狄利克雷过程离散性的一个简单证明

Nils Lid Hjort

奥斯陆大学数学系 – *2026*年*2*月 –

Abstract. 狄利克雷过程以概率 1 为离散分布，这一点再次得到了证明。没错，这两页内容在挪威语中沉寂了五十年。Key Words: 狄利克雷过程，离散性

arXiv:2602.09643v1 [math.PR] 10 Feb 2026

设 $\mathcal{X}$ 为某个样本空间，并设 P 为定义在 $\mathcal{X}$ 上、参数为 kP_0 的狄利克雷过程。其中，k 为正标量，P_0 为 $\mathcal{X}$ 上的概率测度。因此，P 是 $\mathcal{M}$ 的一个随机元素；$\mathcal{M}$ 是样本空间上所有概率测度的集合。文献中有多种证明表明，这样的 P 以概率 1 为离散分布；可能并不完整的参考文献列表包括 Ferguson（1973、1974）、Blackwell（1973）、Blackwell 和 MacQueen（1973）、Doksum（1974）、Kingman（1975）、Berk 和 Savage（1979）、Hjort（1986）、Krasker 和 Pratt（1986）、Sethuraman 和 Tiwari（1982）以及 Sethuraman（1994）。特别是，后两篇文献提出的狄利克雷过程所谓的棍棒折断表示，以构造性的方式清楚表明，随机 P 确实必定是离散的。下面给出另一个证明，摘自 Hjort 1976 年的学位论文（第 18 页）。

关于当代非参数贝叶斯统计的一般性综述（其中包括频繁使用各种形式的狄利克雷过程），请参见 Hjort（2003），以及 Hjort、Holmes、M¨uller 和 Walker（2010）一书中的若干章节。

有一个关于函数 $f(P,\ X)$ 期望值的有用引理，其中 X 从随机的 P 中抽取，该引理指出：

$$\mathrm{E}\, f(P,X) = \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{X}} f(P,x)\, P(\mathrm{d}x)\, \mathcal{D}_{kP_0}(\mathrm{d}P) = \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{M}} f(P,x)\, \mathcal{D}_{kP_0+\delta_x}(\mathrm{d}P)\, P_0(\mathrm{d}x).$$

这里需要处理一些测度论细节：在 $\mathcal{X}$ 上有一个 σ-代数 $\mathcal{A}$；例如，可以用由逐集收敛确定的博雷尔集为 $\mathcal{M}$ 配备 σ-代数；并且 f 必须在 $(P,\ x)$ 中可测。此外，适当添加下标的 $\mathcal{D}$ 用来表示 P 的概率分布，而 δ_x 表示在位置 x 具有单位质量的概率测度。

这个引理显然与狄利克雷过程的两个众所周知的事实有关：如上所述，X 的无条件分布为 P_0；以及在观测到 $X = x$ 的条件下，P 服从参数为 $kP_0 + \delta_x$ 的狄利克雷分布。对于函数 $f(P,\ X_1,\ \ldots\ldots,\ X_n)$，也有自然的推广。Hjort（1976）证明了这个引理，并将其用于多种目的；此后，它又在适当的场合被重新发现，例如 Lo（1984）。

引入 $A_P = \{x\colon P\{x\} > 0\}$，给定 P 的原子集合，并定义

$$H_\gamma(P) = \mathrm{E}_P P\{X\}^\gamma = \int P\{x\}^\gamma\, \mathrm{d}P(x) = \sum_{x\in A_P} P\{x\}^{\gamma+1},$$

$$H_0(P) = \lim_{\gamma\to 0^+} H_\gamma(P) = \sum_{x\in A_P} P\{x\}.$$

P 是离散的，当且仅当 $H_0(P) = 1$。利用引理可得

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\, H_\gamma(P) = \mathrm{E}\, P\{X\}^\gamma &= \int_{\mathcal{X}} \frac{\Gamma(kP_0\{x\} + 1 + \gamma)}{\Gamma(kP_0\{x\} + 1)} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\gamma)} P_0(\mathrm{d}x) \\ &\geq \frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1)} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\gamma)}.\end{aligned}$$

由此以及 $0 \leq H_\gamma(P) \leq H_0(P) \leq 1$可得 E $H_0(P) = 1$和 $H_0(P) = 1$以概率 1 成立。这里唯一的测度论注意事项是，$(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ 必须使得$P\{x\}$ 同时可测。只要 $\mathcal{A}$ 是使样本空间可分的某个度量所对应的博雷尔集，就足够了。这些条件使得 H_γ 在 P中可测，并且也意味着由所有离散概率测度组成的集合 $\mathcal{M}_0$ 是可测的。

与上述类似的论证表明，每个具有正 P_0-测度的集合 A，以概率 1 都必须含有正的 P-原子。特别地，若 P 是实数轴上的狄利克雷分布，参数为kP_0，其随机分布函数为 F，那么 F 在每个具有正 P_0-测度的区间上都有无穷多个跳跃。

致谢。这篇短文所述的工作以挪威语发表，至今已有五十年；其内容基于我研究生论文的第 18–19 页。该论文写于 1976 年我在特罗姆瑟担任讲师期间。在此期间，我受益于与 Berit Sandstad 和 Tore Schweder 的讨论。

参考文献

Basu, D. 和 Tiwari, R.C. (1982). 关于狄利克雷过程的一则注记。载于 *Statistics and Probability: Essays in Honour of C.R. Rao*，编者 Kallianpur、Krishnaiah、Ghosh，89–103。Berk, R.H. 和 Savage, I.R. (1979). 狄利克雷过程会产生离散测度：一个初等证明。

Contributions to Statistics: Jaroslav Hájek Memorial Volume，Academia，North-Holland，25–31。Blackwell, D. (1973). Ferguson 选取的离散性。 *Annals of Statististics* **1**，356–158。Blackwell, D. 和 MacQueen, J.B. (1973). 通过 P´olya urn 方案构造 Ferguson 分布。 *Annals of Statistics* **1**，353–355。Doksum, K. (1974). 尾自由和中性随机概率分布及其后验分布。

Annals of Probability **2**，183–201。Ferguson, T.S. (1973). 若干非参数问题的贝叶斯分析。

Annals of Statis-tics **1**，209–230。Ferguson, T.S. (1974). 概率测度空间上的先验分布。

Annals of Statis-tics **2**，615–629。Hjort, N.L. (1976).

Applications of the Dirichlet process to some nonparametric estimation prob-lems（挪威语），研究生论文，特罗姆瑟大学。摘要刊于 *Scandinavian Journalof Statistics* 1977。Hjort, N.L. (1986). 对 Diaconis 和 Freedman《贝叶斯估计的一致性》的讨论意见。 *Annals of Statistics* **14**，49–55。Hjort, N.L. (2003). 非参数贝叶斯统计专题（附讨论）。载于 *Highly Structured Stochastic Systems*（编者 P.J. Green、N.L. Hjort 和 S. Richardson），牛津大学出版社。

Hjort, N.L., Holmes, C.C., M¨uller, P., 和 Walker, S.G. (2010). *Bayesian Nonparametrics*. 剑桥大学出版社，剑桥。Kingman, J.F.C. (1975). 随机离散分布（附讨论）。 *Journal of the Royal Statistical Society Series B* **37**，1–22。Krasker, W.S. 和 Pratt, J.W. (1986). 对 Diaconis 和 Freedman《贝叶斯估计的一致性》的讨论意见。 *Annals of Statistics* **14**，42–45。Lo, A.Y. (1984). 关于一类贝叶斯非参数估计：I. 密度估计。 *Annalsof Statistics* **12**，351–357。Sethuraman, J. 和 Tiwari, R. (1982). 狄利克雷测度的收敛及其参数的解释。载于 *Proceedings of the Third Purdue Symposium on Statistical Decision Theoryand Related Topics*（编者 S.S. Gupta 和 J. Berger），305–315。学术出版社，纽约。Sethuraman, J. (1994). 狄利克雷先验的构造性定义。 *Statistica Sinica* **4**，639–650。