arXiv:2602.09698v1 [math.MG] 10 Feb 2026

关于广义球和根轴面的幂（在$\mathbf{H}^{n*}$中）

Áron Vil´agi 和 Jen´o Szirmai

代数与几何系，数学研究所，布达佩斯技术与经济大学，
M¨uegyetem rkp. 3.，H-1111 布达佩斯，匈牙利
szirmai@math.bme.hu

2026

摘要

本文提出了一个统一理论，用于研究 n维双曲空间$\mathbf{H}^n$中点关于广义球（球面、极限球和超球面）的幂。通过推广经典割线定理，我们推导出了一个关于超球面的新公式，并证明任意两个非同心广义球的根轴曲面都是一个超平面。这些结果为构造幂图和研究超球堆积提供了工具。

1 引言

关于点相对于圆的点幂这一概念，最初由雅各布·施泰纳在 1826 [8], 提出，是经典欧几里得几何的基石之一。它反映了给定点相对于给定

*2010年数学主题分类：51M10,51M15, 52A20, 52C17, 52C22, 52B15。关键词和短语：双曲几何、点幂、根轴、超球堆积、堆积密度。

圆的位置关系。虽然这一概念在欧几里得空间$\mathbf{E}^n$中已得到充分理解，并且在球面几何$\mathbf{S}^n$中也有类似概念，但将其推广到双曲空间$\mathbf{H}^n$仍面临独特的挑战，并涉及深刻的几何结构。在 n维双曲空间中，“圆和球面的族”比欧几里得几何中的更加丰富。除了经典球面之外，我们还必须考虑广义球面：极限球面（与平行直线束正交的曲面）和超球面（与超平面保持恒定距离的曲面）。尽管文献中广泛讨论了经典双曲球面的几何性质，但超球面的性质——尤其是关于点幂及相关关联定理的性质——受到的关注相对较少，尽管它们在几何学中的重要性日益增加。本文的主要目标是在$\mathbf{H}^n$中建立关于广义球面点幂的统一理论，重点研究长期被忽视的超循环/超球面情形。

我们的主要贡献如下：

1. 与球面和极限球面不同，超球面由两个彼此分离的分支组成。我们提出并证明了双曲圆与超球面分支的点幂定理（定理4.2）。这是对经典定理的一项非平凡推广：该定理使用与超球面两个分支均相交的割线，得出了一个优美的关系，其中同时涉及双曲正切（tanh）和双曲余切（coth）函数。利用该定理，我们可以定义任意一点相对于给定超球面分支的点幂。

2. 我们证明，任意两个非同心广义球（无论它们是球面、极限球面还是超球面）的根轴面始终是$\mathbf{H}^n$ 中的一个双曲超平面（引理6.3）。这一结果是构造双曲空间中的幂图（狄利克雷–沃罗诺伊型胞元）的基础（见 [9, 11]）。

这项研究的动机也源于球堆积与覆盖理论（见 [6]）。近年来，确定$\mathbf{H}^n$ 中超球面堆积的上界密度已成为研究的核心课题 [10, 11]。为处理这些复杂的排列，人们常采用分解方法（例如，将空间划分为截断单形）。此类分解可以利用超球面的根轴曲面构造。

我们方法的一大亮点在于其方法论。我们不依赖冗长的解析计算或繁琐的坐标推导，而是采用综合几何推理。通过利用庞加莱´球模型的性质

和几何反演，我们给出了优雅且直观的证明，彰显了双曲几何内在的美。

论文结构。第2节和第3节回顾了必要的欧几里得预备知识，以及割线定理与反演之间的联系。第4节介绍了关于$\mathbf{H}^n$中点幂的主要结果，包括关于超循环分支的新定理。第5节讨论双曲反演的性质；在第6节中，我们证明根轴曲面确实是超平面。最后，我们简要讨论这些结果对$\mathbf{H}^n$中非全等超球堆积的意义。

2 预备知识

2.1 欧几里得情形

在欧几里得平面中，点 P 关于圆 $\mathcal{C}^E$ 的幂定义为：该圆的圆心为 O，半径为 r。

$$\mathcal{P}(P) := d^E(P, O)^2 - r^2,$$

其中， $d^E(P,\ O)$表示 P与 O之间的欧几里得距离。雅各布·施泰纳于 [8], 提出了这一经典定义，它刻画了 P相对于 $\mathcal{C}^E$的位置关系。

定理2.1（$\mathbf{E}^2$中的点幂定理）。设一条经过点 P的直线与圆 $\mathcal{C}^E$ 交于点 A 和 B。那么，无论选择哪条直线，

$$d^E(P, A) \cdot d^E(P, B) = \mathcal{P}(P).$$

如果经过 P 的直线与圆 $\mathcal{C}^E$ 在点 T处相切，那么

$$d^E(P, T)^2 = d^E(P, A) \cdot d^E(P, B).$$

该定理在高维中也有自然的类似形式：若 P 是一个点，$\mathcal{S}^E$ 是$\mathbf{E}^n$中的一个 n 维球面，则 P关于 $\mathcal{S}^E$ 的幂可用相同方式表示，且经过 P 的割线段乘积为常数。

注。 点幂定理可以看作两个经典结果的统一：当 P位于圆内或圆上时，它就是相交弦定理；当 P位于圆外时，它就是相交割线定理（这两个定理都见于欧几里得的《几何原本》）。

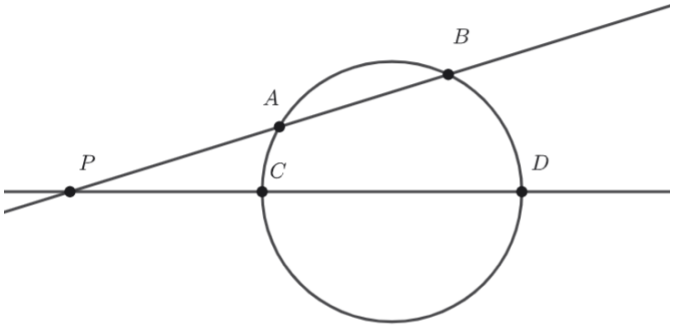


图 1：点幂定理

2.2 与反演的关系

点幂定理与反演之间的联系给出了一个简短的证明：设 $\mathcal{P}(P) := d^E(P,\ C) \cdot d^E(P,\ D)$，其中 CD 是直线 PO 截圆 $\mathcal{C}^E$ 所得的直径，圆心为 O。若 P 位于 $\mathcal{C}^E$外部，则以 P 为圆心、$\sqrt{\mathcal{P}(P)}$为半径的圆的反演会保持线段 CD 的泰勒斯圆（即 $\mathcal{C}^E$）不变，因为反演会将圆（不经过反演中心）映射为圆。因此，对于每一条割线，乘积 $d^E(P,\ A) \cdot d^E(P,\ B)$都是常数（且等于点 P 关于 $\mathcal{C}^E$的幂），因为例如，在此反演下，A 的逆像是 B。

□

如果 P 位于圆 $\mathcal{C}^E$内部，则可通过负反演给出与上述证明完全相同的证明（在这种情况下，一个点及其像位于反演中心的两侧）。该证明可通过相对于 n维球面的反演推广到高维。

2.3 球面情形

球面几何中也有类似的结论。设 $\mathcal{C}^S$ 是单位球面$\mathbf{S}^2$ 上的一个圆，半径为 r，且 P 是一个不与 $\mathcal{C}^S$上任何点互为对跖点的点。

定理 2.2（$\mathbf{S}^2$上的点幂定理）。 过点P作一条大圆，与圆 $\mathcal{C}^S$ 交于点 A 和 B。则无论如何选择这条直线，

$$\tan\left(\frac{d^S(P,A)}{2}\right)\cdot\tan\left(\frac{d^S(P,B)}{2}\right)$$

如果大圆与 $\mathcal{C}^S$ 在 T点相切，那么

$$\tan^2\left(\frac{d^S(P,T)}{2}\right)=\tan\left(\frac{d^S(P,A)}{2}\right)\cdot\tan\left(\frac{d^S(P,B)}{2}\right).$$

这建立了点幂定理的球面类比。最早探讨球面上这种关系的著作可追溯至18世纪末（见 [5]）。此后，人们提出了许多关于该定理的新证明，它也被视为球面三角学中的基本关系之一。

3 辅助引理

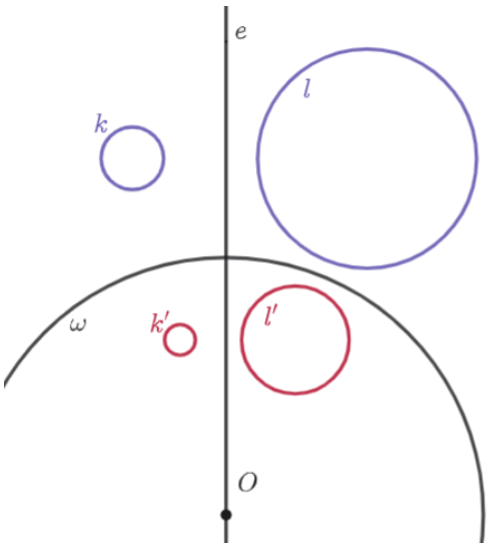
本节介绍两个欧几里得引理，它们将在全文中作为基本工具。

定义 3.1 欧几里得平面中两个圆的**根轴** 是到两个圆的点幂相等的点的轨迹。（对于两个 n维球面，此定义可扩展到 n 维。）

这一名称和定义由 Louis Gaultier 于1813年在 [4] 中给出。众所周知，欧几里得平面中两个非同心圆的根轴是一条直线（在高维中则为超平面）。

引理 3.1 对以 k 和 l的根轴上的一点为圆心的圆进行反演，将圆 k 和 l 反演为 k' 和 l' 的逆像。则 k和 l 的根轴与 k' 和 l'的根轴重合。

图 2：引理 3.1 示意图



证明： 设 k 和 l 为圆，e 表示它们的根轴，O 为直线 e上的一点。设 ω 为圆心是 O 、半径为 $r \in \mathbb{R}^+$的反演圆。根据定义，O 位于 k' 和 l'的根轴上。

用直线 f连接 k 和 l 的圆心。这条直线垂直于圆k 和 l。 f' （ f 关于 ω的逆像）是一个经过 O 的开圆，与 k' 和 l'正交，且其圆心位于 e 上（这是反演的性质所致）。由于正交性， f' 的圆心位于 k' 和l'的根轴上。因此，k' 和 l' 的根轴是连接 f' 和 O圆心的直线，也就是直线 e。

□

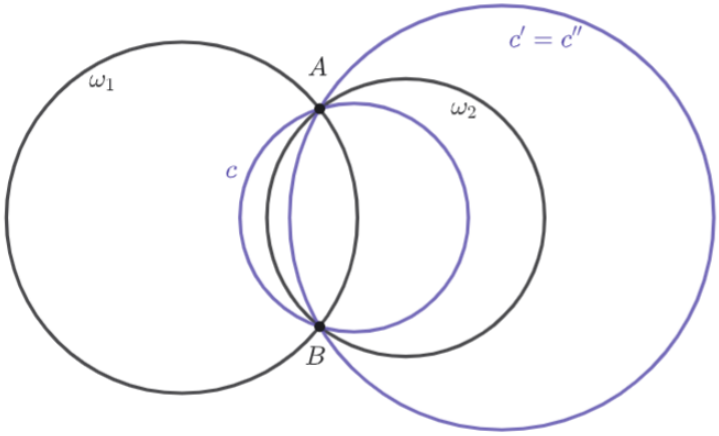
注。 该结论对于球面和根超平面在 n 维空间中也成立。由于反演在$\mathbf{E}^n$ 空间中定义良好，并保留其所有重要性质（见 [7]第 2 章），因此，当 k、 l、k'、 l'、 f' 和ω 为（n维）球面，而 e 和 f 为超平面时，证明仍然成立。因此，我们得到以下引理:

引理3.2 关于以 k 和 l的根轴为圆心的 n球面，反演 n维球面 k 和 l 。设 k' 和 l' 为它们的逆像。则 k 和 l 的根轴与 k'和 l'的根轴重合。

引理 3.3 设 ω_1 和 ω_2 是两个在 A和 B两点正交相交的圆。设 c 是一个经过 A和 B的圆。令 c' 和 c'' 分别表示 c关于 ω_1 和 ω_2的逆像。则圆 c' 和 c'' 重合。

证明： 该引理直接由反演的共形性得出。

图 3：引理 3.3 的示意图



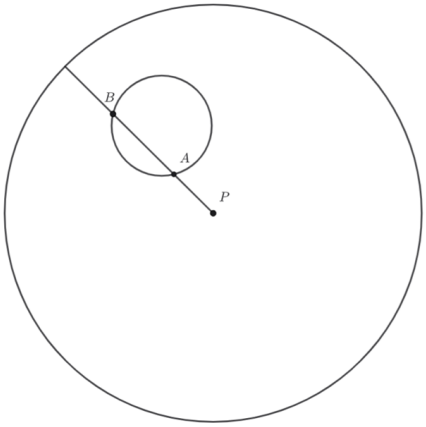
4 双曲几何中的点幂概念

4.1 双曲几何中的点幂定理

定理 4.1（双曲平面 $\mathbf{H}^2$ 中圆的点幂定理）。 设一条经过给定点 P 的直线与双曲平面中的圆 $\mathcal{C}^H$ 相交于 A 和 B 。那么，对于每一条与 $\mathcal{C}^H$ 相交的直线，以下乘积均为常数：

$$\tanh\left(\frac{d^H(P,A)}{2}\right)\cdot\tanh\left(\frac{d^H(P,B)}{2}\right).$$

图 4：庞加莱圆盘模型中的双曲割线定理



证明： 证明使用双曲平面的庞加莱圆盘模型。只需考察 P 位于模型中心而 $\mathcal{C}^H$ 任意的情形，因为通过适当的等距变换，任何其他情形都可映射到这一情形。将点 P 放在模型中心尤其有用，因为经过圆盘模型中心的（欧几里得）直线对应于双曲平面中的直线。此外，如果模型中一点到中心的欧几里得距离为 r，那么它在双曲平面中的双曲距离为 $2\,\mathrm{artanh}\, r$。

当 P位于模型中心时，可得割线段的欧几里得长度为 $d^E(P,\ A) = \tanh\left(\frac{d^H(P,A)}{2}\right)$和 $d^E(P,\ B) = \tanh\left(\frac{d^H(P,B)}{2}\right)$。

由于割线定理在欧几里得平面中成立，且双曲平面中的圆在模型中表示为圆，乘积

$$\tanh\left(\frac{d^H(P,A)}{2}\right)\cdot\tanh\left(\frac{d^H(P,B)}{2}\right)$$

对于每条与 $\mathcal{C}^H$相交的直线，都是常数。 □

如果 P位于圆 $\mathcal{C}^H$外部，同理可得：如果经过P的直线在点 T处与 $\mathcal{C}^H$ 相切，则

$$\tanh\left(\frac{d^H(P,A)}{2}\right)\cdot\tanh\left(\frac{d^H(P,B)}{2}\right) = \tanh^2\left(\frac{d^H(P,T)}{2}\right).$$

同一定理也适用于极限圆。由于极限圆在庞加莱´圆盘中表现为与边界圆相切的圆，其证明与上文给出的证明完全相同。如果将 tanh(∞) 视为 1，则对于与极限圆“在无穷远处”相交的割线段，这一关系仍然成立。

注。 这些陈述对 n维球和极限球同样成立。若使用 n维Poincar´e球模型（关于 n维模型，见 [2]），则证明与平面情形完全相同，因为割线定理在 n维欧几里得空间中成立。

定义4.1 双曲平面中一点 P关于圆或极限圆的幂 由如下乘积定义：

$$\tanh\left(\frac{d^H(P,A)}{2}\right)\cdot\tanh\left(\frac{d^H(P,B)}{2}\right).$$

关于 n维球面或极限球面的幂以同样方式定义。

4.2 关于等距曲线和超球面的幂

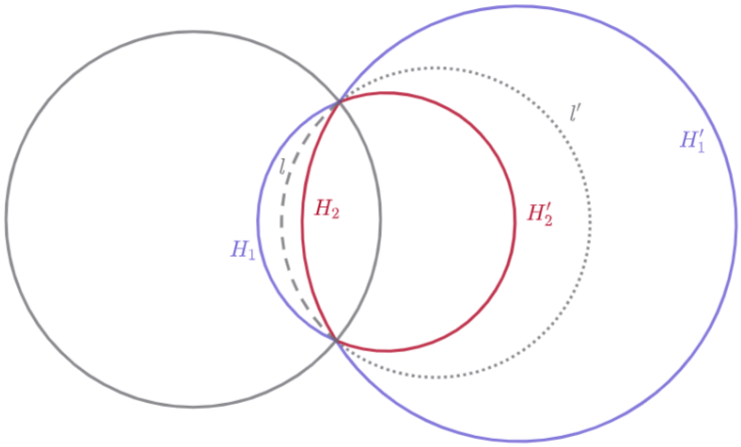
由于Poincar´e圆盘模型中的等距曲线是不垂直于边界圆的圆弧（或线段），容易看出，若能用割线与该分支相交两次，则双曲点幂定理可以推广到超循环的一个分支。（这可以用与定理 4.1类似的方法证明。）然而，从给定点 P出发，一条直线只有在该分支比另一分支更靠近 P时，才能与超循环的一个分支相交两次。[1]。此外，对任意一点和任意超循环，都可以作一条割线，使其与该超循环相交于两个不同的分支。在这种情形下，双曲点幂定理对割线段的长度不再成立。为解决这些困难，我们引入双曲点幂定理的一个推广到超循环分支的版本。为构造该定理，我们将考察Poincar´e圆盘模型的一个有趣性质：

引理4.1 设 H_1 与 H_2 为双曲平面中一条超循环的两个分支。在Poincar´e圆盘模型中，表示 H_1的圆弧关于边界圆的反演补全了表示 H_2的圆弧，

[1]除非 P 位于基线上。在这种情况下，如果割线本身就是基线，则两条分支都可以在各自的无穷远点处被相交两次

并且表示 H_2 的弧关于边界圆的反演补全了表示 H_1的弧。

图 5：引理4.1 示意图



证明：由于在庞加莱圆盘模型中，表示直线的圆弧反演对应于反射，根据超循环的定义，相对于基线弧 l 对表示 H_1 的弧进行反演，得到表示 H_2的弧。此外，模型中的基线弧 l 与模型的边界圆正交；因此，根据引理 3.3，表示 H_1 和 H_2 的弧所在的完整圆，互为关于边界圆的反演像。由于对应于 H_1 和 H_2 的弧位于边界圆内，它们关于边界圆的反像位于模型外部，从而将彼此的弧补全为完整圆。

□

该引理自然推广到 n维庞加莱球模型，其中 H_1和 H_2 是 n维超球面，因为它们在模型中表现为 n维球冠。证明与上述证明类似，因为引理 3.3 对高维球面也成立。

定理4.2（关于超循环分支的点幂定理）。 设H 是双曲平面中的一个超循环，其分支为 H_1 和 H_2。设 P 是双曲平面中的一个点。

（i）同一分支上的割线：如果一条经过 P 的双曲直线与分支 H_1 相交于 A 和 B （如果这是可能的），那么乘积

$$\tanh\left(\frac{d^H(P,A)}{2}\right)\cdot\tanh\left(\frac{d^H(P,B)}{2}\right)$$

是常数，与经过P的割线的选择无关。

(ii) 不同分支上的割线：若一条经过 P 的双曲直线与分支 H_1 交于 A，并与对侧分支 H_2 交于 B，则乘积

$$\tanh\left(\frac{d^H(P,A)}{2}\right)\cdot\coth\left(\frac{d^H(P,B)}{2}\right)$$

是常数，与割线的选择无关。此外，若经过 P的割线与 H_1 相交于两点，则此乘积等于情形*(i)*中的乘积。

注。等价地，由于 $\coth\left(\frac{PB}{2}\right)=\tanh\left(\frac{PB+i\pi}{2}\right)$，为了在公式中保留 tanh，也可以写成：

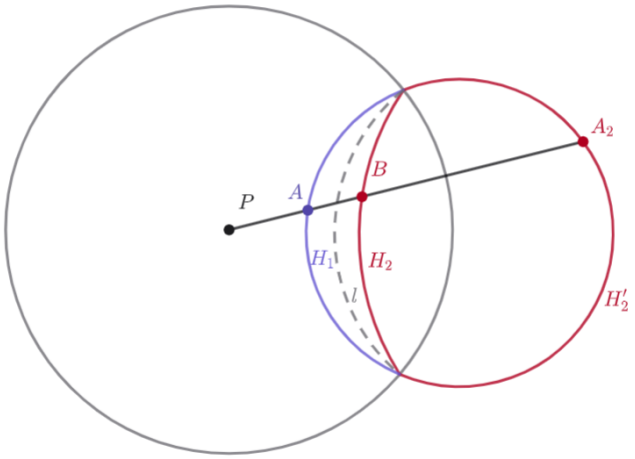
$$\tanh\left(\frac{d^H(PA)}{2}\right)\cdot\tanh\left(\frac{d^H(PB)+i\pi}{2}\right).$$

证明： 将点 P 置于庞加莱圆盘模型的中心，并考虑表示 H_1的弧所对应的完整圆。令从 P 经过 A 作出的直线与该圆在模型的欧几里得平面上交于另一点 A_2 。根据引理4.1，在模型外补全表示 H_1 的弧的那段弧，是表示 H_2 的弧关于边界圆（即单位圆）的反演像。由于 $\coth\ x$ 和 $\tanh\ x$ 互为倒数，当 B 位于 H_2 上时，$\coth(d^H(P,B)/2)$对应于模型的欧几里得平面中的距离 $d^E(P,A_2)$（见图6）。否则， A_2 与 B重合。由于点幂定理在欧几里得平面中成立，命题得证。

□

该定理同样适用于 n 维超球面的分支。证明与上述证明相同，因为引理4.1 在高维中同样成立。

图6：定理4.2的证明示意图



基于上述定理，我们可以为超循环分支中的幂这一概念提供一个更一般的定义：

定义4.2 设 P 为双曲平面上的一点， H 为一条具有分支 H_1 和 H_2的超循环。任意作一条经过 P 的割线，使其分别与分支 H_1 和 H_2 交于点 A 和 B（这样的割线总是存在）。点的幂 P 相对于 H_1 由以下乘积确定：

$$\tanh\left(\frac{d^H(P,A)}{2}\right)\cdot\coth\left(\frac{d^H(P,B)}{2}\right).$$

高维超球面各分支的幂由相同的表达式定义。

注。 根据此定义，给定点 P 相对于给定超循环的两个分支的幂互为倒数。

注。 根据上述内容，很容易看出，若 P 位于超循环的基线上，则它相对于两个分支的幂均为 1。若 P 位于正在考察幂的那个分支上，则幂为 0。若 P 位于另一个分支上，则幂可视为 ∞，因为双曲余切函数在 0 处的右极限为无穷大。按照证明过程，这也有一个很好的几何表示。若表示 H_2 的弧经过庞加莱圆盘的中心，则表示 H_1 的弧会呈现为一条直线段。

5 常曲率空间中的反演

定义 5.1（球面几何中的反演）点 $P \in \mathbf{S}^2$关于圆 $\mathcal{C}^S$（圆心为 O、半径为 r）的反演点是点 $P' \in \mathbf{S}^2$，满足：

$$\tan\left(\frac{d^S(O,P)}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{d^S(O,P')}{2}\right) = \tan^2\left(\frac{r}{2}\right)$$

（其中 $d^S(O,\ P')$ 是沿 P 方向测量的。）

这个定义与欧几里得平面中的反演定义相似，其定义方程为 $d^E(O,\ P) \cdot d^E(O,\ P') = r^2$。欧几里得反演与球面反演具有所有最重要的性质（见 [3]）。我们将更详细地讨论双曲平面中的反演，因为与欧几里得情形和球面情形相比，这种情形鲜为人知。

定义 5.2（双曲平面中的反演）点 $P \in \mathbf{H}^2$ 关于以 O 为中心、半径为 r 的圆 $\mathcal{C}^H$ 的反点，是满足以下条件的点 $P' \in \mathbf{H}^2$：

$$\tanh\left(\frac{d^H(O,P)}{2}\right) \cdot \tanh\left(\frac{d^H(O,P')}{2}\right) = \tanh^2\left(\frac{r}{2}\right)$$

（其中 P' 位于从 O 出发经过 P 的射线上。）

该变换有定义域，因为 tanh 在正值上的值域并非所有正数，而仅为区间 (0，1)。因此，距离 O小于或等于 $2\operatorname{artanh}\left(\tanh^2\left(\frac{r}{2}\right)\right)$ 的点，在该变换下没有实像。所以，该变换在以 O 为圆心、半径为 $2\operatorname{artanh}\left(\tanh^2\left(\frac{r}{2}\right)\right)$ 的闭圆盘上无定义。（这可以通过代数方法验证。）

5.3 变换的性质

双曲平面中的反演性质与欧几里得反演的性质非常相似：

(1.) 定义域与陪域相同，且它们之间的映射是双射。

（2.）定义域内的圆映射为另一个圆。

（3.）直线映射为与定义域的边界圆正交的弧。（反之亦然。）（4.）超循环映射为与定义域的边界圆相交的弧（非正交）。（反之亦然。）（5.）保角。

证明：

(1.) 由乘法交换律可知。(2.) 使用庞加莱圆盘模型。同样，只需考察O 是模型中心的情形。当 O 是中心点时，该变换可表示为关于以 O为圆心、半径为 $\tanh\left(\frac{r}{2}\right)$ 的欧氏圆的反演（可通过代数方法验证）。由于不经过中心的圆在反演下映射为圆，且模型中的欧氏圆与双曲圆相对应（反之亦然），因此结论成立。(3.) 根据欧几里得反演的性质，证明方法与(2.)类似。(4.) 根据欧几里得反演的性质，证明方法与(2.)类似。(5.) 由庞加莱模型和欧几里得反演的共形性可知。

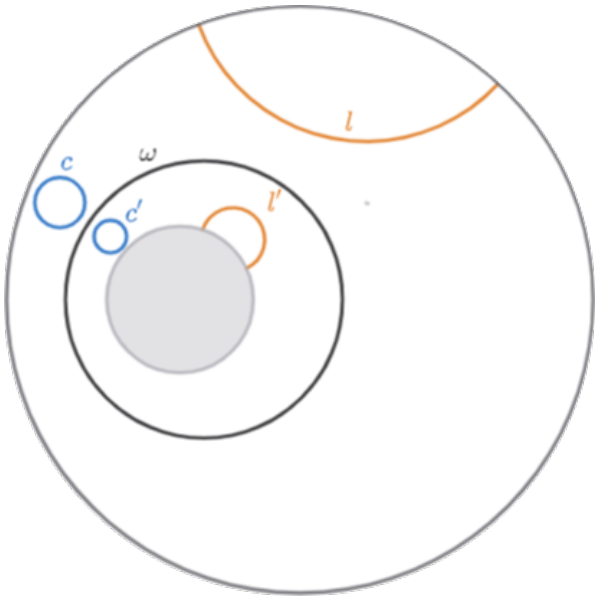
注。 经典反演的一项关键性质在此并不成立：不存在 O 和 r ，使得任意两个（不全等的）圆能够互相映射。然而，对于任意两个外公切线相交的圆，这一说法都成立（很容易验证）。

在欧几里得几何中，如前所述，关于一个 n维圆的反演定义方式与平面情形相同，并具有平面版本性质的 n维对应性质。在双曲几何的 n维庞加莱球模型中，表示超平面反射的变换是关于一个 n维球面的欧几里得反演（该球面在球模型中表示这个超平面）。

我们可以像平面情形中那样，定义相对于一个 n 维球面的 n 维双曲空间中的反演，同时保留所有重要性质。这些性质的证明与平面

情形中的证明相同，只需使用 n 维反演和 n 维庞加莱球模型。

图7：庞加莱圆盘模型中关于 ω 的双曲反演



6 双曲几何中的根轴与曲面

如前所示，点幂定理在双曲几何和球面几何中的类比定理，使我们能够定义这两种几何中点关于圆的幂。（在双曲情形下，这一概念也可扩展到广义圆。）因此，这两种几何中根轴的定义与欧几里得几何中的定义一致。在球面情形中，众所周知，两个圆的根轴是大圆的一段弧，换言之，是一条球面直线。（参见 [1]。）接下来，我们将考察双曲平面上圆、超循环和极限圆的根轴，并将其推广到$\mathbf{H}^n$ 空间。

6.1 双曲几何中两个圆的根轴

引理 6.1 双曲几何中任意两个圆的根轴都是一条双曲直线。（或者在同心情形下为空集。）

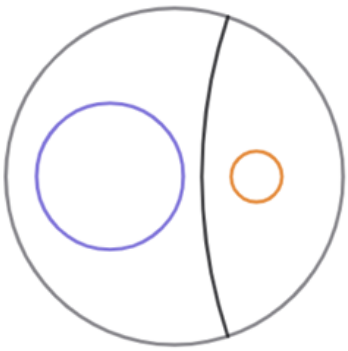
证明： 设 k 和 l 是双曲平面上的任意两个圆。显然，存在（无穷多个）点，它们对这两个圆的幂相等。取这样一个点 O，并使用庞加莱圆盘模型，其中 O 位于中心。由于所有经过原点的直线在该模型中也都是直线， O （从欧几里得意义上说）位于 k 和 l的欧几里得像的根轴上。这两个圆的欧几里得根轴记为 e，它也因此是一条双曲直线。

在这条直线上另取一点 $P \neq O$。利用等距变换（例如反射），将P映射到模型的中心。模型中的这一变换是以 e 为中心、且与边界圆正交的圆反演。根据引理 3.1，像圆 k'、 l' 也将具有根轴 e。由于 P现在位于原点，根据定理 4.1 证明中使用的推理， P也必定位于 k' 和 l'的双曲根轴上。因此， e 上的每个点相对于 k 和 l的幂都相等。由连续性可知，其他点均不满足这一条件。因此，根轴就是这条直线 e。

在同心情形下，根轴显然为空集，这与欧几里得几何中的情况类似。

□

图 8：庞加莱圆盘模型中两个双曲圆的根轴



注。 如果我们将根轴与连接两个圆心的双曲直线的交点置于庞加莱模型的中心，就可以根据对称性看出，根轴垂直于这条直线。

6.2 圆圈的推广：

将定理 4.1 证明中采用的推理推广到任意圆圈，我们可以得出结论：点 P 位于任意两个圆圈（圆、

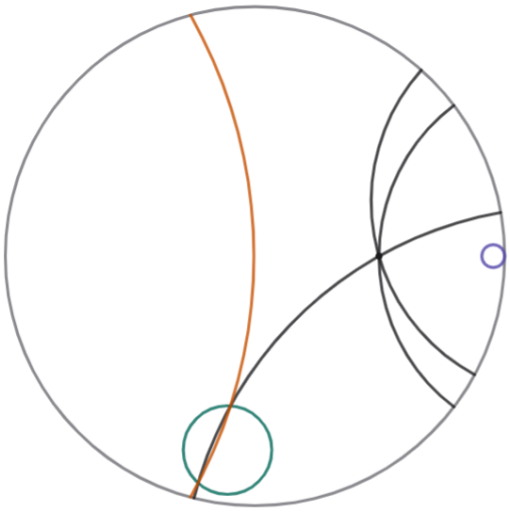
极限圆或超循环分支）的根轴上，当且仅当将点 P 置于庞加莱圆盘模型的中心时， P 位于表示这两个圆圈的圆（圆或圆弧）的欧几里得根轴上。因此，完全类似于引理 6.1 的证明，我们得到以下结论：

引理 6.2 双曲平面内两个不同心广义圆的根轴也是一条双曲直线。

注。 很容易用上述方法看出，当两个超循环具有相同的基线时，根轴就是该基线；而当两个极限圆具有相同的无穷远点时，这两个圆圈的根轴为空点集。

注。 双曲平面内三个圆／圆圈确定的三条根轴交于一点。这可以仿照欧几里得情形证明。

图 9：圆、超循环和极限圆的根轴



6.3 推广到 n维：

上述证明中使用的所有陈述都可自然推广到高维。其证明与引理 6.1 和引理 6.2 的证明相同，只需使用

引理 3.1 的 3.2 版本以及$\mathbf{H}^n$空间的 n 维庞加莱球模型。因此我们得到:

引理6.3 n维双曲空间中两个（非同心）广义球面的根轴面是一个超平面。

7 非全等超球堆积的未来展望

在 n 维双曲几何中，关于堆积和覆盖问题涌现出许多新问题。

在空间 X^n 中，令 $d_n(r)$ $(n \geq 2)$ 表示由 $n+1$ 个互相相切的球面或极限球（在 $r = \infty$ 的情形下）的半径为 r 时，相对于其中心所张成单纯形的密度。L. Fejes T´oth 和 H. S. M. Coxeter 猜想， X^n 中半径为 r 的球面的堆积密度不超过 $d_n(r)$。C.A. Rogers 证明了该猜想适用于欧几里得空间 $\mathbf{E}^n$，而 L. Fejes T´oth 解决了二维球面情形。

$\mathbf{H}^3$ 中的最大密度为 ≈ 0.85328，由极限球面堆积实现；与该理想堆积对应的正四面体镶嵌由 Coxeter-Schl¨afli 符号 $\{3,3,6\}$ 给出。关于双曲n空间及其他瑟斯顿几何中的球面堆积，文献中已有广泛讨论。然而，尽管目前人们正在研究球面和极限球面的堆积与覆盖方面无数尚未解决的问题，但关于超球排列的已知结果相对较少。

在双曲平面$\mathbf{H}^2$, 中，超循环堆积密度的普适上界为 $\frac{3}{\pi}$，该结果由 I. Vermes 证明。类似地，对于超循环线覆盖，覆盖密度的普适下界为$\frac{\sqrt{12}}{\pi}$。

以下论文讨论了高维全等超球堆积与覆盖。

[9]研究三维双曲空间中的全等超球堆积，并提出了一种分解算法，确保每种饱和超球堆积都能将$\mathbf{H}^n$ 分解为截角四面体。因此，要确定超球堆积密度的上界，只需确定

截断单形内全等超球堆积密度的上界，即 ≈ 0.86338。

[11] 继续研究高维双曲空间$\mathbf{H}^n$ **(**$n \geq 4$**)**中的全等超球堆积，并证明，对于每个 n维全等饱和超球堆积，都存在一种将 n维双曲空间分解为截断单形的分解。此外，论文证明，与相应截断四面体胞相关的饱和全等超球堆积密度上界可在正则截断四面体中达到。在四维双曲空间中，该密度上界为 ≈ 0.75864（高于此前猜想的最大值）。此外，论文还反驳了 A. Przeworski 关于四维双曲空间中全等超球堆积密度函数单调性的猜想。

在$\mathbf{H}^n$ 空间中，由超球的根超平面定义的胞分解，为开发类似于上述方法并确定非全等超球堆积密度上界提供了机会。

参考文献

[1] Allardice, R.E.，《球面几何中的根轴》，《爱丁堡数学学会会刊》，第3卷，（1884年），DOI: 10.1017/S0013091500037305.[2]B¨or¨oczky, K.J.，Cs´epai, A.，Sagmeister, A.，《双曲宽度函数以及双曲空间中等宽体的刻画》，《几何学杂志》，（2024年） https://doi.org/10.1007/s00022-024-00714-9[3] Casey, J.，《球面三角学论著及其在大地测量学和天文学中的应用：附大量例题》，密歇根大学历史数学数字馆藏，（1889年），https://name.umdl.umich.edu/ABN7420.0001.001.[4] Gaultier, L.，《关于利用图解法构造由三个条件确定的圆以及由四个条件确定的球面的通用方法的回忆录》，《综合理工学院杂志》，**16**，（1813年）

[5] Lexell, A.J.，《球面上所描圆的性质》，《彼得堡帝国科学院学报》，（1786年）[6] Fejes T´oth, L. - Fejes T´oth, G. - Kuperberg, W.：《双曲空间中的球堆积》，载于：《*Lagerungen*》。数学科学基础，施普林格，尚，**360**（2023年），263–270，https://doi.org/10.1007/978-3-031-21800-2-11.[7] Thurston, W.P.，《三维几何与拓扑》，普林斯顿大学出版社，（1997年）[8]Steiner, J.，《一些几何学考察》[《一些几何学考察》]，《克雷尔杂志》，**1**（1826年），161–184，doi:10.1515/crll.1826.1.161.[9]Szirmai, J.，《与饱和超球堆积相关的分解方法》，《当代数学学报》，**16**（2019年），349–358。http://eudml.org/doc/97023[10] Szirmai, J.，《双曲三维空间中全等超球堆积密度的上界》，《等式数学》，**97**，（2023年），453–466，DOI：10.1007/s00010-023-00947-0[11] Yahya, A. – Szirmai, J.，《与双曲 n–空间中全等饱和超球堆积相关的分解方法及上界密度》，提交的手稿（2025年），arXiv:2506.11682。