arXiv:2602.09665v2 [quant-ph] 18 Feb 2026

孤立量子系统中的可调多体突发

Shozo Yamada, [1], * Akihiro Hokkyo, [1], † 和 Masahito Ueda[1], [2,3], ‡
[1] *Department of Physics, University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-0033, Japan*
[2] *RIKEN Center for Emergent Matter Science (CEMS), Wako, Saitama 351-0198, Japan*
[3] *Institute for Physics of Intelligence, University of Tokyo,7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-0033, Japan*

孤立量子多体系统中的热化过程可能是非单调的，其演化过程取决于初始态。我们提出一种数值方法，用于构造低纠缠初态，使其在指定时刻产生一次“突发”——即某个可观测量暂时偏离其热平衡值。我们运用此方法证明，在非可积混合场伊辛链中，磁化强度突发可以在与量子信息混沌开始出现相当的时间尺度上实现。与此机制下信息通常的扩散方式相反，所产生的突发伴随着缓慢甚至负向的纠缠增长。通过解析分析，我们证明，经过较长时间后，突发在概率意义上会变得罕见。我们的结果表明，恰当选择初始态，可以使非平衡态维持到量子信息混沌占据主导地位。这些预测可通过可编程量子模拟器进行检验。

引言—自冯·诺依曼的开创性工作以来， [1]，可逆的量子力学微观定律如何产生不可逆的宏观热化，一直是人们积极争论的问题。这一量子热化的基本问题引起了广泛关注， [2–6] 这在很大程度上得益于超冷原子 [7–14], 囚禁离子 [15–18], 和超导量子比特 [19–24]等方面的实验进展。为解决这一问题，本征态热化假说（ETH） [25–27] 应运而生。本征态热化假说指出，在能量本征基底中，可观测量具有热的对角元，而非对角涨落则呈指数级微小。尽管人们发现了若干例外，例如多体局域化 [11, 17,28, 29], 量子多体疤痕 [13, 23, 30, 31], 和希尔伯特空间碎裂， [14, 24, 32, 33] 但数值研究已广泛证实，本征态热化假说在非可积系统中的有效性 [34–40]。

尽管本征态热化假说保证了无限时间极限下的热化，但它对有限时间动力学 [41–46]几乎没有约束。事实上，本征态热化假说并不排除“突发”——可观测量的期望值暂时偏离其热平衡值——这与实验中通常观察到的单调热化形成鲜明对比 [8, 12, 16,21, 22]。

事实上，文献 [47] 的作者通过构造专门设计的可观测量（通常是非局域的），证明了包括突发在内的反常弛豫动力学与本征态热化假说相符。即使对于局域哈密顿量和可观测量，也可能通过量子复现 [48, 49]产生突发；然而，复现时间通常随系统尺寸呈双指数增长 [50]。突发也可能源自利用时间反演演化 [51] 的初态，或包含此类动力学的定制量子叠加态 [46, 52]；然而，这些态通常具有高度纠缠，因此，这种突发无法揭示从低复杂度初态出发的宏观不可逆性。由于可观测量的非局域性、极长的时间尺度或初态的高度纠缠，上述三种可能性的实验实现仍然面临挑战。

在本快报中，我们证明，对于非可积混合场伊辛链（见图 1），可以从低纠缠初态出发，在指定时间产生平均磁化强度的突发现象。我们将一维量子系统中的矩阵乘积态（矩阵乘积态） [53, 54] 作为这类低纠缠态中一种操作上易于实现的候选态，并利用密度矩阵重整化群（密度矩阵重整化群）算法 [55–58] 搜索能够产生突发的矩阵乘积态。这种方法使我们能够针对给定的哈密顿量和可观测量，在指定时间生成量身定制的突发。我们还发现，在突发时间之前，纠缠增长缓慢，甚至会减少。

我们通过数值计算表明，对于固定且较短的突发时间，与系统尺寸无关的键维数足以在大型系统中产生显著的突发。这意味着，即使对于大型系统，也可以通过从基态 [54, 59–61]出发的量子淬火或浅层量子电路 [62–65]在实验上实现突发。相反，我们基于局域随机量子电路 [66]的分析论证在长时间区域给出了一个概率性不可能性结果：当突发时间增长得快于系统尺寸时，突发将变得指数级罕见。我们的方法能够定量评估低纠缠初态所能达到的最大瞬态偏离平衡态程度。即使在最终会热化的通用系统中，这种偏离仍会持续存在，直到被量子信息混沌压倒——这一预测可以通过可编程量子模拟器进行检验。

突发的生成方法—我们考虑开放边界条件下一维链上的 L 个格点 $\{1, 2, \ldots, L\}$。矩阵乘积态可以表示为 $|\psi\rangle = \sum_{\{\sigma_i\}} A_1^{\sigma_1} A_2^{\sigma_2} \cdots A_L^{\sigma_L} |\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_L\rangle$，其中 σ_i 表示格点 i 的状态，而 $A_i^{\sigma_i}$ 是一个 $D_i \times D_{i+1}$ 矩阵

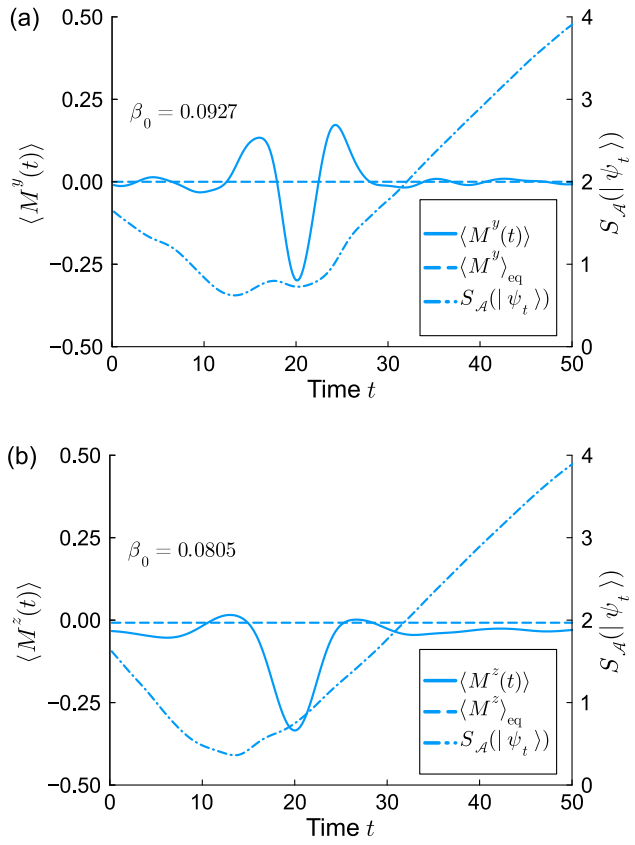


图 1. 期望值 $\langle O(t)\rangle$（实线）以及纠缠熵 $S_{\mathcal{A}}(t)$（点划线，对半个系统 $\mathcal{A}=\{1,2,\ldots,\lfloor L/2\rfloor\}$计算）的时间演化，其中 $L=40$ 对应混合场伊辛链（2）。虚线表示 O的热平衡值。初态通过方法 2 获得，其中 $\tau=20$，$\chi=10$，$\beta=0.1$，以及 $\lambda_L=72/L^2$。（a） $O=M^y$的情形。（b） $O=M^z$的情形。注意，$\langle M^z\rangle_{\rm eq}$略低于零。

其中 $D_1=D_{L+1}=1$。子系统 $\mathcal{A}$ 的纠缠熵定义为 $S_{\mathcal{A}}(|\psi\rangle):=-\mathrm{Tr}[\rho_{\mathcal{A}}\ln\rho_{\mathcal{A}}]$，其中 $\rho_{\mathcal{A}}=\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}^c}[|\psi\rangle\langle\psi|]$，$\mathcal{A}^c$ 表示 $\mathcal{A}$ 的补集。于是，键维数 $\chi:=\max_i D_i$ 给出了纠缠熵的上界：对于任意子系统 $\mathcal{A}=\{1,2,\ldots,i\}$，都有 $S_{\mathcal{A}}(|\psi\rangle)\le\ln\chi$。

我们研究从键维数与系统尺寸无关的矩阵乘积态（MPS）出发的爆发现象 L。这一选择确保了物理相关性：这样的 MPS 是某个局域哈密顿量的精确基态 [54]，并且可以通过浅层量子线路近似制备 [62–64]（详情见补充材料）。

现在，令 H、O、τ 分别表示哈密顿量、局域可观测量和突发时间。我们将海森堡绘景中的时间演化可观测量记为 $O(t):=e^{iHt}Oe^{-iHt}$。我们使用特罗特分解 [67, 68]来计算时间演化和热平衡值。为确保计算可行性，在每个特罗特步中，都会截断矩阵乘积态（MPS）或矩阵乘积算符（MPO） [69, 70] 的键维数。由于 O [71]的局域性，在每个特罗特步截断 $O(t)$的矩阵乘积算符，对于短时间演化是合理的。我们使用 ITensor 库 [72, 73],进行数值计算，并确认在我们的设置中截断误差确实很小 [74]。

创建在 $t=\tau$时发生的O 突发的最简单方法（方法 1）如下：我们从 O的（某个）基态 $|\Psi_{\rm GS}\rangle$ 出发，通过时间反演演化计算状态 $e^{iH\tau}|\Psi_{\rm GS}\rangle$，再将该状态截断至键维数 χ，从而得到初始矩阵乘积态。方法 1 的计算效率高，且适用于无限系统（详情请参阅补充材料）。然而，它无法控制能量及其涨落。此外，由于方法 1 依赖启发式截断，与直接优化期望值 $\langle O(\tau)\rangle$相比，通常会产生较小的突发。考虑到这些因素，我们引入第二种方法（方法 2），该方法采用密度矩阵重整化群算法。

在方法 2 中，我们考虑以下代价函数：

$$H_{\rm DMRG}=O(\tau)+\lambda_L(H-\langle H\rangle_\beta)^2. \tag{1}$$

这里，λ_L (≥ 0) 是系统尺寸依赖的惩罚权重，而 $\langle X\rangle_\beta:=\mathrm{Tr}\left[Xe^{-\beta H}\right]/\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H}\right]$ 表示逆温度为 β 时 X 的热平衡值。代价函数 $H_{\rm DMRG}$ 旨在最小化期望值 $\langle O(\tau)\rangle$，同时抑制目标能量 $\langle H\rangle_\beta$附近的能量涨落。

该算 g法 2 如下：
1. 将代价函数（1）计算为矩阵乘积算符。2. 对代价函数（1）执行密度矩阵重整化群优化，键维数至多为 χ，并获得一个矩阵乘积态 $|\psi_0\rangle$。3. 根据条件 β_0 确定逆温度 $\langle H\rangle_{\beta_0}=\langle\psi_0|H|\psi_0\rangle$，并获得热平衡值 $\langle O\rangle_{\rm eq}:=\langle O\rangle_{\beta_0}$。4. 计算时间演化 $|\psi_t\rangle=e^{-iHt}|\psi_0\rangle$ 并获得突发振幅 $\langle O\rangle_{\rm eq}-\langle O（\tau）\rangle$。

密度矩阵重整化群算法通常用于寻找局域哈密顿量的基态；然而，我们利用它来寻找使非局域代价函数的期望值最小化的矩阵乘积态，并对键维数加以限制。

方法 2 使我们能够系统地获得一个量身定制的初始矩阵乘积态，使其在给定条件下产生突发，并用于本文主文中进行的有限尺寸标度分析。这种方法可以通过 β 和 λ_L 包括$\lambda_L=0$的情形，对目标能量及其涨落进行显式控制；与方法 1 相比，这通常会产生更大的突发振幅。在这里，我们经过审慎选择一个正的λ_L 以使 β_0 接近 β，同时产生与方法 1 [75]所得突发相当甚至更大的突发。

爆发现象——我们展示了混合场伊辛链中的一种爆发现象：

$$H = \sum_{i=1}^{L-1} J_z S_i^z S_{i+1}^z + \sum_{i=1}^{L} (h_x S_i^x + h_z S_i^z). \qquad (2)$$

在此，$S^{x,\,y\,z}_{,\,i}$ 是格点 i处的自旋-1/2算符，并将参数设为（J_z，$2h_x$，$2h_z$）=（1.0，0.9045，0.8090）。该模型的非可积性，即混沌性质，已通过数值和解析方法得到验证 [35, 76, 77]。 [78,79]我们采用方法 2，并设定 $\beta = 0.1$以适用于有限系统尺寸。

作为可观测量，O我们关注平均磁化强度 $M^\alpha = \sum_{i=1}^{L} S_i^\alpha / L\,(\alpha = y,\ z)$。对于$O = M^y$情形，由于时间反演对称性，其能量本征基下的对角元为零。因此，其热平衡值始终为零，对角ETH也显然成立。

对于上述哈密顿量和可观测量，$L = 40$所对应的突发现象如图1所示，其中$O = M^y$和 $O = M^z$分别对应（a）和（b）。每个可观测量的期望值都在指定时刻 $\tau = 20$出现显著峰值。这一突发源于键维数为 $\chi = 10$ 的矩阵乘积态，其键维数远小于典型体积律态的 $\chi \simeq 2^{L/2} \simeq 10^6$。这表明初始态是一个纠缠度较低的简单态，因而支持通过量子淬火实现该突发现象。

至关重要的是，与典型的线性增长不同，二分纠缠熵在突发时间之前仅缓慢增长，甚至会降低 [76, 80]。这表明系统的局域信息暂时得以保留，因为量子态的约化密度算符仍远未达到吉布斯态。

突发振幅的数值分析——我们研究在固定键维数 $\langle O\rangle_{\rm eq} - \langle O(\tau)\rangle$的情况下，在哈密顿量（2）下，突发振幅 τ如何依赖于突发时间 $\chi = 10$。我们改变系统尺寸 L，并针对每个 L 和 τ遵循方法 2。我们令 $\lambda_L \propto L^{-2}$，因为谱宽 $\Delta_O (O = M^y, M^z)$ 不依赖于L，而 Δ_{H^2} 近似按 L^2缩放。

上述设定下的结果如图 2所示。图中可见，对于固定的 τ，随着 L增大，突发振幅仍然很大；特别是在 τ ($\tau \lesssim$当 M^y且 $\tau \lesssim 18$当 M^z) 较小时，较大的 L 会带来更大的突发。由此可见，即使系统尺寸很大，固定键维数的矩阵乘积态也能在较短的时间尺度内产生较大的突发。在补充材料中，我们证明突发在热力学极限下依然存在 $L \to \infty$。

此处分析的整个时间窗口都处于幺正算子的纠缠熵 $e^{-iH\tau}$ 线性增长 [77]的区域。尽管复杂性持续增长，突发振幅在 $\tau \lesssim 11$内仍几乎保持不变。这表明，适当

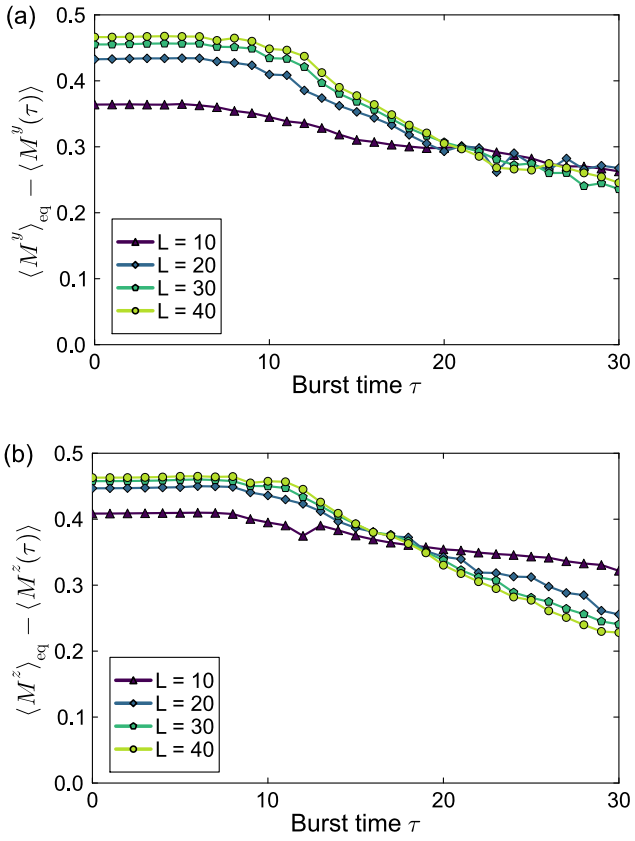


图 2. 突发振幅 $\langle O\rangle_{\rm eq} - \langle O(\tau)\rangle$ 随突发时间τ 的变化，不同系统尺寸下 L 混合场伊辛链（2）。初始态由方法 2 得到，其中 $\chi = 10$，$\beta = 0.1$，且 $\lambda_L = 72/L^2$。（a）$O = M^y$的情形。（b）$O = M^z$的情形。

选择的初态即使在弹道量子扰乱过程中也能保留局域信息。随后突发振幅逐渐衰减，这表明，随着 τ 增加，具有低本征值的 $O(\tau)$的本征态复杂性最终超出了矩阵乘积态的表征能力，标志着交叉区域的到来；越过该区域后，扰乱过程将占据主导地位。

通过局域随机电路进行评估——我们回到更一般的情形：考虑一条由 L 个格点组成的一维链，每个格点的局域维数为 d。这里，我们考虑随机酉演化 U，它遵循测度$\nu_d^{*s}{}_{,\,L}$；在 s步中的每一步，都会从 i中随机选取一个指标 $\{1, 2, \ldots, L-1\}$，并选取一个酉算符 $U_{i,\ i+1}$ 从 $\mathbb{U}(d^2$上的 Haar 测度中抽取，并作用于量子位元i 和 $i+1$ [66]。此设置旨在用随机的、随时间变化的二局域（最近邻相互作用）哈密顿量 [81]近似时间演化。由于一般的随机电路不守恒能量，系统会向无限温度态热化。因此，我们将突发振幅量化为偏离无限温度平均值 $\langle O\rangle_{\beta=0}$ =Tr$[O]/d^L$的程度。

首先，我们考虑从一个固定初始态 $|\psi\rangle$出发的突发。在这个局域随机电路中，突发大于或等于 $\Delta_O a$ 的概率满足以下上界 [66, 82–84]:

$$\Pr_{U\sim\nu_{d,L}^{*s}}\left[\left|\langle\psi|U^\dagger OU|\psi\rangle-\frac{\mathrm{Tr}[O]}{d^L}\right|\geq\Delta_O a\right]\leq 2\Big(\frac{m}{d^L a^2}\Big)^m,$$
$$\mathbb{Z}_{\geq 0}\ni m\leq\frac{k}{2},\ k=\left\lfloor\Big(\frac{s}{CL^2d^2\ln d}\Big)^{1/11}\right\rfloor, \quad (3)$$

其中 C 是一个正的数值常数。（式（3）和（5）的证明见补充材料。）该不等式反映了近似酉 k设计所导致的测度集中；随着门的数量 s 增加，这种集中效应会增强 [66]。

我们将式（3中的界推广到整个流形$\mathcal{M}_\chi$，该流形由键维数小于或等于 χ的归一化矩阵乘积态构成。我们记

$$P_{\chi,a}:=\Pr_{U\sim\nu_{d,L}^{*s}}\sup_{|\psi\rangle\in\mathcal{M}_\chi}\left[\left|\langle\psi|U^\dagger OU|\psi\rangle-\frac{\mathrm{Tr}[O]}{d^L}\right|\geq\Delta_O a\right] \quad (4)$$

为在 $\mathcal{M}_\chi$ 中的状态产生突发的概率。对于一个与 L 无关的键维数 χ，$P_{\chi,\ a}$ 的对数近似满足以下界

$$\ln P_{\chi,a}\lesssim -m\ln\big(md^L\big)+2(dL\chi^2+m)\ln\frac{dL\chi^2+m}{a}. \quad (5)$$

在局域随机电路中，门的总数 s 应与系统尺寸 L 成正比，而时间 τ 则用于模拟二体局域哈密顿量导致的时间演化。于是，当 $\tau\gg L$ 时，$k\simeq C'(\tau/L)^{1/11}$ 成立，其中 C' 是一个仅取决于 d 的常数。

式（5）右侧的渐近行为总结于表I中。对于 L f or $\tau\ll L(\ln L)^{11}$, ，该量不会衰减，这可解释为稳定突发时间尺度的上界。对于 $L(\ln\ L)^{11}\ll\tau\ll Ld^{11L}$，$P_{\chi,a}$的上界随 $L^{10/11}\tau^{1/11}$呈指数衰减。对于 $Ld^{11L}\ll\tau$，$m\simeq d^La^2/e$ 给出了比 $m\simeq k/2$更紧的界，并且该上界随 L呈双指数衰减。综合这些结果表明，在长时间区域，对于大多数含时局域哈密顿量，不可能从任何矩阵乘积态中产生较大的突发。

我们采用局域随机电路，借助关于近似 k-设计的严格结果，并指出这种情形对应于含时哈密顿量。不过，即使在含时情形下，我们用于产生突发的方法仍然适用。若能为具有对称性 [85–87]—的电路建立类似的严格界限，并最终将其推广至能量守恒情形，那么对突发进行概率评估也可依此类推。我们还可以利用近似 k-设计的测度集中性 [66, 82]，为纠缠熵建立类似的界限。

表 I。 m 以及不同突发时间区域下式（5）右侧的首项（LT）τ。整数 m 的选取满足 $m\leq k/2$，其中 $k\simeq C'(\tau/L)^{1/11}$ 对于某个常数 C' 成立，当 $\tau\gg L$时。

τ	m	公式（5）中的 LT
$\tau\ll L(\ln L)^{11}$	$\lesssim\frac{C'}{2}\Big(\frac{\tau}{L}\Big)^{1/11}$	$2dL\chi^2\ln L$
$L(\ln\ L)^{11}\ll\tau\ll Ld^{11L}$	$\simeq\frac{C'}{2}\Big(\frac{\tau}{L}\Big)^{1/11}$	$-\frac{C'}{2}L^{10/11}\tau^{1/11}\ln d$
$Ld^{11L}\ll\tau$	$\simeq\frac{d^La^2}{e}$	$-\frac{d^La^2}{e}$

讨论——我们证明了从低纠缠态出发时，非可积混合场伊辛链中会出现平均磁化强度突发现象。利用密度矩阵重整化群算法，我们找到了一个矩阵乘积态（MPS），它能在指定时刻产生大幅突发。我们发现，在量子信息混沌开始显现的短时区域，即使对于大型系统，键维数固定的矩阵乘积态也会产生大幅突发，同时伴随着缓慢甚至负向的纠缠增长。这意味着，从低纠缠初始态出发的突发可以通过量子淬火实现。相反，在长时间下，突发振幅会变小，这与我们根据局域随机电路推导出的解析界限一致。我们的结果表明，从经过适当选择的低纠缠态而非典型态出发，可以使系统在较长时间内保持在平衡态之外。不过，量子信息混沌最终会不断增强并席卷该态，进而推动系统进入平衡态。

突发可被视为对热化的短暂抗拒：即使局域可观测量满足本征态热化假说（ETH），且其初始期望值接近平衡态的热平衡值，之后仍可能出现偏离，同时伴随着纠缠熵的异常抑制。我们已经证明，这种奇异现象可以出现在低纠缠态中，而这类态能够针对一般的局域哈密顿量和可观测量系统地构造出来。此外，我们预计，通过修改代价函数，我们的变分方法可以适用于研究其他非平衡演化轨迹，例如复现和振荡。这类研究或可为无限时间极限之外的量子热化提供新的见解。

关于突发，一个有趣的问题是：当系统包含长程相互作用时，突发现象是否仍会发生。我们预计，更强的量子信息混沌会使突发衰减得更快；然而，由于计算成本高昂，这一点尚未在大系统中得到证实。此类研究或可为相互作用的局域性如何影响热化过程带来新的见解。

爆发现象为量子计量提供了一种潜在途径。广延密度可观测量的突发振幅保持$\mathcal{O}(L^0)$，而热涨落则不同，它们会随$\mathcal{O}(L^{-1/2})$受到抑制。这种高信噪比可用于量子传感器和模拟器：通过将理论预测与实验结果进行比较，可以估计系统参数，或评测量子模拟器的性能。尽管文献 [52]，已提出此类应用，我们通过简化初态制备提高了其可行性。

致谢——我们感谢 Masaya Nakagawa 与我们进行了富有成效的讨论，并为“突发”命名。我们也感谢 Shion Yamashika 鼓励我们使用无限矩阵乘积态进行热力学极限下的分析。S. Y. 和 A. H. 获得了东京大学世界领先的创新研究生教育（WINGS）计划下的推动变革的前沿物理与数学计划（FoPM）资助。A. H. 还获得了日本学术振兴会（JSPS）科研费 JP25KJ0833 号及东京大学 JSR 奖学金的资助。M. U. 获得了日本学术振兴会（JSPS）科研费 JP22H01152 号的资助。我们衷心感谢日本科学技术振兴机构（JST）通过 CREST 计划“量子前沿”（资助编号：JPMJCR23I1）提供的支持。本研究还获得了日本科学技术振兴机构（JST）“创新研究生态系统可持续伙伴关系计划”（ASPIRE）的支持，资助编号：JPMJAP25A1。

数据可用性—支持本文研究结果的数据可在提出合理请求后获取。

* yamada@cat.phys.s.u-tokyo.ac.jp † hokkyo@cat.phys.s.u-tokyo.ac.jp ‡ ueda@phys.s.u-tokyo.ac.jp

[1]J. v. Neumann，《新力学中遍历定理及 H- 定理的证明》，《物理学杂志》57，30（1929）。[2] A. Polkovnikov、K. Sengupta、A. Silva 和 M. Vengalat- tore，《 *Colloquium*：封闭相互作用量子系统的非平衡动力学》，Reviews of Modern Physics 83，863（2011）。[3] J. Eisert、M. Friesdorf 和 C. Gogolin，《非平衡量子多体系统》，《自然·物理》11，124（2015）。[4] C. Gogolin 和 J. Eisert，《封闭量子系统中的平衡化、热化与统计力学的涌现》，《物理学进展报告》79，056001（2016）。[5] L. D’Alessio、Y. Kafri、A. Polkovnikov 和 M. Rigol，《从量子混沌与本征态热化到统计力学和热力学》，《物理学进展》65，239（2016）。[6] T. Mori、T. N. Ikeda、E. Kaminishi 和 M. Ueda，《孤立量子系统中的热化与预热化：理论综述》，Journal of physics B：原子、分子与光物理 51，112001（2018）。[7] T. Kinoshita、T. Wenger 和 D. S. Weiss，《量子牛顿摆》，《自然》440，900（2006）。[8] S. Trotzky、Y. A. Chen、A. Flesch、I. P. McCulloch 等，《探测孤立强关联一维玻色气体向平衡态的弛豫》，《自然·物理》8，325（2012）。[9] M. Gring、M. Kuhnert、T. Langen、T. Kitagawa、B. Rauer、M. Schreitl、I. Mazets、D. A. Smith、E. Demler 和 J. Schmiedmayer，《孤立量子系统中的弛豫与预热化》，Science 337，1318（2012）。[10] T. Langen、R. Geiger、M. Kuhnert、B. Rauer 和 J. Schmiedmayer，《孤立量子多体系统中热关联的局域涌现》，《自然·物理》9，640（2013）。[11] M. Schreiber、S. S. Hodgman、P. Bordia、H. P. L¨ uschen、M. H. Fischer、R. Vosk、E. Altman、U. Schneider 和 I. Bloch，《在准随机光学晶格中观测相互作用费米子的多体局域化》，Science 349，842（2015）。[12] A. M. Kaufman、M. E. Tai、A. Lukin、M. Rispoli、R. Schittko、P. M. Preiss 和 M. Greiner，《通过纠缠实现孤立多体系统的量子热化》，Science 353，794（2016）。[13] H. Bernien、S. Schwartz、A. Keesling、H. Levine、A. Omran、H. Pichler、S. Choi、A. Zibrov、M. Endres、M. Greiner、V. Vuleti´c 和 M. Lukin，《在 51 原子量子模拟器中探测多体动力学》，《自然》551，579（2017）。[14] S. Scherg、T. Kohlert、P. Sala、F. Pollmann、B. Hebbe Madhusudhana、I. Bloch 和 M. Aidelsburger，《观测倾斜费米-哈伯德链中由动力学约束导致的非遍历性》，Nature Communications 12，4490（2021）。[15] P. Richerme、Z.-X. Gong、A. Lee、C. Senko、J. Smith、M. Foss-Feig、S. Michalakis、A. V. Gorshkov 和 C. Monroe，《具有长程相互作用的量子系统中关联的非局域传播》，《自然》511，198（2014）。[16] G. Clos、D. Porras、U. Warring 和 T. Schaetz，《时间分辨观测孤立量子系统中的热化》，《物理评论快报》117，170401（2016）。[17] J. Smith、A. Lee、P. Richerme、B. Neyenhuis、P. W. Hess、P. Hauke、M. Heyl、D. A. Huse 和 C. Monroe，《在具有可编程随机无序的量子模拟器中实现多体局域化》，《自然·物理》12，907（2016）。[18] B. Neyenhuis、J. Zhang、P. W. Hess、J. Smith、A. C. Lee、P. Richerme、Z.-X. Gong、A. V. Gorshkov 和 C. Monroe，《观测长程相互作用自旋链中的预热化》，Science Advances 3，e1700672（2017）。[19] C. Neill、P. Roushan、M. Fang、Y. Chen、M. Kolodru- betz、Z. Chen、A. Megrant、R. Barends、B. Campbell、B. Chiaro、A. Dunsworth、E. Jeffrey、J. Kelly、J. Mutus、P. J. J. O’Malley、C. Quintana、D. Sank、A. Vainsencher、J. Wenner、T. C. White、A. Polkovnikov 和 J. M. Martinis，《孤立量子系统中的遍历动力学与热化》，《自然·物理》12，1037（2016）。[20] M. S. Blok、V. V. Ramasesh、T. Schuster、K. O’Brien、J. M. Kreikebaum、D. Dahlen、A. Morvan、B. Yoshida、N. Y. Yao 和 I. Siddiqi，《超导三能级量子处理器上的量子信息搅拌》, Physical Re-

view X 11, 021010 (2021). [21] F. Chen, Z.-H. Sun, M. Gong, Q. Zhu, Y.-R. Zhang, Y. Wu, Y. Ye, C. Zha, S. Li, S. Guo, H. Qian, H.-L. Huang, J. Yu, H. Deng, H. Rong, J. Lin, Y. Xu, L. Sun, C. Guo, N. Li, F. Liang, C.-Z. Peng, H. Fan, X. Zhu, and J.-W. Pan, 在超导量子处理器中观测到强热化与弱热化，《物理评论快报》127, 020602 (2021). [22] Q. Zhu, Z.-H. Sun, M. Gong, F. Chen, Y.-R. Zhang, Y. Wu, Y. Ye, C. Zha, S. Li, S. Guo, H. Qian, H.-L. Huang, J. Yu, H. Deng, H. Rong, J. Lin, Y. Xu, L. Sun, C. Guo, N. Li, F. Liang, C.-Z. Peng, H. Fan, X. Zhu, and J.-W. Pan, 在超导量子处理器中观测到热化与信息扰乱，《物理评论快报》128, 160502 (2022). [23] P. Zhang, H. Dong, Y. Gao, L. Zhao, J. Hao, J.-Y. De- saules, Q. Guo, J. Chen, J. Deng, B. Liu, W. Ren, Y. Yao, X. Zhang, S. Xu, K. Wang, F. Jin, X. Zhu, B. Zhang, H. Li, C. Song, Z. Wang, F. Liu, Z. Papi´c, L. Ying, H. Wang, and Y.-C. Lai, 超导处理器上的多体希尔伯特空间疤痕，《自然·物理》19, 120 2022( ). [24] Y.-Y. Wang, Y.-H. Shi, Z.-H. Sun, C.-T. Chen, Z.-A. Wang, K. Zhao, H.-T. Liu, W.-G. Ma, Z. Wang, H. Li, J.-C. Zhang, Y. Liu, C.-L. Deng, T.-M. Li, Y. He, Z.-H. Liu, Z.-Y. Peng, X. Song, G. Xue, H. Yu, K. Huang, Z. Xiang, D. Zheng, K. Xu, and H. Fan, 探索超导处理器上的希尔伯特空间碎裂，《PRX Quantum》6, 010325 (2025). [25] J. M. Deutsch, 封闭系统中的量子统计力学，《物理评论 A》43, 2046 (1991). [26] M. Srednicki, 混沌与量子热化，Physical Review E 50, 888 (1994). [27] M. Rigol, V. Dunjko, and M. Olshanii, 孤立量子系统的热化及其机制，《自然》452, 854 (2008). [28] D. M. Basko, I. L. Aleiner, and B. L. Altshuler, 局域单粒子态弱相互作用多电子系统中的金属–绝缘体转变，Annals of Physics 321, 1126 (2006). [29] J. Z. Imbrie, 量子自旋链的多体局域化，《统计物理学杂志》163, 998 (2016). [30] N. Shiraishi and T. Mori, 本征态热化假说反例的系统构造，《物理评论快报》119, 030601 (2017). [31] S. Moudgalya, S. Rachel, B. Andrei Bernevig, and N. Regnault, 非可积模型的精确激发态，《物理评论B》98, 235155 (2018). [32] P. Sala, T. Rakovszky, R. Verresen, M. Knap, and F. Poll- mann, 偶极守恒哈密顿量中由希尔伯特空间碎裂引发的遍历性破缺，Physical Review X 10, 011047 (2020). [33] V. Khemani, M. Hermele, and R. Nandkishore, 希尔伯特空间粉碎导致的局域化：从理论到物理实现，《物理评论B》101, 174204 (2020). [34] R. Steinigeweg, J. Herbrych, and P. Prelov˘sek, 孤立自旋链系统中的本征态热化，Physical Review E 87, 012118 (2013). [35] H. Kim, T. N. Ikeda, and D. A. Huse, 检验所有本征态是否都遵循本征态热化假说，Physical Review E 90, 052105 (2014). [36] W. Beugeling, R. Moessner, and M. Haque, 本征态热化的有限尺寸标度，Physical Review E 89, 042112 (2014). [37] W. Beugeling、R. Moessner和M. Haque，多体量子系统中局域算符的非对角矩阵元，Physical Review E 91, 012144 (2015). [38] R. Mondaini和M. Rigol，二维横场伊辛模型中的本征态热化。II. 可观测量的非对角矩阵元，Physical Review E 96, 012157 (2017). [39] J. R. Garrison和T. Grover，单个本征态是否编码了完整的哈密顿量？，《物理评论X》8, 021026 (2018). [40] S. Sugimoto、R. Hamazaki和M. Ueda，基于局域随机矩阵理论对本征态热化假说的检验，《物理评论快报》126, 120602 (2021). [41] J. Berges、S. Bors´anyi和C. Wetterich，预热化，《物理评论快报》93, 142002 (2004). [42] C. Bartsch和J. Gemmer，量子期望值的动力学典型性，《物理评论快报》102, 110403 (2009). [43] M. C. Ba˜nuls、J. I. Cirac和M. B. Hastings，无限非可积量子系统的强热化与弱热化，《物理评论快报》106, 050405 (2011). [44] A. J. Short和T. Farrelly，有限时间内的量子平衡化，New Journal of Physics 14, 013063 (2011). [45] S. Goldstein、T. Hara和H. Tasaki，宏观量子系统趋近平衡态的时间尺度，《物理评论快报》111, 140401 (2013). [46] A. Dymarsky，孤立量子系统宏观平衡化的机制，《物理评论B》99, 224302 (2019). [47] L. Knipschild和J. Gemmer，量子平衡化的现代概念并不排除奇异的弛豫动力学，Physical Review E 101, 062205 (2020). [48] P. Bocchieri和A. Loinger，量子复现定理，《物理评论》107, 337 (1957). [49] I. C. Percival，近周期性与量子 H 定理，《数学物理杂志》2, 235 (1961). [50] A. Peres，量子动力学中的复现现象，《物理评论快报》49, 1118 (1982). [51] A. Peres，混沌系统与规则系统中量子运动的稳定性，《物理评论 A》30, 1610 (1984). [52] I. Ermakov和B. V. Fine，量子多体系统中几乎完全的复苏，《物理评论 A》104, L050202 (2021). [53] M. Fannes、B. Nachtergaele和R. F. Werner，量子自旋链上的有限关联态，《数学物理通讯》144, 443 (1992). [54] D. Perez-Garcia、F. Verstraete、M. M. Wolf和J. I. Cirac，矩阵乘积态表示，Quantum Information & Computation 7, 401 (2007). [55] S. R. White，量子重整化群的密度矩阵表述，《物理评论快报》69, 2863 1992( ). [56] S. R. White，量子重整化群的密度矩阵算法，《物理评论B》48, 10345 (1993). [57] U. Schollw¨ock，密度矩阵重整化群，Reviews of Modern Physics 77, 259 (2005). [58] U. Schollw¨ock，矩阵乘积态时代的密度矩阵重整化群，Annals of Physics 326, 96 (2011). [59] F. Verstraete和J. I. Cirac，矩阵乘积态忠实地表示基态"

094423 (2006). [60] M. B. Hastings，关于一维量子系统的面积定律，《统计力学杂志：理论与实验》2007，P08024 (2007). [61] P. Sompet、S. Hirthe、D. Bourgund、T. Chalopin、J. Bibo、J. Koepsell、P. Bojovi´c、R. Verresen、F. Pollmann、G. Sa- lomon、C. Gross、T. A. Hilker 和 I. Bloch，在费米-哈伯德梯子中实现对称性保护的 Haldane 相，《自然》606，484 (2022). [62] S.-J. Ran，将矩阵乘积态编码为由单量子比特门和双量子比特门构成的量子电路，《物理评论 A》101，032310 (2020). [63] T. Shirakawa、H. Ueda 和 S. Yunoki，给定任意量子态的自动量子电路编码，《物理评论：研究》6，043008 (2024). [64] M. S. Rudolph、J. Chen、J. Miller、A. Acharya 和 A. Perdomo-Ortiz，将矩阵乘积态分解为浅层量子电路，《量子科学与技术》9，015012 (2024). [65] J. Iaconis、S. Johri 和 E. Y. Zhu，利用矩阵乘积态制备正态分布的量子态，《npj 量子信息》10，15 (2024). [66] F. G. S. L. Brand˜ao、A. W. Harrow 和 M. Horodecki，局域随机量子电路是近似多项式设计，《数学物理通讯》346，397 (2016). [67] H. F. Trotter，论算子半群的乘积，《美国数学会会刊》10，545 (1959). [68] M. Suzuki，广义 Trotter 公式以及指数算子和内导子的系统近似及其在多体问题中的应用，《数学物理通讯》51，183 (1976). [69] F. Verstraete、J. J. Garc´ıa-Ripoll 和 J. I. Cirac，矩阵乘积密度算符：有限温度系统和耗散系统的模拟，《物理评论快报》93，207204 (2004). [70] B. Pirvu、V. Murg、J. I. Cirac 和 F. Verstraete，矩阵乘积算符表示，New Journal of Physics 12，025012 (2010). [71] ´A. M. Alhambra 和 J. I. Cirac，用于热态和时间演化的局部精确张量网络，《PRX Quantum》2，040331 (2021). [72] M. Fishman、S. R. White 和 E. M. Stoudenmire，用于张量网络计算的 ITensor 软件库，《SciPost 物理代码库》4 (2022). [73] M. Fishman、S. R. White 和 E. M. Stoudenmire，ITensor 代码库版本 0.3，《SciPost 物理代码库》4–r0.3 (2022).[74] 我们以最大键维数 2^{11} 执行方法 2 的步骤 1。对于 $L = 10$、20、30 和 40，由 $\epsilon_O(\tau) \coloneqq 1 - (\|O(\tau)\|_F/\|O\|_F)^2$ 定义的截断误差在哈密顿量 (2) 下满足 $\epsilon_O(20) < 6 \times 10^{-4}$ 和 $\epsilon_O(30) < 10^{-2}$，其中 $O = M^y$、M^z。[75] 方法 1、方法 2（$\lambda_L = 0$）和方法 2（$\lambda_L = 72/L^2$）在 $L = 40$、

$\tau = 20$ $\chi = 10$ 2 0 222，条 0 371， 0 305 $O = M^y$ 0 337, 0 396， 0 330

件下，并在哈密顿量（ ）作用下得到的突发振幅分别为：对于 ，为 .、. 和 .；对于 $O = M^z$，为 .、. 和 .。[76] H. Kim 和 D. A. Huse，在扩散型非可积系统中的纠缠弹道扩散，《物理评论快报》111，127205 (2013). [77] T. Zhou 和 D. J. Luitz，算子纠缠熵

混沌系统中时间演化算符的研究，《物理评论B》95，094206（2017）。[78] X. Cao，算符增长的统计机制，《数学与理论物理杂志A》54，144001（2021）。[79] Y. Chiba，混合场伊辛链中不存在局域守恒量的证明，《物理评论B》109，035123（2024）。[80] P. Calabrese 和 J. Cardy，一维系统中纠缠熵的演化，《统计力学杂志：理论与实验》2005，P04010（2005）。[81] D. Poulin、A. Qarry、R. Somma 和 F. Verstraete，时间依赖哈密顿量的量子模拟与希尔伯特空间的便捷假象，《物理评论快报》106，170501（2011）。[82] R. A. Low，关于 k-设计的大偏差界，《英国皇家学会学报A》465，3289（2009）。[83] R. A. Low，*Pseudo-randomness and Learning in Quantum Computation*，博士论文，布里斯托大学，英国，布里斯托大学（2010）。[84] G. Aubrun、J. Jenkinson 和 S. J. Szarek，球面与高斯空间上集中不等式的最优常数，arXiv:2406.13581 [math.PR]（2024）。[85] Z. Li、H. Zheng、J. Liu、L. Jiang 和 Z.-W. Liu，具有 SU(d) 对称性的局域随机量子电路所构造的设计，《PRX Quantum》5，040349（2024）。[86] S. N. Hearth、M. O. Flynn、A. Chandran 和 C. R. Laumann，来自随机数守恒量子电路的酉 k-设计，《物理评论X》15，021022（2025）。[87] Y. Mitsuhashi、R. Suzuki、T. Soejima 和 N. Yoshioka，对称局域随机电路的酉设计，《物理评论快报》134，180404（2025）。

补充材料

用量子电路制备初态——在给定时刻产生突发的初始矩阵乘积态（MPS），可以用仅由相邻双量子比特门组成的浅层量子电路近似制备 [62–64]。这里我们采用 Iter $[D_i O_{\text{all}}]$ 方法，见参考文献 [64]，构造一个包含 K 层的阶梯式量子电路（见图 3），以得到目标 MPS $|\psi_{\text{app}}\rangle$ 的近似态 $|\psi_0\rangle$。

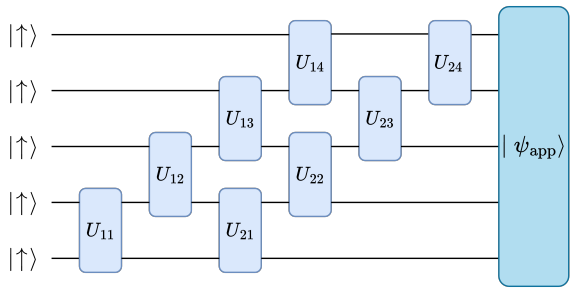


图 3. 创建具有 $L = 5$ 个自旋和 $K = 2$ 层的近似矩阵乘积态 $|\psi_{\text{app}}\rangle$ 的量子线路示意图。

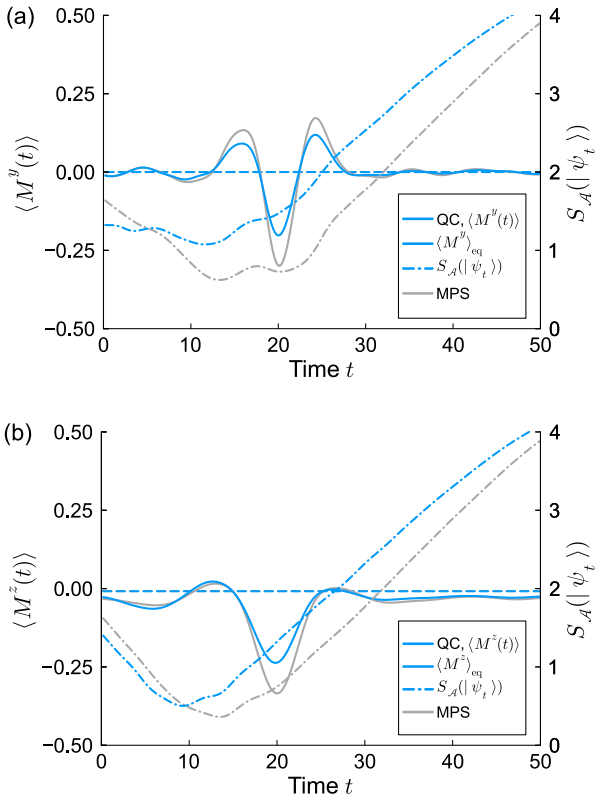


图 4. 目标矩阵乘积态 $|\psi_0\rangle$（灰色）与其量子线路（QC）近似 $|\psi_{\rm app}\rangle$（蓝色）在 $L=40$ 混合场伊辛链（2）中的时间演化比较。实线和点划线分别表示半个系统中计算得到的期望值 $\langle O(t)\rangle$ 和纠缠熵 $S_{\mathcal{A}}(t)$ 的时间演化 $\mathcal{A}=\{1,2,\ldots,\lfloor L/2\rfloor\}$。灰色曲线的初态由方法 2 得到，其中 $\tau=20$，$\chi=10$，$\beta=0.1$，且 $\lambda_L=72/L^2$。蓝色曲线的初态由含 $K=5$ 层的阶梯式量子线路制备，该线路用于近似精确矩阵乘积态。(a) $O=M^y$的情形。(b) $O=M^z$的情形。

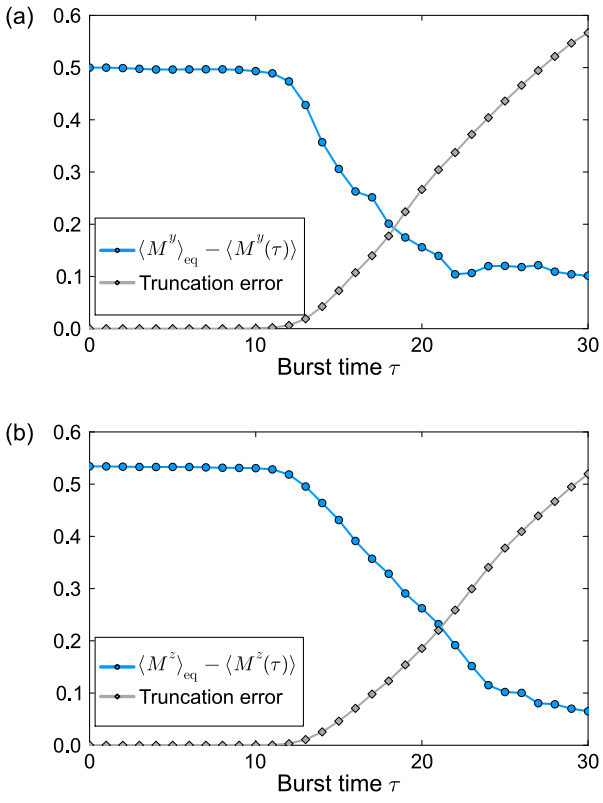


图 5. 突发振幅 $\langle O\rangle_{\rm eq}-\langle O(\tau)\rangle$ 随突发时间 τ 的变化，适用于热力学极限下的混合场伊辛链（2）。初态通过方法 1 获得，其中 χ =10；灰色曲线表示 iMPS 两条键的平均截断误差。(a) 情形 $O=M^y$。(b) 情形 $O=M^z$。

图4 比较了从两种初态出发产生的突发：精确 MPS（灰色曲线）和近似态（蓝色曲线）。从后者出发仍可观察到突发，但突发幅度略有减小。与典型的线性增长不同，从近似态出发时，纠缠熵仍呈现下降；不过，与精确 MPS 情形相比，下降幅度不那么明显。

热力学极限下的突发——我们利用无限矩阵乘积态（iMPS）形式证明，突发在热力学极限下依然存在 $L\to\infty$。此处，我们采用方法 1，通过截断 $e^{iH\tau}|\Psi_{\rm GS}\rangle$ 得到初始 iMPS，其中 $|\Psi_{\rm GS}\rangle$ 为 O的基态。

突发振幅对突发时间的依赖关系

τ如图 5 所示。对于较小的 τ（$\lesssim 11$ 对 $O=M^y$和 $O=M^z$ 均如此），突发振幅 $\langle O\rangle_{\rm eq}-\langle O(\tau)\rangle$起初较大，并几乎保持不变。这一平台与如下观察相一致：态 $e^{iH\tau}|\Psi_{\rm GS}\rangle$可由键维数为$\chi=10$ 的无限矩阵乘积态在该时间区间内很好地近似。随后，突发振幅在 $\tau\gtrsim 11$ 时逐渐衰减。与此同时，截断误差增大，表明 $e^{iH\tau}|\Psi_{\rm GS}\rangle$ 变得愈发复杂，最终超出无限矩阵乘积态的表征能力。这些行为与图 2 所示结果相似。我们的结果表明，突发在热力学极限下起初是稳健的，但会随着量子信息混沌增强而逐渐衰减。

补充材料

在本补充材料中，我们推导式（3）和（5）在正文中针对局域维数 $d \geq 2$、系统尺寸 $L \geq 2$以及门的数目 $s \geq 1$。根据定义，键维数满足 $\chi \geq 1$。

局域随机电路的测度集中：方程 (3) 的证明

定义 1 ([66]中的定义 1)。 设 D 为希尔伯特空间的维数，且 H 为 $\mathbb{U}(D)$（ $D \times D$ 酉矩阵群上的 *Haar* 测度）。于是，对于 ν 在 $\mathbb{U}(D)$ 上的分布以及正整数 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$，定义

$$g(\nu, k) := \|\mathbb{E}_{U\sim\nu} U^{\otimes k,k} - \mathbb{E}_{U\sim \mathrm{H}} U^{\otimes k,k}\|_\infty, \ U^{\otimes k,k} := U^{\otimes k} \otimes (U^*)^{\otimes k}. \tag{1}$$

引理 2 （ [66]中的定理 5）。 对于主文中定义的 ν_d^{*s}, L 以下不等式成立：

$$g(\nu_{d,L}^{*1}, k) \leq 1 - (42500L\lceil \log_d(4k)\rceil^2 d^2 k^{5+3.1/\ln d})^{-1}. \tag{2}$$

引理 3。 对于某个正的数值常数 C,

$$g(\nu_{d,L}^{*s}, k) \leq d^{-4Lk}, \ k = \left\lfloor \left(\frac{s}{CL^2 d^2 \ln d}\right)^{1/11} \right\rfloor \tag{3}$$

当 $s \geq CL^2 d^2 \ln d$ 时成立。

证明。 首先，存在一个常数 C，使得

$$C \geq 170000\{\log_2(4k) + 1\}^2 k^{-5+3.1/\ln 2} \tag{4}$$

对所有 $k \geq 1$ 都成立。（注意， $C = 2.1 \times 10^6$ 已足够。）于是，对 $d \geq 2$，以下不等式成立：

$$\begin{aligned} s &\geq CL^2 d^2 \ln d \cdot k^{11} \\ &\geq 170000 L^2 d^2 \ln d \lceil \log_d(4k)\rceil^2 k^{6+3.1/\ln d}. \end{aligned} \tag{5}$$

由定义 1 可知 $g(\nu_d^{*s}, L, k) = g(\nu_d^{*1}, L, k)^s$ （即参考文献 [66]中的式（3））。利用该等式以及不等式 $(1-x)^s \leq e^{-sx}$ 对 $0 \leq x \leq 1$ 和 $s > 0$成立，可得

$$\begin{aligned} g(\nu_{d,L}^{*s}, k) &\leq \exp\left\{-s(42500L\lceil \log_d(4k)\rceil^2 d^2 k^{5+3.1/\ln d})^{-1}\right\} \\ &\leq d^{-4Lk}. \end{aligned} \tag{6}$$

■

定义 4 ([82]中的定义 2.2)。 由酉矩阵 U 的元素构成的单项式，若包含 k_1 个共轭元素和 k_2 个非共轭元素，则称其次数为(k_1, k_2)。若单项式的次数为 (k, k)，则称其为次数为 k 的平衡单项式。若多项式是次数至多为 k 的平衡单项式之和，则称其次数为 k 。

定义 5 （ [82]的定义 2.6）。 ν 是一个 ϵ-近似酉算符 k-设计，当且仅当对于所有次数为 $\leq k$ 的平衡单项式 M ，

$$|\mathbb{E}_\nu M(U) - \mathbb{E}_{\mathrm{H}} M(U)| \leq \frac{\epsilon}{D^k}. \tag{7}$$

引理 6 （ [83]的引理 2.2.14）。 当 $g(\nu, k) \leq \epsilon$ 成立时， ν 是一个 $D^{3k}\epsilon$-近似 k-设计。

引理 7 （ [82]的定理 1.2）。 设 f是一个次数为 K 的多项式。引入 $f(U) = \sum_i \alpha_i M_i(U)$ ，其中$M_i(U)$是单项式，且 $\alpha(f) = \sum_i |\alpha_i|$。假设 f满足以下概率集中条件：

$$\Pr_{U\sim \mathrm{H}}[|f(U) - \mu| \geq \delta] \leq Ae^{-b\delta^2}, \tag{8}$$

w此处 H表示 *Haar* 测度。设 ν 是一个 ϵ-近似 k-设计。那么我们有

$$\Pr_{U\sim\nu}[|f(U) - \mu| \geq \delta] \leq \delta^{-2m}\left\{A\left(\frac{m}{b}\right)^m + \frac{\epsilon}{D^k}(\alpha(f) + |\mu|)^{2m}\right\} \tag{9}$$

对于满足 $2mK \leq k$ 的正整数 m 。

命题 8（方程（3）见正文）。

$$\Pr_{U\sim\nu^{*s}_{d,L}}\left[\left|\langle\psi|U^\dagger OU|\psi\rangle-\frac{\mathrm{Tr}[O]}{d^L}\right|\geq\Delta_O a\right]\leq 2\Big(\frac{m}{d^L a^2}\Big)^m \tag{10}$$

对于满足以下条件的整数 $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$m\leq\frac{k}{2},\ k=\left\lfloor\Big(\frac{s}{CL^2d^2\ln d}\Big)^{1/11}\right\rfloor, \tag{11}$$

其中 C 是引理3中定义的常数。

证明。 不失一般性，我们假设 O 是无迹的，且 $\Delta_O=1$。根据 Levy 引理 [84], 可得

$$\Pr_{U\sim\mathrm{H}}\big[\big|\langle\psi|U^\dagger OU|\psi\rangle\big|\geq a\big]\leq e^{-d^La^2}. \tag{12}$$

我们引入 $f_O(U)=\langle\psi|U^\dagger OU|\psi\rangle$并应用引理 7，取 $D=d^L$、 $K=1$和 $\mu=0$。此外，由柯西-施瓦茨不等式可得 $\alpha(f_O)=\sum_{i,j}|O_{i,j}|\leq d^L\|O\|_F\leq d^{3L/2}$ ，其中$\|X\|_F=\sqrt{\mathrm{Tr}[X^\dagger X]}$ 是弗罗贝尼乌斯范数。由引理 3 和 6 可知，$\nu^{*s}_{d,L}$ 是一个 d^{-Lk}-近似 k-设计。因此，对于 $1\leq m\leq k/2$，可得

$$\begin{aligned}\Pr_{U\sim\nu^{*s}_{d,L}}\big[\big|\langle\psi|U^\dagger OU|\psi\rangle\big|\geq a\big]&\leq a^{-2m}\Big\{\Big(\frac{m}{d^L}\Big)^m+(d^L)^{3m-2k}\Big\}\\&\leq 2\Big(\frac{m}{d^La^2}\Big)^m.\end{aligned} \tag{13}$$

如果定义 $0^0=1$，则不等式对 $m=0$ 显然成立。

■

注 9。 公式 (10) 右端的最小值为 $\simeq 2e^{-d^La^2/e}$ ，在 $m=m_0\simeq d^La^2/e$处取得。因此，当 $k\geq 2m_0$时，上界关于 L呈双指数抑制。

矩阵乘积态 ϵ-网的覆盖数

我们考虑一条由 L 个格点组成的一维链，每个格点的局域维数为 d。令 $A=(A_i^{\sigma_i})_{i,\ \sigma_i}$ 为一个张量，其中$A_i^{\sigma_i}$是一个具有 $D_i=\min\{d^{i-1},d^{L-i+1},\chi\}$ 的 $D_i\times D_{i+1}$ 复矩阵。我们将 $\mathcal{T}_\chi$ 定义为这类张量的集合，并将 $\mathcal{S}_\chi$ 定义为具有以下规范形式的 $A\in\mathcal{T}_\chi$ 集合：

$$\mathcal{S}_\chi:=\left\{A\in\mathcal{T}_\chi\mid\forall i\in\{1,\dots,L\}\ \sum_{\sigma=1}^d A_i^\sigma A_i^{\sigma\dagger}=I_{D_i}\right\}. \tag{14}$$

令 $\mathcal{M}_\chi$ 为一组规范化的（OBC-）矩阵乘积态，其键维数小于或等于 χ。我们定义一个从张量到状态的映射 $|\psi_\bullet\rangle$:

$$|\psi_\bullet\rangle:\ \mathcal{S}_\chi\to\mathcal{M}_\chi,\ A\mapsto\sum_{\{\sigma_i\}}A_1^{\sigma_1}\cdots A_L^{\sigma_L}\,|\sigma_1\cdots\sigma_L\rangle\,. \tag{15}$$

注意，规范形式下的矩阵乘积态已归一化。映射 $|\psi_\bullet\rangle$是满射，因为任意量子态$|\Psi\rangle\in\mathcal{M}_\chi$ 都可以表示为规范形式 [54]。

对于张量 $A\in\mathcal{T}_\chi$，我们定义其范数如下：

$$\|A\|:=\sqrt{\sum_{i=1}^L\sum_{\sigma_i=1}^d\|A_i^{\sigma_i}\|_F^2}. \tag{16}$$

那么，规范形式中的任意张量 $(A_i^\sigma)_{\sigma=1}^d$ 都满足以下性质：

$$\sum_{\sigma=1}^d\|XA_i^\sigma\|_F^2=\|X\|_F^2. \tag{17}$$

将 $X = I_{D_i}$ 代入方程（17），可得

$$A \in \mathcal{S}_\chi \Rightarrow \|A\| \leq R_\chi := \sqrt{L\chi}. \tag{18}$$

现在，我们证明以下引理。

引理 10。 映射 $|\psi_\bullet\rangle$ 是 $\sqrt{L}$-利普希茨的，即

$$\forall A, B \in \mathcal{S}_\chi,\ \| |\psi_A\rangle - |\psi_B\rangle \| \leq \sqrt{L}\|A - B\|. \tag{19}$$

证明。 通过使用望远镜求和，我们有

$$\begin{aligned}
&\||\psi_A\rangle - |\psi_B\rangle\| \\
&= \left\| \sum_{\{\sigma_i\}} (A_1^{\sigma_1} \cdots A_L^{\sigma_L} - B_1^{\sigma_1} \cdots B_L^{\sigma_L}) |\sigma_1 \cdots \sigma_L\rangle \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{L} \sum_{\{\sigma_i\}} A_1^{\sigma_1} \cdots A_{i-1}^{\sigma_{i-1}} (A_i^{\sigma_i} - B_i^{\sigma_i}) B_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \cdots B_L^{\sigma_L} |\sigma_1 \cdots \sigma_L\rangle \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{L} \left\| \sum_{\{\sigma_i\}} A_1^{\sigma_1} \cdots A_{i-1}^{\sigma_{i-1}} (A_i^{\sigma_i} - B_i^{\sigma_i}) B_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \cdots B_L^{\sigma_L} |\sigma_1 \cdots \sigma_L\rangle \right\|.
\end{aligned} \tag{20}$$

定义

$$\Delta_i^{\sigma_i} := A_i^{\sigma_i} - B_i^{\sigma_i}, \tag{21}$$

$$|\delta_i\psi\rangle := \sum_{\{\sigma_i\}} A_1^{\sigma_1} \cdots A_{i-1}^{\sigma_{i-1}} \Delta_i^{\sigma_i} B_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \cdots B_L^{\sigma_L} |\sigma_1 \cdots \sigma_L\rangle . \tag{22}$$

因此，只需计算 $\sum_{i=1}^{L} \||\delta_i\psi\rangle\|$。通过反复使用公式（17），我们得到

$$\begin{aligned}
\||\delta_i\psi\rangle\|^2 &= \sum_{\{\sigma_i\}} \left\| A_1^{\sigma_1} \cdots A_{i-1}^{\sigma_{i-1}} \Delta_i^{\sigma_i} B_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \cdots B_L^{\sigma_L} \right\|_F^2 \\
&= \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_i} \left\| A_1^{\sigma_1} \cdots A_{i-1}^{\sigma_{i-1}} \Delta_i^{\sigma_i} \right\|_F^2.
\end{aligned} \tag{23}$$

然后，我们定义

$$P_i := \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}} (A_1^{\sigma_1} \cdots A_{i-1}^{\sigma_{i-1}})^\dagger (A_1^{\sigma_1} \cdots A_{i-1}^{\sigma_{i-1}}). \tag{24}$$

根据构造， P_i 是半正定的，并且由式（17）可得 $\mathbf{Tr}[P_i] = 1$。因此， $O_{D_i} \preceq P_i \preceq I_{D_i}$ 成立，其中 $X \preceq Y$ 表示 $Y - X$ 是半正定的。由此可得

$$\begin{aligned}
\||\delta_i\psi\rangle\|^2 &= \sum_{\sigma_i} \mathrm{Tr}\left[\Delta_i^{\sigma_i \dagger} P_i \Delta_i^{\sigma_i} \right] \\
&\leq \sum_{\sigma_i} \mathrm{Tr}\left[\Delta_i^{\sigma_i \dagger} \Delta_i^{\sigma_i} \right] \\
&= \sum_{\sigma_i} \|\Delta_i^{\sigma_i}\|_F^2.
\end{aligned} \tag{25}$$

最后，利用柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
\||\psi_A\rangle - |\psi_B\rangle\| &\leq \sqrt{L} \sqrt{\sum_{i=1}^{L} \||\delta_i\psi\rangle\|^2} \\
&\leq \sqrt{L} \sqrt{\sum_{i=1}^{L} \sum_{\sigma_i} \|\Delta_i^{\sigma_i}\|_F^2} \\
&= \sqrt{L}\|A - B\|.
\end{aligned} \tag{26}$$

■

固定 $\epsilon\in(0,2]$，并定义 $\mathcal{N}_{\chi,\epsilon}$ 为 $\mathcal{S}_\chi$的一个极大 $\epsilon/\sqrt{L}$-分离子集，也就是说，对于任意 $P,Q\in\mathcal{N}_{\chi,\epsilon}$，只要满足 $P\neq Q$，就有 $\|P-Q\|>\epsilon/\sqrt{L}$。现在，对于任意 $|\Psi\rangle\in\mathcal{M}_\chi$，由于 $|\psi_\bullet\rangle$的满射性，存在 $A\in\mathcal{S}_\chi$ 使得 $|\psi_A\rangle=|\Psi\rangle$。接着，存在$A'\in\mathcal{N}_{\chi,\epsilon}$ 使得$\|A-A'\|\leq\epsilon/\sqrt{L}$，否则 $\mathcal{N}_{\chi,\epsilon}\cup\{A\}$将构成 $\mathcal{S}_\chi$的一个更大的 $\epsilon/\sqrt{L}$-分离集。由引理 10 可得 $\|\,|\Psi\rangle-|\psi_{A'}\rangle\,\|=\|\,|\psi_A\rangle-|\psi_{A'}\rangle\,\|\leq\epsilon$。因此，$\big|\psi_{\mathcal{N}_{\chi,\epsilon}}\big\rangle:=\{|\psi_A\rangle\mid A\in\mathcal{N}_{\chi,\epsilon}\}$ 是 $\mathcal{M}_\chi$的一个 ϵ-网。

一个张量 $A=(A_i^{\sigma_i})_{i,\,\sigma_i}\in\mathcal{T}_\chi$ 具有 $d\sum_{i=1}^L D_iD_{i+1}$ 复矩阵元。对于每个 $A\in\mathcal{T}_\chi$，我们定义一个$f_\chi:=2d\sum_{i=1}^L D_iD_{i+1}$维实向量 $\boldsymbol{v}_A$，其元素由 A的矩阵元的实部和虚部组成。令 $B(\boldsymbol{v},\ r)$ 为一个 f_χ维、半径为 r 且以 $\boldsymbol{v}$为中心的球。由$\|\boldsymbol{v}_A\|=\|A\|$ 和公式（18）可得

$$A\in\mathcal{S}_\chi\implies\boldsymbol{v}_A\in B(\mathbf{0},R_\chi).\tag{27}$$

由于集合 $\{B(\boldsymbol{v}_A,\ \epsilon/2\sqrt{L})\mid A\in\mathcal{N}_{\chi\text{中的球}\epsilon}\}$彼此不相交，且包含于球 $B(\mathbf{0},\ R_\chi+\epsilon/2\sqrt{L})$ 中，根据体积论证可得

$$|\mathcal{N}_{\chi,\epsilon}|\leq\frac{(R_\chi+\epsilon/2\sqrt{L})^{f_\chi}}{(\epsilon/2\sqrt{L})^{f_\chi}}.\tag{28}$$

由$\big|\big|\psi_{\mathcal{N}_{\chi,\,\epsilon}}\big\rangle\big|\leq|\mathcal{N}_{\chi,\,\epsilon}|$ 和 $f_\chi\leq 2dL\chi^2$ 可得

$$\big|\big|\psi_{\mathcal{N}_{\chi,\epsilon}}\big\rangle\big|\leq\left(\frac{3L\sqrt{\chi}}{\epsilon}\right)^{2dL\chi^2}.\tag{29}$$

Derivation of Eq. (5)

我们将其记为

$$P_{\chi,a}:=\Pr_{U\sim\nu_{d,L}^{*s}}\sup_{|\psi\rangle\in\mathcal{M}_\chi}\left[\left|\langle\psi|U^\dagger OU|\psi\rangle-\frac{\mathrm{Tr}[O]}{d^L}\right|\geq\Delta_O a\right]\tag{30}$$

表示从 $\Delta_O a$ 中的某个纯态出发，找到大小大于或等于 $\mathcal{M}_\chi$的突发的概率。利用 $|\,\langle\psi|O|\psi\rangle-\langle\psi'|O|\psi'\rangle\,|\leq\Delta_O\|\,|\psi\rangle-|\psi'\rangle\,\|$ 并对方程（10）和（29）应用并集界，可得

$$\begin{aligned}P_{\chi,a}&\leq\Pr_{U\sim\nu_{d,L}^{*s}}\left[\exists\,|\psi'\rangle\in\big|\psi_{\mathcal{N}_{\chi,\epsilon}}\big\rangle\ \text{s.t.}\ \left|\langle\psi'|U^\dagger OU|\psi'\rangle-\frac{\mathrm{Tr}[O]}{d^L}\right|\geq\Delta_O(a-\epsilon)\right]\\&\leq\big|\big|\psi_{\mathcal{N}_{\chi,\epsilon}}\big\rangle\big|\ \Pr_{U\sim\nu_{d,L}^{*s}}\left[\left|\langle\psi'|U^\dagger OU|\psi'\rangle-\frac{\mathrm{Tr}[O]}{d^L}\right|\geq\Delta_O(a-\epsilon)\right]\\&\leq 2\left(\frac{3L\sqrt{\chi}}{\epsilon}\right)^{2dL\chi^2}\left\{\frac{m}{d^L(a-\epsilon)^2}\right\}^m\end{aligned}\tag{31}$$

对所有 $0<\epsilon<a$ 均成立。对 ϵ 求右侧的最小值，可得

$$P_{\chi,a}\leq 2\left(\frac{3}{d\chi^{3/2}}\right)^{2dL\chi^2}\left(\frac{1}{md^L}\right)^m\left(\frac{dL\chi^2+m}{a}\right)^{2(dL\chi^2+m)}.\tag{32}$$

由于 d 且 χ不依赖于系统尺寸，因此$P_{\chi,\,a}$ 的对数近似有界于

$$\ln P_{\chi,a}\lesssim-m\ln(md^L)+2(dL\chi^2+m)\ln\frac{dL\chi^2+m}{a}.\tag{33}$$

至此，正文中的方程（5）得证。