上的单纯复形，其面为不含 t-团的子集 $F \subseteq V(G)$。等价地，$\mathsf{CF}_t(G)$ 是 t-团理想 $I_t(G)$ 的 Stanley-Reisner 复形。当 $t = 2$时，这一构造得到经典的独立复形 $\mathsf{Ind}(G)$，其面是 G 的独立集。因此，族 $\{\mathsf{CF}_t(G)\}_{t\geq 2}$ 构成一个自然的滤过

$$\mathsf{CF}_2(G) \subseteq \mathsf{CF}_3(G) \subseteq \mathsf{CF}_4(G) \subseteq \cdots.$$

无团复形及其相关理想，包括 t-团理想及其对偶概念 t-独立集理想，已在组合交换代数和拓扑组合学的既有研究中被提出并加以研究（例如，

关键词和短语。无团复形；可壳性；顶点可分解性；弦图；t-团理想；边理想；线性分解。2020数学主题分类。05E45、13F55、05E40。

[5, 13, 17, 18]）。特别是，研究者已针对特定图族考察了可壳性、顶点可分解性和Cohen–Macaulay性等性质。本研究旨在推进这一研究方向，为图 G 建立新的通用充分条件，以保证复形 $\mathsf{CF}_t(G)$具有这些理想的组合性质和代数性质。

理解与图相关的单纯复形何时满足顶点可分解性、可壳性或（序贯）Cohen–Macaulay性等性质，是拓扑组合学中的一个核心主题。这些性质之间存在如下众所周知的层级关系：

$$\begin{array}{l}\text{vertex-decomposable} \implies \text{shellable} \implies \text{sequentially Cohen-Macaulay,} \\ \left.\begin{array}{l}\text{pure vertex-decomposable,} \\ \text{pure shellable}\end{array}\right\} \implies \text{Cohen-Macaulay.}\end{array}$$

刻画属于这些类别的单纯复形一直是一个活跃的研究领域（例如，参见 [4, 10, 20, 21, 22, 23]）。

我们的研究受到 Dochtermann-Engstr¨om [7,定理 4.1] 和 Woodroofe [22, 推论 7], 的一项基本结果的启发。他们证明，任意弦图 G 的独立复形 $\mathsf{Ind}(G)$ 都是顶点可分解的，因而也是可壳化的。这一结果凸显了图论结构与相关单纯复形的拓扑性质之间的紧密联系，也自然促使人们研究独立复形的高阶推广。此前的研究考察了若干特殊图类的复形 $\mathsf{CF}_t(G)$。例如，Moradi [18] 研究了环的补图的 t-无团复形 $\mathsf{CF}_t(C_n)$ 的纯性和可壳性，并考察了 $\mathsf{CF}_t(G)$ 的 Alexander 对偶，其中 G 表示图 G的补图。此外，Khosh-Ahang 和 Moradi [17]证明了若干著名图类的 $\mathsf{CF}_t(G)$ 具有顶点可分解性，这些图类包括路径图、星图、双星图、直径小于四的树、扫帚图和双扫帚图。

在本文中，我们超越这些特定的图族，为图 G 给出更广泛、系统性的充分条件，以确保复形 $\mathsf{CF}_t(G)$ 可壳化。我们的结果统一并拓展了若干早期结论，也为分析任意图的无团复形的组合拓扑提供了新工具。

我们的研究还揭示，$t \geq 3$ 的情形比经典情形 $t = 2$更为微妙。正如例 3.6 所示，存在一些弦图 G，使得 $\mathsf{CF}_t(G)$ 不是序列 Cohen-Macaulay 的，因而既不可壳化，也不是顶点可分解的。这一观察引出了以下核心问题。弦图的哪些自然子类能够保证$\mathsf{CF}_t(G)$对所有 $t \geq 3$都是顶点可分解、可壳化或序列 *Cohen-Macaulay* 的?

为了解决这个问题，我们采用 k-可分解性框架，这是一种对顶点可分解性的层级推广。对于维数为 k 的（不一定是纯的）单纯复形，以下蕴含关系成立（例如，参见 [14]）：

$$\text{0-分解，}\ \text{osable} \implies \text{1-decomposable} \implies \cdots \implies k\text{-decomposable} \iff \text{shellabl}$$

其中，0-可分解等价于顶点可分解。这个概念最初由 Provan 和 Billera [19] 针对纯复形提出，后来由 Bj¨orner-Wachs [2] 和 Woodroofe [23], 推广到非纯情形，为证明可壳性提供了一种分级且灵活的工具。

我们的主要结果通过一个禁用图子结构，给出了可壳性成立的充分条件。

定理 3.3。设 G 是一个 t-无菱形弦图。则对于所有 $t \geq 3$，复形$\mathsf{CF}_t(G)$ 都是$(t-2)$-可分解的。特别地，对于所有 $t \geq 3$，$\mathsf{CF}_t(G)$ 都是可壳的。

由于块图是 t-无菱形弦图的子类，定理 3.3 可直接应用于这一类图，从而保证对于所有 $t \geq 3$，$\mathsf{CF}_t(G)$ 具有可壳性。

现在我们将注意力转向以下自然问题：给定任意图G，应如何修改 G，使得相应的无团复形 $\mathsf{CF}_t(G)$ 对所有 $t \geq 2$ 都是顶点可分解的、可壳的或序列 Cohen-Macaulay 的? Villarreal [21] 的奠基性结果表明，对于任意图 G，其晶须化版本 $W(G)$ 的独立复形是 Cohen-Macaulay 的；该版本通过为 G 的每个顶点附加一个悬挂顶点而形成。随后，Francisco 和 H´a [9], 将这一结果推广，证明如果 $G \setminus S$ 是弦图或 5-圈 C_5，那么独立复形 $G \cup W(S)$（其中仅对 $S \subseteq V(G)$ 中的顶点添加晶须）是序列 Cohen-Macaulay 的。在此研究方向上进一步推进，Cook II 和 Nagel [3] 引入了顶点团晶须图 G^π 的概念，并证明 $\mathrm{Ind}(G^\pi)$ 同时是纯的和顶点可分解的。

受这些结果的启发，我们研究将不同大小的团附加到图上会如何影响其无团复形 $\mathsf{CF}_t(G)$ 的可壳性。我们的方法基于以下构造：给定一个图 H、一个子集 $S \subseteq V(H)$ 和一个整数 $t \geq 2$，我们构造一个新图 $\mathrm{Cl}(H, S, t)$，方法是在每个顶点 $v \in S$ 处附加一个大小至少为 t 且包含 v 的新团 K_v。

我们的主要结果表明，这一构造保持可壳性。

定理 4.2。设 $G = \mathrm{Cl}(H, S, t)$ 满足 $t \geq 2$。那么，复形 $\mathsf{CF}_t(H \setminus S)$ 是可壳化的，当且仅当 $\mathsf{CF}_t(G)$ 是可壳化的。

定理 4.2 推出若干有趣的推论。例如，推论 4.4 表明，若 $S \subseteq V(H)$ 是图 H 的圈覆盖，因而也是其顶点覆盖，则对于 $G = \mathrm{Cl}(H, S, t)$，无团复形 $\mathsf{CF}_t(G)$ 是可壳化的。这为通过策略性地添加团，构造适用于所有 $t \geq 2$ 的可壳化无团复形提供了一种通用方法。此外，我们的框架还重现并统一了 Francisco-H´a [9] 和 Van Tuyl-Villarreal [20], 的关键结果，详见推论 4.3。

在相关研究中，Cook II 和 Nagel [3]提出了图的团加叶这一概念。我们将这一构造加以推广（见构造 4.6），并证明以下结果。

定理 1.1. 设 G 是一个具有团顶点划分 $\Pi = \{W_1, \ldots, W_p\}$的图。对于任意整数 $t \geq 2$，t-团加叶图 $G(\Pi, t)$ 满足：

(i) 复形 $\mathsf{CF}_t(G(\Pi, t))$ 是纯的（定理 *4.8*）。*(ii)* 复形 $\mathsf{CF}_t(G(\Pi, t))$ 是可壳化的，因此是 *Cohen-Macaulay*（定理 *4.9*）。

设 G 是一个顶点集为 $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$的图。Villarreal [21], 引入的 G的边理想 是多项式环 $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$中的平方自由单项式理想 $I(G) = (x_i x_j \mid \{x_i, x_j\} \in E(G))$，其中 $\mathbb{K}$ 是一个域。边理想在图论与交换代数之间搭建了基础桥梁，使我们能够通过图所关联理想的同调不变量来研究图的组合性质。

该领域的一项奠基性成果是 Fr¨oberg 定理 [11], ，它刻画了边理想具有线性分解的图。具体而言，补图 G 的边理想 $I(G)$ 具有线性分解，当且仅当 G 是弦图。这一结果揭示了弦性与边理想同调性质之间的深刻联系。值得注意的是，对于二次无平方单项式理想，也就是图的边理想，线性分解的存在性仅取决于图的组合结构，与域 $\mathbb{K}$的选取无关。然而，对于由更高次数的平方自由单项式生成的理想，这种不变性并不成立；如 [16, 第 4],节所示，在这种情形下，分解性质可能取决于域的特征。

为了将 Fr¨oberg 定理推广到二次情形之外，自然的做法是在更一般的杂化体（也称为*Sperner* 族）框架下研究；杂化体通过允许边具有任意基数来推广图。形式上，顶点集$V(\mathcal{C})$上的杂化体 $\mathcal{C} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 是 $V(\mathcal{C})$ 的子集的一个集族，这些子集称为边 或回路，并且其中没有一条边真包含于另一条边中。如果 $\mathcal{C}$ 的每条边的基数都是 d, 那么 $\mathcal{C}$ 称为 d-均匀杂化体 （因此，图恰好是 2-均匀杂化体）。补团簇 $\mathcal{C}$ 由 $V(\mathcal{C})$ 中所有不属于 $\mathcal{C}$的 d-子集构成。杂化体 $\mathcal{C}$ 的边理想 是平方自由单项式理想

$$I(\mathcal{C}) = \Big(\prod_{x_i \in e} x_i \;\Big|\; e \in E(\mathcal{C}) \Big),$$

它推广了图的边理想，并在研究更高次数的平方自由单项式理想时发挥着核心作用；例如，参见 [12]。

受 Fr¨oberg 定理的启发，我们为任意图 G 关联一个 t-团簇$\mathcal{CH}_t(G)$，其边是 G 的 t-团。 $\mathcal{CH}_t(G)$ 的边理想恰好是 t-团无复形 $\mathrm{CF}_t(G)$ 的 Stanley-Reisner 理想。沿着这一方向，我们的主要结果将 Fr¨oberg 定理推广到了更高次数。

定理 5.2。 设 G 是一个弦图。那么，对每个整数 $t \geq 2$，边理想$I(\mathcal{CH}_t(G))$在任意域 $\mathbb{K}$ 上都有一个 t-线性分解。

本文的组织结构如下。第 2 节介绍必要的背景知识和记号，包括单纯复形，重点讨论可壳性和 Cohen-Macaulay 性质，以及边理想和线性分解。第 3 节确立本文的核心组合结果，证明对于任意 t-菱形无弦图 G，团无复形 $\mathrm{CF}_t(G)$ 都是 $(t-2)$-可分解的（定理 3.3）。第 4 节探讨保持可壳性的图修改技术，尤其关注通过向指定的顶点子集附加 t-团所得到的构造，并将其应用于圈覆盖和团加胡须图。最后，第 5 节讨论该理论的代数方面，我们通过证明任意弦图的补图 t-团簇的边理想具有 t-线性分解，推广了 Fr¨oberg 定理（定理 5.2）。

2. Notation and Preliminaries

我们首先回顾交换代数和代数组合学中的基本概念。设 $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ 表示域 $\mathbb{K}$ 上的多项式环，并赋予标准分次，其中每个变量的次数为一。对于任意齐次理想 $I \subseteq R$，其最小分次自由分解具有如下正合列形式

$$0 \to \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} R(-j)^{\beta_{p,j}(I)} \to \cdots \to \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} R(-j)^{\beta_{0,j}(I)} \to I \to 0,$$

其中，$p \leq n$ 是 I的投射维数，$R(-j)$表示 R的分次扭转，满足 $R(-j)_d = R_{d-j}$。指数$\beta_{i,\ j}(I)$称为分次贝蒂数，记录了第 i个 syzygy 模所需的次数为j 的生成元数量。

Castelnuovo-Mumford 正则度 of I，记作 $\mathrm{reg}(I)$，用于衡量分解的复杂度，定义为 $\mathrm{reg}(I) = \max\{j - i \mid \beta_{i,j}(I) \neq 0\}$。若齐次理想 I满足以下两个条件，则称其具有 d-线性分解：(1) 所有极小生成元的次数均为 d；(2) $\beta_{i,\ i+j}(I) = 0$ 对所有 $i \geq 1$ 和 $j \neq d$ 均成立。等价地，该分解可简化为

$$0 \to R(-d-p)^{\beta_{p,p+d}(I)} \to \cdots \to R(-d)^{\beta_{0,d}(I)} \to I \to 0,$$

在这种情况下，正则度等于生成次数，$\mathrm{reg}(I) = d$。

顶点集 $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 上的一个单纯复形 Δ 是 V的子集族（称为面），满足：

(i) 每个单点集 $\{x_i\}$ 都是一个面；(ii) Δ关于包含关系封闭（即，如果 $F \in \Delta$和 $F' \subseteq F$，则 $F' \in \Delta$）。

关于包含关系的极大面称为极大面。面 $F \in \Delta$的维数为 $\dim F = |F| - 1$，而 Δ的维数为 $\dim \Delta = \max\{\dim F \mid F \in \Delta\}$。如果 Δ 的所有极大面具有相同的维数，我们称 Δ 为纯的。如果该单纯复形恰好只有一个极大面，我们称其为单纯形。对于任意面 $F \in \Delta$，定义：F的链接为 $\mathrm{link}_\Delta(F) = \{F' \subseteq V \mid F' \cap F = \emptyset$和 $F' \cup F \in \Delta\}$，而 F的删除为$\Delta \setminus F = \{H \in \Delta \mid H \cap F = \emptyset\}$。

单纯复形 Δ 的 *Alexander* 对偶定义为 $\Delta^\vee = \{V \setminus F \mid F \notin \Delta\}$。两个单纯复形 Δ_1 和 Δ_2 在不相交的顶点集 V_1 和 V_2 上的连接是顶点集 $V_1 \cup V_2$ 上的单纯复形 $\Delta_1 * \Delta_2$，其面由$\{\sigma_1 \cup \sigma_2 \mid \sigma_1 \in \Delta_1,\ \sigma_2 \in \Delta_2\}$. 给出。注意，$\Delta * \{\emptyset\} = \Delta$。$\Delta$的 *Stanley-Reisner* 理想记作 I_Δ，它是多项式环 $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ 中的平方自由单项式理想，由 $I_\Delta = \big(x_{i_1} \cdots x_{i_s} \mid \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\} \notin \Delta\big)$. 定义。换句话说，$I_\Delta$ 由 Δ的极小非面生成。

剥离面这一概念最早由 Jonsson 在 [14] 中引入：

定义 2.1 ([14], 定义 2.10)。若一个面 $\sigma \in \Delta$ 满足：对于每个$\tau \in \mathrm{star}(\Delta, \sigma) = \{\rho \in \Delta \mid \sigma \subseteq \rho\}$ 以及每个 $v \in \sigma$，都存在一个顶点 $w \in V \setminus \tau$，使得$(\tau \cup \{w\}) \setminus \{v\} \in \Delta$.，则称其为剥离面。

当 σ 是一个顶点时，这一定义与 Bj¨orner 和 Wachs [2, Section 11]所定义的可剥离顶点概念一致。此外，当 Δ 是纯的时，这一定义与 Provan 和 Billera [19, Definition 2.1]中的定义一致。

定义 2.2 (t-可分解复形)。 若一个单纯复形 Δ 满足以下条件之一，则称其为 t-可分解的（对于 $t \geq -1$）：

(1) Δ 是一个单纯形（包括空复形 $\emptyset$ 和无关复形 $\{\emptyset\}$）；或者 *(2)* 存在一个剥离面 $\sigma \in \Delta$，满足 $\dim(\sigma) \leq t$，使得：*(i)* 删除 $\Delta \setminus \sigma$ 是 t-可分解的，且 *(ii)* 链接 $\mathrm{link}_\Delta(\sigma)$ 是 t-可分解的。

注 2.3.

(i) 根据定义，对于所有 $t \geq -1$，空复形 $\emptyset$ 和无关复形 $\{\emptyset\}$ 都是 t-可分解的。*(ii)* 当 $t = 0$时， t-可分解性的概念与顶点可分解的复形的概念一致。*(iii)* 对于 $t \geq 0$， t-可分解性关于 t是单调的：

$$t\text{-}decomposable \quad \Rightarrow \quad (t+1)\text{-}decomposable.$$

定义 2.4. 若一个单纯复形 Δ的极大面可按线性序$F_1, \ldots, F_s$排列（称为剥挖序），并满足以下条件，则称其为可壳化：对于每一对指标 $i < j$，都存在一个顶点 $v \in F_j \setminus F_i$ 和一个指标 $\ell < j$，使得 $F_j \setminus F_\ell = \{v\}$.

以下结果给出了可壳性关于可分解性的刻画：

定理 2.5。 [14] 一个 d 维单纯复形 Δ 是可壳化的，当且仅当它是d-可分解的。

称一个分次 R-模 M 为序列 ***Cohen-Macaulay***（在 $\mathbb{K}$ 上），若存在一个滤过

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_r = M$$

由分次 R-子模组成，并满足：

（i）每个子商 M_i/M_{i-1} 都是 Cohen-Macaulay；（ii）

Krull 维数序列严格递增：

$$\dim(M_i/M_{i-1}) < \dim(M_{i+1}/M_i) \quad \text{for all } 1 \leq i < r.$$

若单纯复形 Δ 的 Stanley-Reisner 环 $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/I_\Delta$ 作为 $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$-模是（序列）Cohen-Macaulay，则称其在 $\mathbb{K}$ 上是（序列）***Cohen-Macaulay***。

顶点集 $V(\mathcal{C})$ 上的团簇 $\mathcal{C}$ 是 $V(\mathcal{C})$ 的子集的一个集合，这些子集称为回路或边，其中任意两个不同的回路 e_1 和 e_2 都不满足 $e_1 \subseteq e_2$。这意味着这些回路在包含关系上彼此不可比较。当每个回路恰好包含 d 个顶点时，我们称 $\mathcal{C}$ 为 d-均匀团簇，每个回路则称为 d-回路。注意，任何简单图都自然对应于一个 2-均匀团簇，其中图的边成为团簇的回路。对于任意 d-均匀团簇 $\mathcal{C}$，我们定义其在同一顶点集 $V(\mathcal{C})$ 上的补团簇 $\mathcal{C}$。该补团簇由 $V(\mathcal{C})$ 的所有 d 元子集组成，且这些子集不是 $\mathcal{C}$ 的回路。形式上， $\mathcal{C} = \big\{e \subseteq V(\mathcal{C}) \mid |e| = d \text{ 和 } e \notin \mathcal{C}\big\}$.

设 $\mathcal{C}$ 为一个团簇。若子集 $I \subseteq V(\mathcal{C})$ 不包含任何回路，则称其为 $\mathcal{C}$ 的一个独立集。收缩 $\mathcal{C}/v$ 是定义在顶点集 $V(\mathcal{C}) \setminus \{v\}$上的团簇，其边为

$\{e \setminus \{v\} \mid e$ 中的极小集是 $\mathcal{C}\}$. 的一条边。独立复形Ind($\mathcal{C}$) 是由 $\mathcal{C}$的所有独立集组成的单纯复形。

给定一个顶点集为 $V(\mathcal{C}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 的团簇 $\mathcal{C}$，我们将每个顶点 $x_i \in V(\mathcal{C})$ 与多项式环 $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ 中的一个变量 x_i 对应起来。$\mathcal{C}$ 的边理想 记为 $I(\mathcal{C})$，它是 $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ 中由对应于 $\mathcal{C}$ 的边的单项式生成的平方自由单项式理想： $I(\mathcal{C}) = \left(\prod_{x_i \in e} x_i \,\middle|\, e \in E(\mathcal{C})\right)$. 这一构造推广了图的边理想，在研究高次平方自由单项式理想时发挥着核心作用 [12]。

设 G 是一个没有孤立顶点的图。我们分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示 G 的顶点集和边集。顶点 $x \in V(G)$ 的度 记为 $\deg_G(x)$，或简记为 $\deg(x)$，即与 x 相接的边数。若子图 $H \subseteq G$ 满足：对于任意两个顶点 $u, v \in V(H)$，边 $\{u, v\}$ 属于 $E(H)$ 当且仅当 $\{u, v\} \in E(G)$，则称该子图为诱导 子图。对于子集 $A \subseteq V(G)$，其上的诱导子图 记为 $G[A]$。顶点集 $\{u_1, \ldots, u_r\} \subseteq V(G)$ 的邻域 定义为

$$N_G(u_1, \ldots, u_r) = \big\{v \in V(G) \mid \{u_i, v\} \in E(G) \text{ for some } 1 \le i \le r\big\}.$$

我们也将 $N_G[u_1, \ldots, u_r] = N_G(u_1, \ldots, u_r) \cup \{u_1, \ldots, u_r\}$记作。对于子集 $U \subseteq V(G)$，我们将 $G \setminus U$ 记作由 $V(G) \setminus U$诱导的子图。若图 G 中的每一对不同顶点之间都有一条边相连，则称其为完全图 或团。若顶点$v \in V(G)$的邻域 $N_G(v)$在 G中构成一个团，则称该顶点为单纯顶点。

若图 G中的每个诱导圈的长度都恰为 3，则称其为弦图。弦图有一个关于单纯顶点的著名刻画。在他们的开创性工作中， [6] 证明了以下基本结果：每个弦图都至少包含一个单纯顶点。

若子集 $A \subseteq V(G)$ 所诱导的子图 $G[A]$ 不含大小为 t的团，则称该子集为 t-无团。t-团无复形记作 $\mathsf{CF}_t(G)$，它是一个单纯复形，其面是 $V(G)$的所有 t-无团子集。当 $t = 2$时，这就化为独立复形：$\mathrm{Ind}(G) = \mathsf{CF}_2(G)$，因此 t-团无复形是独立复形的一种自然推广。

定义 2.6 (t-团簇)。 图 G 的 t-团簇记作 $\mathcal{CH}_t(G)$，它是定义在顶点集 $V(G)$ 上的团簇，其回路恰为 G 的 t 个顶点的团（或 t-团）。形式化地，

$$\mathcal{CH}_t(G) = \big\{C \subseteq V(G) \mid |C| = t \text{ and } G[C] \text{ is a complete graph}\big\}.$$

团杂化及其独立复形的研究为理解图中团的结构提供了一个自然框架。下面的命题确立了 t-团簇的独立复形与 t-团无复形之间的基本联系，凸显了这两种对象如何编码图的相同组合信息。

命题 2.7。 对于任意图 G 和整数 $t \ge 2$， t-团簇 $\mathcal{CH}_t(G)$ 的独立复形与 G 的 t-团无复形一致。也就是说，$\mathrm{Ind}\left(\mathcal{CH}_t(G)\right) = \mathsf{CF}_t(G)$。

证明。 根据定义，子集 $A \subseteq V(G)$ 在 $\mathcal{CH}_t(G)$ 中是独立的，当且仅当它不包含 G 的任何 t-团；这恰好是 A 成为 $\mathsf{CF}_t(G)$ 的一个面的条件。□

3. Shellability of Clique-Free Complexes for Diamond-Free ChordalGraphs

本节给出我们的主要结果（定理 3.3），该结果表明，对于任意t-菱形无弦图 G 以及每个整数 $t \geq 3$，团无复形 $\mathsf{CF}_t(G)$ 都是 $(t-2)$-可分解的，因而是可壳化的。我们还通过构造说明，这一性质对任意弦图并不成立：我们给出了若干弦图的例子，其 t-团无复形并非可壳化。

以下引理在文献中基本上已为人所知。为求完整起见，我们在此给出证明。

引理 3.1. 设 Δ 是一个单纯复形，其面序列为 $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$。定义$\Delta_0 := \Delta$，并对每个 $1 \leq i \leq m$，令

$$\Delta_i := \Delta_{i-1} \setminus \sigma_i, \quad \Omega_i := \mathrm{link}_{\Delta_{i-1}}(\sigma_i).$$

假设对每个 $i = 1, \ldots, m$，以下条件均成立：

(i) σ_i 是 Δ_{i-1} 的剥离面，且 维数$\sigma_i \leq t$; *(ii)* Ω_i 是 t-可分解的；以及 *(iii)* Δ_m 是 t-可分解的。

那么 Δ 是 t-可分解的。

证明。 我们对 i进行逆向归纳。根据假设（iii）， Δ_m 是 t-可分解的。设对于某个 $1 \leq i \leq m$， Δ_i 是 t-可分解的。由于根据（i）， σ_i 是 Δ_{i-1}的剥离面，且 $\dim \sigma_i \leq t$ ，并且根据（ii），Ω_i 是 t-可分解的，因此由 t-可分解性的定义可知， Δ_{i-1} 也是 t-可分解的。由归纳法可知，这对所有 i均成立，特别地， $\Delta_0 = \Delta$ 是 t-可分解的。□

下面的结果可直接由定义得到。为完整起见，我们在此给出证明。

命题 3.2。 设 G_1 和 G_2 是顶点集不相交的图，即 $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$。那么，对于任意 $t \geq 2$， $\mathsf{CF}_t(G_1) * \mathsf{CF}_t(G_2) = \mathsf{CF}_t(G_1 \cup G_2)$。

证明。设 $f \in \mathsf{CF}_t(G_1) * \mathsf{CF}_t(G_2)$。则 $f = f_1 \cup f_2$ with $f_1 \in \mathsf{CF}_t(G_1)$ and $f_2 \in \mathsf{CF}_t(G_2)$。由于 $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$，且 f_1 和 f_2 分别在各自的图中是 t-无团的，因此 f 在 $G_1 \cup G_2$中是 t-无团的。于是， $f \in \mathsf{CF}_t(G_1 \cup G_2)$。反过来，设 $f \in \mathsf{CF}_t(G_1 \cup G_2)$。记 $f = f_1 \cup f_2$ with $f_1 \subseteq V(G_1)$ and $f_2 \subseteq V(G_2)$。由于 f 在 $G_1 \cup G_2$中是 t-无团的，可得 $f_1 \in \mathsf{CF}_t(G_1)$ and $f_2 \in \mathsf{CF}_t(G_2)$。因此， $f \in \mathsf{CF}_t(G_1) * \mathsf{CF}_t(G_2)$。故，$\mathsf{CF}_t(G_1) * \mathsf{CF}_t(G_2) = \mathsf{CF}_t(G_1 \cup G_2)$。□

图 G 是一个 t-菱形，当且仅当它是两个不同的 t-团的并，且它们交于一个 $(t-1)$-团。等价地， G 由两个含有 t 个顶点的完全子图组成，它们恰好共享 $t-1$ 个顶点。

现在我们可以证明第一个主要结果了

定理 3.3。 设 G 是一个 t-无菱形弦图。那么，对所有 $t \geq 3$，复形$\mathsf{CF}_t(G)$ 都是$(t-2)$-可分解的。因此，对所有 $t \geq 3$， $\mathsf{CF}_t(G)$ 都是可壳化的。

证明。 我们对 G 的顶点数使用归纳法证明该定理。若 $|V(G)| = 3$，则 G 显然是弦图，且不含任何 $t > 3$ 的 t-团。因此，直接检查可知 $\mathbf{CF}_t(G)$ 是 $(t-2)$-可分解的。现在假设 $|V(G)| \geq 4$，并且该结论对所有顶点数更少的 t-无菱形弦图都成立。由于 G 是弦图，它含有一个单纯顶点，记为 x_1。令 $N_G[x_1] = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$。

Case 1: $k < t$。

令 $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\} \subseteq N_G[x_1]$ 为 G的单纯顶点。考虑诱导子图

$$G_1 = G[\{x_1, \ldots, x_p\}] \quad \text{and} \quad G_2 = G[V(G) \setminus \{x_1, \ldots, x_p\}].$$

由于 $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$，由命题 3.2 可得 $\mathbf{CF}_t(G_1 \cup G_2) = \mathbf{CF}_t(G_1) * \mathbf{CF}_t(G_2)$。

我们断言 $\mathbf{CF}_t(G) = \mathbf{CF}_t(G_1 \cup G_2)$。反之，存在一个面 $f \in \mathbf{CF}_t(G_1 \cup G_2)$，使得 $f \notin \mathbf{CF}_t(G)$。这意味着 f 在 G 中包含一个 t-团，而该团在 G_1 或 G_2 中都不存在。然而，由于 $|V(G_1)| = p < k < t$， G_1不可能包含 t-团。因此， f 中的任何 t-团都必须完全位于 G_2中，这与假设 $f \notin \mathbf{CF}_t(G)$矛盾。因此，断言成立。 G_1 和G_2 都是 G的诱导子图，因此也都是 t-无菱形弦图。根据归纳假设，$\mathbf{CF}_t(G_1)$和$\mathbf{CF}_t(G_2)$都是$(t-2)$-可分解的。由命题 3.8], ，它们的连接 $\mathbf{CF}_t(G) = \mathbf{CF}_t(G_1) * \mathbf{CF}_t(G_2)$也$(t-2)$-可分解。

Case 2: $k \geq t$。定义

$$S = \{\sigma \subseteq \{x_2, \ldots, x_k\} \mid |\sigma| = t-1\} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\},$$

其中 $m = \binom{k-1}{t-1}$。注意，对于每个 $1 \leq i \leq m$， $\sigma_i \in \mathbf{CF}_t(G)$。

设 $\Delta_0 := \mathbf{CF}_t(G)$。对于每个 $1 \leq i \leq m$，定义

$$\Delta_i := \Delta_{i-1} \setminus \sigma_i, \ \Omega_i := \mathrm{link}_{\Delta_{i-1}}(\sigma_i).$$

我们断言，每个 σ_i 都是 Δ_{i-1}的剥离面。设 $\tau \in \mathbf{star}(\Delta_{i-1}, \sigma_i)$，即对于某个 $K \subseteq V(G)$，有 $\tau = \sigma_i \cup K$，且 K 中没有顶点属于 $N_G[x_1]$。特别地， $x_1 \notin \tau$。

对于任意 $x \in \sigma_i$，考虑集合 $(\tau \cup \{x_1\}) \setminus \{x\}$。由于 τ 是 t-无团的，且 x_1 不与 K 中任何顶点相邻，因此该集合仍然是 t-无团的。因此，$(\tau \cup \{x_1\}) \setminus \{x\} \in \Delta_0$。由于 Δ_{i-1} 包含 Δ_0 中所有包含 x_1 的面，这意味着 $(\tau \cup \{x_1\}) \setminus \{x\} \in \Delta_{i-1}$。因此， σ_i 是 Δ_{i-1}的剥离面。此外，对于所有 $1 \leq i \leq m$，$\dim \sigma_i = t-2$。

接下来，我们证明对所有的 $1 \leq i \leq m.$，都有 $\mathbf{link}_{\Delta_{i-1}}(\sigma_i) = \mathbf{CF}_t(G \setminus N_G[x_1])$。设 $\tau \in \mathbf{CF}_t(G \setminus N_G[x_1])$。那么 $\tau \cap \sigma_i = \emptyset$，且 $\tau \cup \sigma_i$ 在 G 中是 t-无团的，因为 $|\sigma_i| = t-1$，并且 G 是t-无菱形的，所以所有包含 σ_i 的 t-团都必须位于诱导子图 $G[N_G[x_1]]$中。因此， $\tau \cup \sigma_i \in \Delta_0$; 又因为 τ 与 $N_G[x_1]$ 和 $\sigma_i \subseteq N_G[x_1]$不相交，所以$\tau \cup \sigma_i \in \Delta_{i-1}$。由此， $\tau \in \mathbf{link}_{\Delta_{i-1}}(\sigma_i)$。

反过来，若 $\tau \in \mathbf{link}_{\Delta_{i-1}}(\sigma_i)$，则 $\tau \cup \sigma_i \in \Delta_{i-1} \subseteq \Delta_0$，且其为 t-无团的。由于$\tau \cap \sigma_i = \emptyset$ 且 $\sigma_i \subseteq N_G[x_1]$，可知 τ 与 $N_G[x_1]$不相交，因此 $\tau \in \mathbf{CF}_t(G \setminus N_G[x_1])$。至此，断言得证。

现在， $G \setminus N_G[x_1]$ 必须是 t-无菱形且为弦图。由归纳法，$\mathbf{CF}_t(G \setminus N_G[x_1])$是$(t-2)$-可分解的。由于每个$\Omega_i$ 都同构于这个复形，它们也都是$(t-2)$-可分解的。

现在考虑集合

$$S' = \{X \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\} \mid X = \{x_1\} \cup X',\ X' \subseteq \{x_2, \ldots, x_k\},\ |X'| = t-2\}.$$

该集合可枚举为 $S' = \{X_1, \ldots, X_\ell\}$，其中 $\ell = \binom{k-1}{t-2}$。令 Δ' 为一个极大面为 X_1、.....、X_ℓ 的单纯复形。注意， $\Delta' = \{x_1\} * \Delta''$，其中 Δ'' 是以 $\{x_2, \ldots, x_k\}$ 为顶点的单纯形的（$t-3$）骨架。因此，由 [23, 命题 3.8 和引理 3.10]， Δ' 是（$t-2$）可分解的。

现在我们断言 $\Delta_m = \Delta' * \mathsf{CF}_t(G \setminus N_G[x_1])$。令 $f = f_1 \cup f_2 \in \Delta' * \mathsf{CF}_t(G \setminus N_G[x_1])$。那么 $\sigma_i \nsubseteq f_1$，因此对所有 $1 \le i \le m$ 都有 $\sigma_i \nsubseteq f$。于是， $f \in \Delta_m$。

反过来，设 $f \in \Delta_m$。定义 $f_1 := f \cap N_G[x_1]$ 和 $f_2 := f \setminus f_1$。由于 f 是 t-无团的，我们必有 $|f_1| \le t-1$。此外，由于 $\sigma_i \nsubseteq f$, f_1 不能包含 $\{x_2, \ldots, x_k\}$的任何 $(t-1)$- 子集，因此 $f_1 \in \Delta'$。显然， $f_2 \in \mathsf{CF}_t(G \setminus N_G[x_1])$。因此， $f \in \Delta' * \mathsf{CF}_t(G \setminus N_G[x_1])$。

因此， Δ_m 是两个 $(t-2)$-可分解复形的连接，故为 $(t-2)$-可分解。由引理 3.1可知， $\mathsf{CF}_t(G) = \Delta_0$ 也为 $(t-2)$- 可分解。 □

若每个块 （即移除任一单个顶点后仍保持连通的极大连通子图）都是完全图，则图 G 称为块图 。由于对于所有 $t \ge 3$，块图都是 t-无菱形且为弦图，因此我们得到定理 3.3的以下直接推论：

推论 3.4。 对于任意块图 G，复形 $\mathsf{CF}_t(G)$ 是$(t-2)$-可分解的，因而是可壳化的。

下述推论是 [10] 中引理 3.6 和定理 3.3 的直接推论：设 I 是一个平方自由单项式理想。那么，商环 $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/I$ 是 Cohen-Macaulay 的，当且仅当它是序列 Cohen-Macaulay 的，且理想 I 是无混合的。

推论 3.5。 设 G 是一个 t-菱形自由弦图。那么，边理想 $I(\mathcal{CH}_t(G))$ 是 *Cohen-Macaulay* 的，当且仅当 $I(\mathcal{CH}_t(G))$ 是无混合的。

下面的构造表明，对于某些参数，存在其 t-团自由复形不是序列 Cohen-Macaulay 的（因而也不可壳化）的弦图。

例 3.6。 设 K_n 是顶点集为 $V(K_n) = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.、具有 n 个顶点的完全图。我们通过如下方式扩充 K_n，构造图 $G_{n,t}$：对每个 $1 \le i \le n$，引入 $t-2$ 个新顶点 $\{x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,t-2}\}$，使得 $G_{n,t}$ 的顶点集变为

$$V(G_{n,t}) = V(K_n) \cup \bigcup_{i=1}^{n} \{x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,t-2}\}.$$

$G_{n,\ t}$ 的边集由以下部分组成：

(1) K_n 的所有边；*(2)* 对于每个 i，由 $\{y_i, y_{i+1}, x_{i,1}, \ldots, x_{i,t-2}\}$ 构成的一个 t 阶团，其中指标按模 n 计算。

Thus, $E(G_{n,t}) = E(K_n) \cup \bigcup_{i=1}^{n} \{\{x,y\} \mid x,y \in \{y_i, y_{i+1}, x_{i,1}, \ldots, x_{i,t-2}\}, x \neq y \quad \}$.

假设 $n \neq 35$ 和 $t > \lceil \frac{n}{2} \rceil$。我们证明， t-无团复形 $\mathsf{CF}_t(G_{n,t})$ 不是序列 ***Cohen-Macaulay***。反设 $\mathsf{CF}_t(G_{n,t})$ 是序列 ***Cohen-Macaulay***。根据 [15, 定理 3。30]， $\mathsf{CF}_t(G_{n,t})$ 中任意面的链接也必须是序列 ***Cohen-Macaulay***。

考虑面 $\sigma = \{x_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq t-2\}$，它由所有新添加的顶点组成。一个关键观察是，$\mathrm{link}_{\mathsf{CF}_t(G_{n,t})}(\sigma) = \mathrm{Ind}(C_n)$，其中 $\mathrm{Ind}(C_n)$是 n-圈的独立复形。然而，根据 [24, 定理 10], $\mathrm{Ind}(C_n)$ 对于 $n \neq 35$不是序列 ***Cohen-Macaulay***，从而产生矛盾。因此，$\mathsf{CF}_t(G_{n,t})$ 对于 $t > \lceil \frac{n}{2} \rceil$不是序列 ***Cohen-Macaulay***。

4. Shellability Preservation under Clique Attachments and Whiskerings

本节研究在各种图运算下，无团复形的可壳性是否得以保持。首先，我们引入团附加构造 $\mathrm{Cl}(H, S, t)$（构造 4.1），并确立一项关键的结构性结果：团无复形 $\mathsf{CF}_t(G)$ 可壳化，当且仅当 $\mathsf{CF}_t(H \setminus S)$ 可壳化（定理 4.2）。这一结果推广并统一了先前关于可壳性的研究（见推论 4.3），并得出可壳性的新的充分条件（推论 4.4）。随后，我们考察团加须$G(\Pi, t)$，证明其对应的团无复形是纯的（定理 4.8）、$(t-2)$-可分解的（定理 4.9），并且是 Cohen–Macaulay 的（推论 4.10）。

构造 4.1。 设 H 是一个图，且 $S \subseteq V(H)$。我们如下定义图 $G = \mathrm{Cl}(H, S, t)$:

- 对每个顶点 $v \in S$，附加一个大小至少为 t 的新团 K_v，其中 $v \in V(K_v)$（即， K_v 包含 v 和 $|V(K_v)| \geq t$）。
- K_v 并且对于 $u \neq v$， K_u 不共享任何顶点。
- 所附加团的大小 $\{K_v\}_{v \in S}$ 可以不同（即，对于 $u \neq v$， $|V(K_v)|$ 独立于 $|V(K_u)|$）。

所有附加操作同时进行，也就是说，所得图 G是通过一次性将所有团 $\{K_v\}_{v \in S}$ 添加到 H 中得到的。

现在，我们将确立本节的一个主要结构性结果：对团附加下可壳化性保持给出完整刻画。

定理 4.2。 设 $G = \mathrm{Cl}(H, S, t)$，其中 H 是一个图， $S \subseteq V(H)$，且 $t \geq 2$。则$\mathsf{CF}_t(H \setminus S)$ 可壳化，当且仅当$\mathsf{CF}_t(G)$ 可壳化。

证明。 假设 $\mathsf{CF}_t(H \setminus S)$ 是可壳化的。我们对 $|S|$ 使用归纳法。若 $|S| = 0$，则$G = H = H \setminus S$，因此结论显然成立。现在假设该命题对所有大小为 n 的 S 都成立。令 $|S| = n+1$ 并选取一个顶点 $v \in S$。令 $V(K_v) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$，其中 $x_k = v$和 $k \geq t$。定义 $\{x_2, \ldots, x_k\}$ 的所有 $(t-1)$-子集组成的集合:

$$\mathcal{S} = \{\sigma \subseteq \{x_2, \ldots, x_k\} \mid |\sigma| = t-1\} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\},$$

其中 $m = \binom{k-1}{t-1}$。每个 σ_i 都属于 $\mathsf{CF}_t(G)$，因为它们不会形成 t-团。

令 $\Delta_0 := \mathsf{CF}_t(G)$。对于 $1 \leq i \leq m$，定义:

$$\Delta_i := \Delta_{i-1} \setminus \sigma_i,\ \Omega_i := \mathrm{link}_{\Delta_{i-1}}(\sigma_i).$$

我们声称，每个 σ_i 都是 Δ_{i-1} 的剥离面。事实上，对于任意 $\tau \in \mathrm{star}(\Delta_{i-1}, \sigma_i)$，写作 $\tau = \sigma_i \cup K$，其中 K 不包含 $N_G[x_1]$ 中的任何顶点。于是对于任意 $x \in \sigma_i$，集合 $(\tau \cup \{x_1\}) \setminus \{x\}$ 仍然是 t-无团的：x_1 与 K 中的任何顶点都不相邻，而根据假设，τ 是 t-无团的。因此，$(\tau \cup \{x_1\}) \setminus \{x\} \in \Delta_0$，从而属于 Δ_{i-1}，这就证明了 σ_i 是 Δ_{i-1} 的剥离面。

接下来，我们证明：$\mathrm{link}_{\Delta_{i-1}}(\sigma_i) = \mathrm{CF}_t(G \setminus N_G[x_1])$。首先，若 $\tau \in \mathrm{CF}_t(G \setminus N_G[x_1])$，则 $\tau \cap \sigma_i = \emptyset$，且所有包含 σ_i 的 t-团都位于 $G[N_G[x_1]]$ 内。因此，$\tau \cup \sigma_i$ 在 G 中是无 t-团的，所以 $\tau \in \mathrm{link}_{\Delta_{i-1}}(\sigma_i)$。反过来，链接中的任意 τ 都满足 $\tau \cup \sigma_i$ 是无 t-团的；又由于 $\sigma_i \subseteq N_G[x_1]$，可知 τ 与 $N_G[x_1]$ 不相交，故 $\tau \in \mathrm{CF}_t(G \setminus N_G[x_1])$。注意：$G \setminus N_G[x_1] = \mathrm{Cl}(H \setminus v, S \setminus \{v\}, t)$。由于 $|S \setminus \{v\}| = n$ 且 $(H \setminus v) \setminus (S \setminus \{v\}) = H \setminus S$，由归纳假设可知 $\mathrm{CF}_t(G \setminus N_G[x_1])$ 是可壳化的。

现在定义：

$$\mathcal{S}' = \{X \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\} \mid X = \{x_1\} \cup X',\ X' \subseteq \{x_2, \ldots, x_k\},\ |X'| = t-2\}.$$

令 Δ' 为一个单纯复形，其极大面是 $\mathcal{S}'$中的元素。那么 $\Delta' = \{x_1\} * \Delta''$，其中 Δ'' 是以 $\{x_2, \ldots, x_k\}$为顶点的单纯形的（$t-3$）骨架。根据 [23, 命题 3.8 和引理 3.10]，Δ' 是可壳化的。

我们现在断言：$\Delta_m = \Delta' * \mathrm{CF}_t(G \setminus N_G[x_1])$。设 $f = f_1 \cup f_2 \in \Delta' * \mathrm{CF}_t(G \setminus N_G[x_1])$。那么对于所有 i，$\sigma_i \nsubseteq f_1$，因此 $\sigma_i \nsubseteq f$，进而 $f \in \Delta_m$。反过来，若 $f \in \Delta_m$，令 $f_1 = f \cap N_G[x_1]$和 $f_2 = f \setminus f_1$。由于 f 是无 t 团的，且所有 σ_i 都不是 f_1的子集，因此我们有$f_1 \in \Delta'$。此外，$f_2 \in \mathrm{CF}_t(G \setminus N_G[x_1])$。于是，$f \in \Delta' * \mathrm{CF}_t(G \setminus N_G[x_1])$。

最后，由归纳假设可知，Δ' 和 $\mathrm{CF}_t(G \setminus N_G[x_1])$ 均可壳化，因此根据可壳复形的性质，它们的连接 Δ_m 也可壳化。通过反复应用 [23, 引理 3.4]，，我们依次得到 Δ_{m-1}、Δ_{m-2}，并继续得到 $\Delta_0 =\mathrm{CF}_t(G)$，它们都可壳化。

假设 $\mathrm{CF}_t(G)$ 可壳化。令 $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V(H)$。对于每个 i，选择一个子集 $\sigma_i \subset V(K_{v_i} \setminus \{v_i\})$，使得 $|\sigma_i| = t-1$，并定义 $\sigma = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i$。根据 $G = \mathrm{Cl}H,\ S,\ t$的构造，可知 $\sigma \in \mathrm{CF}_t(G)$。

我们声称 $\mathrm{link}_{\mathrm{CF}_t(G)}(\sigma) = \mathrm{CF}_t(H \setminus S)$。首先，令 $f \in \mathrm{link}_{\mathrm{CF}_t(G)}(\sigma)$。那么 $f \cup \sigma \in \mathrm{CF}_t(G)$，且 $f \cap \sigma = \emptyset$。由于 σ 完全由添加的团支撑，且 f 与 σ不相交，因此必有 $f \in \mathrm{CF}_t(H \setminus S)$。

反过来，假设 $g \in \mathrm{CF}_t(H \setminus S)$。那么：

(1) $g \cap \sigma = \emptyset$，因为 $\mathrm{CF}_t(H \setminus S)$ 的支撑完全位于用于构造 σ 的添加的团顶点之外；
(2) $g \cup \sigma \in \mathrm{CF}_t(G)$，因为 g 和 σ 都属于 $\mathrm{CF}_t(G)$，且二者不相交。

因此，$g \in$链接$_{\mathrm{CF}_t(G)}(\sigma)$。

因此，链接$_{\mathrm{CF}_t(G)}(\sigma) = \mathrm{CF}_t(H \setminus S)$，根据定理 3.30]，它是可壳化的。由此可知，$\mathrm{CF}_t(H \setminus S)$ 是可壳化的。□

作为定理 4.2 的直接推论，我们重新得到 Francisco-H´a [9] 和 Van Tuyl-Villarreal [20] 的结果：

推论 4.3。

(a) [9, 定理 3。3] 设 G 是一个图，且 $S \subseteq V$（G）。假设 $G \setminus S$ 是一个弦图或五圈 C_5。那么 CF_2（G, S，2）是一个序列 ***Cohen-Macaulay*** 图。*(b)* [20, 推论 2。7] 设 G 是一个图，且 $S \subseteq V$（G）。如果 CF_2（Cl（G, S，2））是可壳化的，那么 CF_2（$G \setminus S$）是可壳化的。

设 $G = (V(G)\ E(G))$ 是一个图。G 的 圈覆盖 是一个子集 $S \subseteq V(G)$，使得 G 中的每个圈都至少包含一个来自 S 的顶点。等价地，当且仅当诱导子图 $G \setminus S$ 是森林时，S 才是圈覆盖。如果 S 是 G 的顶点覆盖（即，G 的每条边都至少有一个端点属于 S），那么 $G \setminus S$ 是独立集。特别是，由于独立集是森林，每个顶点覆盖也是圈覆盖。然而，反之一般不成立。

作为定理 4.2 的直接推论，我们得到关于无团复形中团添加下可壳性保持的若干基本结果。这些结果提供了生成新可壳复形的构造性判据。

推论 4.4。设 $G = \mathrm{Cl}(H, S, t)$，其中 H 是一个图，$S \subseteq V(H)$，且 $t \geq 2$。那么，在以下任一情形下，$\mathsf{CF}_t(G)$ 都是可壳的：

(1) S 是 H的圈覆盖；*(2)* $H \setminus S$ 是 t菱形自由弦图（特别地，是块图）；

(3) $|S| \geq |V(H)| - 3$。

证明。(1) 若 S 是 H的圈覆盖，则 $H \setminus S$ 是森林。当 $t = 2$时，由[22, 推论 7] 可知，$\mathsf{CF}_t(H \setminus S)$是顶点可分解的。对于 $t \geq 3$，$\mathsf{CF}_t(H \setminus S)$是一个单纯形。在这两种情况下，根据定理 4.2，$\mathsf{CF}_t(G)$都是可壳化的。

(2) 若 $H \setminus S$是 t菱形自由弦图，则根据定理 3.3，$\mathsf{CF}_t(H \setminus S)$是可壳化的。应用定理 4.2，可知$\mathsf{CF}_t(G)$也可壳化。

(3) 若 $|S| \geq |V(H)| - 3$，则 $H \setminus S$ 至多有三个顶点。因此，它要么是三角形、森林，要么是含有孤立顶点的图——这些图都是 t菱形自由弦图。根据定理 3.3 和定理 4.2，可知$\mathsf{CF}_t(G)$是可壳化的。□

作为定理 4.2 的直接推论，我们可以确定某些顶点集，在这些集合上添加团并不会得到可剖分无团复形。

推论 4.5. 设 G 为一个图，$S \subseteq V(G)$，且 $t \geq 3$。若 $G \setminus S = G_{n,t}$，其中 $G_{n,t}$是例 *3.6* 中构造的图，$n \neq 3,\ 5$，且 $t > \lceil \frac{n}{2} \rceil$，则 $\mathsf{CF}_t(G, S, t)$ 不可壳化。

在 [3], 中，Cook II 和 Nagel 引入了图的团加叶这一概念。我们给出他们构造的以下推广。

构造 4.6. 设 G 为一个图。G 的团顶点划分是由 G 中两两不交（可以为空）的团构成的集合 $\Pi = \{W_1, \ldots, W_p\}$，其并集为 $V(G)$。每个图至少有一个这样的划分——例如平凡划分

$$\Pi = \{\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}\}, \quad where\ V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

给定一个图 G、一个团顶点划分 $\Pi = \{W_1, \ldots, W_p\}$ 和一个整数 $t \geq 2$，相对于 Π 的 G t-团加叶 记作 $G(\Pi, t)$，其构造如下：

- 顶点集：对每个 $1 \leq i \leq p$，引入 $t-1$ 个新顶点 $\{x_{i,1}, \ldots, x_{i,t-1}\}$，它们彼此不同，且与 $V(G)$不相交。然后，$V(G(\Pi, t)) = V(G) \cup \bigcup_{i=1}^{p} \{x_{i,1}, \ldots, x_{i,t-1}\}$.
- 边集：边集通过将每个 $W_i \cup \{x_{i,1}, \ldots, x_{i,t-1}\}$ 变为一个团来扩展 $E(G)$：

$$E(G(\Pi, t)) = E(G) \cup \bigcup_{i=1}^{p} \{\{a, b\} \mid a \neq b, a, b \in W_i \cup \{x_{i,1}, \ldots, x_{i,t-1}\}\}.$$

注 4.7. 当 $t = 2$ 时，这一构造就特化为 *Cook II* 和 *Nagel* [3] 提出的经典团胡须化。情形 $t > 2$ 则给出一种自然的高阶推广。

我们将 [3, 引理 3.2] 推广到更高阶的团加须，证明对于任意 $t \geq 2$，复形 $\mathsf{CF}_t(G(\Pi, t))$ 的维数为 $p(t-1) - 1$ 且为纯复形。

定理 4.8. 设 G 是一个具有团顶点划分 $\Pi = \{W_1, \ldots, W_p\}$ 的图。对于每个整数 $t \geq 2$，t-团加叶 $G(\Pi, t)$ 满足：

(1) 维数 $\left(\mathsf{CF}_t(G(\Pi, t))\right) = p(t-1) - 1$;

(2) 复形 $\mathsf{CF}_t(G(\Pi, t))$ 是纯的。

证明。(1) 对于每个 W_i，令 $\{x_{i,1}, \ldots, x_{i,t-1}\}$ 为新添加的顶点，并令 B_{W_i} 表示由 $W_i \cup \{x_{i,1}, \ldots, x_{i,t-1}\}$ 构成的 $G(\Pi, t)$ 中的团。设 $F \in \mathsf{CF}_t(G(\Pi, t))$ 是任意一个面。由于 F 是无 t 团的，它在每个 B_{W_i} 中至多包含 $t-1$ 个顶点（因为 B_{W_i} 中任意 t 个顶点都会构成一个 t 团）。因此，$|F| \leq p(t-1)$，即 $\dim(\mathsf{CF}_t(G(\Pi, t))) < p(t-1)$。然而，集合 $\bigcup_{i=1}^{p} \{x_{i,1}, \ldots, x_{i,t-1}\}$ 是无 t 团的，且有 $p(t-1)$ 个顶点。因此，$\dim\left(\mathsf{CF}_t(G(\Pi, t))\right) = p(t-1) - 1$.

(2) 我们证明，$G(\Pi, t)$ 中每个极大 t-无团集恰好有 $p(t-1)$ 个顶点。设 I 是 $G(\Pi, t)$ 中任意一个 t-无团集。我们可以将 I 分解为 $I = \bigcup_{i=1}^{p} I_i$，其中 $I_i \subseteq B_{W_i}$（可能为空），并且对所有 i 都有 $|I_i| \leq t-1$。对于每个 i，用一个子集 $S_i \subseteq \{x_{i,1}, \ldots, x_{i,t-1}\} \setminus I_i$ 扩充 I_i，使得 $|I_i \cup S_i| = t-1$（若 $|I_i| = t-1$，则令 $S_i = \emptyset$）。由于不同 W_i 对应的$\{x_{i,j}\}$ 彼此不相交，并集 $\bigcup_{i=1}^{p}(I_i \cup S_i)$ 仍然是 t-无团的，且大小为 $p(t-1)$。此外，任何不属于 $\bigcup_{i=1}^{p}(I_i \cup S_i)$ 的顶点 x 都必须属于某个 B_{W_i}。将 x 加入 $I_i \cup S_i$ 会在 B_{W_i} 中形成一个 t-团，因此$\bigcup_{i=1}^{p}(I_i \cup S_i)$ 是极大的。

由于 I 是任意的，所有极大 t-无团集的大小均为 $p(t-1)$，这证明 $\mathsf{CF}_t(G(\Pi, t))$ 是纯的。□

回顾 [23, 定义 4.2]，团簇 $\mathcal{C}$ 中的顶点 $v \in V(\mathcal{C})$ 称为单纯顶点，如果对于包含 v 的任意两条边 $e_1, e_2 \in E(\mathcal{C})$，存在一条边 $e_3 \in E(\mathcal{C})$，使得 $e_3 \subseteq (e_1 \cup e_2) \setminus \{v\}$.

以下结果推广了 [3, 定理 3.3],，该定理证明了 2-无团复形是顶点可分解的。我们将其推广到高阶团，证明对于$t > 2$，t-无团复形是可壳化的。

定理 4.9. 设 G 是一个图，Π 是 G的团顶点划分。对于每个$t \geq 2$，复形 $\mathsf{CF}_t(G(\Pi, t))$ 是 $(t-2)$- 可分解的。因此，$\mathsf{CF}_t(G(\Pi, t))$ 是可壳化的。

证明。令 $\mathcal{CH}_t(G(\Pi,t))$ 表示 $G(\Pi,t)$ 的 t-团簇，其中 $\Pi=\{W_1,\ldots,W_p\}$。根据命题 2.7 和 [23, 推论 5.3], ，只需证明 $\mathcal{CH}_t(G(\Pi,t))$ 的每个收缩都含有一个单纯顶点。设 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{CH}_t(G(\Pi,t))$ 的一个收缩，即$\mathcal{H}=\mathcal{CH}_t(G(\Pi,t))/V_c$，其中 $V_c\subseteq V(G(\Pi,t))$ 是某个子集。$G(\Pi,t)$ 的顶点集为

$$V(G(\Pi,t))=V(G)\cup\bigcup_{i=1}^{p}\{x_{i,1},x_{i,2},\ldots,x_{i,t-1}\},$$

并定义 $N=\bigcup_{i=1}^{p}\{x_{i,1},x_{i,2},\ldots,x_{i,t-1}\}$. 我们考虑两种情形:

情形 1： $N\cap V(\mathcal{H})=\emptyset$，即 N 中的所有顶点都被收缩。

令 $a\in V(\mathcal{H})$。则 $a\in W_i$，其中某个 $1\le i\le p$。由于集合 $\{a,x_{i,1},\ldots,x_{i,t-1}\}$ 在 $G(\Pi,t)$ 中构成一个 t-团，因此是 $\mathcal{CH}_t(G(\Pi,t))$ 中的一条边。由于所有 $x_{i,j}$ 都被收缩，因此收缩后的 $\mathcal{H}$ 包含单点边 $\{a\}$。由此， $\mathcal{H}$ 中的所有边都是单点边，所以每个顶点都是单纯的。

情形 2： $N\cap V(\mathcal{H})\neq\emptyset$。

首先假设对于每个 $a\in N\cap V(\mathcal{H})$，都有 $\{a\}\in E(\mathcal{H})$。我们断言，$\mathcal{H}$ 中的每条边都是单点边。令 $\alpha\in V(\mathcal{H})$。若 $\alpha\in N$，则根据假设， $\{\alpha\}\in E(\mathcal{H})$。假设$\alpha\notin N$，因此对某个 i，有 $\alpha\in W_i$。若 $\{x_{i,1},\ldots,x_{i,t-1}\}\cap V(\mathcal{H})=\emptyset$，则如情形 1 中那样，我们得到$\{\alpha\}\in E(\mathcal{H})$。

否则，存在 $\beta\in\{x_{i,1},\ldots,x_{i,t-1}\}\cap V(\mathcal{H})$。由于 $\{\beta\}\in E(\mathcal{H})$，存在$f\in E(\mathcal{CH}_t(G(\Pi,t)))$，满足 $\beta\in f\subseteq W_i\cup\{x_{i,1},\ldots,x_{i,t-1}\}$且 $f\cap V(\mathcal{H})=\{\beta\}$。考虑$f'=(f\cup\{\alpha\})\setminus\{\beta\}$。那么 f'也是 t-团，且属于 $G(\Pi,t)$，因此 $f'\in E(\mathcal{CH}_t(G(\Pi,t)))$。像 $e'=f'\cap V(\mathcal{H})\subseteq\{\alpha\}$ 蕴含 $\{\alpha\}\in E(\mathcal{H})$。

因此， $\mathcal{H}$ 的每条边都是单点集，且每个顶点都是单纯的。

现在假设存在 $\alpha\in N\cap V(\mathcal{H})$，使得 $\{\alpha\}\notin E(\mathcal{H})$。我们断言 α 在 $\mathcal{H}$ 中是单纯的。假设 α 属于两条不同的边 e_1、$e_2\in E(\mathcal{H})$，且 $\alpha\in e_1\cap e_2$和 $e_1\neq e_2$。那么存在 f_1、$f_2\in E(\mathcal{CH}_t(G(\Pi,t)))$，满足 $f_j\subseteq W_i\cup\{x_{i,1},\ldots,x_{i,t-1}\}$且 $f_j\cap V(\mathcal{H})=e_j$对于 $j=1$，2。由于 $f_1\neq f_2$，我们有 $|f_1\cup f_2|\ge t+1$。选取一个 t-子集$f_3\subseteq(f_1\cup f_2)\setminus\{\alpha\}$，使得 $f_3\in E(\mathcal{CH}_t(G(\Pi,t)))$，并令 $e_3=f_3\cap V(\mathcal{H})$。那么$e_3\subseteq(e_1\cup e_2)\setminus\{\alpha\}$。如果 $e_3\in E(\mathcal{H})$，那么 α 是单纯的。否则，由于 $\mathcal{H}$ 是一个收缩，存在 $e_3'\in E(\mathcal{H})$，满足 $e_3'\subseteq e_3$，再次说明 α 是单纯的。

因此，在所有情况下， $\mathcal{H}$ 都有一个单纯顶点。证明完毕。 □

定理 4.8 和 4.9 共同推出以下推论。当 $t=2$ 时，该推论特化为 [3, 推论 3.5]。

推论 4.10。设 G 为具有团顶点划分 Π 的图。则对于每个整数$t\ge2$，复形 $\mathsf{CF}_t(G(\Pi,t))$ 是 *Cohen-Macaulay* 的。

下面给出了团复形的 Alexander 对偶具有线性分解性质的结论:

推论 4.11。设 G 是一个具有 n个顶点且带有团顶点划分 Π 的图。对于任意整数 $t\ge2$，理想 $I_{\mathsf{CF}_t(G(\Pi,t))^\vee}$ 具有线性分解，其 $\operatorname{reg}\left(I_{\mathsf{CF}_t(G(\Pi,t))^\vee}\right)=n.$

证明。由推论 4.10 和 [8, 定理 3], 可知，理想 $I_{\mathsf{CF}_t(G(\Pi,t))^\vee}$ 具有线性分解。对于正则度，定理 4.8 给出 $\dim(\mathsf{CF}_t(G(\Pi,t)))=p(t-1)-1$，而 $|V(G(\Pi,t))|=$

$n+p(t-1)$。因此，$I_{\mathsf{CF}_t(G(\Pi,t))^\vee}$ 的所有极小生成元次数均为 n，从而 $\operatorname{reg}\big(I_{\mathsf{CF}_t(G(\Pi,t))^\vee}\big)=n$。□

5. Linear Resolutions of Higher-Order Clique Ideals

本节证明，对于任意弦图 G，补图 t-团簇的边理想 $I(\mathcal{CH}_t(G))$ 在任意域上都具有 t- 线性分解。这将 Fr¨oberg 关于边理想的经典定理推广到了与 t- 团结构相关的高次生成理想。

定义 5.1。设 $\mathcal{C}$ 是一个 t-一致团簇。

（1）$(t-1)$-子集 $e\subset V(\mathcal{C})$ 的闭邻域为：

$$N_{\mathcal{C}}[e]=e\cup\{v\in V(\mathcal{C})\mid e\cup\{v\}\in E(\mathcal{C})\}.$$

（2）一个（$t-1$）-子集 e 称为极大子边，如果 $N_{\mathcal{C}}[e]\neq e$（等价地，如果 e 被某条边 $\mathcal{C}$真包含）。（3）如果一个极大子边 e 的闭邻域 $N_{\mathcal{C}}[e]$ 在 $\mathcal{C}$中构成一个团，则称其为单纯的。（4）子集 $e\subseteq V$（$\mathcal{C}$） $\mathcal{C}\setminus e$ 的删除 是边集为 $\{F\in E$（$\mathcal{C}$） $\mid e\not\subseteq F\}$·的团簇。（5）如果满足以下任一条件，则称团簇 $\mathcal{C}$ 为弦图：

- $\mathcal{C}$ 没有边，或者
- 存在一个单纯的极大子边 e，使得 $\mathcal{C}\setminus e$ 是弦图。

现在我们证明本节的主要结果。

定理 5.2. 设 G 是一个弦图。那么对于每个整数 $t\geq 2$，边理想$I\big(\mathcal{CH}_t(G)\big)$ 在任意域上都有一个 t-线性分解。

证明. 根据 [1, 定理 3.3], ，只需证明对于所有$t\geq 2$，团簇 $\mathcal{CH}_t(G)$ 都是弦图。我们对此按 G的顶点数进行归纳。若 $|V(G)|=2$，则G 至多有一条边。因此， $\mathcal{CH}_t(G)$ 至多有一条边（且当 $t>2$时为空），故显然是弦图。现在假设 $|V(G)|\geq 3$，并假设该结论对顶点数更少的所有弦图都成立。设 G的一个单纯顶点为 x_1，并令 $G'=G\setminus\{x_1\}$。若 $\deg_G(x_1)<t-1$，则 G 中没有任何 t-团包含 x_1。因此$\mathcal{CH}_t(G)=\mathcal{CH}_t(G')$，结论由归纳假设得出。

若 $\deg_G(x_1)=d-1\geq t-1$，令 $N_G(x_1)=\{x_2,\ldots,x_d\}$。定义 $(t-1)$-集合族：

$$\mathcal{X}=\{e\subset\{x_1,\ldots,x_{d-1}\}\mid |e|=t-1 \text{ and } x_1\in e\}.$$

那么 $|\mathcal{X}|=\binom{d-2}{t-2}$，因为我们必须从 x_1 的邻居中（不包括其自身）再选取 $t-2$ 个顶点。

每个 $e\in\mathcal{X}$都有唯一表示 $e=\{x_1,x_{i_2},\ldots,x_{i_{t-1}}\}$，其中 $2\leq i_2<\cdots<i_{t-1}\leq d-1$。$\mathcal{X}$上的字典序定义如下：对于 $e=\{x_1,x_{i_2},\ldots,x_{i_{t-1}}\}$和 $e'=\{x_1,x_{j_2},\ldots,x_{j_{t-1}}\}$，

$$e<e' \iff \exists \ell\in\{2,\ldots,t-1\}\text{，使得 } i_\ell<j_\ell \text{并且对所有 } k<\ell \text{都有 } i_k=j_k$$

对于每个$1\leq i\leq\binom{d-2}{t-2}$，定义团簇 $\Omega_i(G)=\mathcal{CH}_t(G)\setminus e_1\setminus\cdots\setminus e_{i-1}$. 我们提出以下断言：

(1) 对所有 i， e_i 是 $\Omega_i(G)$ 中的一个极大单纯（$t-1$）子边；

(2) $\Omega_m(G) = \mathcal{CH}_t(G \setminus x_1)$，其中 $m = \binom{d-2}{t-2}$。

由归纳法可知，这些结论共同表明 $\mathcal{CH}_t(G)$ 是弦图，其中归纳变量为 $|V(G)|$。

考虑闭邻域 $N_{\Omega_i(G)}[e_i] = e_i \cup S$，其中 $S \subseteq \{x_2, \ldots, x_d\}$。由于$N_G[x_1]$ 构成一个团，$e_i \cup \{x_d\}$ 是 $\mathcal{CH}_t(G)$ 的一条边，并且 $e_i \cup \{x_d\}$ 中不包含 e_j（其中 $j < i$），这意味着 $\Omega_i(G)$ 中的 $e_i \cup \{x_d\}$ 也是一条边。这意味着 $x_d \in S$，因此$N_{\Omega_i(G)}[e_i] \supsetneq e_i$。因此，对于所有$1 \leq i \leq m$， e_i 都是 $\Omega_i(G)$ 的一条极大子边。

我们证明，对于所有 $1 \leq i \leq m$， e_i 在 $\Omega_i(G)$ 中是单纯的。闭邻域$N_{\Omega_i(G)}[e_i]$ 由 e_i 与一个子集 $S \subseteq \{x_2, \ldots, x_d\}$ 组成。设 e_i 和 e_{i-1} 的前 $k-1$ 个条目相同，而它们的第 k 个条目分别为 x_{k_i} 和 $x_{k_{i-1}}$，其中$k_i > k_{i-1}$。

首先，反设某个 $x_s \in S$ 满足 $s < k_i$。那么 $e_i \cup \{x_s\}$ 构成一个 t-团，其中必然包含一个子边 $e_r = (e_i \cup \{x_s\}) \setminus \{x_\ell\}$ 对于某个 ℓ。由于 $s < k_i$，字典序确保 $e_r < e_i$。但 $\Omega_i(G)$ 排除了所有此类 e_r（因为它们出现在 $\{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$ 中），这与 $e_i \cup \{x_s\}$ 存在于 $\Omega_i(G)$中的假设矛盾。因此，S 只能包含满足 $s > k_i$的顶点 x_s。

现在考虑任意包含 x_1于 $e_i \cup S$中的 t-团 C。由于 $G[\{x_1, \ldots, x_d\}]$是完全的，C 通过用来自 S的顶点扩展 e_i 而形成，这些顶点的索引都大于k_i。按照字典序，这样的 C 不可能将任何更早的 e_j（其中 $j < i$）作为子集包含其中。这意味着 $N_{\Omega_i(G)}[e_i]$ 在 $\Omega_i(G)$中诱导出一个团，因此 e_i 是单纯的。

现在证明 $\Omega_m(G) = \mathcal{CH}_t(G \setminus x_1)$。任取一个包含$x_1$的 G 中的 t-团 C。需要考察两种情况：首先，若 $x_d \notin C$，则根据构造，存在某个 e_i，使得 $1 \leq i \leq m$，从而 $e_i \subseteq C$。若 $x_d \in C$，则 C 剩下的 $t-1$个顶点必构成 e_i之一，同样可得 $e_i \subseteq C$。由此得到等式 $\Omega_m(G) = \mathcal{CH}_t(G \setminus x_1)$。□

下面的例子说明定理 5.2 的逆命题不成立。

例 *5.3*。考虑图 G，其顶点集为 $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$，边集为 $E(G) = \big\{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_4, x_1\}, \{x_1, x_5\}, \{x_1, x_6\}, \{x_5, x_6\}\big\}$.。注意， G 不是弦图，因为它包含圈 x_1, x_2, x_3, x_4, x_1，且没有弦。然而，*3*-团复形$\mathcal{CH}_3(G)$的补图的边集满足 $E(\mathcal{CH}_3(G)) = E(\mathcal{CH}_3(K_6) \setminus \{x_1, x_5, x_6\})$，其中 K_6 表示六个顶点上的完全图。尽管 G 不是弦图，理想 $I(\mathcal{CH}_3(G))$仍具有*3*-线性分解。

致谢。 我们感谢 P. Deshpande 和 A. Singh 组织了在 CMI 举行的 NCM 研讨会“图论中的 Cohen-Macaulay 单纯复形”（2023），该研讨会使我们接触到这一领域，并促成了多次富有价值的讨论。两位作者感谢科学与工程研究委员会（SERB）的支持，第二作者还特别感谢国家高等数学委员会（NBHM）的支持。

数据可用性声明。 由于本研究未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

References

[1] M. Bigdeli、A. A. Yazdan Pour 和 R. Zaare-Nahandi。约化过程中贝蒂数的稳定性：迈向杂化体的弦性。组合理论杂志A辑，145：129–149，2017。[2] A. Bj¨orner 和 M. L. Wachs。可壳非纯复形与偏序集。II。美国数学会汇刊，349(10)：3945–3975，1997。[3] D. Cook, II 和 U. Nagel。科恩-麦考利图与旗复形的面向量。SIAM离散数学杂志，26(1)：89–101，2012。[4] M. Crupi、G. Rinaldo 和 N. Terai。高度为顶点数一半的科恩-麦考利边理想。名古屋数学杂志，201：117–131，2011。[5] K. K. Das、A. Roy 和 K. Saha。弦图高阶独立复形的斯坦利–赖斯纳理想。《代数与计算国际期刊》，0(0)：1–24，0。[6] G. A. Dirac。关于刚性回路图。汉堡大学数学研讨会论文集，25：71–76，1961。[7] A. Dochtermann 和 A. Engstr¨om。通过组合拓扑研究边理想的代数性质。电子组合学杂志，16(2，纪念 Anders Bj¨orner 特刊)：研究论文 2，24，2009。[8] J. A. Eagon 和 V. Reiner。斯坦利-赖斯纳环的自由分解与亚历山大对偶。纯粹与应用代数杂志，130(3)：265–275，1998。[9] C. A. Francisco 和 H. T. H`a。胡须与序贯科恩-麦考利图。组合理论杂志A辑，115(2)：304–316，2008。[10] C. A. Francisco 和 A. Van Tuyl。序贯科恩-麦考利边理想。美国数学会会刊，135(8)：2327–2337，2007。[11] R. Fr¨oberg。关于斯坦利-赖斯纳环。载于《代数专题》第2部分（华沙，1988），巴拿赫中心出版物第26卷，第57–70页。PWN，华沙，1990。[12] H. T. H`a 和 A. Van Tuyl。单项式理想、超图的边理想及其分次贝蒂数。代数组合学杂志，27(2)：215–245，2008。[13] J. Herzog、F. Khosh-Ahang、S. Moradi 和 M. Rahimbeigi。可排序单纯复形与真区间图的 t-独立理想。电子组合学杂志，27(1)：论文编号 1.65，11，2020。[14] J. Jonsson。单纯复形上的最优决策树。电子组合学杂志，12：研究论文 3，31，2005。[15] J. Jonsson。图的单纯复形，数学讲义第1928卷。Springer-Verlag，柏林，2008。[16] M. Katzman。图理想贝蒂数的特征无关性。组合理论杂志A辑，113(3)：435–454，2006。[17]F. Khosh-Ahang 和 S. Moradi。 t-团理想的一些代数性质。代数通讯，47(7)：2870–2882，2019。[18] S. Moradi。 t-团理想与图的 t-独立理想。代数通讯，46(8)：3377–3387，2018。[19] J. S. Provan 和 L. J. Billera。与凸多面体直径相关的单纯复形分解。数学运筹研究，5(4)：576–594，1980。[20] A. Van Tuyl 和 R. H. Villarreal。可壳图与序贯科恩-麦考利二部图。组合理论杂志A辑，115(5)：799–814，2008。[21] R. H. Villarreal。科恩-麦考利图。数学手稿，66(3)：277–293，1990。[22] R. Woodroofe。顶点可分解图与可壳性的障碍。美国数学会会刊，137(10)：3235–3246，2009。[23] R. Woodroofe。弦性序贯科恩-麦考利杂化体。电子组合学杂志，18(1)：论文 208，20，2011。[24] R. Woodroofe。匹配、覆盖与 Castelnuovo-Mumford 正则度。交换代数杂志，6(2)：287–304，2014。

电子邮箱地址：rakeshghosh1591@gmail.com

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Bhubaneswar, Bhubaneswar 752050, India

电子邮箱地址：selvas@iitbbs.ac.in