arXiv:2602.09674v1 [math.AT] 10 Feb 2026

Joyal 的范畴 Θ 及其他测试范畴的同伦 Dold-Kan 对应

LÉO HUBERT

摘要。我们证明，对于任何满足以下条件的测试范畴 A（按照 Grothendieck 的定义）：预层的同调等价与弱等价之间满足兼容性条件，则其上的阿贝尔预层的同伦范畴 A 等价于阿贝尔群的非负导出范畴。这为一大类测试范畴上的阿贝尔群预层给出了 Dold-Kan 对应的同伦推广。这种同伦范畴之间的等价源自我们在这些条件下为阿贝尔预层引入的一种模型结构所对应的 Quillen 等价。随后我们证明，该结果适用于 Joyal 的范畴 Θ。

引言

在其 1983 年手稿 *Pursuing Stacks* [15], 的开篇几章中，Grothendieck 引入了测试范畴的概念，旨在以公理化方式刻画这样一类小范畴：其预层范畴能够以典范方式对拓扑空间的同伦范畴 Hot（其中态射按弱同伦等价取商）进行建模。此后，这一理论得到进一步阐述和发展，尤其见于 [24], [11], [19], [12], [3] 和 [1]。

然而，《Pursuing Stacks》第五至第七章尚未获得同样的热烈反响。在这些章节中，Grothendieck 引入了一套形式体系，用于研究小范畴上的阿贝尔预层的同调理论，这套体系不同于函子同调中使用的体系（例如参见 [26]）。他还猜想，测试范畴上的阿贝尔预层的 Dold-Kan 对应存在一种同伦论推广。本文旨在介绍这套形式体系的基础内容，并在适用于 Joyal 范畴 Θ [20] 等情形的附加条件下证明 Grothendieck 的猜想。

测试范畴简述。在这一背景下，利用 Illusie- Quillen 定理 [18], ，范畴 Hot 被实现为小范畴范畴 $\mathcal{C}at$ 关于这类函子组成的类 $\mathcal{W}_\infty$ 的 Gabriel-Zisman 局部化，其中这些函子经神经函子映射后的像是单纯弱等价。给定任意小范畴 A，函子

$$i_A : \widehat{A} \to \mathcal{C}at \ , \quad X \mapsto A/X$$

将每个预层映到其元素范畴，可以定义预层的一个弱等价类$\widehat{\ }$，记作 $\mathcal{W}_A$；该类由 A 中的自然变换组成，其在函子 $i_A\ \widehat{\ }$ 下的像属于 $\mathcal{W}_\infty$。Grothendieck 将 A 关于 $\mathcal{W}_A$ 的局部化记作 Hot_A ，并将伪检验范畴 定义为满足以下条件的范畴 A ： 由 i_A 诱导的函子 $\mathrm{Hot}_A \to$Hot 是范畴等价。

然而，对于 Grothendieck 寻求优雅刻画的目的而言，这一概念过于宽泛，因此他逐渐缩小研究范围。首先，他通过额外要求 i_A 的右伴随函子 $i_A^* : \mathcal{C}at \to A$ 保持弱等价，来定义弱测试范畴$\widehat{\ }$。随后，他成功找到了范畴 A 的非常简单的刻画：对于其中每个对象 a，其切片范畴 A/a 都是弱测试范畴；他将这类范畴称为局部测试范畴 A。此外，任何同伦群平凡的局部测试范畴也是弱测试范畴：于是测试范畴 被定义为同时是局部测试范畴和弱测试范畴的范畴。最后，严格测试范畴 是满足以下条件的测试范畴 A：函子 i_A 与预层的积在弱等价意义下相容。

测试范畴的重要例子包括范畴 Δ 非空有限序数、立方范畴 $\square$ 及其带联络的变体 [25], ，以及树状范畴 Ω [3]。一个尤为重要的例子是范畴 Θ，它不仅是严格测试范畴 [12]„ 还与严格 ω-范畴（[22],[7]）和弱高阶范畴（[20],[5],[29],[2]）密切相关。

2020 数学主题分类。18F20, 18G31, 18G90, 18N40, 55U35。关键词和短语。阿贝尔预层、测试范畴、同调、Dold-Kan 对应。

同伦类型的线性化。小范畴的同调传统上定义为其单纯神经的同调，因此，我们可以将任意小范畴上预层的同调定义为其元素范畴的同调。然而，这一过程相当复杂，并赋予范畴 Δ突出的地位。在测试范畴的背景下，Grothendieck 在 [15] 中提出了几个关于他所称的同伦类型的线性化的问题。

D将 Hotab 记为阿贝尔群的非负导出范畴，并将 $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ 该范畴 ry of a上的阿贝尔预层。

（1）给定一个小范畴 A，我们能否定义一个典范函子

$$\mathrm{H_A} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Hotab}$$

使得下图

$$\begin{array}{ccccccc} \widehat{A} & \xrightarrow{i_A} & \mathcal{C}at & \xrightarrow{\mathsf{N}} & \widehat{\Delta} & \xrightarrow{\mathsf{C_N}} & \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \\ {\scriptstyle\mathbb{Z}}\downarrow & & & & & & \downarrow{\scriptstyle can} \\ \widehat{A}^{\mathsf{ab}} & & & & \xrightarrow[\mathrm{H_A}]{} & & \mathsf{Hotab} \end{array} ,$$

其中 $\mathsf{C_N}$ 是归一化链复形函子，N 是单纯神经；二者是否在自然同构意义下可交换?

本文按照 Grothendieck 的思想引入了这样一个函子，将其定义为余极限函子的左导出函子。

这使我们能够定义 A 上阿贝尔预层的一类弱等价，并将其记为 $\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}}$；其中的元素是被函子 $\mathrm{H_A}$ 映为同构的态射。注意，在单纯阿贝尔群的情形中，通常将底层单纯集合的态射为弱等价的那些态射取作弱等价。在我们的语境中，一个非常重要的观察是，函子 $\mathsf{C_N}$: $\widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+$(阿贝尔群范畴) 将这些态射映为拟同构。

(2) 令 U : $\widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{A}$ 为遗忘函子。我们能否给出关于 A 的条件，以确保函子 $\mathrm{H_A}$ 将 $\mathrm{U}^{-1}\mathcal{W}_A$ 的态射映为 Hotab 中的同构?

我们将重点研究满足如下条件的范畴，例如 Δ: $\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}}$与 $\mathrm{U}^{-1}\mathcal{W}_A$ 相同。我们称之为强怀特海德条件。本文不研究仅满足嵌入 $\mathrm{U}^{-1}\mathcal{W}_A \subset \mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}}$的范畴。

最后，函子 $\mathsf{C_N}$: $\widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+$(Ab) 还有另一个重要性质，由 Dold-Kan 定理表述：它是一个范畴等价（[14],[21]）。一般而言，测试范畴上的阿贝尔预层并不等价于阿贝尔群的非负链复形。例如，双单纯阿贝尔群范畴等价于第一象限的双链复形范畴。不过，对 Dold-Kan 对应作出合理推广，或许能回答以下问题:

(3) 如果问题 (2) 的答案是肯定的，我们就得到一个函子

$$\overline{\mathrm{H_A}} : \mathsf{Hotab}_A^{\mathrm{U}} \to \mathsf{Hotab}$$

其中 $\mathsf{Hotab}_A^{\mathrm{U}}$ 是 $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ 按类 $\mathrm{U}^{-1}\mathcal{W}_A$局部化得到的范畴。如果 A 是测试范畴，那么函子 $\mathrm{H_A}$ 是否为范畴等价?

本文表明，对于满足强 Whitehead 条件的范畴，这个最后的问题答案是肯定的。

The理 (5.14)**.** 设 A 是满足强 *Whitehead* 条件的测试范畴。那么 *t* *he functor* $\overline{\mathrm{H_A}}$:$\mathsf{Hotab}_A^{\mathrm{U}} \to \mathsf{Hotab}$ 是范畴等价。

证明中的一个重要环节来自满足 Quillen 定理 A [27, 定理 A], 条件的函子；在 Grothendieck 的同伦理论中，这类函子称为非球面函子 。给定任意一个非球面函子 u : $A \to B$，其诱导的限制函子 u^* : $B \to A$ 是同伦余终的，也就是说，它会在同伦余极限之间诱导出一个同构。

我们证明，若 u : $A \to B$ 是非球面函子，且 A满足强怀特海德条件，那么 B也满足同样的条件。我们还研究小范畴之间诱导同调同构的函子类$\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$ ，以及相应的$\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$-非球面

态射。我们证明，由$\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$-非球面函子诱导的限制函子 $(u^*)^{\mathsf{ab}}\colon \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ 与同调函子可交换。此外，利用局部测试范畴 [11, 上预层范畴的 Grothendieck-Cisinski 模型结构，Corollary 4.2.18], 我们证明以下定理:

定理。 设 A是满足强怀特海德条件的局部测试范畴。

(5.9) 范畴 $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ 可以赋予余纤维生成模型范畴的结构，其弱等价为类 $W_A^{\mathsf{ab}} = \mathrm{U}^{-1}W_A$中的元素。(5.11) 若 $u\colon A \to B$ 是非球面函子，且 B 也是局部测试范畴，则函子$(u^*)^{\mathsf{ab}}\colon \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ 是左 *Quillen* 等价。

特别是，定理 5.14 中局部化范畴的等价可以提升为 Quillen 等价，其中使用的是阿贝尔群非负链复形上的投射模型结构。

作为定理 5.14 的一个应用，我们证明 Joyal 的范畴 Θ 满足同伦 Dold-Kan 对应。我们对这一证明的贡献，主要在于研究了非球面函子概念的一种变体，适用于陪域为预层范畴的函子。我们证明$\widehat{\ }$，如果 A 满足强怀特海德条件，且 $j\colon B \to A$ 在此意义下是非球面函子，那么 B 也满足强怀特海德条件。随后，我们运用 Ara 和 Maltsiniotis [4] 的既有工作；他们证明，由胞腔神经 ([6], [7]) 和 Street 的东方式函子 [30] 给出的函子 $\Delta \to \Theta$ 是非球面函子。这意味着 Θ 满足强怀特海德条件，因此也满足定理 5.14 的条件。

我们想指出的是，也可以尝试刻画满足下述条件的小范畴：函子 H_A 在不要求问题（2）中的条件的情况下，诱导出对 ($\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$,$\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}}$) 的局部化与 Hotab 之间的范畴等价。作者在其博士学位论文 [17] 中已对此进行了部分研究；本文即取材于该论文，仍有更多问题有待考察。例如，范畴 $\Delta/\mathrm{N}(\mathbb{G}_r)$（其中 $\mathbb{G}_r$ 是自反 globular 范畴）是一个不满足强Whitehead条件的测试范畴。然而，利用 [17, 命题 4.3.6] 可以证明，它满足这一版本的同伦 Dold-Kan 对应。

本文结构。 第 1 节简要回顾了测试范畴的定义和结果，这些内容将在全文中使用。在第2节中，我们引入同调函子，并证明当其限制在集合值预层上时，它计算元素范畴的同调。在第 3 节中，我们介绍 Grothendieck 关于函子的张量积的定义，并利用它对同调函子进行显式计算。在第 4 节中，我们引入由在同调中诱导同构的函子构成的类$\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$ ，并证明由一个 $\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$-非球面态射诱导的限制函子与同调交换。第 5 节介绍强Whitehead条件，并包含引言中陈述的两个主要定理。第 6 节聚焦于 Joyal 的范畴 Θ ，并利用 Ara 和 Maltsiniotis 的结果 [4], 证明，对于任意整数 $n \geqslant 1$, Θ_n和 Θ 都是强Whitehead范畴，从而验证同伦 Dold-Kan 对应。

致谢。 感谢Georges Maltsiniotis，他负责编辑*Pursuing Stacks*的项目使本文得以完成；同时感谢Dimitri Ara在我攻读博士学位期间给予的指导，本文即摘编自该阶段的研究。

第1至第3节中的所有定义，除同调伪测试一词外，均归功于Grothendieck [15]。

记号。 若$\mathcal{C}$ 是一个范畴，我们用Ob(*C*)表示其对象类，用Arr(*C*)表示其态射类。给定另一个范畴 $\mathcal{D}$，我们用Hom(*C*,*D*)表示以$\mathcal{C} \to \mathcal{D}$为对象、以它们之间的自然变换为态射的函子范畴。我们用 $\mathcal{S}et$ 表示集合范畴，用Ab表示阿贝尔群范畴，并用$\mathcal{C}at$ 表示小范畴范畴。

若*A*是集合值预层范畴$\widehat{\mathrm{Hom}}(A^{\mathrm{op}},\mathcal{S}et)$，即 A上的集合值预层范畴。给定 A中的一个对象 a ，我们用 a 表示其在 A上的相应可表预层。给定小范畴之间的一个函子 $u\colon A \to B$$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，我们记 $u^*\colon B \to A$ 为限制函子，并记 $u_!$ （分别为 u_*）为其左（分别为右）伴随函子。

$\widehat{\ }$我们用 e 表示 $\mathcal{C}at$ 的终对象，并用 $e_{\widehat{A}}$ 表示任意小范畴 A 对应的 A 的终对象。

1. 测试范畴预备知识

我们先简要回顾本文将用到的测试范畴理论相关定义和事实。关于这一理论的详细阐述，请参阅 [24] 。

1.1. 若 $u\colon A \to B$ 是一个函子，且 b 是 B中的一个对象，我们用 A/b表示其对象为有序对 $(a,\ f)$ 的范畴，其中 a 是 A 中的一个对象，$f\colon ua \to b$ 是 B中的一个态射；从对象 $(a,\ f)$ 到对象 $(a',\ f')$ 的态射是满足 $f\prime u(g) = f$ 的态射 $g\colon a \to a'$。特别地，若 A 是一个小范畴，$u\colon A \to A$ 是 Yoneda 嵌入，且 X 是 A上的一个预层，则范畴 A/X 就是 X的元素范畴。这定义了一个函子

$$i_A : \widehat{A} \to \mathcal{C}at\ ,\quad A \mapsto A/X$$

它的右伴随函子是函子

$$i_A^* : \mathcal{C}at \to \widehat{A}\ ,\quad C \mapsto \mathsf{Hom}(A/a, C)\quad .$$

1.2. 若一个类 $\mathcal{W}$ $\subset$Arr($\mathcal{C}at$) 满足以下条件，则称其为弱饱和：

(1) 恒等态射属于 $\mathcal{W}$；(2) 若 $\mathcal{C}at$ 中的一个交换三角形里有两个箭头属于 $\mathcal{W}$，则第三个箭头也属于 $\mathcal{W}$；(3) 若 $i\colon X' \to X$ 和 $r\colon X \to X'$ 是小范畴之间的两个函子，且$ri = \mathsf{id}_{X'}$ 和 ir 属于 $\mathcal{W}$，则 r 也属于 $\mathcal{W}$；

1.3. 若一个类 $\mathcal{W}$ $\subset$Arr($\mathcal{C}at$) 弱饱和且满足以下条件，则称其为基本局部化子（回顾一下，e 是$\mathcal{C}at$的终对象）：

(4) 若 A 是一个具有终对象的小范畴，则态射 $A \to e$ 属于$\mathcal{W}$；(5) 若 $u\colon A \to B$ 是 $\mathcal{C}at$ 中的一个函子，且对于 B的每个对象 b，函子

$$u/b : A/b \to B/b\ ,\quad (a, u(a) \to b) \mapsto (u(a), u(a) \to b)$$

属于$\mathcal{W}$，则 u 属于$\mathcal{W}$。

1.4. 设$\mathcal{W}$ 是$\mathcal{C}at$中的一个基本局部化子。若一个小范畴到终对象的唯一态射 $A \to e$ 属于$\mathcal{W}$，则称该小范畴为$\mathcal{W}$-非球面。若函子 $u\colon A \to B$ 满足对 B的每个对象 b，态射 u/b 都属于$\mathcal{W}$，则称该函子为$\mathcal{W}$-非球面的。最后，若预层 X 定义在 A上，且 $i_A(X)$是一个$\mathcal{W}$-非球面范畴，则称该预层为$\mathcal{W}$-非球面的。可以证明，任意可表预层都是$\mathcal{W}$-非球面的，因为对 A的任意对象 a，范畴 A/a 都有一个终对象。

命题1.5 (Grothendieck)。设 $u\colon A \to B$ 是小范畴之间的一个函子。以下条件等价：

(1) u 是 W-无球面的；*(2)* 当且仅当 $u^*(X)$ 是 W-无球面时，定义在 B 上的预层 X 是 W-无球面的；*(3)* 对于 B的每个对象 b，预层 $u^*(b)$ 是 W-无球面的；*(4)* 对于定义在 B上的每个预层 X，函子

$$u/X : A/X \to B/X\ ,\quad (a, u(a) \to X) \mapsto (u(a), u(a) \to X)$$

属于 W;

此外，这些条件蕴含以下条件：

(5) 对于 B中的任意态射 $f\colon X \to Y$，函子 $i_B(f)$ 属于 W，当且仅当 $i_A(u^*(f))$ 属于 W。

证明。参见 [24,命题1.2。9]。 □

1.6. 我们将$\mathcal{W}_\infty$ 记为$\mathcal{C}at$ 中经单纯神经函子映为单纯弱等价的态射类。利用 [27, 定理 A], ，很容易证明$\mathcal{W}_\infty$ 是一个基本局部化子。我们称其元素为*Thomason* 等价，或简称范畴的弱等价。

1.7. 我们将 Hot 记为$\mathcal{C}at$ 关于$\mathcal{W}_\infty$的局部化。回忆一下（[18, VI，定理 3.3]），单纯神经函子在 Hot 与单纯集合的同伦范畴之间诱导出范畴等价。

在本文余下部分中，我们将仅用形容词 非球面来指代$\mathcal{W}_\infty$-非球面性。

1.8. </style}设 为一个小范畴。若态射 :在 下经函子 映射后属于W$_\infty$，则称其为弱等价。我们用$\mathcal{W}_A$ 表示 A上的预层的弱等价类，并用 Hot$_A$ 表示将 A 按类$\mathcal{W}_A$局部化所得的范畴。

函子 i_A 诱导出一个函子 Hot$_A$ →Hot；若此函子是范畴等价，我们称 A 为伪检验范畴。

1.9. 若满足以下条件，我们称 A 为弱测试范畴：

(1) $i_A^*(\mathcal{W}_\infty) \subset \mathcal{W}_A$；(2) 对每个预层 X，单位态射 $\eta_X : X \to i_A^* i_A(X)$ 属于 $\mathcal{W}_A$；
(3) 对每个小范畴 X，余单位态射 $\varepsilon_C : i_A i_A^*(C) \to C$ 属于 $\mathcal{W}_\infty$。

特别地，每个弱测试范畴都是伪检验范畴。

1.10. 若对于 A的任意对象 a ，范畴 A/a 都是弱测试范畴，则称小范畴 A 为局部测试范畴。如果 A 既是弱测试范畴又是局部测试范畴，我们称 A 为测试范畴。

定理 1.11 (Grothendieck-Cisinski)。设 A 是一个局部测试范畴。范畴 A 可赋予模型范畴结构，其中弱等价是 W_A 中的元素，余纤维化是单态射。

证明。参见 [11,推论 4.2.18]。 □

命题 1.12 (Cisinski)。设 u: $A \to B$ 是局部测试范畴之间的一个非球面函子。 那么，对于 A 和 B上的 *Grothendieck-Cisinski* 模型结构，(u^*, u_*) 是一个 *Quillen* 等价。

证明。参见 [11,命题 6.4.29]。 □

1.13. 设 A 是一个小范畴。若预层 X 上的典范函子 $i_A(X) \to A$ 是$\mathcal{W}$-非球面的，则称其为局部 $\mathcal{W}$-非球面。若 A 是非球面的，并且对于 A上的任意预层 X和 Y，典范态射 $i_A(X \times Y) \to i_A(X) \times i_A(Y)$ 都是非球面的，则称 A 为全非球面。

命题 1.14 (Grothendieck)。 设 A是一个小范畴。以下条件等价：

(1) A是全无球面范畴；*(2)* 对角函子 $A \to A \times A$ 是非球面函子；*(3)* A 上的每个非球面预层都是局部非球面的。

证明。 参见 [24,命题 1.6.1]。 □

命题 1.15 (Grothendieck)。 若 A 是一个全无球面范畴，且 u ： $A \to B$ 是一个非球面函子，则 B 也是全无球面范畴。

证明。 参见 [24,命题 1.6.5]。 □

1.16。 严格测试范畴 是同时也是全无球面范畴的测试范畴。

命题 1.17 (Grothendieck)。 设 A 是一个全无球面范畴。以下条件等价：

(1) A 是弱测试范畴；*(2)* A 是局部测试范畴；*(3)* A 是测试范畴；*(4)* A 是严格测试范畴。

证明。 参见 [24,命题 1.6.6]。 □

命题 1.18 (Grothendieck)。 设 u： $A \to B$ 是一个函子。若 A 是全非球面的，且若B 是一个局部测试范畴，则 A 和 B 都是严格测试范畴。

证明。 参见 [24,推论 1.6.11]。 □

1.19. 设 A 是一个小范畴，且 $i\colon\ A \to \mathcal{C}at$ 是一个函子。考虑函子

$$i^* : \mathcal{C}at \to \widehat{A}\ ,\quad C \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(i(a), C)\quad .$$

注意，若 i 是从单纯形范畴 Δ 到 $\mathcal{C}at$ 的嵌入函子，则 i^* 是单纯神经函子。若 i 满足以下条件，我们称其为非球面函子：

(1) 对于 A 的每个对象 a，范畴 $i(a)$ 是非球面的；(2) 小范畴 C 是非球面的，当且仅当预层 $i^*(C)$ 是非球面的。

命题 1.20 (Grothendieck)。 设 A 是一个小范畴。那么， A 是弱测试范畴，当且仅当 i_A 是一个非球面函子。

证明。 见 [24,注记 1.7。2]。 □

命题 1.21 (Grothendieck)。 设 $u\colon\ A \to B$ 是小范畴之间的一个函子，并设 $j : B \to \mathcal{C}at$ 是一个函子，使得对于 B 的每个对象 b，范畴 $j(b)$ 都是非球面的。

(1) 若 u 是非球面的，则 $ju\colon\ A \to \mathcal{C}at$ 是非球面的，当且仅当 j 是非球面的；*(2)* 若 j 是全忠实的，且 $ju\colon\ A \to \mathcal{C}at$ 是非球面函子，则 u 和 j 都是非球面的。

证明。参见 [15,引理 1.7.4]。 □

1.22。设 A 为一个小范畴。若函子 $i\colon\ A \to \mathcal{C}at$ 是弱测试函子，且 A 是弱测试范畴、 i 是非球面的，我们称之为弱测试函子。若对于 A 中的每个对象 a，由 i 诱导的函子 $A/a \to \mathcal{C}at$ 是弱测试函子，则称 i 为局部测试函子。最后，若 i 同时是弱测试函子和局部测试函子，则称其为测试函子。

定理 1.23 (Grothendieck)。设 A 为一个小范畴， $i\colon\ A \to \mathcal{C}at$ 为一个函子，并且对于 A 中的每个对象 a，范畴 $i(a)$ 都是非球面的。以下条件等价：

(1) i 是一个局部检验函子（且 A 是一个局部测试范畴）；*(2)* 对于每个小非球面范畴 C，预层 $i^*(C)$ 都是局部非球面的。

证明。 参见 [24,定理 1.7.13]。 □

2. 同调、同伦余极限与元素范畴

在测试范畴的语境中，一个预层的同调就是其元素范畴的同调。现在，我们将沿袭 Grothendieck 的思想，在 [15], 中引入一个针对阿贝尔预层的同调函子，以推广这一思想。我们将证明，它也推广了群和单纯阿贝尔群的同调。

2.1. 若 A 是一个小范畴，我们用 $\widehat{A}^{\mathsf{ab}} = \mathsf{Hom}(A^{\mathsf{op}}, \mathsf{Ab})$ 表示 A上的阿贝尔预层范畴。给定 A 上的一个预层 X，我们用 $\mathbb{Z}_A^{(X)}$ 表示 A 上的阿贝尔预层，它将 A的每个对象a 映到集合 Xa上的自由阿贝尔群。沿用 Grothendieck 的术语 [15], ，我们将怀特海德函子称为以下函子

$$\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}} : \widehat{A} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}\ ,\quad X \mapsto \mathbb{Z}_A^{(X)}\ ,$$

或简称为阿贝尔化函子。如果 a 是 A中的一个对象，我们将简单地把可表预层 a 在函子 Wh_{A}下的像记作 $\mathbb{Z}_A^{(a)}$，并将其称为由 a表示的阿贝尔预层。

2.2. 我们将 Hotab 记作导出范畴$\mathcal{D}_+$(阿贝尔群范畴)，它是通过对非负阿贝尔群链复形施行拟同构局部化得到的$\mathrm{in}\mathrm{com}$通过拟同构对阿贝尔群复形进行局部化。我们定义一个函子

$$\mathrm{H}_{\mathrm{A}} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Hotab}\ ,\quad X \mapsto \mathrm{H}(A, X)$$

其中 $\mathrm{H}(A,\ X)$ 是图表的同伦余极限

$$A^{\mathsf{op}} \xrightarrow{X} \mathsf{Ab} \xhookrightarrow{in_0} \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})\quad ,$$

in_0 是将阿贝尔群嵌入到集中于 0 次的链复形中的嵌入。我们称 $\mathrm{H}(A, X)$ 为 A 以 X 为系数的同调，或简称为X 的同调。

例 2.3。若 A 是与群 G 相关联的群胚 BG，则 A 上的阿贝尔预层与右 $\mathbb{Z}G$-模一致。若 M：$BG^{\mathsf{op}} \to$Ab 是这样的 $\mathbb{Z}G$-模，那么它作为 Ab 中的图表的余极限是余不变量阿贝尔群 M_G；而 $\mathsf{H}(BG, M)$ 是一个复形，在拟同构意义下计算群 G 以 M 为系数的同调。

例 2.4。若 A 是单纯形范畴 Δ，则图表

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow{\mathsf{C_N}} & \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \\ & \searrow^{\mathrm{H}_\Delta} & \downarrow \\ & & \mathsf{Hotab} \end{array}$$

在自然同构意义下交换，其中 $\mathsf{C_N}$ 是归一化链复形函子

$$\mathsf{C_N} : X \mapsto \left(X_0 \xleftarrow{d_0} \cdots \xleftarrow{d_0} \bigcap_{0<i\leqslant n} \ker d_i \xleftarrow{d_0} \bigcap_{0<i\leqslant n+1} \ker d_i \leftarrow \cdots \right) \quad .$$

因此，若 X 是单纯阿贝尔群，则 $\mathsf{H}(\Delta,\ X)$ 在拟同构意义下是计算 X标准同调的复形。这个结果已见于 [9, XII, 5.5], ，但我们将在例 3.21 中再次证明。注意，我们也可以使用非归一化链复形函子，因为二者逐点拟同构。

现在我们将证明，刚才引入的同调函子会将任意集合预层映射到其元素范畴的同调。

2.5. 回想一下，范畴 Δ 可以赋予 Kan–Quillen 模型结构 [28, II, 第 3 节，定理 3], ，其中弱等价是单纯弱等价，余纤维化是单态射。类似地，范畴$\mathcal{C}h_+$(Ab)可以赋予投射模型结构 [28, XII,4.12] ，其中弱等价是拟同构，余纤维化是具有投射余核的单态射。此外，函子

$$\widehat{\Delta} \xrightarrow{\mathsf{Wh}_\Delta} \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \xrightarrow{\mathsf{C_N}} \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

相对于这些模型结构，它是一个左 Quillen 函子，并且保持弱等价。

命题 2.6 (Thomason)。设 X 是小范畴 A上的一个预层。记 X 为离散单纯集合构成的图表

$$\widetilde{X} : A^{\mathsf{op}} \to \mathcal{S}et \hookrightarrow \mathcal{C}at \xrightarrow{\mathsf{N}} \widehat{\Delta}$$

其中N是单纯神经函子。于是存在一个自然同构

$$\mathsf{N} i_A(X) \simeq \varinjlim\nolimits^{\mathsf{Hot}_\Delta}_{A^{\mathsf{op}}} \widetilde{X}$$

在Hot_Δ中。

证明。这是 [31,定理 1.2]。 □

命题 2.7。对于任意小范畴 A，下图在自然同构意义下交换：

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{A} & \xrightarrow{i_A} & \mathcal{C}at & \xrightarrow{\mathsf{N}} & \mathsf{Hot}_\Delta \\ \downarrow{\scriptstyle \mathsf{Wh_A}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{C_N}\,\mathsf{Wh}_\Delta} \\ \widehat{A}^{\mathsf{ab}} & & \xrightarrow[\mathrm{H_A}]{} & & \mathsf{Hotab} \end{array} \quad . \tag{2.7.1}$$

证明。 如果 X 是 A 上的预层，我们在 Hotab 中有以下自然同构：

$$\begin{aligned} \mathsf{C_N}\,\mathsf{Wh}_\Delta\,\mathsf{N} i_A(X) &\simeq \mathsf{C_N}\,\mathsf{Wh}_\Delta \varinjlim\nolimits^{\mathsf{Hot}_\Delta}_{A^{\mathsf{op}}} \widetilde{X} \\ &\simeq \varinjlim\nolimits^{\mathsf{Hotab}}_{A^{\mathsf{op}}} \mathsf{C_N} \circ \mathsf{Wh}_\Delta \circ \widetilde{X} \end{aligned}$$

其中，第一个同构来自命题 2.6，第二个则来自左 Quillen 函子与同伦余极限可交换这一事实。最后，注意该图表

$$A^{\mathsf{op}} \xrightarrow{\widetilde{X}} \widehat{\Delta} \xrightarrow{\mathsf{Wh}_\Delta} \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \xrightarrow{\mathsf{C}_\mathrm{N}} \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

与图表 $\mathbb{Z}_A^{(X)}[0]$ 相同，它将任意对象 a（属于 A）映射为值为 $\mathbb{Z}^{(Xa)}$、集中于 0 次的链复形。于是我们得到 Hotab 中的自然同构

$$\mathsf{C}_\mathrm{N}\,\mathsf{Wh}_\Delta\,\mathsf{N}i_A(X) \simeq \varinjlim\nolimits_{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{Hotab}}(\mathbb{Z}_A^{(X)}[0])$$

由此完成证明。 □

Cor推论 2.8. 对于任意小范畴 A 及其任意对象 a （属于 A），存在一个自然同构 m

$$\mathrm{H}(A, \mathbb{Z}_A^{(a)}) \simeq \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \cdots$$

在 Hotab。

证明。 由于对于任意对象 a （属于 A），范畴 A/a 都是非球面的（1.4），这直接由命题 2.7.1 得出。□

2.9. 设 A 是一个小范畴，我们用以下符号表示

$$\mathbb{Z}_A : A^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Ab}\ , \quad a \mapsto \mathbb{Z}$$

A上的值为 $\mathbb{Z}$ 的常值阿贝尔预层，并用 H($A, \mathbb{Z}$) 表示 A 取系数于 $\mathbb{Z}_A$的同调。若 $u\colon A \to B$ 是小范畴之间的函子，则限制函子 $(u^*)^{\mathsf{ab}}\colon \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$将 $\mathbb{Z}_B$ 映至 $\mathbb{Z}_A$，并由泛性质诱导出典范态射

$$\mathrm{H}(u, \mathbb{Z}) : \mathrm{H}(A, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}(B, \mathbb{Z})$$

在 Hotab 中。图表 2.7.1 的交换性意味着，若 u 是 $\mathcal{W}_\infty$ 的一个元素，则 H($u, \mathbb{Z}$) 是 Hotab 中的一个同构。这意味着我们定义了一个典范同调函子

$$\mathrm{H}(-, \mathbb{Z}) : \mathsf{Hot} \to \mathsf{Hotab}\quad .$$

注记 2.10. 设 A 是一个小范畴，$e_{\widehat{A}}$ 是范畴 A中的终对象。由于$i_A(e_{\widehat{A}}) \simeq A$，图表 2.7.1 的交换性意味着，对于任意小范畴 A，存在一个自然同构

$$\mathrm{H}(A, \mathbb{Z}) \simeq \mathsf{C}_\mathrm{N}\,\mathbb{Z}_\Delta^{(\mathsf{N}A)}$$

在 Hotab 中。换言之，我们以一种不再赋予 Δ 突出地位的方式，重新定义了小范畴的经典同调函子。我们将在第 3 节中给出无需使用单纯形方法计算该函子的具体方式。

注记 2.11。 图表 2.7.1 的交换性可以重新表述如下：对于任意 X on A 上的预层，都存在一个典范同构

$$\mathrm{H}(A, \mathbb{Z}_A^{(X)}) \simeq \mathrm{H}(A/X, \mathbb{Z})$$

在 Hotab 中。

2.12。 设 A 是一个小范畴。若一个态射 $f\colon X \to Y$ between A 上的阿贝尔预层满足其在函子 $\mathrm{H_A}$: $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ →Hotab 下的像是一个同构，则称其为弱等价 。我们将 A 上阿贝尔预层之间的弱等价类记为$\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}}$，并记为

$$\mathsf{Hotab}_A := (\mathcal{W}^{\mathsf{ab}})^{-1}\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$$

按阿贝尔预层之间的弱等价类对 $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ 进行局部化。于是函子 $\mathrm{H_A}$ 诱导出一个函子

$$\overline{\mathrm{H_A}} : \mathsf{Hotab}_A \to \mathsf{Hotab}$$

而图表 2.7.1 的交换性意味着我们得到一个图表

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Hot}_A & \xrightarrow{\mathsf{Wh}_\mathrm{A}} & \mathsf{Hotab}_A \\ {\scriptstyle \overline{i_A}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\mathrm{H_A}}} \\ \mathsf{Hot} & \xrightarrow[\mathrm{H}(-,\mathbb{Z})]{} & \mathsf{Hotab} \end{array}$$

该图表在自然同构意义下交换。

定义 2.13. 小范畴 A是同调伪测试范畴，如果函子 H_{A} 是范畴等价。

注记 2.14. 受测试范畴这一术语的启发，前缀“伪”强调我们不对函子 H_{A}的拟逆提出任何条件。我们在 [17] 中引入了同调测试范畴和同调测试函子的概念，但本文不会涉及它们。

例 2.15. 同调伪测试范畴的典型例子是单纯形范畴 Δ。回顾一下，Dold-Kan 对应（[21, 定理 8.1], [14, 定理 1.9]）指出，归一化链复形函子 $\mathrm{C_N}:\ \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+$(阿贝尔群范畴)是范畴等价。此外，如例 2.4 所述，该函子计算同调函子 H_{Δ}，这意味着诱导的局部化范畴之间的函子也是范畴等价。

例 2.16. 本文将证明，对于每个整数 $n>0$，范畴 Θ_n 和 Θ 都是同调伪测试范畴。借助本文无需介绍的技术，我们在 [17, 第 5] 章给出了许多其他例子，包括 Δ 的单态射子范畴 Δ'，以及不带连接的立方范畴 $\square$ 。我们还利用本文介绍的材料证明，对于每个整数 $n>0$，范畴 Δ^n 、带连接的立方范畴以及自反 globular 范畴 $\mathbb{G}_r$ 都是同调伪测试范畴。

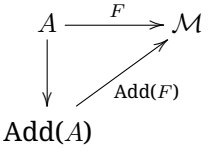
3. 积分器

Grothendieck 在 [15] 中描述了无需借助单纯形技术即可计算同调函子的显式方法，以及本节介绍的 Bousfield-Kan 公式 [9], 。虽然本文不会对积分器进行深入研究（这方面的研究见 [17]），但在第 4 节研究$\mathcal{W}_{\infty}^{\mathsf{ab}}$-非球面性时，我们不能仅仅依赖 Bousfield-Kan 公式。

3.1. 设 A 是一个小范畴，其加性包络记作 $\mathsf{Add}(A)$，它是由以下泛性质定义的小范畴：对于每个加性范畴$\mathcal{M}$（即具有有限双积和零对象的阿贝尔群范畴），存在一个自然同构

$$\underline{\mathsf{Hom}}(A,\mathcal{M}) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{add}}(\mathrm{Add}(A),\mathcal{M})$$

其中 $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{add}}$ 表示由保持有限和的函子构成的子范畴。对于任意函子 $F\colon A\to\mathcal{M}$，我们将使下图交换的函子记作 $\mathsf{Add}(F)$:



3.2. 对于任意小范畴 A，加性包络 $\mathsf{Add}(A)$ 可实现为以下对象的满子范畴
阿贝尔群的
范畴 A上的阿贝尔预层，形式为

$$\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}_A^{(a_i)} : a \mapsto \bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_A(a,a_i))}$$

其中， I 是一个有限 集，且对于 I中的每个 i， a_i 都是 A 的一个对象。给定任意加性范畴$\mathcal{M}$和任意函子 $F\colon A\to\mathcal{M}$，则 $\mathsf{Add}(F)$ 在对象 $\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}_A^{(a_i)}$ 上的取值由下式给出

$$\mathrm{Add}(F)\left(\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}_A^{(a_i)}\right)=\bigoplus_{i\in I}F(a_i) \quad .$$

命题 3.3。 对于任意小范畴 A，$\mathrm{Add}(A)$ 是 $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$的一个稠密子范畴。

证明。 我们需要证明，对于 A 上的任意阿贝尔预层 X ，典范态射

$$\varinjlim_{L\in \mathrm{Add}(A)/X}{}^{\widehat{A}^{\mathsf{ab}}}\ L \to X$$

是一个同构。证明与 {style id='1'}Set 值情形下可表预层稠密性的证明类似，此外还需使用 $\mathrm{Add}(A)/X$ 的对角态射 $(\mathbb{Z}_A^{(a)}, X) \to (\mathbb{Z}_A^{(a)} \oplus \mathbb{Z}_A^{(a)}, X)$，以验证顶点为 Y 的余锥与从 X 到 Y 的阿贝尔预层态射相对应。细节留给读者，这些内容也可参见命题 2.2.4]。□

3.4. 给定一个小范畴 A、一个余完备加性范畴 $\mathcal{M}$ 以及一个函子 $F\colon A \to \mathcal{M}$，利用命题 3.3，我们可以定义一个函子 $F_!^{\mathsf{ab}}\colon \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{M}$：对于任意定义在 A上的阿贝尔预层 X，令

$$F_!^{\mathsf{ab}}(X) = \varinjlim_{L \in \mathrm{Add}(A)/X} \mathrm{Add}(F)(L) \quad .$$

命题 3.5. 设 M 是一个余完备加性范畴，A 是一个小范畴。对于任意函子 $F : A \to M$，函子

$$F_!^{\mathsf{ab}} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{M}$$

是函子的左伴随

$$(F^*)^{\mathsf{ab}} : \mathcal{M} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$$

对 M 中的每个对象 x，定义为

$$\begin{aligned}(F^*)^{\mathsf{ab}}(x) : A^{\mathsf{op}} &\to \mathcal{M} \\ a &\mapsto \mathsf{Hom}_M(F(a), x) \quad .\end{aligned}$$

证明。对于$\mathcal{M}$ 中的任意对象 x 以及定义在 A上的任意阿贝尔预层 X，我们有以下一系列自然同构：

$$\begin{aligned}\mathsf{Hom}_M\left(F_!^{\mathsf{ab}}\, X, x\right) &\simeq \mathsf{Hom}_M\left(\varinjlim_{L \in \mathrm{Add}(A)/X}^{M} \mathrm{Add}(F)(L),\, x\right) \\ &\simeq \varprojlim_{\substack{L \in \mathrm{Add}(A)/X \\ L = \oplus_i \mathbb{Z}_A^{(a_i)}}}^{\mathsf{Ab}} \mathsf{Hom}_M\left(\bigoplus_i F(a_i),\, x\right) \\ &\simeq \varprojlim_{\substack{L \in \mathrm{Add}(A)/X \\ L = \oplus_i \mathbb{Z}_A^{(a_i)}}}^{\mathsf{Ab}} \prod_i (F^*)^{\mathsf{ab}}(x)(a_i) \\ &\simeq \varprojlim_{\substack{L \in \mathrm{Add}(A)/X \\ L = \oplus_i \mathbb{Z}_A^{(a_i)}}}^{\mathsf{Ab}} \prod_i \mathsf{Hom}_{\widehat{A}^{\mathsf{ab}}}\left(\mathbb{Z}_A^{(a_i)}, (F^*)^{\mathsf{ab}}(x)\right) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\widehat{A}^{\mathsf{ab}}}\left(\varinjlim_{L \in \mathrm{Add}(A)/X}^{\widehat{A}^{\mathsf{ab}}} L,\ (F^*)^{\mathsf{ab}}(x)\right) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\widehat{A}^{\mathsf{ab}}}\left(X, (F^*)^{\mathsf{ab}}(x)\right) \quad .\end{aligned}$$

□

推论 3.6. 设 M 是一个余完备加性范畴，A 是一个小范畴。对于任意函子$F\colon A \to M$，函子 $F_!^{\mathsf{ab}}\colon \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to M$ 都是余连续的。

命题 3.7. 限制函子

$$\underline{\mathsf{Hom}}_!(\widehat{A}^{\mathsf{ab}}, \mathcal{M}) \to \underline{\mathsf{Hom}}(A, \mathcal{M}) \ , \quad F \mapsto F \circ \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}$$

是一个范畴等价，其拟逆由函子给出

$$\underline{\mathsf{Hom}}(A, \mathcal{M}) \to \underline{\mathsf{Hom}}_!(\widehat{A}^{\mathsf{ab}}, \mathcal{M}) \ , \quad F \mapsto F_!^{\mathsf{ab}} \quad ,$$

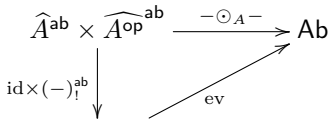
其中 $\underline{\mathsf{Hom}_!}$ 表示余连续函子构成的子范畴。

证明。根据构造，若 a是 A中的一个对象，则有自然同构 $F_!^{\mathsf{ab}}(\mathbb{Z}^{(a)}) \simeq F(a)$。此外，若 $F\colon \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{M}$ 是一个余连续函子，我们可以通过在可表对象上验证，检查得出 F 和 $(F \circ \mathsf{Wh}_{\mathrm{A}})_!^{\mathsf{ab}}$相等，这显然成立。□

3.8. 设 A 为一个小范畴。记

$$- \odot_A - : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \times \widehat{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$$

由交换图定义的双函子



,

这里我们用到了 $\widehat{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}} = \mathsf{Hom}(A,$阿贝尔群范畴$)$ 这一事实。换句话说，对于每个定义在 A 上的阿贝尔预层 X，以及每个定义在 A^{op} 上的阿贝尔预层 Y，我们都有以下恒等式:

$$X \odot_A Y = Y^{\mathsf{ab}}_!(X) \quad .$$

命题 3.9. 设 a 是小范畴 A 的一个对象，且 Y 是 A^{op} 上的阿贝尔预层。存在一个典范同构

$$\mathbb{Z}^{(a)}_A \odot_A Y \simeq Y(a)$$

在 Ab 中。

证明. 这已经包含在命题 3.7 中。 □

注记 3.10. 结合余连续性，后一命题足以说明双函子 $-\odot_A -$ 与函子的张量积一致：对于每个定义在 A 上的阿贝尔预层 X，以及每个定义在 A^{op} 上的预层 Y，存在阿贝尔群的自然同构

$$X \odot_A Y \simeq \int^{a\in A} Xa \otimes Ya \quad .$$

虽然本文本可以采用这种描述，但我们选择阐述 Grothendieck 在 [15] 中引入的形式体系。不过，我们仍将这个双函子称为函子的张量积。

命题 3.11。 设 X 是 A 上的阿贝尔预层， Y 是 A^{op} 上的阿贝尔预层。存在阿贝尔群的自然同构

$$X \odot_A Y \simeq Y \odot_{A^{\mathsf{op}}} X \quad .$$

证明。 函子 $-\odot_A -$ 关于第一个变量是余连续的，这是由推论 3.6 得出的。此外，对于任意 A 上的阿贝尔预层 X，函子

$$X \odot_A - : \widehat{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$$

是命题 3.7 给出的范畴等价与求值函子的复合态射，而这两个函子也都是余连续的。函子 $-\odot_{A^{\mathsf{op}}} -$ 的情形相同，因此我们只需验证两个自变量取可表对象时的同构。对于 A 中的任意对象 a 以及 A^{op} 中的任意对象 a'，有

$$\mathbb{Z}^{(a)}_A \odot_A \mathbb{Z}^{\binom{a'}{}}_{A^{\mathsf{op}}} \simeq \mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_{A^{\mathsf{op}}}(a,a'))}$$

and

$$\mathbb{Z}^{\binom{a'}{}}_{A^{\mathsf{op}}} \odot_{A^{\mathsf{op}}} \mathbb{Z}^{(a)}_A \simeq \mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_A(a',a))}$$

由此得证。 □

在本节余下部分，我们将说明函子的张量积与第2节中引入的同调函子之间的关系。

3.12. 回忆一下，对于任意范畴 A，范畴 $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ 是一个有足够多投射对象的阿贝尔范畴。为了描述投射对象，我们使用无限加性包络，记作 Addinf(A)，它由以下泛性质定义：对于每个加性范畴 $\mathcal{M}$，存在一个自然同构

$$\underline{\mathsf{Hom}}(A,\mathcal{M}) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{addinf}}(\mathrm{Addinf}(A),\mathcal{M})$$

其中 $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{addinf}}$ 表示由与任意直和相交换的函子构成的子范畴。它可以实现为 $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ 的全子范畴，其对象是可表对象的任意直和。

命题3.13。 设 A是一个小范畴。

(1) $\mathrm{Addinf}(A)$中的每个对象都是 $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$中的投射对象。*(2)* $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ 中的每个对象都存在一个由$\mathrm{Addinf}(A)$中的对象构成的投射分解。*(3)* $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ 中的投射对象是$\mathrm{Addinf}\ A$中对象的直缩。

证明。（1）的证明显然，因为投射对象的余积仍是投射对象。对于（2），给定 A 上的阿贝尔预层 X，令

$$L_X = \bigoplus_{a\in \mathsf{Ob}(A)} \bigoplus_{x\in Xa} \mathbb{Z}_A^{(a)}$$

并在每个直和项（a，x）上定义满态射 $\varphi\colon L_X \to X$，方法是将 $\varphi_{(a,x)}$ 定义为 Xa 中由态射 $\mathbb{Z}_A^{(a)} \xrightarrow{x} X$ 表示的元素。最后一点的证明由以下事实得出：若 X 是 $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ 中的投射对象，则态射 $\varphi\colon L_X \to X$ 有一个截面，从而将 X 展示为 L_X 的直缩。□

命题 3.14。设 X 是 A 上的阿贝尔预层，Y 是 A^{op} 上的阿贝尔预层。函子

$$X \odot_A - : \widehat{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$$
$$- \odot_A Y : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathsf{Ab}$$

二者都存在左导出函子

$$L(X \odot_A -) : \mathcal{D}_+(\widehat{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}}) \to \mathsf{Hotab}\ ,$$
$$L(- \odot_A Y) : \mathcal{D}_+(\widehat{A}^{\mathsf{ab}}) \to \mathsf{Hotab}\ ,$$

并且存在自然同构

$$L(X \odot_A -)(Y) \simeq L(- \odot_A Y)(X)$$

在 Hotab 中。

证明。考虑分别由 Addinf(A) 和 Addinf(A^{op}) 中的对象给出的两个投射分解 $M_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} X$ 和 $L_\bullet \xrightarrow{\eta} Y$。于是我们可以构造阿贝尔群的链复形 $M_\bullet \odot_A Y$、$X \odot_A L_\bullet$，以及逐项应用双函子 $\odot_A$ 得到的双复形 $M_\bullet \odot_A L_\bullet$。将复形 $M_\bullet \odot_A Y$ 和 $X \odot_A L_\bullet$ 视为分别集中在第一列或第一行的双复形时，分解 ε 和 η 给出双复形之间的态射，进而诱导出复形之间的态射。

$$\mathsf{Tot}(M_\bullet \odot_A Y) \xleftarrow{M\odot_A \eta} \mathsf{Tot}(M_\bullet \odot_A L_\bullet) \xrightarrow{\varepsilon \odot_A L} \mathsf{Tot}(X \odot_A L_\bullet) \quad .$$

We 将使用同调代数中的一个经典论证（例如参见 [32, 2.7]）来证明 th at thes这些态射都是拟同构。为此，我们只需证明这些函子

$$- \odot_A L_j\ ,\quad M_i \odot_A -\ ,\quad i,j \in \mathbb{N}$$

是正合的。由对称性（命题 3.11），只需证明对于 Addinf(A) 中的每个对象 $N = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_A^{(a_i)}$，$N \odot_A -$ 都是正合的。由于对于 B 上的每个阿贝尔预层 Y，我们有

$$\left(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_A^{(a_i)}\right) \odot_A Y = \bigoplus_{i\in I} Y(a_i) \quad ,$$

由于求值函子和直和函子都是正合的，我们可以得出结论。□

引理 3.15. 设 A 是一个小范畴。若 X 是 A上的阿贝尔预层，则存在阿贝尔群之间的自然同构

$$X \odot_A \mathbb{Z}_{A^{\mathsf{op}}} \simeq \varinjlim X \quad .$$

证明. 给定 A上的阿贝尔预层 X，我们在阿贝尔群范畴中有以下一系列自然同构:

$$\begin{aligned} X \odot_A \mathbb{Z}_{A^{\mathsf{op}}} &\simeq X \odot_A \mathbb{Z}_{A^{\mathsf{op}}}^{\left(e_{\widehat{A^{\mathsf{op}}}}\right)} \\ &\simeq X \odot_A \mathbb{Z}_{A^{\mathsf{op}}}^{\left(\varinjlim^{\widehat{A^{\mathsf{op}}}}_{a \in A^{\mathsf{op}}} a\right)} \\ &\simeq X \odot_A \varinjlim^{\widehat{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}}}_{a \in A^{\mathsf{op}}} \mathbb{Z}^{(a)}_{A^{\mathsf{op}}} \\ &\simeq \varinjlim^{\mathsf{Ab}}_{a \in A^{\mathsf{op}}} \left(X \odot_A \mathbb{Z}^{(a)}_{A^{\mathsf{op}}} \right) \\ &\simeq \varinjlim^{\mathsf{Ab}}_{a \in A^{\mathsf{op}}} X(a) \quad . \end{aligned}$$ □

推论 3.16. 设 A 是一个小范畴，且 $L_\bullet$ 是 $\widehat{\ }^{\mathsf{ab}}$ 范畴 A^{op} 中 $\mathbb{Z}_{A^{\mathsf{op}}}$ 的一个投射分解。对于 A 上的任意阿贝尔预层 X，存在一个典范自然同构

$$\mathrm{H}(A, X) \simeq X \odot_A L_\bullet$$

在 Hotab 中。

证明。 由于我们将函子 $\mathrm{H_A}: \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to$Hotab 定义为余极限函子 (2.2) 的左导出函子，因此无需再证明其他内容。□

定义 3.17. 在 A 上的积分器 是一个投射分解

$$L = \left(L_0 \xleftarrow{d_0} L_1 \xleftarrow{d_1} L_2 \xleftarrow{d_2} \cdots \right) \quad , \quad L \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_{A^{\mathsf{op}}}$$

常值阿贝尔预层 $\mathbb{Z}_{A^{\mathsf{op}}}$，其在 A^{op} 上取值为 $\mathbb{Z}$。这意味着每个 L_n 都是 A^{op} 上的投射预层，并且 ε_0: $L_0 \to \mathbb{Z}$ 是 d_0 的余核。

3.18. 如果积分器 L 的每个分量 L_n 对任意整数 $n \geqslant 0$ 都属于 Addinf(A^{op})，则称 L 为 自由积分器。根据下面的命题，这样便可以进行非常简单的计算。

命题 3.19. 若 X 是 A 上的阿贝尔预层，且 $L = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}^{(a_i)}{}_{A^{\mathsf{op}}}$ 是$\mathrm{Addinf}(A^{\mathsf{op}})$ 的一个对象，则存在自然同构

$$X \odot_A L \simeq \bigoplus_{i \in I} X(a_i)$$

在 阿贝尔群范畴 中。

证明。 我们可以结合命题 3.9，使用命题 3.11 中证明的对称性 . □

注记 3.20. 由于 $\mathcal{C}h_+(\widehat{A^{\mathsf{op}}}^{\mathsf{ab}}) = \mathrm{Hom}(A, \mathcal{C}h_+($阿贝尔群范畴$))$，小范畴 A 上的积分器 L 可以看作 Add(A^{op}) 中的一个复形，也可以看作函子 $A \to \mathcal{C}h_+($阿贝尔群范畴$)$。我们将交替使用这两种观点。

例 3.21. 取范畴 Δ 作为 A，令

$$L_\Delta = \left(\mathbb{Z}^{(\Delta_0)}_{\Delta^{\mathsf{op}}} \leftarrow \mathbb{Z}^{(\Delta_1)}_{\Delta^{\mathsf{op}}} \leftarrow \mathbb{Z}^{(\Delta_2)}_{\Delta^{\mathsf{op}}} \leftarrow \cdots \right)$$

是 Add(Δ^{op}) 中的复形，其微分由余面映射的交错和给出。对于每个整数 $n \geqslant 0$, $\mathbb{Z}^{(\Delta_n)}{}_{\Delta^{\mathsf{op}}}$ 是 Δ^{op} 上的阿贝尔预层

$$\mathbb{Z}^{(\Delta_n)}_{\Delta^{\mathsf{op}}} : \Delta_k \mapsto Z^{(\mathsf{Hom}_\Delta(\Delta_n, \Delta_k))} \quad ,$$

因此箭头的方向如此。给定任意阿贝尔单纯群 X，根据命题 3.19，复形 $X \odot (L_\Delta)_\bullet$是与 X 相关联的非归一化链复形

$$X \odot (L_\Delta)_\bullet \simeq (X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow \cdots)$$

其微分由面映射的交错和给出。我们断言，复形 L_Δ 是 Δ 上的自由积分器。证明这一点只需计算可表对象的同调，这是一个经典练习。例如，详见 [17, 例 2.5。7]。由此，我们又得到一个证明：如第 2.2 段所定义，非归一化链复形可以计算同调。

由于归一化链复形函子与非归一化链复形函子逐点拟同构，这也进一步证明了 $\mathsf{C}_{\mathrm{N}} : \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+$(阿贝尔群范畴)计算同调函子这一事实。

3.22. 任意小范畴 A 都可以配备一个自由积分器，我们称之为*Bousfield-Kan* 积分器，定义为以下复合态射

$$\ell_A : A \hookrightarrow \widehat{A} \xrightarrow{i_A} \mathcal{C}at \xrightarrow{\mathsf{N}} \widehat{\Delta} \xrightarrow{\mathsf{Wh}_\Delta} \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \xrightarrow{L_{\Delta!}^{\mathsf{ab}}} \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) \quad .$$

事实上，对于任意整数 $n \geqslant 0$，我们有

$$(\ell_A)_n = \bigoplus_{\Delta_n \xrightarrow{u} A} \mathbb{Z}^{(\varphi n)}_{A^{\mathsf{op}}} : a \mapsto \bigoplus_{\Delta_n \xrightarrow{u} A} \mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_A(\varphi n, a))}$$

这表明 ℓ_A 是一个各分量都属于 $\mathsf{Add}(A^{\mathsf{op}})$ 的复形。此外，给定 A 的任意对象 a，范畴 A/a 是非球面的，这意味着函子 $A/a \to e$ 属于$\mathcal{W}_\infty$。应用神经和函子 $L_{\Delta!}^{\mathsf{ab}}$，即可得到一个自然拟同构 ε: $\ell_A(a) \to L_{\Delta!}^{\mathsf{ab}} \mathbb{Z}^{(\mathsf{N}(e))}_{\Delta^{\mathsf{op}}}$。该态射的陪域是阿贝尔群复形

$$L_{\Delta!}^{\mathsf{ab}} \mathbb{Z}^{(\mathsf{N}(e))}_{\Delta^{\mathsf{op}}} = \left(\mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{\mathrm{id}} \cdots \right) \quad ,$$

我们用到 $\mathbb{Z}[0]$ 的拟同构来配备它，该拟同构在 0 次项上由恒等态射给出。将这些态射复合起来，我们得到一个自然拟同构 $\ell_A(a) \to \mathbb{Z}[0]$，它由增广态射 $\ell_A(a)_0 \to \mathbb{Z}$ 给出。这证明了 ℓ_A 是 A 上的自由积分器。

给定 A 上的任意阿贝尔预层 X，复形 $(\ell_A)_!^{\mathsf{ab}}(X)$ 就是 X 的单纯替代 [9] 的非归一化复形:

$$(\ell_A)_!^{\mathsf{ab}}(X) \simeq \left(\cdots \leftarrow \bigoplus_{\Delta_n \xrightarrow{u} A} Xu(n) \leftarrow \bigoplus_{\Delta_{n+1} \xrightarrow{u} A} Xu(n+1) \leftarrow \cdots \right)$$

其微分在生成元上的定义如下:

$$d\langle \Delta_{n+1} \xrightarrow{u} A, x \rangle = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n+1} (-1)^i \langle \Delta_n \xrightarrow{\delta_i} \Delta_{n+1} \xrightarrow{u} A, d_i(x) \rangle$$

其中，我们用 δ_i 表示第 i个余面映射，并用 d_i 表示其在 X 下的像。使用此积分器相当于使用 [9, XII, 5.5] 中给出的经典 Bousfield-Kan 公式。

本文无需详细研究积分器，因为我们主要（但并非仅仅）使用 Bousfield-Kan 积分器。更多细节见 [17]，其中我们给出了立方范畴 $\square$ 和球状范畴 $\mathbb{G}$ 上的积分器示例。我们还利用这一概念，为若干不满足引言中所述强怀特海德条件的范畴证明了同伦 Dold-Kan 对应。

4. 同调的非球面态射

由命题1.5不难看出，若 $u : A \to B$ 是非球面函子，则$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$限制函子$u^* : B \to A$ 对集合值预层诱导同调同构。在本节中，我们证明，只需要求 u 相对于$\mathcal{C}at$中的同调同构类是非球面的，并且该限制函子对任意阿贝尔预层也诱导同调同构。

4.1. 我们用$\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$ 表示$\mathcal{C}at$ 中诱导同调同构的函子类。更确切地说，小范畴之间的函子 $u : A \to B$ 属于$\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$，当且仅当所诱导的态射

$$\mathrm{H}(A, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{H}(u, \mathbb{Z})} \mathrm{H}(B, \mathbb{Z})$$

是Hotab中的同构。利用单纯神经函子计算范畴同调的标准方法，我们得到如下等价:

$$u \in \mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}} \iff \mathsf{C}_{\mathrm{N}} \mathbb{Z}^{(\mathsf{N}(u))}_{\Delta} \text{ is a quasi-isomorphism.}$$

命题 4.2. 类 W_∞^{ab} 是一个基本局部化子。此外，我们有嵌入 $W_\infty \subset W_\infty^{\mathsf{ab}}$，且每个非球面函子都是 W_∞^{ab}-非球面的。

证明. 这是由$\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$是局部化子 ($\mathcal{C}h_+$(阿贝尔群范畴),$\mathcal{W}_{qis}$) 所诱导的导出器的等价类这一事实推出的（见 [23, 推论 1.5.14]），其中 $\mathcal{W}_{qis}$ 是阿贝尔群的非负链复形之间的拟同构类。更多详情（法语）见 [17,附录A]。嵌入 $\mathcal{W}_\infty \subset \mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$ 可直接由上述等价看出；或者，不使用单纯描述，也可由$\mathcal{W}_\infty$ 在基本局部化子 [10]中的极小性得出。□

4.3. 设 $u\colon A \to B$ 是小范畴之间的一个函子。回顾一下，函子 $u^*\colon B \to A$ 是一个右伴随函子。特别地，它保持阿贝尔群对象，并诱导出一个我们记作

$$(u^*)^{\mathsf{ab}} : \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \quad .$$

函子 u^* 也有一个右伴随函子 $u_*\colon A \to B$；根据同样的论证，它诱导出一个函子

$$u_*^{\mathsf{ab}} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{B}^{\mathsf{ab}}$$

该函子是函子（u^*）$^{\mathsf{ab}}$ 的右伴随函子。于是，下面两个方块图在自然同构意义下交换:

(4.3.1)
$$\begin{array}{ccc} \widehat{B}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow{(u^*)^{\mathsf{ab}}} & \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \\ {\scriptstyle \mathrm{U}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{U}} \\ \widehat{B} & \xrightarrow[u^*]{} & \widehat{A} \end{array} \quad , \qquad \begin{array}{ccc} \widehat{A}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow{u_*^{\mathsf{ab}}} & \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \\ {\scriptstyle \mathrm{U}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{U}} \\ \widehat{A} & \xrightarrow[u_*]{} & \widehat{B} \end{array} \quad .$$

然而， u^* 的左伴随函子通常不保持阿贝尔群对象。但由于 $\widehat{B}^{\mathsf{ab}}$ 是一个余完备加性范畴，命题 3.5 允许将函子 $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{\mathrm{Wh_B}} \widehat{B}^{\mathsf{ab}}$ 延拓为一个余连续函子

$$(\mathrm{Wh_B} \circ u)^{\mathsf{ab}}_! : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{B}^{\mathsf{ab}}$$

我们将其简记为 $u_!^{\mathsf{ab}}$。命题 3.5 保证此函子是函子的左伴随

$$((\mathrm{Wh_B} \circ u)^*)^{\mathsf{ab}} : \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \ , \quad Y \mapsto \Big(a \mapsto \mathsf{Hom}_{\widehat{B}^{\mathsf{ab}}}(\mathbb{Z}_B^{(u(a))}, Y)\Big)$$

而后者不过是函子 $(u^*)^{\mathsf{ab}}$。图4.3.1 中各个方块的交换性意味着下面两个方块

(4.3.2)
$$\begin{array}{ccc} \widehat{B} & \xrightarrow{u^*} & \widehat{A} \\ {\scriptstyle \mathrm{Wh_B}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Wh_A}} \\ \widehat{B}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow[(u^*)^{\mathsf{ab}}]{} & \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \end{array} \quad , \qquad \begin{array}{ccc} \widehat{A} & \xrightarrow{u_!} & \widehat{B} \\ {\scriptstyle \mathrm{Wh_A}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Wh_B}} \\ \widehat{A}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow[u_!^{\mathsf{ab}}]{} & \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \end{array}$$

也在自然同构意义下交换。

4.4. 设 A 和 B 是两个小范畴，且 $u\colon A \to B$ 是一个$\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$-非球面函子。回顾命题1.5，函子

$$u/X : A/X \to B/X \ , \quad (a, u(a) \to X) \mapsto (u(a), u(a) \to X)$$

于是属于$\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$。因此，取整数系数同调后，态射

$$\mathrm{H}(u/X, \mathbb{Z}) : \mathrm{H}(A/X, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}(B/X, \mathbb{Z})$$

是 Hotab 中的一个同构。结合注 2.11 以及图4.3.2 的交换性，这意味着存在一个自然同构

$$\mathrm{H}(A, (u^*)^{\mathsf{ab}}\mathbb{Z}_B^{(X)}) \simeq \mathrm{H}(B, \mathbb{Z}_B^{(X)})$$

在 Hotab 中。换言之，$(u^*)^{\mathsf{ab}}$ 在自由阿贝尔预层的同调上诱导出一个同构。现在我们将证明，这对任意阿贝尔预层也成立。

4.5. 对于 B 的任意对象 b，我们用 $\ell_A^B : B \to \mathcal{C}h_+$(阿贝尔群范畴) 表示使下列图表成立的函子

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{\mathsf{Wh_B}} & \widehat{B}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow{(u^*)^{\mathsf{ab}}} & \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \\ & {\scriptstyle \ell_A^B} \searrow & & \swarrow {\scriptstyle (\ell_A)_!^{\mathsf{ab}}} & \\ & & \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) & & \end{array}$$

可交换，其中 ℓ_A 表示第 3.22 段中引入的 Bousfield-Kan 积分器。具体而言，对于 B中的任意对象 b，$\ell_A^B(b)$是在次数 $n \geqslant 0$ 上由下式给出的复形

$$(u^*)^{\mathsf{ab}}\mathbb{Z}_B^{(b)} \odot_A (\ell_A)_n = \bigoplus_{\Delta_n \xrightarrow{\varphi} A} \mathbb{Z}^{(\mathsf{Hom}_B(u\varphi(n),b))} \quad .$$

特别地，ℓ_A^B 是 $\mathsf{Add}(B^{\mathsf{op}})$中的一个复形。此外，我们得到等式

$$\ell_A^B(b) = (L_\Delta)_!^{\mathsf{ab}}\mathbb{Z}_\Delta^{(\mathsf{N}(A/b))} \quad .$$

因此，应用函子

$$\mathcal{C}at \xrightarrow{\mathsf{N}} \widehat{\Delta} \xrightarrow{\mathsf{Wh}_\Delta} \widehat{\Delta}^{\mathsf{ab}} \xrightarrow{(L_\Delta)_!^{\mathsf{ab}}} \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

将其作用于 u/b：$A/b \to B/b$，得到一个链复形态射$\lambda_{u,\,b}$：$\ell_A^B(b) \to \ell_B(b)$，它关于 b是自然的，因为对于 B中的任意态射 f：$b \to b'$，下方图表

$$\begin{array}{ccc} A/b & \xrightarrow{u/b} & B/b \\ {\scriptstyle A/f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle B/f} \\ A/b' & \xrightarrow[u/b']{} & B/b' \end{array}$$

给定 B上的任意阿贝尔预层 X，我们便可定义一个态射

$$\lambda_{u,X} = X \odot_B \lambda_u : X \odot_B \ell_A^B \to X \odot_B \ell_B \ ,$$

它符合以下图表：

(4.5.1)
$$\begin{array}{ccccc} \widehat{B}^{\mathsf{ab}} & & \xrightarrow{(u^*)^{\mathsf{ab}}} & & \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \\ & {\scriptstyle (\ell_B)_!^{\mathsf{ab}}} \searrow & \overset{\lambda_u}{\Longleftarrow} & \swarrow {\scriptstyle (\ell_A)_!^{\mathsf{ab}}} & \\ & & \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab}) & & \end{array}$$

其描述如下：对于任意阿贝尔预层 X on B 以及任意整数 $n \geqslant 0$，有

$$X \odot_B (\ell_A^B)_n = \bigoplus_{\Delta_n \xrightarrow{\varphi} A} X(u\varphi(n)) \ , \quad X \odot_B (\ell_B)_n = \bigoplus_{\Delta_n \xrightarrow{\varphi} B} X(\varphi(n)) \ ,$$

并且 $(\lambda_{u,\,X})_n$在生成元上的定义由公式 $(\lambda_{u,\,X})_n\langle\varphi,\ x\rangle = \langle u \circ \varphi,\ x\rangle$给出。

命题 4.6. 设 u：$A \to B$ 是小范畴之间的函子。以下条件等价：

(1) u 是 W_∞^{ab}-非球面的；*(2)* 对于 B中的任意对象 b，态射 $\lambda_{u,\,b}$ 是拟同构；
(3) 对于 B上的任意阿贝尔预层 X，态射 $\lambda_{u,\,X}$ 是拟同构；*(4)* 图表

$$\begin{array}{ccc} \widehat{B}^{\mathsf{ab}} & \xrightarrow{(u^*)^{\mathsf{ab}}} & \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \\ & {\scriptstyle \mathrm{H_B}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathrm{H_A}} & \\ & \mathrm{Hotab} & \end{array}$$

在自然同构意义下是可交换的。

此外，这些条件还蕴含以下条件

(5) 对任意态射 f *in* $\widehat{B}^{\mathsf{ab}}$，等价关系

$$f \in \mathcal{W}_B^{\mathsf{ab}} \iff (u^*)^{\mathsf{ab}} f \in \mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}} \quad .$$

证明。 蕴含关系 (4) $\Longrightarrow$ (5) 是显然的。为证明 (1) $\Longrightarrow$ (2)，回顾一下，若 u是$\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$-非球面的，则由命题1.5可知，对任意 B中的对象 b，态射 u/b 属于$\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$。根据构造，$\lambda_{u,\ b}$ 于是是拟同构。对于蕴含关系 (2) $\Longrightarrow$ (3)，回顾一下，ℓ_A^B 是 Add(B^{op}) 中的一个复形；结合假设，这意味着 λ_u：$\ell_A^B \to \ell_B$ 是 B^{op} 上的投射阿贝尔预层复形之间的拟同构。由于对 B 上的任意阿贝尔预层 X，函子 $X \odot_B -$ 是左伴随，因而右正合，所以它保持投射对象复形之间的拟同构。因此，$\lambda_{u,\ X} = X \odot_B \lambda_u$ 是拟同构。蕴含关系 (3) $\Longrightarrow$ (4) 源于 ℓ_B 是 B上的一个积分器这一事实，因此在该假设下，ℓ_A^B 也是 B上的积分器。最后，为证明 (4) $\Longrightarrow$ (1)，我们使用命题1.5，并证明对 B中的任意对象 b，范畴 A/b 都是$\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$-非球面的：这可由以下同构得到

$$\mathrm{H}(A/b, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{H}(A, \mathbb{Z}_A^{(u^*(b))}) \simeq \mathrm{H}(B, \mathbb{Z}_B^{(b)}) \simeq \mathrm{H}(B/b, \mathbb{Z})$$

在 Hotab 中，并且由 B/b 是一个$\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$-非球面范畴这一事实可知。 □

5. 强Whitehead范畴

小范畴上的阿贝尔预层的弱等价有两个自然的候选：在同调上诱导同构的态射，以及其底层集合值预层态射为弱等价的态射。本节将证明，任何使这两个类重合的测试范畴都是一个同调伪测试范畴，定义见定义 2.13。

定义 5.1. 我们称小范畴 A 是一个强*Whitehead* 范畴，如果在 $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ 中，态射的两个类$\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}}$和 $\mathrm{U}^{-1}\mathcal{W}_A$ 重合，其中 $\mathrm{U}\colon \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{A}$ 表示遗忘函子。这意味着，对于 A 上阿贝尔预层的任意态射 f，以下等价关系成立：

$$f \in \mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}} \iff \mathrm{U}(f) \in \mathcal{W}_A \quad .$$

例 5.2。 回忆一下，对于任意单纯阿贝尔群态射 $f\colon X \to Y$ 以及任意整数$n > 0$，都存在一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\mathrm{U}\,X, 0) & \xrightarrow{\pi_n(\mathrm{U}\,f)} & \pi_n(\mathrm{U}\,Y, 0) \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ \mathsf{H}_n(\Delta, \mathbb{Z}^{(X)}) & \xrightarrow[\mathsf{H}_n(f)]{} & \mathsf{H}_n(\Delta, \mathbb{Z}^{(Y)}) \end{array}$$

并且在次数 0 时也类似。这表明，f 属于$\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}}$，当且仅当 $\mathrm{U}\,f$ 在同伦群之间诱导同构。Illusie-Quillen定理 [27, VI，定理 3.3]随后使我们得以断定，Δ 是一个强 Whitehead 范畴。

命题 5.3. 设 $u\colon A \to B$ 是一个非球面函子。若 A 是一个强 *Whitehead* 范畴，则 B 也是一个强 *Whitehead* 范畴。

证明。 若 u是非球面的，则由命题 4.2 可知它也是$\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$-非球面的，因此得到以下等价关系序列

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{W}_B^{\mathsf{ab}} &\iff (u^*)^{\mathsf{ab}} f \in \mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}} && (\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}\text{-asphericity}) \\ &\iff \mathrm{U}(u^*)^{\mathsf{ab}} f \in \mathcal{W}_A && \text{（强怀特海德条件）} \\ &\iff u^*\,\mathrm{U}\,f \in \mathcal{W}_A && \text{（图4.3.1 的交换性）} \\ &\iff \mathrm{U}\,f \in \mathcal{W}_B && \text{（非球面性）} \end{aligned}$$

这表明 B 是一个强 Whitehead 范畴。 □

例 5.4。 由于 Δ 是全非球面 [24, 命题 1.6。14], 对角函子 $\Delta \to \Delta\times\Delta$是非球面函子。这意味着对于任意整数 $n > 0$，范畴 Δ^n 也是强 Whitehead 范畴。我们将在命题 6.7 中看到，存在一个非球面函子 $\Delta^n \to \Theta_n$，从而对于任意整数 $n > 0$，Θ_n 也是强 Whitehead 范畴。

5.5. 若$\mathcal{M}$是一个局部可呈示范畴，且 I 是$\mathcal{M}$中的一类态射，我们用 $l(I)$（分别用 $r(I)$）表示满足相对于 I的左（分别右）提升性质的态射类。我们回顾以下定理:

定理 *5.6*（*Crans*）。设 $(M, W_{\mathcal{M}}, Cof_{\mathcal{M}}, Fib_{\mathcal{M}})$ 是由对 (I, J) 余纤维生成的闭模型范畴。设 M' 是一个局部可呈示范畴，且 $G : M \to M'$ 是一个具有右伴随函子 D 的函子。假设 $D(l(r(GJ))) \subset W_{\mathcal{M}}$。那么 M' 具有由对 (GI, GJ) 生成的闭模型范畴结构，其弱等价是$D^{-1}(W_{\mathcal{M}})$ 的元素，纤维化是 $D^{-1}(Fib_{\mathcal{M}})$ 的元素。

证明。 参见 [13,定理 3.3]。 □

下文中，在 A 同时是强Whitehead范畴和局部测试范畴的情况下，我们将使用定理 5.6 将 Grothendieck-Cisinski 模型结构 (1.11) 从 $\widehat{A}$ 转移到范畴 $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ 。

Pro位置 5.7. 设 A 是一个小范畴，且 $i : X \hookrightarrow Y$是 A上的预层之间的单态射 .
If $L : A \to Ch_+$(阿贝尔群范畴) 是 A上的自由积分器，则态射

$$L_!^{\mathsf{ab}}(\mathbb{Z}_A^{(i)}) : L_!^{\mathsf{ab}}(\mathbb{Z}_A^{(X)}) \to L_!^{\mathsf{ab}}(\mathbb{Z}_A^{(Y)})$$

是一个余核为投射对象的单态射。

证明。 由于 L 是一个自由积分器，我们可以对任意整数 $n \geqslant 0$写出:

$$L_n = \bigoplus_{i \in I_n} \mathbb{Z}_{A^{\mathsf{op}}}^{(a_i)}$$

and, 根据可加性，我们只需证明：若 a 是 A中的一个对象，则阿贝尔群的态射 n
groups

$$\mathbb{Z}_A^{(i)} \odot \mathbb{Z}_{A^{\mathsf{op}}}^{(a)} : \mathbb{Z}_A^{(X)} \odot_A \mathbb{Z}_{A^{\mathsf{op}}}^{(a)} \to \mathbb{Z}_A^{(Y)} \odot_A \mathbb{Z}_{A^{\mathsf{op}}}^{(a)}$$

是一个余核为投射对象的单态射。但这正是自由阿贝尔群的态射

$$\mathbb{Z}^{(i_a)} : \mathbb{Z}^{(Xa)} \to \mathbb{Z}^{(Ya)}$$

这是一个单态射，其余核是集合 $Ya \setminus \operatorname{Im} i_a$ 上的自由阿贝尔群。 □

推论5.8. 设 A 是一个局部测试范畴， $j : X \to Y$是 *Grothendieck-*$\widehat{\ }$*Cisinski* 模型范畴结构中的一个平凡余纤维化， $L : A \to Ch_+(\mathsf{Ab})$ 是 A上的一个自由积分器。那么，态射 $L_!^{\mathsf{ab}}(\mathbb{Z}_A^{(j)})$ 是 $Ch_+(\mathsf{Ab})$上的投射模型结构中的一个平凡余纤维化。

证明。 由于我们已在命题 2.7 中证明，函子 $L_!^{\mathsf{ab}}\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}}$ 将 A 上预层之间的弱等价映为拟同构，因此利用上面的命题即可得出结论。□

定理 5.9. 设 A 是一个强*Whitehead*局部测试范畴。范畴 $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ 可以赋予模型范畴结构，其中弱等价为 W_A^{ab} 的元素，而纤维化为阿贝尔预层之间的态射，且其底层预层态射是$\widehat{\ }$上 *Grothendieck-Cisinski* 模型结构中的纤维化。

证明。 我们将应用定理 5.6，其中取 G为函子

$$\mathsf{Wh}_{\mathrm{A}} : \widehat{A} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \quad .$$

由于 $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ 是局部可表的，我们只需证明：若 J 是 $\widehat{A}$的一组生成平凡余纤维化，则有嵌入 $l(r(\mathbb{Z}J) \subset \mathrm{U}^{-1}\mathcal{W}_A$。设 L 是定义在 A上的自由积分器。由于 A 是一个强 Whitehead 范畴，我们有

$$\mathrm{U}^{-1}\,\mathcal{W}_A = (L_!^{\mathsf{ab}})^{-1}\mathcal{W}_{\mathrm{qis}}$$

因此，我们只需证明函子 $L_!^{\mathsf{ab}}$: $\widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to Ch_+$(阿贝尔群范畴) 将$l(r(\mathbb{Z}J))$中的元素映为拟同构。由于函子 $L_!^{\mathsf{ab}}$是左伴随，小对象论证（例如参见 [16, 推论 10.5.22]）蕴含

$$L_!^{\mathsf{ab}}(l(r(\mathbb{Z}J))) \subset l(r(L_!^{\mathsf{ab}}\mathbb{Z}(J))) \quad .$$

由于我们刚刚证明了 $L_!^{\mathsf{ab}}(\mathbb{Z}J)$ 中的元素都是 $Ch_+(\mathsf{Ab})$ 中的平凡余纤维化，并且平凡余纤维化在推出、超限复合和收缩下稳定，因此我们可以得出结论： $l(r(\mathbb{Z}J))$ 中的每个元素也都属于 $\mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}}$。□

注记 5.10。 这个模型结构中的余纤维化由函子 $\mathrm{Wh_A}$ ： $\widehat{A} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ 对单态射的像生成。特别地，每个自由阿贝尔预层都是一个余纤维对象。

命题 5.11。 设 A 是一个强 *Whitehead* 局部测试范畴， B 是一个局部测试范畴，且 u： $A \to B$ 是一个非球面函子，则：

(1) B 是一个强 *Whitehead* 范畴，并且可以赋予定理 *5.9* 中定义的模型结构；*(2)* 函子

$$(u^*)^{\mathsf{ab}} : \widehat{B}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \ , \quad u_*^{\mathsf{ab}} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{B}^{\mathsf{ab}}$$

构成定理 *5.9* 中定义的模型结构之间的 *Quillen* 等价。

证明。 我们已在命题 5.3 中证明了第一点。对于第二点，回顾一下， $\widehat{B}^{\mathsf{ab}}$ 中的余纤维化和平凡余纤维化由 Grothendieck-Cisinski 结构中 B上的余纤维化和平凡余纤维化经 $\mathrm{Wh_B}$： $\widehat{B} \to \widehat{B}^{\mathsf{ab}}$ 的像生成。为了证明 $(u^*)^{\mathsf{ab}}$ 是一个左 Quillen 函子，我们只需验证它将形如 $\mathbb{Z}^{(i)}_B$ 的态射（其中 i 是 $\widehat{B}$中的余纤维化）映为 $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ 中的余纤维化（因为我们已知它保弱等价）。这是由 $\mathrm{Wh_A}$ 和 u^* 是左 Quillen 函子这一事实，以及图4.3.1的交换性得出的。

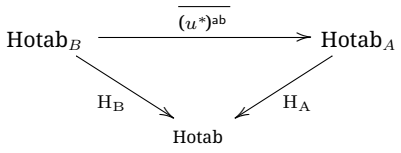
让我们证明 $((u^*)^{\mathsf{ab}},\ u_*^{\mathsf{ab}})$ 是一个 Quillen 等价。设 X 是 B 上的一个阿贝尔预层， Y 是 $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ 中的一个纤维对象。那么 $\mathrm{U}(Y)$ 是 $\widehat{A}$ 中的一个纤维对象，而 $\mathrm{U}(X)$ 是 $\widehat{B}$ 中的一个余纤维对象。利用命题 1.12，我们便可由以下等价链得出结论：

$$\begin{aligned}
& f : (u^*)^{\mathsf{ab}} X \to Y \in \mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}} \\
\iff\ & \mathrm{U}\, f : \mathrm{U}(u^*)^{\mathsf{ab}} X \to \mathrm{U}\, Y \in \mathcal{W}_A && (\ A \text{ 的强怀特海德条件}) \\
\iff\ & \mathrm{U}\, f : u^* \,\mathrm{U}\, X \to \mathrm{U}\, Y \in \mathcal{W}_A && (4.3.1 \text{ 的交换性}) \\
\iff\ & (\mathrm{U}\, f)^\sharp : \mathrm{U}\, X \to u_* \,\mathrm{U}\, Y \in \mathcal{W}_B && (\text{命题 } 1.12) \\
\iff\ & \mathrm{U}(f^\sharp) : \mathrm{U}\, X \to \mathrm{U}\, u_*^{\mathsf{ab}} Y \in \mathcal{W}_B && (4.3.1 \text{ 的交换性}) \\
\iff\ & f^\sharp : X \to u_*^{\mathsf{ab}} Y \in \mathcal{W}_B^{\mathsf{ab}} && (\ B \text{ 的强怀特海德条件})
\end{aligned}$$

其中我们使用符号 $(\text{–})^\sharp$ 表示态射的转置。 □

推论 5.12。 设 A 是强 *Whitehead* 范畴和局部测试范畴， B 是局部测试范畴，且 u： $A \to B$ 是一个非球面函子。那么，当且仅当 B 具有相同性质时， A 才是同调伪测试范畴（*2.13*）。

证明。 根据命题 5.3，由于 u 是非球面的，且 A 是强 Whitehead 范畴，因此 B 是强 Whitehead 范畴。于是，我们可以在 $\widehat{B}^{\mathsf{ab}}$ 上赋予定理 5.9 中描述的模型范畴结构。由于非球面态射是$\mathcal{W}_\infty^{\mathsf{ab}}$-非球面的，图表



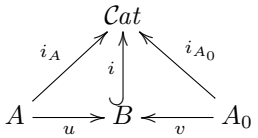
在自然同构意义下是可交换的，而命题 5.11 表明水平箭头是范畴等价。因此，我们可以得出结论：$\mathrm{H_A}$ 是范畴等价，当且仅当$\mathrm{H_B}$ 是范畴等价。□

例 5.13。 作为这一推论的直接应用，如例 5.4 中所解释的， $n > 0$ 的范畴 Δ^n 是一个同调伪测试范畴。

定理 5.14。 如果 A 是一个强*Whitehead*测试范畴，那么 A 是一个同调伪测试范畴。

证明。 设 A_0 是一个同调伪测试、强Whitehead 且严格测试范畴（例如，我们可以取单纯形范畴 Δ ）。设 B 是 $\mathcal{C}at$ 的全子范畴，其

对象是 i_A 对 A 中对象的像以及 i_{A_0} 对 A_0 中对象的像。于是我们得到以下交换图



在 $\mathcal{C}at$ 中。我们将证明 u 和 v 是非球面函子，并证明 B 是强 Whitehead 范畴和局部测试范畴，然后应用推论 5.12。由于 A_0 是局部测试范畴，根据命题 1.20，函子 i_{A_0}是非球面函子。此外， i 是满且忠实的，因此命题 1.21 蕴含i 和 v 是非球面函子。由于 A 是局部测试范畴，同样的论证表明 i_A 和 u也是非球面函子。由于 A_0 是强 Whitehead 范畴，且 v 是非球面函子，根据命题 5.3， B 是强 Whitehead 范畴，

我们来证明 B 是局部测试范畴。考虑一个小非球面范畴 C。由于 i是非球面函子，根据定理 1.23， $i^*(C)$ 是 B 上的非球面预层。然而，由于 v 是非球面函子，且A_0 是全非球面的，根据命题 1.15， B 也是全非球面的。由此，根据命题 1.14， $i^*(C)$ 是局部非球面预层。根据定理 1.23，这意味着 B是局部测试范畴，且 i 是局部检验函子。最后，由于 A、 A_0 和 B 都是强 Whitehead 范畴和局部测试范畴，并且存在一条由非球面函子构成的之字形链

$$A \xrightarrow{u} B \xleftarrow{v} A_0 \quad ,$$

利用推论 5.12，我们可以得出 A 是一个同调伪测试范畴，因为同样的结论也适用于 A_0。□

注记 5.15。 我们在命题 5.7 中证明，若 L 是小范畴 A上的自由积分器，则该函子

$$L_!^{\mathsf{ab}} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \mathcal{C}h_+(\mathsf{Ab})$$

将自由阿贝尔预层之间的单态射映为具有投射余核的单态射。此外，如第 3.22 段所述，任意小范畴都可以配备一个自由积分器。特别地，若 A 是强 Whitehead 范畴和测试范畴，我们实际上可以得到定理 5.9 中给出的 $\widehat{A}^{\mathsf{ab}}$ 上的模型结构与$\mathcal{C}h_+$(Ab)上的投射模型结构之间的 Quillen 等价。

6. Joyal 范畴 Θ是一个同调伪测试范畴

我们首先回顾 Berger [8], 利用花环积构造 Θ 的方法，该方法使得为每个整数 $n \geqslant 0$定义一个非球面函子 $\Delta^n \to \Theta_n$ 变得简单，从而可以直接应用推论 5.12。对于 Θ，我们将采用非球面性概念的一种变体，适用于目标为预层范畴的函子，并证明命题 5.3 在此情形下的类似结论。结合 Ara 和 Maltsiniotis [4], 的先前结果，这将证明 Θ 是一个强 Whitehead 范畴。

6.1. 设 A 为一个小范畴。我们将对象为有序对 $[\Delta_n;\ (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}]$ 的小范畴记作 $\Delta \wr A$，其中 n 是一个非负整数，$(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是 A 中对象构成的族，而其态射

$$[\Delta_n; (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}] \to [\Delta_m; (a'_j)_{1\leqslant j\leqslant m}]$$

是有序对 $[\varphi, \mathbf{f}]$，其中 $\varphi\colon \Delta_n \to \Delta_m$ 是 Δ 中的一个态射，并且

$$\mathbf{f} = (f_{ji} : a_i \to a'_j)_{1\leqslant i\leqslant n,\, \varphi(i-1)<j\leqslant\varphi(i)}$$

是 A 中态射构成的一个族。给定两个可复合的态射

$$[\Delta_n; (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}] \xrightarrow{[\varphi,\mathbf{f}]} [\Delta_{n'}; (a'_{i'})_{1\leqslant i'\leqslant n'}] \xrightarrow{[\varphi',\mathbf{f}']} [\Delta_{n''}; (a''_{i''})_{1\leqslant i''\leqslant n''}] \ ,$$

它们的复合态射由有序对 $[\varphi'', \mathbf{f}'']$ 定义，其中 $\varphi'' = \varphi'\varphi$ 并且

$$\mathbf{f}'' = (f''_{i''i})_{1\leqslant i\leqslant n\ ,\ \varphi''(i-1)<i''\leqslant\varphi''(i)} \ , \quad f''_{i''i} = f'_{i''i'} f_{i'i}$$

其中， i' 是唯一满足 $\varphi(i-1) < i' \leqslant \varphi(i)$ 且 $\varphi'(i'-1) < i'' \leqslant \varphi'(i')$ 的整数。

6.2. 给定小范畴之间的函子 $F\colon A \to B$，我们记

$$\Delta \wr F : \Delta \wr A \to \Delta \wr B$$

将 $\Delta \wr A$ 的对象 $[\Delta_n; (a_i)_i]$ 映到 $[\Delta_n; (F(a_i))_i]$，并将态射 $[\varphi, \mathbf{f} = (f_{ji})_{i,j}]$ 映到

$$(\Delta \wr F)[\varphi, \mathbf{f}] = [\varphi, F(\mathbf{f}) = (F(f_{ji}))_{i,j}] \quad .$$

注意，若 F 是忠实（分别地，全忠实）函子，则函子$\Delta \wr F$也具有同样性质。特别地，若 a 是 A中的一个对象，我们就得到一个忠实函子

$$I_a : \Delta \wr e \simeq \Delta \xrightarrow{\Delta \wr a} \Delta \wr A \quad ,$$

这里我们也用 a表示从终对象小范畴 e 到 A的相应函子。若 a 没有非平凡自同态，则该函子是全忠实的。此构造对 a也具有函子性，因此我们得到一个记作

$$\mu_A : \Delta \times A \to \Delta \wr A \ , \quad (\Delta_n, a) \mapsto I_a(\Delta_n) \quad .$$

6.3. 对于任意整数 $n \geqslant 0$，我们将按以下方式归纳定义的范畴记为 Θ_n y:

- $\Theta_0 = e$ 是终对象小范畴；
- $\Theta_{n+1} = \Delta \wr \Theta_n$ 对于 $n \geqslant 0$。

注意，由于 Δ_0 是 Δ的终对象，我们得到一个全忠实函子 Θ_n ，$\to \Theta_{n+1}$ ，对任意整数 $n \geqslant 0$均如此。我们用 Θ 表示图表的余极限

$$\Theta_0 \hookrightarrow \Theta_1 \hookrightarrow \Theta_2 \hookrightarrow \cdots$$

在 $\mathcal{C}at$中。

注记 6.4。 该范畴等价于 Joyal 在 [20]中引入的范畴。将 Θ 描述为范畴 $\omega\mathcal{C}at$ 的一个全子范畴，这一猜想见于 [6]，并由 [22] 和 [8]分别独立证明。

定理 6.5 (Cisinski-Maltsiniotis)。 对于任意整数 $n \geqslant 1$，范畴 Θ_n 是一个严格测试范畴。此外，范畴 Θ 也是一个严格测试范畴。

证明。参见 [12]。 □

6.6. 对于任意整数 $n \geqslant 0$，我们定义一个函子

$$m_n : \Delta^n \to \Theta_n$$

如下递归定义：

- m_0 是 $e = \Delta^0 = \Theta_0$ 上的恒等映射；
- m_{n+1} 是复合态射

$$\Delta^{n+1} = \Delta \times \Delta^n \xrightarrow{\Delta \times m_n} \Delta \times \Theta_n \xrightarrow{\mu_{\Theta_n}} \Theta_{n+1} \quad .$$

命题 6.7 (Ara-Maltsiniotis)。对于任意整数 $n \geqslant 0$,

$$m_n : \Delta^n \to \Theta_n$$

是一个非球面函子。

证明。 参见 [4,推论 5.5]。 □

推论 6.8。 对于任意整数 $n \geqslant 1$， Θ_n 是一个同调伪测试范畴。

证明。 由于 Δ 是全非球面的，对角函子 $\Delta \to \Delta^n$ 是非球面函子。因此，复合函子 $\Delta \to \Delta^n \to \Theta_n$ 也为非球面函子。此外， Δ 是一个强 Whitehead 范畴，而命题 5.3 蕴含 Θ_n 是一个强 Whitehead 范畴。由于根据命题 6.5， Θ_n 也是一个测试范畴，因此这是定理 5.14 的一个特例。□

现在我们将证明 Θ 也是一个同调伪测试范畴。为此，我们将使用非球面函子概念的一种变体。

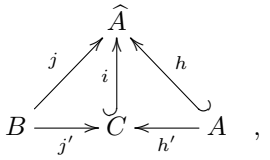
6.9. 设 $\mathcal{W} \subset \mathrm{Arr}(\mathcal{C}at)$ 是一个基本局部化子。若 $j\colon B \to A$ 是一个函子，我们便得到一个函子

$$j^* : \widehat{B} \to \widehat{A} \ , \quad X \mapsto (b \mapsto \mathsf{Hom}_{\widehat{A}}(j(b), X) \quad .$$

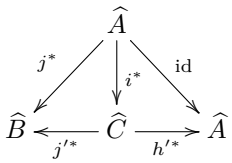
我们称 j 是 非球面 的，当且仅当满足以下条件：

(1) 对于 B中的每个对象 b，预层 $j(b)$ 在 A 上是非球面的；(2) 对于 B 中的每个对象 b，预层 $j^*j(b)$ 在 B 上是非球面的；(3) 对于 A中的每个对象 a，预层 $j^*(a)$ 在 B 上是非球面的。

6.10. 设 $j: B \to A$ 为一个函子。考虑 A 的全子范畴 C，其对象是可表预层以及 B中对象在 j 下的像。由构造可知，图表

(6.10.1)


w这里我们用 h 表示 Yoneda嵌入，该图表是交换的。这意味着图表 m

(6.10.2)


也是交换的。

Pro位置 6.11. 在图表 *6.10.1* 中，若 j 是一个非球面函子，则 j' 和 h' 是非球面的。 *l.*

证明。设 c是 C的一个对象。根据命题1.5，我们只需证明$j'^*(c)$ 和 $h'^*(c)$ 是非球面预层。由于 i 是全忠实的，存在一个自然同构$\backsim i^*i(c) \simeq c$ 于 C中，它诱导出一个自然同构

$$h'^*(c) \simeq h'^*i^*i(c) \simeq i(c) \quad .$$

我们区分两种情况：如果 c 是 A中的一个对象，那么 $i(c)$ 是一个可表预层，这意味着它是非球面的。如果 c 是某个对象 b 的 $j'(b)$，其中该对象属于 B，那么 $i(c) = j(b)$ 根据第 6.9 段的第一条条件是一个非球面函子。在这两种情况下，$h'^*(c)$ 都是 A上的非球面预层，这证明了 h' 是非球面的。

我们以同样的方式证明 j 是非球面的：我们有一个自然同构

$$j'^*(c) \simeq j'^*i^*i(c) \simeq j^*i(c)$$

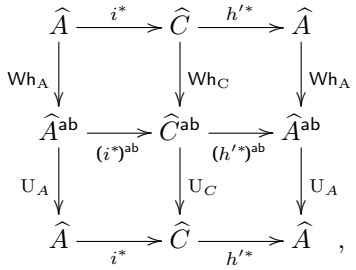
并且我们区分两种情况：要么 c 是 A中的一个对象，此时根据第 6.9 段的条件 3，$j^*i(c)$ 是非球面的；要么 c 是某个对象 b 的 $j'(b)$，其中该对象属于 B，此时根据条件 2，$j^*ij'(b) = j^*j(b)$ 是非球面的。我们已经证明 j' 也是一个非球面函子。□

Pro命题 6.12. 设 A 是一个小范畴，B 是一个强 *Whitehead* 范畴。若 $j: B \to \widehat{A}$ *is an* 是一个非球面函子，则 A 是一个强 *Whitehead* 范畴。

证明。沿用第 6.10 段的记号。由于 i^* 和 h'^* 是右伴随函子，它们保持阿贝尔群对象，并诱导出函子

$$(i^*)^{\mathsf{ab}} : \widehat{A}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{C}^{\mathsf{ab}} \ , \quad (h'^*)^{\mathsf{ab}} : \widehat{C}^{\mathsf{ab}} \to \widehat{A}^{\mathsf{ab}}$$

使得在图表



除左上角的方块外，其余方块均可交换。由于 $h'^*i^* = \mathrm{id}$，外侧方块也可交换。还要注意，我们有 $(h'^*)^{\mathsf{ab}}(i^*)^{\mathsf{ab}} = \mathrm{id}$。

根据命题 5.3，我们知道 C 是一个强 Whitehead 范畴，因为我们已证明 j' 是非球面的。此外， h' 也是一个非球面态射。于是，对于 A中的任意态射 f，由以下$\widehat{}$等价链可得结论：

$$\begin{aligned}
f \in \mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}} &\iff (h'^*)^{\mathsf{ab}}(i^*)^{\mathsf{ab}} f \in \mathcal{W}_A^{\mathsf{ab}} \\
&\iff (i^*)^{\mathsf{ab}} f \in \mathcal{W}_C^{\mathsf{ab}} && \text{（ } h'\text{的非球面性）（ } C\text{的强 Whitehead 条件）（左下方方块的交换性）（ } h'\text{的非球面性）} \\
&\iff \mathrm{U}_C (i^*)^{\mathsf{ab}} f \in \mathcal{W}_C \\
&\iff i^* \mathrm{U}_A f \in \mathcal{W}_C \\
&\iff h'^* i^* \mathrm{U}_A f \in \mathcal{W}_A \\
&\iff \mathrm{U}_A(f) \in \mathcal{W}_A \quad .
\end{aligned}$$

□

现在我们将证明， Θ 是一个强 Whitehead 范畴。为此，我们只需指出存在一个非球面函子 $\Delta \to \Theta$，并参阅文献以了解其明确描述，因为我们的目的仅仅是应用命题 6.12。

6.13. 记 $\omega\mathcal{C}at$ 为严格 ω-范畴及严格 ω-函子的范畴。存在一个嵌入 $\Theta \hookrightarrow \omega\mathcal{C}at$ （见 [22], [7]），由此可定义一个称为胞腔神经的全忠实函子

$$\mathsf{N}_\Theta : \omega\mathcal{C}at \to \widehat{\Theta} \quad .$$

此外，Street 在 [30] 中引入了一个函子$\mathcal{O}$： $\Delta \to \omega\mathcal{C}at$，它诱导出一个函子

$$\mathsf{N} : \omega\mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$$

称为*Street* 神经。在 [4], 中，Ara 和 Maltsiniotis 证明这两个神经函子等价，也就是说，这个方块

$$\begin{array}{ccc}
\omega\mathcal{C}at & \xrightarrow{\mathsf{N}_\Theta} & \widehat{\Theta} \\
{\scriptstyle \mathsf{N}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_\Theta} \\
\widehat{\Delta} & \xrightarrow[i_\Delta]{\sim} & \mathrm{Hot}
\end{array}$$

在自然同构意义下是交换的。他们证明中的一个步骤如下：

定理 6.14 (Ara-Maltsiniotis)。 函子

$$j : \Delta \xrightarrow{\mathcal{O}} \omega\mathcal{C}at \xrightarrow{N_\Theta} \widehat{\Theta}$$

按照第 *6.9* 段的定义，是一个非球面函子。

证明。 参见 [4,定理 5.8]。 □

Theorem 6.15. 范畴 Θ 是强*Whitehead*范畴，也是同调伪测试范畴。

Proof. 根据命题 6.12， j 的非球面性意味着 Θ 是一个强Whitehead范畴 y. Sinc。由于它也是一个测试范畴，我们可以由定理 5.14 得出结论。 □

参考文献

1. Dimitri Ara, 《Joyal 范畴的群胚类比》 $\widetilde{\Theta}$, Applied Categorical Structures **20** (2012), no. 6, 603–649. 2., 《高阶拟范畴与高阶 Rezk 空间》, Journal of K-Theory **14** (2014), no. 3, 701–749. 3. Dimitri Ara、Denis-Charles Cisinski 和 Ieke Moerdijk, 《树枝范畴是一个测试范畴》, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **167** (2019), no. 1, 107–121. 4. Dimitri Ara 和 Georges Maltsiniotis, 《 n范畴神经的比较》, Algebraic & Geometric Topology **22** (2022), no. 6, 2867–2914. 5. M. A. Batanin, 《幺半群广群范畴作为弱 n范畴理论的自然环境》, Advances in Mathematics **136** (1998), no. 1, 39–103. 6. Michael Batanin 和 Ross Street, 《树的集合的泛性质》, Journal of Pure and Applied Algebra **154** (2000), no. 1, 3–13. 7. Clemens Berger, 《高阶范畴的胞腔神经》, Advances in Mathematics **169** (2002), no. 1, 118–175. 8., 《单纯形范畴的迭代花环积与迭代环空间》, Advances in Mathematics **213** (2007), no. 1, 230–270.

9. Aldridge Knight Bousfield 和 Daniel Marinus Kan，《同伦极限、完备化与局部化》，《数学讲义》第304卷，施普林格科学与商业媒体，1972年。10. Denis-Charles Cisinski，《最小基本局部化子》，《范畴拓扑与微分几何笔记》45 (2004), no. 2, 109–140。11.，《作为同伦类型模型的预层》，《星号》第308卷，法国数学学会，2006年。12. Denis-Charles Cisinski 和 Georges Maltsiniotis，《Joyal范畴是一个测试范畴》，Journal of Pure and Applied Algebra 215 (2011), no. 5, 962–982。13. Sjoerd E. Crans，《层的Quillen闭模型结构》，Journal of Pure and Applied Algebra 101 (1995), 35–57。14. Albrecht Dold，《对称积的同调及其他复形函子》，《数学年刊》68 (1958), no. 1, 54–80。15. Alexandre Grothendieck，《追寻堆栈》。第一卷。Georges Maltsiniotis 编，《数学文献》第20卷，法国数学学会，2022年；第二卷将收入《数学文献》出版；第五至第七章请参阅1983年的原始手稿。16. P.S. Hirschhorn，《模型范畴及其局部化》，《数学调查与专著》，美国数学学会，2003年。17. Léo Hubert，《Dold-Kan同伦对应》，博士论文，艾克斯-马赛大学，2025年。18. Luc Illusie，《余切复形与变形 I、II》，《数学讲义》第239卷和第283卷，施普林格，1971/1972年。19. J. F. Jardine，《范畴同伦论》，Homology, Homotopy and Applications 8 (2006), no. 1, 71–144。20. André Joyal，《圆盘、对偶性与 θ范畴》，1997年。21. Daniel M Kan，《涉及css复形的函子》，美国数学学会会刊87 (1958), no. 2, 330–346。22. Mihaly Makkai 和 Marek Zawadowski，《简单 ω范畴与圆盘的对偶性》，Theory and Applications of Categories 8 (2001), 114–203。23. Georges Maltsiniotis，《导出子理论导论：据Grothendieck》，2001年。24.，《Grothendieck同伦论》，《星号》第301卷，法国数学学会，2005年。25.，《带联结的立方范畴是严格测试范畴》，Homology, Homotopy and Applications 11 (2009), no. 2, 309–326。26. Teimuraz Pirashvili，《函子同调导论》，《有理表示、Steenrod代数与函子同调》，法国数学学会，2003年，第1–26页。27. Daniel G Quillen，《高阶代数K理论：I》，《高阶K理论》（H. Bass 编），施普林格，1973年，第85–147页。28.，《同伦代数》，《数学讲义》第43卷，施普林格，2006年。29. Charles Rezk，《弱 n 范畴的笛卡尔表示》，Geometry & Topology 14 (2010), no. 1, 521–571。30. Ross Street，《定向单纯形的代数》，Journal of Pure and Applied Algebra 49 (1987), no. 3, 283–335。31. R. W. Thomason，《小范畴范畴中的同伦余极限》，Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 85 (1979), no. 1, 91–109。32. Charles A. Weibel，《同调代数导论》，《剑桥高等数学研究》第38卷，剑桥大学出版社，1994年。

Léo Hubert，艾克斯-马赛大学，法国国家科学研究中心，I2M，马赛，法国电子邮件：leo.hubert.math@mailo.com网址：
https://leohubert.pages.math.cnrs.fr