arXiv:2602.09741v1 [math.AP] 10 Feb 2026

具有时间滞后的单侧抛物型 BLO 空间及其在 Muckenhoupt A_1 权与双重非线性抛物方程中的应用

Weiyi Kong、Dachun Yang*和 Wen Yuan

摘要 本文首先引入单侧 BLO 空间 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$，并分别通过单侧 Muckenhoupt 类 $A_1^+(\mathbb{R})$ 和单侧 John–Nirenberg 不等式对其进行刻画。基于这些结果，我们建立了 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$ 函数的 Coifman–Rochberg 型分解，并证明 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$ 与两个区间之间的距离无关，进而通过单侧 BMO 空间 $\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})$ 刻画该空间（Bennett 型引理）。作为应用，我们证明任意 $\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})$ 函数均可分解为两个 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$ 函数之和，并明确描述了 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$ 函数到 $L^\infty(\mathbb{R})$ 的距离。最后，作为高维推广，我们引入具有时间滞后的抛物型 BLO 空间 $\mathrm{PBLO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})$，并将上述所有一维结果推广至 $\mathrm{PBLO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})$；此外，作为应用，我们不仅建立了 $\mathrm{PBLO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})$ 与双重非线性抛物方程解之间的关系，还根据集合的弱孔隙性给出了抛物距离函数的负对数属于 $\mathrm{PBLO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})$ 的一个必要条件。

目录

1 引言 2 2 用 $\mathrm{A}_1^+(\mathbb{R})$ 和约翰–尼伦伯格不等式刻画 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$ 5 3 用 $\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})$ 刻画 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$ 的 Bennett 型刻画 13 4 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$ 函数的 Coifman–Rochberg 型分解，以及 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$ 中函数到 $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ 的距离 18 5 高维推广及其在双重非线性抛物型方程中的应用 21 5.1 用 $\mathrm{A}_1^+(\gamma)$ 刻画 $\mathrm{PBLO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})$.22 5.2 用 $\mathrm{PBMO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})$ 刻画 $\mathrm{PBLO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})$ 的 Bennett 型刻画 . . . 27 5.3 $\mathrm{PBLO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})$ 的 Coifman–Rochberg 型分解.32 5.4 双重非线性抛物型方程的应用. 33 5.5 与弱孔隙集的联系.34

2020年数学学科分类. 主要分类 42B35；次要分类 42B25、35K55、28A75。关键词和短语。单侧 BLO 空间、带时间滞后的抛物型 BLO 空间、单侧 Muckenhoupt 权、带时间滞后的抛物型 Muckenhoupt 权、带时间滞后的抛物型极大算子、双重非线性抛物方程。本项目部分得到国家自然科学基金（项目编号：12431006 和 12371093）、北京市自然科学基金（项目编号：1262011）以及中央高校基本科研业务费专项资金（项目编号：2253200028）的资助。*通讯作者，电子邮箱：dcyang@bnu.edu.cn/2026年2月11日/最终版本。

1 引言

由 John 和 Nirenberg 引入的有界平均振荡函数空间 BMO($\mathbb{R}^n$), [13], 在调和分析和偏微分方程中发挥着重要作用。回顾一下，空间 BMO($\mathbb{R}^n$) 定义为所有局部可积函数 f 在 $\mathbb{R}^n$上的集合，满足

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \frac{1}{|Q|}\int_Q \left| f(x) - \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)\,dy \right| dx < \infty,$$

其中 $\mathcal{Q}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中所有边平行于坐标轴的立方体Q 的集合。BMO($\mathbb{R}^n$) 空间与 *Muckenhoupt* 类 $A_q(\mathbb{R}^n)$密切相关；该类由 $\mathbb{R}^n$ 上所有满足以下条件的非负局部可积函数 ω组成:

$$[\omega]_{A_q(\mathbb{R}^n)} := \begin{cases} \sup\limits_{Q\in\mathcal{Q}} \dfrac{1}{|Q|}\displaystyle\int_Q \omega(x)\,dx \left[\operatorname*{ess\,inf}_{x\in Q} \omega(x)\right]^{-1} < \infty & \text{if } q = 1, \\ \sup\limits_{Q\in\mathcal{Q}} \dfrac{1}{|Q|}\displaystyle\int_Q \omega(x)\,dx \left[\dfrac{1}{|Q|}\displaystyle\int_Q \omega(x)^{\frac{1}{1-q}}\,dx\right]^{q-1} < \infty & \text{if } q \in (1,\infty), \\ \sup\limits_{Q\in\mathcal{Q}} \dfrac{1}{|Q|}\displaystyle\int_Q \omega(x)\,dx \exp\left\{\dfrac{1}{|Q|}\displaystyle\int_Q \ln\dfrac{1}{\omega(x)}\,dx\right\} < \infty & \text{if } q = \infty. \end{cases}$$

众所周知，对于任意给定的$q \in (1,\infty]$,

$$\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n) = \left\{\lambda \ln\omega : \omega \in A_q(\mathbb{R}^n) \text{ and } \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

（例如，参见 [44, 第五章第 6 节2]）。这一刻画在端点情形$q = 1$下不再成立。为弥补这一缺陷，Coifman 和 Rochberg [9] 引入了具有有界下振荡的函数空间 BLO($\mathbb{R}^n$)，作为 BMO($\mathbb{R}^n$) 的真子集。具体而言，BLO($\mathbb{R}^n$) 空间定义为 $\mathbb{R}^n$ 上满足以下条件的所有局部可积函数f 的集合:

$$\|f\|_{\mathrm{BLO}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \frac{1}{|Q|}\int_Q \left| f(x) - \operatorname*{ess\,inf}_{y\in Q} f(y)\right| dx < \infty.$$

他们 [9] 证明，所有 BLO 函数恰好是所有A_1 权的对数函数的非负倍数:

$$\mathrm{BLO}(\mathbb{R}^n) = \{\lambda \ln\omega : \omega \in A_1(\mathbb{R}^n) \text{ and } \lambda \in [0,\infty)\}. \tag{1.1}$$

Bennett [7] 建立了关于有界下振荡($\mathbb{R}^n$)的刻画，其表述借助于自然极大算子。有关有界下振荡($\mathbb{R}^n$)空间的更多研究，参见 [6, 12, 23, 24, 25, 31, 37] 。

另一方面，在过去几十年中，一维单侧加权不等式发展迅速。Sawyer [43] 和 Martın-Reyes 等人 [29] 引入了单侧 *Muckenhoupt* 类 $A_q^+(\mathbb{R})$，该类由 $\mathbb{R}$上的所有非负局部可积函数 ω 组成，并满足

$$[\omega]_{A_q^+(\mathbb{R})} := \begin{cases} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\mathbb{R}} \dfrac{M^-(\omega)(x)}{\omega(x)} < \infty & \text{if } q = 1, \\ \sup\limits_{I\in\mathcal{I}} \dfrac{1}{|I^-|}\displaystyle\int_{I^-} \omega(x)\,dx \left[\dfrac{1}{|I^+|}\displaystyle\int_{I^+} \omega(x)^{\frac{1}{1-q}}\,dx\right]^{q-1} < \infty & \text{if } q \in (1,\infty), \\ \sup\limits_{I\in\mathcal{I}} \dfrac{1}{|I^-|}\displaystyle\int_{I^-} \omega(x)\,dx \exp\left\{\dfrac{1}{|I^+|}\displaystyle\int_{I^+} \ln\dfrac{1}{\omega(x)}\,dx\right\} < \infty & \text{if } q = \infty. \end{cases} \tag{1.2}$$

下文中，令 $\mathcal{I}$ 表示 $\mathbb{R}$ 中所有有界开区间的集合；对于任意 $I := (a,b) \in \mathcal{I}$，令

$$I^- := \left(a, \frac{a+b}{2}\right),\ I^+ := \left(\frac{a+b}{2}, b\right),\ \text{and } I^{++} := \left(b, b + \frac{b-a}{2}\right).$$

此外，M^- 表示单侧极大算子，其定义如下：对于 $\mathbb{R}$ 上任意局部可积函数 f 以及任意 $x \in \mathbb{R}$,

$$M^-(f)(x) := \sup_{h\in(0,\infty)} \frac{1}{h}\int_{(x-h,x)} |f(y)|\,dy.$$

若条件（1.2）在实数轴方向反转后仍成立，则 $\omega \in A_q^-(\mathbb{R})$（另一个 单侧 *Muckenhoupt* 类定义在 $\mathbb{R}$ 上）。单侧 Muckenhoupt 权为刻画单侧算子的加权有界性提供了一个自然框架，这些算子包括（分数次）极大算子的单侧变体、奇异积分算子、分数次积分算子和离散平方算子。20世纪90年代，Martín-Reyes 和 de la Torre [30] 引入了 单侧 BMO 空间 $\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})$，它定义为实数集上的所有局部可积函数 f 满足以下条件的集合：$\mathbb{R}$使得

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})} := \sup_{I\in\mathcal{I}} \frac{1}{|I^-|}\int_{I^-}\left[f(x) - \frac{1}{|I^+|}\int_{I^+} f(y)\,dy\right]_+ dx < \infty.$$

这里以及下文中，对于任意函数 f，令

$$f_+ := \max\{f, 0\} \text{ and } f_- := -\min\{f, 0\}.$$

若上述条件在实数轴方向反转后仍成立，则 $f \in \mathrm{BMO}^-(\mathbb{R})$（另一个单侧 BMO空间 定义在 $\mathbb{R}$上）。利用单侧 John–Nirenberg 不等式，他们[30] 证明了，对于任意给定的 $q \in (1,\infty]$，所有 $\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})$ 函数恰好是所有 $A_q^+(\mathbb{R})$ 权的对数函数的非负倍数：

$$\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R}) = \left\{\lambda \ln \omega : \omega \in A_q^+(\mathbb{R}) \text{ and } \lambda \in [0,\infty)\right\}. \tag{1.3}$$

容易证明，（1.3）在端点情形 $q = 1$ 下不成立（见注2.6）。这引出了一个自然的问题：什么样的 BMO^+（$\mathbb{R}$）的合适替代空间能够使（1.3）在 $q = 1$时成立？本文的主要目标之一是对这个问题给出肯定的回答，这一研究受到了的启发。 [9]

此外，在高维情形下，具有时间滞后的抛物 BMO 空间 $\mathrm{PBMO}^{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 是单侧 BMO 空间自然的高维类比。此外，从偏微分方程的角度来看，具有时间滞后的抛物型 BMO 空间对于双重非线性抛物方程的正则性理论至关重要

$$\frac{\partial(|u|^{p-2}u)}{\partial t} - \mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = 0, \tag{1.4}$$

其中 $p \in (1,\infty)$ 在本文中固定（例如，参见 Moser [32, 33], Fabes 和 Garafalo [11], 以及 Aimar [1]）。与一维情形类似，具有时间滞后的抛物 BMO 空间中的所有函数，恰为具有时间滞后的抛物 Muckenhoupt $A_q^+(\gamma)$ 权的非负倍数的对数函数，$q \in (1,\infty]$，由 Kinnunen 和 Saari [21] 以及 Kinnunen 和 Myyryl¨ainen 引入 [16] （更多细节见第 5 节）。关于单侧 BMO 型空间的进一步研究，可参见[2, 26, 27, 38, 42, 45]；关于具有时间滞后的抛物 BMO 型空间的较新研究，可参见 [8, 10,17, 18, 19, 20, 22, 35, 36, 41]。

受上述研究启发，本文首先引入单侧 BLO 空间 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$，并分别通过 $A_1^+(\mathbb{R})$（从而回答上述问题）和单侧 John–Nirenberg 型不等式对其进行刻画。利用这些结果，我们建立了 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$ 函数的 Coifman–Rochberg 型分解，并证明空间 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$ 与两个区间之间的距离无关，由此进一步得到通过 $\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})$ 对 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$ 的刻画（Bennett 型引理）。作为应用，

我们证明，任意 $\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})$ 函数都可以分解为两个 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$ 函数之和，并明确描述了 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$ 函数到 $L^\infty(\mathbb{R})$ 的距离。最后，作为高维类比，我们引入带时间滞后的抛物型 BLO 空间 $\mathrm{PBLO}_{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$，并将上述所有一维结果推广到 $\mathrm{PBLO}_{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$；此外，作为应用，我们不仅建立了 $\mathrm{PBLO}_{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 与双重非线性抛物方程解之间的关系，还根据集合的弱孔隙性，给出了抛物距离函数的负对数属于 $\mathrm{PBLO}_{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 的一个必要条件。

本文其余部分的安排如下。

在第 2 节中，我们引入一维单侧有界下振荡空间 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$（见定义 2.3），它是 $\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})$ 的真子集。随后，我们证明 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$ 中的所有函数恰好是所有 $\mathrm{A}_1^+(\mathbb{R})$ 权的对数函数的非负倍数（见定理 2.4），并利用一维单侧 Calder´on–Zygmund 分解（这是证明 [30, Lemma 1] 时所用分解的一个轻微变体），通过单侧 John–Nirenberg 不等式刻画 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$（见定理 2.7）。我们进一步证明，在 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$ 的定义中可以取两个不相邻的区间（见定理 2.8）。

在第 3 节中，应用定理 2.8、证明 [42, Theorem 5.1] 时所用的单侧 Calder´on–Zygmund 分解，以及从证明 [42,Theorem 5.1]，时所用方法改编而来的迭代方法，我们证明非中心单侧自然极大算子 N^- 从 $\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})$ 到 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$ 有界（见命题 3.1）。这通过将目标空间 $\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})$ 替换为其真子空间 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$，改进了 [42, Theorem 5.1] [（详情见备注 3.2(ii)]）。由此，我们建立了 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$ 的 Bennett 型刻画；进而，除去有界函数这一差异，$\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$ 可表示为 $\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})$ 在 N^- 下的像（见定理 3.3）。

在第 4 节中，我们利用定理 2.4，建立了有界下振荡函数的 Coifman–Rochberg 型分解$^+(\mathbb{R})$（见定理 4.2）。作为推论，我们证明任意有界平均振荡$^+(\mathbb{R})$ 函数都可以分解为两个有界下振荡$^+(\mathbb{R})$ 函数之和（见推论 4.3 ），并明确量化了有界下振荡 $^+(\mathbb{R})$ 函数到 $L^\infty(\mathbb{R})$ 的距离（见推论 4.4 ）。

第 5 节的结构如下。在第 5.1 小节中，我们引入带时间滞后的抛物型 BLO 空间 $\mathrm{PBLO}_{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$（见定义 5.2），并证明所有 $\mathrm{PBLO}_{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 函数恰好是所有带时间滞后的抛物型 $\mathrm{A}_1^+(\gamma)$ 权的对数函数的非负倍数（见定理 5.3）；这回答了前述关于 (1.3) 中端点情形 q = 1of 的问题，其中以 $\mathrm{PBMO}_{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 取代 $\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})$。利用这一结果，我们根据抛物 John–Nirenberg 不等式刻画 $\mathrm{PBLO}_{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$（见定理 5.6 ），并证明 $\mathrm{PBLO}_{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 与时间滞后及三个矩形之间的距离无关（见定理 5.8）。在第 5.2 小节中，通过使用定理 5.8 和注 3.4] 中的抛物型链式引理，并建立抛物型 Calder´on–Zygmund 分解，我们证明了非中心化抛物型自然极大算子 $\mathrm{N}^{\gamma-}$ 将 $\mathrm{PBMO}_{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 有界映射到 $\mathrm{PBLO}_{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$（见命题 5.9）；这一结果改进了 [42, 引理 4.1] ，将目标空间 $\mathrm{PBMO}_{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 替换为其真子空间 $\mathrm{PBLO}_{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$ [，详见注 5.11(ii)]。利用命题 5.9，我们进一步建立了 $\mathrm{PBLO}_{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 的 Bennett 型刻画（见定理 5.12）。在第 5.3 小节中，我们利用定理 5.3 给出 $\mathrm{PBLO}_{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 中函数的 Coifman–Rochberg 型分解（见定理 5.14）。作为推论，我们证明任意 $\mathrm{PBMO}_{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 函数都可以表示为两个 $\mathrm{PBLO}_{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 函数之和（见推论 5.15），并明确量化了 $\mathrm{PBLO}_{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 函数到 $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ 的距离（见推论 5.16 ）；这是对 [22，定理 5.1] 的改进，它通过严格等式刻画了其中的等价关系。在第 5.4 小节中，作为本节所有这些结果的应用，我们建立了 $\mathrm{PBLO}_{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 与双重非线性抛物方程解之间的关系（见命题 5.17 和推论 5.18 和 5.19 ），这是本文两个主要目标中的第二个。在第 5.5 小节中，作为定理 5.3 的应用，我们给出抛物型距离的负对数满足的一项必要条件

函数 – 对数 $d_p(\cdot,\ E)$ 属于 $\mathrm{PBLO}^{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 的抛物型 γ-FIT 弱孔隙性条件$E\ \subset \mathbb{R}^{n+1}$ （见定理 5.23）。

我们在本引言的最后约定一些符号。在本文中，设$\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$和 $\mathbb{Z}_+ := \{0\} \cup \mathbb{N}$。对于任意$s\ \in \mathbb{R}$，符号 $\lceil s \rceil$ 表示不小于s 的最小整数，符号 $\lfloor s \rfloor$ 表示不大于s的最大整数。设 $\mathcal{X} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n+1}\}$。对于任意可测集$A\ \subset \mathcal{X}$，我们用 $|A|$表示其勒贝格测度。令$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{X})$为 $\mathcal{X}$上所有局部可积函数构成的集合。对于任意$f\ \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{X})$以及任意满足$|A| \in (0, \infty)$的可测集$A\ \subset \mathcal{X}$，令

$$f_A := \fint_A f := \frac{1}{|A|}\int_A f.$$

如果$f\ \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{X})$几乎处处为正，则称$f$ 为一个权。对于任意给定的$q\ \in [1, \infty]$，勒贝格空间 $L^q(\mathcal{X})$ 定义为 $\mathcal{X}$ 上所有满足下列条件的可测函数 f 构成的空间：

$$\|f\|_{L^q(\mathcal{X})} := \begin{cases} \left[\int_{\mathcal{X}} |f(x)|^q\,dx\right]^{\frac{1}{q}} & \text{if } q \in [1, \infty), \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathcal{X}} |f(x)| & \text{if } q = \infty \end{cases}$$

是有限的。若不致引起混淆，则我们总是省略所有积分表示中的微分。此外，我们总是略去记号中的变量；例如，对任意$A\ \subset \mathbb{R}$、 $\mathbb{R}$ 上的任意函数f以及任意 $\lambda \in \mathbb{R}$，我们简记为 $A \cap \{f\ > \lambda\} := \{x\ \in A : f(x)\ > \lambda\}$。符号$f\ \lesssim g$ 表示存在一个正常数 C，使得$f\ \le Cg$；并且，若$f\ \lesssim g\ \lesssim f$，则记作$f\ \sim g$。最后，在所有证明中，我们始终保留原定理（或相关陈述）中所引入的符号。

2 用$A_1^+(\mathbb{R})$ 与约翰–尼伦伯格不等式刻画有界下振荡$^+(\mathbb{R})$

在本节中，我们首先证明单侧 Muckenhoupt 类 $A_1^+(\mathbb{R})$ 在两个定义区间的任意分离下保持不变。随后，我们引入单侧 BLO 空间 有界下振荡$^+(\mathbb{R})$，并用单侧约翰–尼伦伯格不等式与 $A_1^+(\mathbb{R})$ 对其进行刻画。此外，我们证明空间 有界下振荡$^+(\mathbb{R})$ 与两个区间之间的距离无关。

我们先列出单侧 Muckenhoupt 类的两个基本性质。首先，若 $q\ \in(1, \infty)$，则 $A_q^+(\mathbb{R})$ 与 $A_\infty^+(\mathbb{R})$ 和 $A_\infty^-(\mathbb{R})$ 之间存在如下联系，这可由 [29,定理 2] 的证明推出。

引理 2.1。 设 $q\ \in(1, \infty)$ 且 ω 是一个权。则 $\omega \in A_q^+(\mathbb{R})$ 当且仅当 $\omega \in A_\infty^+(\mathbb{R})$ 且$\omega^{1-q} \in A_\infty^-(\mathbb{R})$。此外，

$$\max\left\{[\omega]_{A_\infty^+(\mathbb{R})}, \left[\omega^{\frac{1}{1-q}}\right]^{q-1}_{A_\infty^-(\mathbb{R})}\right\} \le [\omega]_{A_q^+(\mathbb{R})} \le [\omega]_{A_\infty^+(\mathbb{R})}\left[\omega^{\frac{1}{1-q}}\right]^{q-1}_{A_\infty^-(\mathbb{R})}.$$

其次，我们指出，在$A_q^+(\mathbb{R})$ 的定义中，两个区间之间的距离并不重要，其中$q\ \in [1, \infty]$。我们提及，以下引理中 $(0, \frac{1}{2}]$ 关于 γ 的取值范围是自然且最佳的。

引理 2.2。 设 $\gamma \in (0, \frac{1}{2}]$。则下列陈述成立。

(i) $\omega \in A_1^+(\mathbb{R})$ 当且仅当

$$\langle\omega\rangle_{A_1^+(\mathbb{R})} := \sup_{\substack{-\infty<a<b\le c<d<\infty \\ b-a=d-c=\gamma(d-a)}} \fint_{(a,b)} \omega \left[\operatorname*{ess\,inf}_{(c,d)} \omega\right]^{-1} < \infty. \tag{2.1}$$

此外，$[\omega]_{A_1^+(\mathbb{R})} \le \langle\omega\rangle_{A_1^+(\mathbb{R})} \le \frac{1}{\gamma}[\omega]_{A_1^+(\mathbb{R})}$。

(ii) 对于任意给定的 $q\in(1,\infty]$, $\omega\in A_q^+(\mathbb{R})$, 当且仅当

$$\langle\omega\rangle_{A_q^+(\mathbb{R})}:=\begin{cases}\displaystyle\sup_{\substack{-\infty<a<b\le c<d<\infty\\ b-a=d-c=\gamma(d-a)}}\fint_{(a,b)}\omega\left[\fint_{(c,d)}\omega^{\frac{1}{1-q}}\right]^{q-1}<\infty & \text{if } q\in(1,\infty),\\ \displaystyle\sup_{\substack{-\infty<a<b\le c<d<\infty\\ b-a=d-c=\gamma(d-a)}}\fint_{(a,b)}\omega\exp\left\{\fint_{(c,d)}\ln\frac{1}{\omega}\right\}<\infty & \text{if } q=\infty.\end{cases}$$

此外, $[\omega]_{A_q^+(\mathbb{R})}$ 与 $\langle\omega\rangle_{A_q^+(\mathbb{R})}$ 彼此仅依赖于对方及 γ。

证明。(ii) 在 [40, 引理 26] 中针对 $q\in(1,\infty)$ 的情形已给出，并在 [29, 定理 1] 中针对 $q=\infty$ 的情形已给出。现在证明 (i)。定义非中心单侧极大算子 $\mathscr{M}^-$ 如下：对于任意 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 及 $x\in\mathbb{R}$,

$$\mathscr{M}^-(f)(x):=\sup_{\substack{-\infty<a<b\le c<d<\infty\\ b-a=d-c=\gamma(d-a),\,x\in(c,d)}}\fint_{(a,b)}|f|.$$

容易证明，对于任意 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, $M^-(f)\le\mathscr{M}^-(f)\le\frac{1}{\gamma}M^-(f)$。因此, $\omega\in A_1^+(\mathbb{R})$ 当且仅当

$$[\omega]^*_{A_1^+(\mathbb{R})}:=\left\|\frac{\mathscr{M}^-(\omega)}{\omega}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}<\infty. \tag{2.2}$$

此外, $[\omega]_{A_1^+(\mathbb{R})}\le[\omega]^*{}_{A_1^+(\mathbb{R})}\le\frac{1}{\gamma}[\omega]_{A_1^+(\mathbb{R})}$。我们进一步断言, $\langle\omega\rangle_{A_1^+(\mathbb{R})}=[\omega]^*{}_{A_1^+(\mathbb{R})}$。事实上，假设 (2.2) 成立。对于任意 $-\infty<a<b\le c<d<\infty$，其中 $b-a=d-c=\gamma(d-a)$，以及任意 $x\in(c,d)$,

$$\fint_{(a,b)}\omega\le\mathscr{M}^-(\omega)(x)\le[\omega]^*_{A_1^+(\mathbb{R})}\omega(x).$$

对所有 $x\in(c,d)$ 取本质下确界，我们得到 (2.1) 和 $\langle\omega\rangle_{A_1^+(\mathbb{R})}\le[\omega]^*{}_{A_1^+(\mathbb{R})}$。反过来，假设 (2.1) 成立。令

$$E:=\left\{x\in\mathbb{R}:\mathscr{M}^-(\omega)(x)>\langle\omega\rangle_{A_1^+(\mathbb{R})}\omega(x)\right\}.$$

对于任意 $x\in E$，存在 $-\infty<a_x<b_x\le c_x<d_x<\infty$，其中 $b_x-a_x=d_x-c_x=\gamma(d_x-a_x)$，使得 $x\in(c_x,d_x)$，$c_x,d_x\in\mathbb{Q}$，并且

$$\fint_{(a_x,b_x)}\omega>\langle\omega\rangle_{A_1^+(\mathbb{R})}\omega(x).$$

这与 (2.1) 一起进一步推出 $\omega(x)<\operatorname{ess\,inf}_{y\in(c_x,d_x)}\omega(y)$。因此,

$$|E|\le\left|\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\left\{x\in(c_i,d_i):c_i,d_i\in\mathbb{Q}\ \text{ and }\ \omega(x)<\operatorname*{ess\,inf}_{y\in(c_i,d_i)}\omega(y)\right\}\right|=0$$

因此，(2.2) 成立，其中 $[\omega]^*{}_{A_1^+(\mathbb{R})}\le\langle\omega\rangle_{A_1^+(\mathbb{R})}$。因此，断言 $\langle\omega\rangle_{A_1^+(\mathbb{R})}=[\omega]^*{}_{A_1^+(\mathbb{R})}$ 成立，进而 $[\omega]_{A_1^+(\mathbb{R})}\le\langle\omega\rangle_{A_1^+(\mathbb{R})}\le\frac{1}{\gamma}[\omega]_{A_1^+(\mathbb{R})}$。这就完成了 (i) 的证明，从而证明了引理 2.2。□

接下来，我们介绍单侧 BLO 空间 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$，它是 $\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})$ 的真子集。**定义 2.3**。单侧 BLO空间 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$ 定义为所有满足以下条件的 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 的集合

$$\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}:=\sup_{I\in\mathcal{I}}\fint_{I^-}\left(f-\operatorname*{ess\,inf}_{I^+}f\right)_+<\infty.$$

若上述条件在实数轴方向反转时仍成立，则 $f\in$ 有界下振荡$^-(\mathbb{R})$（另一个单侧有界下振荡空间）。

回顾一下，对于端点情形 1.3，式（$q = 1$）不成立。然而，我们发现，有界下振荡$^+$(
$\mathbb{R}$中的所有函数，恰好都是 A_1^+($\mathbb{R}$中所有权的对数函数的非负倍数；这是单侧权情形下式（1.1）的一个类似结果，因而回答了引言中提到的问题。

定理 2.4。 存在一个正常数 B，使得对于任意 $f \in$ 有界下振荡$^+(\mathbb{R})$ 且 $\epsilon \in (0, B\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})})$，$e^{\epsilon f} \in A_1^+(\mathbb{R})$。反之，对于任意 $\omega \in A_1^+(\mathbb{R})$，$\ln \omega \in$ 有界下振荡$^+(\mathbb{R})$ 且

$$\|\ln \omega\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} \le \ln\left(1 + 2[\omega]_{A_1^+(\mathbb{R})}\right).$$

特别地，

$$\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R}) = \left\{\lambda \ln \omega : \omega \in A_1^+(\mathbb{R}) \ \ and \ \ \lambda \in [0, \infty)\right\}.$$

为证明定理 2.4，我们先利用一种单侧 Calder$^+$($\mathbb{R}$on–Zygmund 分解证明下面关于 BLO′([30, 的单侧 John–Nirenberg 不等式。该分解是证明 1]时所用分解的轻微变体。

引理 2.5。 设 $f \in$ 有界下振荡$^+(\mathbb{R})$。则存在正常数 A 和 B，使得对于任意 $I \in \mathcal{I}$ 以及 $\lambda \in (0, \infty)$，

$$\left|I^- \cap \left\{\left(f - \operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}} f\right)_+ > \lambda\right\}\right| \le A e^{-\frac{B\lambda}{\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}} \left|I^-\right|. \tag{2.3}$$

证明。若 $\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} = 0$，则对于几乎处处的 $-\infty < x \le y < \infty$，$f(x) \le f(y)$。在这种情况下，对于任意 $I \in \mathcal{I}$ 和 $\lambda \in (0, \infty)$，(2.3) 自动成立。因此，我们只需考虑 $\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} \in (0, \infty)$ 的情形。不失一般性，可假设 $\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} = 1$。固定 $I \in \mathcal{I}$。由定义 2.3 以及假设 $\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} = 1$，我们推得

$$\begin{aligned}
\fint_{I^- \cup I^+} \left(f - \operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}} f\right)_+ &\le \frac{1}{2} \fint_{I^-} \left(f - \operatorname*{ess\,inf}_{I^+} f\right)_+ + \frac{1}{2} \fint_{I^-} \left(\operatorname*{ess\,inf}_{I^+} f - \operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}} f\right)_+ \\
&\quad + \frac{1}{2} \fint_{I^+} \left(f - \operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}} f\right)_+ \\
&\le \|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} + \frac{1}{2} \left(f_{I^+} - \operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}} f\right)_+ \\
&\le \|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} + \frac{1}{2} \fint_{I^+} \left(f - \operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}} f\right)_+ \le \frac{3}{2} \|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} = \frac{3}{2}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Let

$$\Omega := \left\{x \in \mathbb{R} : M^-\left(\left[f - \operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}} f\right]_+ \mathbf{1}_{I^- \cup I^+}\right)(x) > 6\right\}.$$

由于 M^- 是下半连续的，因此 $\Omega \subset \mathbb{R}$ 是开集，故存在一列两两不交的开区间 $\{(a_i, b_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$，使得 $\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (a_i, b_i)$。利用对任意 $i \in \mathbb{N}$ 都有 $b_i \notin \Omega$，且根据引理 2.1], ，我们得出，对于任意 $i \in \mathbb{N}$ 以及 $x \in (a_i, b_i)$，

$$\fint_{(x, b_i)} \left(f - \operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}} f\right)_+ \mathbf{1}_{I^- \cup I^+} \le 6 \le \fint_{(a_i, x)} \left(f - \operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}} f\right)_+ \mathbf{1}_{I^- \cup I^+}. \tag{2.5}$$

收集所有满足 $(a_i, b_i) \cap I^- \neq \emptyset$ 的 (a_i, b_i)，并将它们记为 $\{J_i\}_{i \in \mathbb{N}}$。我们断言，对任意 $i \in \mathbb{N}$，有 $J_i \cap I^{++} = \emptyset$。事实上，若存在 $i_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $J_{i_0} \cap I^{++} \neq \emptyset$，则 $I^+ \subset J_{i_0}$。这一点连同 (2.5) 与 (2.4)，进一步表明

$$\left|I^+\right| \le \left|J_{i_0}\right| = \frac{1}{6} \int_{J_{i_0}} \left(f - \operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}} f\right)_+ \mathbf{1}_{I^- \cup I^+} \le \frac{1}{6} \int_{I^- \cup I^+} \left(f - \operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}} f\right)_+ \le \frac{1}{2} \left|I^+\right|,$$

这是不可能的。因此，对任意 $i\in\mathbb{N}$，有 $J_i\cap I^{++}=\emptyset$。这就完成了上述断言的证明。

现在，我们证明

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}|J_i|\le\frac{1}{2}\left|I^-\right|. \tag{2.6}$$

事实上，根据 M^- 和 Ω的定义，可知 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}J_i\subset I^-\cup I^+$。结合 (2.5)、 $\{J_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 两两不交这一事实以及 (2.4)，进一步可得

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}|J_i|=\frac{1}{6}\sum_{i\in\mathbb{N}}\int_{J_i}\left(f-\operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}}f\right)_+\mathbf{1}_{I^-\cup I^+}\le\frac{1}{6}\int_{I^-\cup I^+}\left(f-\operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}}f\right)_+\le\frac{1}{2}\left|I^-\right|$$

因此 (2.6) 成立。

对于任意 $i\in\mathbb{N}$，令 $J_i=:(c_i,d_i)$，并对任意 $k\in\mathbb{N}$，通过设定 $\{x^{(k)}{}_i\}_{k\in\mathbb{N}},\{y^{(k)}{}_i\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ 来定义

$$d_i-x_i^{(k)}=2\left[d_i-y_i^{(k)}\right]=\left(\frac{2}{3}\right)^k(d_i-c_i)=\left(\frac{2}{3}\right)^k|J_i|. \tag{2.7}$$

此外，对于任意 i、$k\in\mathbb{N}$，令 $J^{(k)}{}_i\in\mathcal{I}$ 满足 $J^{(k)+}{}_i=(x^{(k)}{}_i,y^{(k)}{}_i)$。由 (2.7) 以及对于任意 $i\in\mathbb{N}$，$b_i\notin\Omega$ 这一事实可推得，对于任意 $i\in\mathbb{N}$，$J_i=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}J^{(k)-}{}_i$，并且对于任意 $k\in\mathbb{N}$，

$$\fint_{J_i^{(k)++}}\left(f-\operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}}f\right)_+=\fint_{(y_k,d_i)}\left(f-\operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}}f\right)_+\le 6. \tag{2.8}$$

接下来，我们准备证明（2.3）。利用勒贝格微分定理和 Ω 的定义可知，对几乎处处的 $x\in I^-\setminus\Omega=I^-\setminus\bigcup_{i\in\mathbb{N}}J_i=I^-\setminus\bigcup_{i,\ k\in\mathbb{N}}J^{(k)-}{}_i$，

$$\left[f(x)-\operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}}f\right]_+\le M^-\left(\left[f-\operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}}f\right]_+\mathbf{1}_{I^-\cup I^+}\right)(x)\le 6.$$

由此，再结合 $J_i=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}J^{(k)-}{}_i$ 对任意 $i\in\mathbb{N}$，以及（2.8），可推知，对于任意 $\lambda\in(6,\ \infty)$，

$$\begin{aligned}\left|I^-\cap\left\{\left(f-\operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}}f\right)_+>\lambda\right\}\right|&\le\sum_{i,k\in\mathbb{N}}\left|J_i^{(k)-}\cap\left\{\left[f-\operatorname*{ess\,inf}_{J_i^{(k)++}}f\right]_+>\lambda-6\right\}\right|\\&\quad+\sum_{i,k\in\mathbb{N}}\left|J_i^{(k)-}\cap\left\{\left[\operatorname*{ess\,inf}_{J_i^{(k)++}}f-\operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}}f\right]_+>6\right\}\right|\\&\le\sum_{i,k\in\mathbb{N}}\left|J_i^{(k)-}\cap\left\{\left[f-\operatorname*{ess\,inf}_{J_i^{(k)++}}f\right]_+>\lambda-6\right\}\right|\\&\quad+\sum_{i,k\in\mathbb{N}}\left|J_i^{(k)-}\cap\left\{\fint_{J_i^{(k)++}}\left(f-\operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}}f\right)_+>6\right\}\right|\\&\le\sum_{i,k\in\mathbb{N}}\left|J_i^{(k)-}\cap\left\{\left[f-\operatorname*{ess\,inf}_{J_i^{(k)++}}f\right]_+>\lambda-6\right\}\right|.\end{aligned} \tag{2.9}$$

接下来，对任意 $\delta\in(0,\infty)$，令

$$\mathcal{A}(\delta):=\sup_{J\in\mathcal{I}}\frac{|J^-\cap\{(f-\operatorname*{ess\,inf}_{J^{++}}f)_+>\delta\}|}{|J^-|}.$$

结合这一点，（2.9），以及 $J^{(k)-}{}_i$ 两两不交，对任意 i、$k \in \mathbb{N}$ 成立，并且 $J_i = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} J^{(k)-}{}_i$对任意 $i \in \mathbb{N}$成立，再结合（2.6），我们得到

$$\begin{aligned}\left|I^- \cap \left\{\left(f - \operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}} f\right)_+ > \lambda\right\}\right| &\le \sum_{i,k\in\mathbb{N}} \mathcal{A}(\lambda-6)\left|J_i^{(k)-}\right| \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{A}(\lambda-6)|J_i| \le \frac{1}{2}\mathcal{A}(\lambda-6)\left|I^-\right|\end{aligned}$$

因此 $\mathcal{A}(\lambda) \le \frac{1}{2}\mathcal{A}(\lambda-6)$。此外，注意到对于任意 $\lambda \in (6,\infty)$，都存在$m \in \mathbb{N}$ 使得 $6m < \lambda \le 6(m+1)$。结合已证明的结论：对于任意$\lambda \in (6,\infty)$，$\mathcal{A}(\lambda) \le \frac{1}{2}\mathcal{A}(\lambda-6)$，以及对任意 $\delta \in (0,\infty)$，$A(\delta) \le 1$，进一步可得

$$\mathcal{A}(\lambda) \le \frac{1}{2^m}\mathcal{A}(\lambda-6m) \le \frac{1}{2^m} \le 2^{1-\frac{\lambda}{6}} = 2e^{-\frac{\ln 2}{6}\lambda} = 2e^{-\frac{\ln 2}{6}\frac{\lambda}{\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}}.$$

因此，(2.3) 对任意 $\lambda \in (6,\infty)$ 均成立。

最后，对于任意 $\lambda \in (0,6]$,

$$\left|I^- \cap \left\{\left(f - \operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}} f\right)_+ > \lambda\right\}\right| \le \left|I^-\right| \le e^{\ln 2 - \frac{\ln 2}{6}\lambda}\left|I^-\right| \le 2e^{-\frac{\ln 2}{6}\frac{\lambda}{\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}}\left|I^-\right|.$$

综上，对于任意 $I \in \mathcal{I}$ 和 $\lambda \in (0,\infty)$，(2.3) 在 $A := 2$ 和 $B := \ln 2\,6$ 的条件下成立。引理 2.5的证明至此完成。□

现在，我们准备证明定理 2.4。

定理 2.4 的证明。设$f \in$ 有界下振荡$^+(\mathbb{R})$。由引理 2.5，可知存在正常数 A 和 B，使得对任意 $I \in \mathcal{I}$ 和 $\lambda \in (0,\infty)$，式（2.3）成立。再结合卡瓦列里原理可得，对任意 $\epsilon \in (0, B\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})})$ 和 $I \in \mathcal{I}$,

$$\fint_{I^-} e^{\epsilon f} \le e^{\epsilon \operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}} f} \fint_{I^-} e^{\epsilon(f-\operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}} f)_+} \le \left[1 + \frac{A\epsilon\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}{B - \epsilon\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}\right] \operatorname*{ess\,inf}_{I^{++}} e^{\epsilon f}.$$

由此以及引理 2.2（其中 $\gamma := \frac{1}{3}$），可得对任意 $\epsilon \in (0, B\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})})$，$e^{\epsilon f} \in A_1^+(\mathbb{R})$，并且

$$\left[e^{\epsilon f}\right]_{A_1^+(\mathbb{R})} \le 1 + \frac{A\epsilon\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}{B - \epsilon\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}. \tag{2.10}$$

反之，设 $\omega \in A_1^+(\mathbb{R}$。由詹森不等式和引理 2.2(i)，并结合其中的 $\gamma := \frac{1}{2}$，可推得对任意 $I \in \mathcal{I}$,

$$\begin{aligned}\exp\left\{\fint_{I^-}\left(\ln\omega - \operatorname*{ess\,inf}_{I^+}\ln\omega\right)_+\right\} &\le \fint_{I^-}\exp\left\{\left(\ln\omega - \operatorname*{ess\,inf}_{I^+}\ln\omega\right)_+\right\} \\ &\le 1 + \fint_{I^-}\omega\left(\operatorname*{ess\,inf}_{I^+}\omega\right)^{-1} \le 1 + 2[\omega]_{A_1^+(\mathbb{R})}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

对所有 $I \in \mathcal{I}$取上确界，我们得到 $\ln\omega \in$ 有界下振荡$^+(\mathbb{R})$ 以及

$$\|\ln\omega\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} \le \ln\left(1 + 2[\omega]_{A_1^+(\mathbb{R})}\right). \tag{2.12}$$

定理2.4的证明至此完成。□

注 2.6. 我们指出，$L^\infty(\mathbb{R}) \subsetneq$ 有界下振荡$^+(\mathbb{R}) \subsetneq$ 有界平均振荡$^+(\mathbb{R})$。事实上，经过一些简单计算，我们可以推出 $L^\infty(\mathbb{R}) \subset$ 有界下振荡$^+(\mathbb{R}) \subset$ 有界平均振荡$^+(\mathbb{R})$，并且对任意 $f \in L^\infty(\mathbb{R})$，$\|f\|_{BMO^+(\mathbb{R})} \le \|f\|_{BLO^+(\mathbb{R})} \le 2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$。注意，对任意 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$，$\|f\|_{BLO^+(\mathbb{R})} = 0$ 当且仅当 $f(x) \le f(y)$，对几乎处处的 $x, y \in \mathbb{R}$ 且 $x \le y$ 成立。因此，$\mathbb{R}$ 上的任意无界单调递增函数都属于有界下振荡$^+(\mathbb{R}) \setminus L^\infty(\mathbb{R})$。我们通过反证法证明 [有界平均振荡$^+(\mathbb{R}) \setminus$ 有界下振荡$^+(\mathbb{R})] \neq \emptyset$。若有界平均振荡$^+(\mathbb{R}) =$ 有界下振荡$^+(\mathbb{R})$，则有界平均振荡$^-(\mathbb{R}) =$ 有界下振荡$^-(\mathbb{R})$，因此

$$\mathrm{BMO}(\mathbb{R}) = \mathrm{BMO}^+(\mathbb{R}) \cap \mathrm{BMO}^-(\mathbb{R}) = \mathrm{BLO}^+(\mathbb{R}) \cap \mathrm{BLO}^-(\mathbb{R}).$$

结合定理 2.4 可进一步推出，对于任意 $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$，存在 $\epsilon \in (0, \infty)$，使得 $e^{\epsilon f} \in A_1^+(\mathbb{R}) \cap A_1^-(\mathbb{R}) = A_1(\mathbb{R})$。由此及 [9, 引理 1], 可知，$f \in \mathrm{BLO}(\mathbb{R})$，因此 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}) = \mathrm{BLO}(\mathbb{R})$。这与经典结果矛盾，因为该结果指出 $\mathrm{BLO}(\mathbb{R})$ 不是线性空间（例如参见 [7, 第 553] 页）。因此，$\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R}) \subsetneq \mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})$。这进一步表明，当 $q = 1$ 时，（1.3）在端点情形下不成立。

借助引理 2.2(i) 和定理 2.4，我们得到以下关于 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$ 的刻画，其依据是单侧约翰–尼伦伯格不等式。

定理 2.7。 设 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$。则下列命题彼此等价。

(i) $f \in$ 有界下振荡$^+(\mathbb{R})$。

(ii) 存在正常数 A 和 B，使得对于任意 $I \in \mathcal{I}$ 和 $\lambda \in (0, \infty)$，

$$\left|I^- \cap \left\{\left(f - \operatorname*{ess\,inf}_{I^+} f\right)_+ > \lambda\right\}\right| \le Ae^{-B\lambda}\left|I^-\right|.$$

(iii) 对于任意 $q \in [1, \infty)$，

$$\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R}),q} := \sup_{I\in\mathcal{I}} \left\{\fint_{I^-} \left(f - \operatorname*{ess\,inf}_{I^+} f\right)_+^q\right\}^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

此外，对于任意 $q \in (1, \infty)$，$\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} \sim \|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R}),q}$，其中正等价常数与 f 无关。

证明。 证明 (iii) $\Longrightarrow$ (i) 显然，而 (ii) $\Longrightarrow$ (iii) 的证明可由卡瓦列里原理得到。我们只需证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii)。事实上，设 B与 (2.3) 中相同。由引理2.2(i) 中的 $\gamma := \frac{1}{2}$ 以及 (2.10)，可得对于任意 $I \in \mathcal{I}$，

$$\begin{aligned}\fint_{I^-} e^{\frac{B(f-\operatorname{ess\,inf}_{I^+} f)_+}{2\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}} &\le 1 + \fint_{I^-} e^{\frac{B(f-\operatorname{ess\,inf}_{I^+} f)}{2\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}} = 1 + \fint_{I^-} e^{\frac{Bf}{2\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}} \left[\operatorname*{ess\,inf}_{I^+} e^{\frac{Bf}{2\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}}\right]^{-1} \\ &\le 1 + 2\left[e^{\frac{Bf}{2\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}}\right]_{A_1^+(\mathbb{R})} \le 3 + 2A,\end{aligned}$$

其中 A 与式（2.3）中的定义相同。结合切比雪夫不等式，还可进一步推出，对于任意 $I \in \mathcal{I}$ 和 $\lambda \in (0, \infty)$，

$$\begin{aligned}\left|I^- \cap \left\{\left(f - \operatorname*{ess\,inf}_{I^+} f\right)_+ > \lambda\right\}\right| &= \left|I^- \cap \left\{e^{\frac{B(f-\operatorname{ess\,inf}_{I^+} f)_+}{2\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}} > e^{\frac{B\lambda}{2\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}}\right\}\right| \\ &\le e^{-\frac{B\lambda}{2\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}} \int_{I^-} e^{\frac{B(f-\operatorname{ess\,inf}_{I^+} f)_+}{2\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}} \\ &\le (3 + 2A)e^{-\frac{B\lambda}{2\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}}\left|I^-\right|.\end{aligned}$$

这就完成了对 (i) $\Longrightarrow$ (ii) 的证明，从而也完成了定理 2.7 的证明。 □

本节最后，我们证明在有界下振荡的定义中，可以选取两个不相邻的区间$^+(\mathbb{R})$。这一结果在命题 3.1 的证明中起着关键作用。

定理 2.8。 设 $\gamma \in (0, \frac{1}{2}]$. 则 $f \in$ 有界下振荡$^+(\mathbb{R})$ 当且仅当 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 且

$$|||f|||_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} := \sup_{\substack{-\infty<a<b\le c<d<\infty \\ b-a=d-c=\gamma(d-a)}} \fint_{(a,b)} \left[f - \operatorname*{ess\,inf}_{(c,d)} f \right]_+ < \infty.$$

此外， $\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} \sim |||f|||_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}$，其中正等价常数与 f 无关。

为证明定理 2.8，我们注意到，有界平均振荡$^+(\mathbb{R})$ 与一维具有时间滞后的抛物型 BMO 空间一致。此外，它们的范数等价。

引理 2.9。 设 $\gamma \in (0, \frac{1}{2}]$. 则 $f \in$ 有界平均振荡$^+(\mathbb{R})$ 当且仅当 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 且

$$|||f|||_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})} := \sup_{\substack{-\infty<a<b\le c<d<\infty \\ b-a=d-c=\gamma(d-a)}} \inf_{\alpha\in\mathbb{R}} \left[\fint_{(a,b)} (f-\alpha)_+ + \fint_{(c,d)} (f-\alpha)_- \right] < \infty.$$

此外， $\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})} \sim |||f|||_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}$，其中正等价常数与 f 无关。

证明。我们先证明必要性。设 f $\in \mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})$。由 $\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})$ 的单侧 John– Nirenberg 不等式的证明（参见 [30, 定理 3] 的证明），可推知存在$_\delta$f $_\delta$f$^-$正常数 δ和 K_1,，它们与 f 无关，使得 $e^{2\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}} \in A^+_\infty(\mathbb{R})$， $e^{2\|f\|}$有界平均振荡$^+(\mathbb{R}) \in A^-_\infty(\mathbb{R})$，并且

$$\max\left\{ \left[e^{\frac{\delta f}{2\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}}} \right]_{A^+_\infty(\mathbb{R})}, \left[e^{-\frac{\delta f}{2\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}}} \right]_{A^-_\infty(\mathbb{R})} \right\} \le K_1.$$

$_\delta$f $_\delta$f 再结合引理 2.1，可进一步推出 $e^{2\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}} \in A^+_2(\mathbb{R})$ 和 $[e^{2\|f\|}$有界平均振荡$^+(\mathbb{R})]_{A^+_2(\mathbb{R})} \le K_1^2$。由此以及单侧 Muckenhoupt 权重的 Jones 因子分解定理（例如参见 [43, 注释 (B)]），可得存在正常数 K_2 （与 f 无关）、$u \in A^+_1(\mathbb{R})$ 和 $v \in A^-_1(\mathbb{R})$，使得

$$\max\left\{ [u]_{A^+_1(\mathbb{R})}, [v]_{A^-_1(\mathbb{R})} \right\} \le K_2 \tag{2.13}$$

$_\delta$f和$e^{2\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}} = uv^{-1}$。由（2.13）、詹森不等式及引理2.2（i），我们推得，对任意 $-\infty < a < b \le c < d < \infty$ 满足$b - a = d - c = \gamma(d - a)$，

$$\begin{aligned} \exp\left\{ \fint_{(c,d)} (\alpha - \ln u)_+ \right\} &\le \fint_{(c,d)} e^{(\alpha-\ln u)_+} \le 1 + \fint_{(c,d)} e^{\alpha-\ln u} \\ &= 1 + \fint_{(c,d)} \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{(c,d)} u}{u} \le 2 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \exp\left\{ \fint_{(a,b)} (\ln u - \alpha)_+ \right\} &\le \fint_{(a,b)} e^{(\ln u-\alpha)_+} \le 1 + \fint_{(a,b)} e^{\ln u-\alpha} \\ &= 1 + \fint_{(a,b)} u \left[\operatorname*{ess\,inf}_{(c,d)} u \right]^{-1} \le 1 + \frac{K_2}{\gamma}, \end{aligned}$$

其中 $a := \ln(\operatorname{ess\,inf}_{(c,d)} u)$。这进一步意味着

$$\|\ln u\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})} \le \ln\left(2\left[1+\frac{K_2}{\gamma}\right]\right). \tag{2.14}$$

通过类似于（2.14）中的论证，我们得到

$$\|\ln v\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})} \le \ln\left(2\left[1+\frac{K_2}{\gamma}\right]\right).$$

结合这一点、（2.14），以及已证明的结论 $e^{2\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}} = uv^{-1}$，我们得出

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})} &\le \frac{2}{\delta}\left[\|\ln u\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})} + \|\ln v\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}\right]\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}\\ &\le \frac{4}{\delta}\ln\left(2\left[1+\frac{K_2}{\gamma}\right]\right)\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

由此完成必要性的证明。

接下来，我们证明充分性。不失一般性，可假设 $\gamma < \frac{1}{2}$。设 $\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})} < \infty$。对于任意 x、$t \in \mathbb{R}$，定义 $F(x,t) := f(t)$。那么，F 属于具有时间滞后的二维抛物 BMO 空间 $\mathrm{PBMO}^{-}_{1-\gamma}(\mathbb{R}^2)$，并且

$$\begin{aligned}\|F\|_{\mathrm{PBMO}^{-}_{1-\gamma}(\mathbb{R}^2)} &:= \sup_{\substack{-\infty<a<b<\infty\\ c\in\mathbb{R}}} \inf_{\alpha\in\mathbb{R}}\left[\fint_{(a,b)\times(c,c+\gamma(\frac{b-a}{2})^2)}(f-\alpha)_+\right.\\ &\quad\left.+\fint_{(a,b)\times(c+(2-\gamma)(\frac{b-a}{2})^2,c+2(\frac{b-a}{2})^2)}(f-\alpha)_-\right]\\ &= \|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

由此以及具有时间滞后的抛物 BMO 空间的抛物 John–Nirenberg 不等式（见 [18, 定理 4.1]），可推知存在与 f 无关的正常数 D 和 K，使得对于任意 $-\infty < a < b \le c < d < \infty$，其中 $b-a = d-c = \gamma(d-a)$，以及任意 $\lambda \in (0,\infty)$，都存在满足以下两项条件的 $\alpha \in \mathbb{R}$

$$|(a,b)\cap\{(f-\alpha)_+ > \lambda\}| \le De^{-\frac{K\lambda}{\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}}}(b-a)$$

and

$$|(c,d)\cap\{(f-\alpha)_- > \lambda\}| \le De^{-\frac{K\lambda}{\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}}}(d-c).$$

由此及卡瓦列里原理可得，对任意 $-\infty < a < b \le c < d < \infty$ 满足 $b-a = d-c = \gamma(d-a)$，

$$\fint_{(a,b)} e^{\frac{Kf}{2\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}}}\fint_{(c,d)} e^{-\frac{Kf}{2\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}}} \le \fint_{(a,b)} e^{\frac{K(f-\alpha)_+}{2\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}}}\fint_{(c,d)} e^{\frac{K(f-\alpha)_-}{2\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}}} \le (1+D)^2.$$

K f 将此结果与引理2.2(ii)结合起来，可得 $e^{2\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}} \in A_2^+(\mathbb{R})$，并且存在一个正常数 K f 常数 K_3，，它与 f 无关，使得 $[e^{2\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}}]_{A_2^+(\mathbb{R})} \le K_3$。此外，结合 [30, 定理 1], 可进一步推出 f $\in$ 有界平均振荡$^+(\mathbb{R})$ 且 $\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})} \lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}$。□

现在，我们准备证明定理 2.8。

定理 2.8 的证明。我们首先证明必要性。设 $f \in$ 有界下振荡$^+(\mathbb{R})$。由 (2.10)，我们得到 Bf Bf，使得 $e^{2\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}} \in A_1^+(\mathbb{R})$，且 $[e^{2\|f\|}$有界下振荡$^+(\mathbb{R})]_{A_1^+(\mathbb{R})} \le 1 + A$，其中 A 和 B 与 (2.3) 中的相同。结合引理 2.2(i)，进一步可得

$$\left\langle e^{\frac{Bf}{2\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}} \right\rangle_{A_1^+(\mathbb{R})} := \sup_{\substack{-\infty<a<b\le c<d<\infty \\ b-a=d-c=\gamma(d-a)}} \fint_{(a,b)} e^{\frac{Bf}{2\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}} \left[\operatorname*{ess\,inf}_{(c,d)} e^{\frac{Bf}{2\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}}\right]^{-1} \le \frac{1+A}{\gamma}.$$

将此结果与 (2.11) 中所用的类似论证相结合，并分别将其中的 ωI^-、I^+ 和 $[\omega]_{A_1^+(\mathbb{R})}$ $_{Bf}$ $_{Bf}$ 替换为 $e^{2\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}$、$(a, b)$、$(c, d)$ 和 $\langle e^{2\|}$ $_{f}$有界下振荡 $^{+}(\mathbb{R})\rangle_{A_1^+(\mathbb{R})}$，可得

$$|||f|||_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} \le \frac{2}{B} \ln\left(1 + \frac{2[1+A]}{\gamma}\right) \|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})},$$

从而完成必要性的证明。

接下来证明充分性。设 $|||f|||_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} < \infty$。由引理 2.9，可知$f \in$ 有界平均振荡$^+(\mathbb{R})$，且存在一个与 K无关的正常数f，使得

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})} \le K|||f|||_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})} \le K|||f|||_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}.$$

再结合有界平均振荡$^+(\mathbb{R})$ 的约翰–尼伦伯格不等式（见 [30, 定理 3]），进一步可知存在正常数 δ 和 C，二者均与 f无关，使得对于任意$-\infty < a < b \le c < d < \infty$ 满足 $b - a = d - c = \frac{\gamma}{1+\gamma}(d - a)$，

$$\fint_{(a,b)} e^{\frac{\delta f}{2K|||f|||_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}} \le e^{\frac{\delta f_{(b,2b-a)}}{2K|||f|||_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}} \fint_{(a,b)} e^{\frac{\delta[f-f_{(b,2b-a)}]_+}{2K|||f|||_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}} \le Ce^{\frac{\delta}{2K}} \operatorname*{ess\,inf}_{(c,d)} e^{\frac{\delta f}{2K|||f|||_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}}.$$

结合这一结果与引理 2.2(i)，我们得到 $e^{\delta f}$ $2K$$|||f|||$有界下振荡$^+(\mathbb{R}) \in A_1^+(\mathbb{R})$，且 $[e^{\delta f}$ $2K$$|||f|||$有界下振荡$^+(\mathbb{R})]_{A_1^+(\mathbb{R})} \le Ce^{\delta}$ $_2$$K$。由此，并采用与 (2.11) 中类似的论证，将其中的 ω 和 $[\omega]_{A_1^+(\mathbb{R})}$ 分别替换为 δf δf 和 $e^{2K|||f|||_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}$ 及 $[e^{2}$$K$$|||f|||$有界下振荡$^+(\mathbb{R})]_{A_1^+(\mathbb{R})}$，我们进一步推出 $f \in$ 有界下振荡$^+$，且

$$\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} \le \frac{2K}{\delta} \ln\left(1 + 2Ce^{\frac{\delta}{2K}}\right) |||f|||_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}.$$

这就完成了充分性的证明，从而得到推论2.8。 □

注 2.10。 考虑如下有界平均振荡$^+$-范数。设 $\gamma \in (0, 1\ 2\ )$。对于任意$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$，定义

$$\langle f\rangle_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})} := \sup_{\substack{-\infty<a<b\le c<d<\infty \\ b-a=d-c=\gamma(d-a)}} \fint_{(a,b)} [f - f_{(c,d)}]_+ < \infty.$$

与有界下振荡的情形不同，$\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}$ $\sim \langle\cdot\rangle_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}$ 是否仍是一个未解决问题。

3 Bennett 型刻画：以 有界下振荡$^+(\mathbb{R})$ 表示 有界平均振荡$^+(\mathbb{R})$

对 非中心单侧自然极大算子 N^- 的定义如下：对任意$f \in L^1_{\mathrm{loc}}$（$\mathbb{R}$）及 $x \in \mathbb{R}$,

$$N^-(f)(x) := \sup_{I\in\mathcal{I},\, x\in I^+} \fint_{I^-} f.$$

本节首先建立 N^- 从 $\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})$ 到 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$ 的有界性。随后，我们进一步给出关于 $\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})$ 的 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$ 的 Bennett 型刻画，这意味着 $\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$ 恰好与

$$\{N^-(F) : F \in \mathrm{BMO}^+(\mathbb{R}) \text{ and } N^-(F) < \infty \text{ almost everywhere}\}$$

除去有界函数的影响。

我们首先证明 N^- 从有界平均振荡$^+(\mathbb{R})$ 到有界下振荡$^+(\mathbb{R})$ 的有界性。为此，我们需要使用定理2.8、一侧 Calder´ón–Zygmund 分解（出自定理[42, 5.1], 的证明），以及一种迭代方法，该方法是定理[42, 5.1]证明中所用方法的一个轻微变体。

命题 3.1. 存在正常数 C，使得对于任意 $f \in$ 有界平均振荡$^+(\mathbb{R})$ 满足 $N^-(f) < \infty$ 几乎处处，均有 $N^-(f) \in$ 有界下振荡$^+(\mathbb{R})$ 且

$$\left\|N^-(f)\right\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} \le C\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}.$$

证明。 设 $f \in$ 有界平均振荡$^+(\mathbb{R})$ 满足 $N^-(f) < \infty$ 几乎处处，且 $I \in \mathcal{I}$。对于任意 $x \in I^-$，定义

$$N_1^-(f)(x) := \sup\left\{\fint_{J^-} f : J \in \mathcal{I},\ x \in J^+,\ \text{and } |J| \le \frac{|I|}{2}\right\}$$

and

$$N_2^-(f)(x) := \sup\left\{\fint_{J^-} f : J \in \mathcal{I},\ x \in J^+,\ \text{and } |J| \ge \frac{|I|}{2}\right\}.$$

由定理 2.8可知，我们只需证明存在正常数C，它与 f 和 I无关，使得对于任意 $j \in \{1, 2\}$,

$$\fint_{I^-}\left[N_j^-(f) - \operatorname*{ess\,inf}_{I^{+++}} N^-(f)\right]_+ \le C\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}. \tag{3.1}$$

在此及下文中，对于任意 $I := (a,b) \in \mathcal{I}$，令 $I^{--} := (a - \frac{b-a}{2}, a)$，以及 $I^{+++} := (b + \frac{b-a}{2}, 2b - a)$。我们首先证明 3.1 在 $j = 1$ 的情形下成立。注意，$f_{I^+\cup I^{++}} \le \operatorname{ess\,inf}_{I^{+++}} N^-(f)$。因此，

$$\fint_{I^-}\left[N_1^-(f) - \operatorname*{ess\,inf}_{I^{+++}} N^-(f)\right]_+ \le \fint_{I^-}\left[N_1^-(f) - \fint_{I^+\cup I^{++}} f\right]_+. \tag{3.2}$$

为估计 (3.2) 的右端，我们在 f 上构造一个单边 Calder´on–Zygmund 分解，其定义域为 $I^{--} \cup I^-$，如下所示。令 $\lambda \in (f_{I^+\cup I^{++}}, \infty)$，并

$$\begin{cases} g := f\mathbf{1}_{I^{--}\cup I^-\setminus\bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i^-} + \sum_{i\in\mathbb{N}} f_{\hat{I}_i^+}\mathbf{1}_{I_i^-}, \\ h_i := \left(f - f_{\hat{I}_i^+}\right)\mathbf{1}_{I_i^-} \text{ for any } i \in \mathbb{N}, \\ h := \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i, \end{cases}$$

其中，$\{I_i^-\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $I^{--} \cup I^-$ 的极大二进子区间，使得对任意 $i \in \mathbb{N}$，$f_{I_i^+} > \lambda$。此外，对任意 $i \in \mathbb{N}$，$\hat{I}_i^-$是 I_i^-的二进父区间，且 $\hat{I}_i^+ := \hat{I}_i^- + |\hat{I}_i^-|$。于是，$\{I_i^-\}_{i\in\mathbb{N}}$两两不交，$f\mathbf{1}_{I^{--}\cup I^-} = h + g$，且 $g \le \lambda$ 在 $I^{--} \cup I^-$中几乎处处成立。此外，对任意 $x \in I^-$,

$$\begin{aligned} N_1^-(f)(x) &\le \sup\left\{\fint_{J^-}(h_+ + g) : J \in \mathcal{I},\ x \in J^+,\ \text{and } |J| \le \frac{|I|}{2}\right\} \\ &\le M(h_+)(x) + \lambda, \end{aligned}$$

其中，M 表示 Hardy–Littlewood 极大算子，其定义如下：对任意$F \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$以及$x \in \mathbb{R}$，令$M(F)(x) := \sup_{I \in \mathcal{I}} \fint_I |F|$。结合这一点和 H¨older 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{I^-}\left[N_1^-(f)-\fint_{I^+\cup I^{++}} f\right]_+ &= \int_{I^-\cap\{N_1^-(f)>f_{I^+\cup I^{++}}\}}\left[N_1^-(f)-\fint_{I^+\cup I^{++}} f\right]\\ &\le \int_{I^-\cap\{N_1^-(f)>f_{I^+\cup I^{++}}\}}\left[M(h_+)+\lambda-\fint_{I^+\cup I^{++}} f\right]\\ &\le |I^-|^{\frac12}\|M(h_+)\|_{L^2(\mathbb{R})}+(\lambda-f_{I^+\cup I^{++}})\left|I^-\right|. \end{aligned} \tag{3.3}$$

现在，我们证明$h_+ \in L^2(\mathbb{R})$ 和 $\|h_+\|_{L^2(\mathbb{R})} \lesssim |I^-|^{\frac12}\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}$，其中隐含的正常数与$f$无关。事实上，由 [30, 定理 3], 可知，对任意$F \in$有界平均振荡$^+(\mathbb{R})$,

$$\|F\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})} \sim \sup_{I\in\mathcal{I}}\left[\fint_{I^-}(F-F_{I^+})_+^2\right]^{\frac12},$$

其中正等价常数与F无关。结合这一点以及$\hat{}\ \hat{}\{I_i^-\}_{i\in\mathbb{N}}$ 两两不交且$I_i \subset I_i^-$的事实，并且$I_i^-| = 2|I_i^-|$对任意$i \in \mathbb{N}$成立，我们得到

$$\begin{aligned}\|h_+\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}}\left[\sum_{i\in\mathbb{N}}\left(f-f_{\hat{I}_i^+}\right)_+\mathbf{1}_{I_i^-}\right]^2\\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}}\int_{I_i^-}\left(f-f_{\hat{I}_i^+}\right)_+^2 \le \sum_{i\in\mathbb{N}}|\hat{I}_i^-|\fint_{\hat{I}_i^-}\left(f-f_{\hat{I}_i^+}\right)_+^2 \lesssim |I^-|\,\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}^2,\end{aligned}$$

其中隐含的正常数与f无关。因此，$h_+ \in L^2(\mathbb{R})$ 且

$$\|h_+\|_{L^2(\mathbb{R})} \lesssim |I^-|^{\frac12}\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}.$$

利用这一点、(3.2)、M 在$L^2(\mathbb{R})$ 上有界这一事实，以及 (3.3)，并令 $\lambda \to f_{I^+\cup I^{++}}$，可得式 (3.1) 在情形 $j = 1$成立。

接下来，我们证明当3.1中$j = 2$时的情形。令$x \in I^-$、$y \in I^{+++}$、$J \in \mathcal{I}$ 满足$x \in J^+$ 且 $|J| \ge \frac{|I|}{2}$，并令$J_y := (y - |J^-|, y + |J^-|) \in \mathcal{I}$。我们先证明

$$\left(f_{J^-}-f_{J_y^-}\right)_+ \lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}, \tag{3.4}$$

其中隐含的正常数与f、J及J_y无关。事实上，令a、$z \in \mathbb{R}$ 满足$J^- := (a,z)$，且$b := y - |J_y^-|$。我们针对z考虑以下两种情形。

情形（1）$z \notin J_y^-$，即 $z \le b$。在这种情形下，$J^- \cap J_y^- = \emptyset$。令 $\widetilde{J}^- := J^- \cup [z, \frac{z+b}{2})$ 且$\widetilde{J}_y^- := J_y^- \cup (\frac{z+b}{2}, b]$。于是 $|J^-| = |J_y^-| \le |\widetilde{J}_y^-| = |\widetilde{J}^-|$。此外，我们断言 $|\widetilde{J}^-| \le 6|J^-|$。事实上，若 $b \le x$，则 $b - z \le x - z \le |J^+| = |J^-|$，因此 $|\widetilde{J}^-| = |J^-| + \frac{b-z}{2} \le 2|J^-|$。若 $b > x$，则 $\frac{|I^-|}{2} \le |J^-| = |J_y^-| \le 4|I^-|$，进而可得 $b - z \le y - z \le 4|I^-| + |J^+| \le 9|J^-|$，因此$|\widetilde{J}^-| = |J^-| + \frac{b-z}{2} \le 6|J^-|$。综上，$|\widetilde{J}^-| \le 6|J^-|$。结合$\widetilde{J}^-$与$\widetilde{J}_y^-$的定义，以及对于任意 $F \in$有界平均振荡$^+(\mathbb{R})$这一事实，

$$\|F\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})} \sim \sup_{I\in\mathcal{I}}\fint_{I^-}\fint_{I^+}[F(t)-F(s)]_+\,ds\,dt,$$

其中正等价常数与 F 无关（例如参见 [42, 第 1493]页），由此可得

$$\left(f_{J^-}-f_{J_y^-}\right)_+ \le \fint_{J^-}\fint_{J_y^-}[f(t)-f(s)]_+\,ds\,dt$$

$$\leq \left(\frac{|\widetilde{J}^-|}{|J^-|}\right)^2 \fint_{\widetilde{J}^-} \fint_{\widetilde{J}^-_y} [f(t)-f(s)]_+ \, ds\, dt \lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}, \tag{3.5}$$

从而完成了此情形下（3.4）的证明。

情形（2）$z \in J^-_y$，即 $z > b$。在此情形下，$J^- \cap J^-_y \neq \emptyset$。设 $k \in \mathbb{N}$ 满足

$$z-(k-1)(b-a) > b,\ z-k(b-a) \in [a,b],\ \text{and}\ z-(k+1)(b-a) < a. \tag{3.6}$$

若 $k = 1$，则由（3.6）及 $y - z = b - a$这一事实，容易推出

$$\left|J^- \cap J^-_y\right| = z - b \leq \frac{1}{2}(z-a) = \frac{1}{2}\left|J^-\right|. \tag{3.7}$$

将 J^- 分成两个等长区间，记为 J^-_1 和 J^-_2。类似地，将 J^-_y 分成两个等长区间，记为 $J^-_{y,1}$ 和 $J^-_{y,2}$。利用（3.7），对任意 $j \in \{1,2\}$，可得 $J^-_j \cap J_{y,\,j} = \emptyset$。再结合与（3.5）中类似的论证，分别将其中的 J^- 和 J^-_y 替换为 J^-_1 和 $J^-_{y,\,1}$，然后再替换为 J^-_2 和 $J^-_{y,\,2}$，进一步可推出

$$\begin{aligned}\left(f_{J^-} - f_{J^-_y}\right)_+ &= 2\left(f_{J^-_1} + f_{J^-_2} - f_{J^-_{y,1}} - f_{J^-_{y,2}}\right)_+ \\ &\leq 2\left(f_{J^-_1} - f_{J^-_{y,1}}\right)_+ + \left(f_{J^-_2} - f_{J^-_{y,2}}\right)_+ \lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}\end{aligned} \tag{3.8}$$

因此（3.4）在此情形下成立。

若 $k > 1$，则令 $d := b - a = y - z$，并对任意 $j \in \mathbb{Z}_+ \cap [0,k]$，定义 $J^-_j := (z - jd,\ z - [j-1]d)$。此外，定义 $J^-_k := (a,\ z - kd]$ 以及 $J^-_{k-1} := (b,\ z - (k-1)d]$。则

$$\begin{aligned}\left(f_{J^-} - f_{J^-_y}\right)_+ &= \frac{1}{|J^-|}\left[\sum_{j=1}^{k-1}\int_{J^-_j} f + \int_{\widetilde{J}^-_k} f - \sum_{j=1}^{k-1}\int_{J^-_{j-1}} f - \int_{\widetilde{J}^-_{k-1}} f\right]_+ \\ &\leq \frac{|\widetilde{J}^-_k|}{|J^-|}\left(f_{\widetilde{J}^-_k} - f_{\widetilde{J}^-_{k-1}}\right) + \sum_{j=1}^{k-1}\frac{|J^-_j|}{|J^-|}\left(f_{J^-_j} - f_{J^-_{j-1}}\right) \\ &\leq \frac{|\widetilde{J}^-_k|}{|J^-|}\left(f_{\widetilde{J}^-_k} - f_{\widetilde{J}^-_{k-1}}\right) + \frac{|J^-| - |\widetilde{J}^-_k|}{|J^-|}\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

接下来我们考虑 $|\widetilde{J}^-_k \cap J^-_{k-1}|$ 的以下两种情形。

情形 (2.1) $|\widetilde{J}^-_k \cap \widetilde{J}^-_{k-1}| \leq \frac{1}{2}|\widetilde{J}^-_k|$。在此情形下，通过与（3.8）中所用论证类似的论证，其中的 J^- 与 J^-_y 分别替换为 $\widetilde{J}^-_k$ 与 $\widetilde{J}^-_{k-1}$，我们得出

$$\left(f_{\widetilde{J}^-_k} - f_{\widetilde{J}^-_{k-1}}\right) \lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}.$$

由此结合（3.9），进一步可知（3.4）在此情形下成立。

情形 (2.2) 此时 $\widetilde{J}^-_k$ 与 $\widetilde{J}^-_{k-1}$ 几乎不相交。我们采用一种改编自 [42] 的迭代方法。令 $J^{(1)}_{\text{左}} := J^-$，$J^{(1)}_{\text{右}} := J^-_y$，$J^{(2)}_{\text{左}} := \widetilde{J}^-_k$，以及 $J^{(2)}_{\text{右}} := \widetilde{J}^-_{k-1}$。于是，我们可以将（3.9）改写为

$$\left|J^{(1)}_{\text{left}}\right|\left[f_{J^{(1)}_{\text{left}}} - f_{J^{(1)}_{\text{right}}}\right]_+ \leq \left|J^{(2)}_{\text{left}}\right|\left[f_{J^{(2)}_{\text{left}}} - f_{J^{(2)}_{\text{right}}}\right]_+ + \left[\left|J^{(1)}_{\text{left}}\right| - \left|J^{(2)}_{\text{left}}\right|\right]\|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}. \tag{3.10}$$

对于任意满足 $|J^{(i)}_{\text{左}} \cap J^{(i)}_{\text{右}}| > \frac{1}{2}|J^{(i)}_{\text{左}}|$ 的 $i \in \mathbb{N} \cap [2,\infty]$，令 $-\infty < a_i < b_i < z_i < y_i < \infty$ 满足 $J^{(i)}_{\text{左}} = (a_i, z_i)$ 和 $J^{(i)}_{\text{右}} = (b_i, y_i)$，并令 $k_i \in \mathbb{N} \cap [2,\infty$ 满足

$$z_i - k_i(b_i - a_i) > b_i,\ z_i - k_i(b_i - a_i) \in [a_i, b_i],\ \text{and}\ z_i - (k_i+1)(b_i - a_i) < a_i.$$

此外，令 $d_i := |J^{(i)}左| - |J^{(i)}左 \cap J^{(i)}右| = y_i - z_i = b_i - a_i$。对于任意 $j \in \mathbb{N} \cap [1, k_i]$，定义 $J_{i,j}^{-} := (z_i - jd_i, z_i - [j-1]d_i)$，并定义 $J^{(i+1)}左 := (a_i, z_i - k_i d_i)$ 和 $J^{(i+1)}右 := (b_i, z_i - [k_i - 1]d_i)$。由一个类似于(3.9)中所使用的论证，将其中的 J^{-}、J_{y}^{-}、J_{k-1}^{-} 和 J_{k}^{-} 分别替换为 $J^{(i)}$ 左、$J^{(i)}$ 右、$J^{(i+1)}$ 右 和 $J^{(i+1)}$ 左，可得

$$\left|J_{\mathrm{left}}^{(i)}\right|\left[f_{J_{\mathrm{left}}^{(i)}} - f_{J_{\mathrm{right}}^{(i)}}\right]_{+} \le \left|J_{\mathrm{left}}^{(i+1)}\right|\left[f_{J_{\mathrm{left}}^{(i+1)}} - f_{J_{\mathrm{right}}^{(i+1)}}\right]_{+} + \left[\left|J_{\mathrm{left}}^{(i)}\right| - \left|J_{\mathrm{left}}^{(i+1)}\right|\right]\|f\|_{\mathrm{BMO}^{+}(\mathbb{R})}.$$

结合这一点与（3.10），可得，对于任意 $i \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$，且 $|J^{(i)}左 \cap J^{(i)}右| > \frac{1}{2}|J^{(i)}左|$，

$$\left|J_{\mathrm{left}}^{(1)}\right|\left[f_{J_{\mathrm{left}}^{(1)}} - f_{J_{\mathrm{right}}^{(1)}}\right]_{+} \le \left|J_{\mathrm{left}}^{(i)}\right|\left[f_{J_{\mathrm{left}}^{(i)}} - f_{J_{\mathrm{right}}^{(i)}}\right]_{+} + \left[\left|J_{\mathrm{left}}^{(1)}\right| - \left|J_{\mathrm{left}}^{(i)}\right|\right]\|f\|_{\mathrm{BMO}^{+}(\mathbb{R})}. \tag{3.11}$$

若 $|J^{(N)}左 \cap J^{(N)}右| \le \frac{1}{2}|J^{(N)}左|$ 对于某个 $N \in \mathbb{N}$，那么，由（3.11）以及类似于（3.8）中所用的论证，将其中的 J^{-} 和 J_{y}^{-} 分别替换为 $J^{(N)}左$ 和 $J^{(N)}右$，可推得（3.4）成立。否则，利用以下事实：

$$\left|J_{\mathrm{left}}^{(i)}\right|\left[f_{J_{\mathrm{left}}^{(i)}} - f_{J_{\mathrm{right}}^{(i)}}\right]_{+} \to 0$$

由于 $i \to \infty$（这可由 $\{J^{(i)}左\}_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $\{J^{(i)}右\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的定义以及积分的绝对连续性推出）且由（3.11），我们得到（3.4）。

总之，对于任意的 $x \in I^{-}$、$y \in I^{+++}$，若 $J \in \mathcal{I}$ 满足 $x \in J^{+}$ 且 $|J| \ge |I_2^{\downarrow}|$，并且 $J_y := (y - |J^{-}|, y + |J^{-}|) \in \mathcal{I}$，则 (3.4) 成立。根据这一点以及 N^{-} 和 N_2^{-}的定义，我们得出，当 $j = 2$时，(3.1) 成立。命题 3.1 得证。□

注 3.2。(i) 我们给出一个反例，以说明 M^{-} 在 $\mathrm{BMO}^{+}(\mathbb{R})$ 上无界，这与经典理论截然不同。具体而言，令

$$f(x) := \begin{cases} 2x & \text{if } x \in [0, \infty), \\ \dfrac{1}{(x-1)^2} - 1 & \text{if } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

显然，f在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，因此 $\|f\|_{\mathrm{BMO}^{+}(\mathbb{R})} = 0$。此外，通过一些简单的计算，我们发现

$$M^{-}(f)(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in (-\infty, 0], \\ x + \dfrac{2}{x} & \text{if } x \in (0, \sqrt{2}), \\ 2x & \text{if } x \in [\sqrt{2}, \infty). \end{cases}$$

由于 $M^{-}(f)$ 在 $\mathbb{R}$上并非单调递增，因此 $\|M^{-}(f)\|_{\mathrm{BMO}^{+}(\mathbb{R})} \in (0, \infty]$，这进一步说明 M^{-} 在 $\mathrm{BMO}^{+}(\mathbb{R})$ 上无界。

(ii) 根据注释 2.6，我们推知命题 3.1 确实是对 [42, 定理5.1]的改进：它将目标空间 $\mathrm{BMO}^{+}(\mathbb{R})$ 替换为其真子空间有界下振荡$^{+}(\mathbb{R})$。该命题指出，存在正常数C，使得对任意正函数$f \in \mathrm{BMO}^{+}(\mathbb{R})$，若$M^{-}(f) \in L^{1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$，则 $\|M^{-}(f)\|_{\mathrm{BMO}^{+}(\mathbb{R})} \le C\|f\|_{\mathrm{BMO}^{+}(\mathbb{R})}$。

根据命题 3.1，我们可以将有界下振荡$^{+}(\mathbb{R})$ 表示为有界平均振荡$^{+}(\mathbb{R})$ 在 N^{-} 下的像，模去有界函数。这就建立了有界下振荡$^{+}(\mathbb{R})$ 关于有界平均振荡$^{+}(\mathbb{R})$ 的 Bennett 型刻画，它是 [7,定理]的单侧类比。

定理 3.3。$f \in$ 有界下振荡$^+(\mathbb{R})$ 当且仅当存在 $h \in L^\infty(\mathbb{R})$和 $F \in$ 有界平均振荡$^+(\mathbb{R})$，使得 $N^-(F) < \infty$ 几乎处处在 $\mathbb{R}$上满足

$$f = N^-(F) + h. \tag{3.12}$$

此外，$\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}$ ~下确界$\{\|F\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})} + \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\}$，其中下确界取遍所有形如(3.12) 的 f 分解，且正等价常数与 f 无关。

证明。我们首先证明必要性。设$f \in$ 有界下振荡$^+(\mathbb{R})$，x 是 f 的一个勒贝格点，且 $I \in \mathcal{I}$ 满足$x \in I^+$。于是

$$\fint_{I^-} f - f(x) \le \fint_{I^-} f - \operatorname*{ess\,inf}_{I^+} f \le \fint_{I^-} \left[f - \operatorname*{ess\,inf}_{I^+} f\right]_+ \le \|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}.$$

对所有满足$I \in \mathcal{I}$ 且 $x \in I^+$ 的区间取上确界，并利用勒贝格微分定理，得到

$$0 \le N^-(f)(x) - f(x) \le \|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}$$

因此 $N^-(f) - f \in L^\infty(\mathbb{R})$ 且 $\|N^-(f) - f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le \|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}$。所以，$f = f + [N^-(f) - f]$是 f 的一个形如 (3.12) 的分解，从而

$$\inf\left\{\|F\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})} + \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right\} \le \|f\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})} + \left\|N^-(f) - f\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le 2\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}.$$

现在，我们证明充分性。设 $h \in L^\infty(\mathbb{R})$，且 $F \in \mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})$，满足 $N^-(F) < \infty$ 几乎处处于 $\mathbb{R}$，使得 $f = N^-(F) + h$。由命题 3.1，我们推得 $N^-(F) \in$有界下振荡$^+(\mathbb{R})$，并且 $\|N^-(F)\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} \lesssim \|F\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})}$。结合注 2.6，进一步可得

$$\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} \le \|N^-(F)\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} + \|h\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} \lesssim \|F\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})} + \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R})},$$

其中隐含的正常数与F 和h无关。对f 的所有形如（3.12）的分解取下确界，我们得到

$$\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} \lesssim \inf\left\{\|F\|_{\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})} + \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right\}.$$

至此，充分性证明完成，因此定理3.3得证。 □

4 Coifman–Rochberg 型分解：有界下振荡$\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$函数，以及有界下振荡$\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})$函数到 $L^\infty(\mathbb{R})$的距离

本节中，我们建立有界下振荡$^+(\mathbb{R})$ 函数的 Coifman–Rochberg 型分解。作为应用，我们证明任意有界平均振荡$^+(\mathbb{R})$ 函数都可表示为两个有界下振荡$^+(\mathbb{R})$ 函数之和，并明确描述有界下振荡$^+(\mathbb{R})$ 函数到 $L^\infty(\mathbb{R})$ 的距离。首先，我们整理如下的 $A_1^+(\mathbb{R})$ 权的 Coifman–Rochberg 型引理，这恰好就是引理 2。3] 和 [28,推论 3]。

引理 4.1。(i) 设 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 满足：在 $\mathbb{R}$上，$M^-(f) < \infty$ 几乎处处成立。那么存在与 f 无关的 $\delta \in (0,1)$，使得 $[M^-(f)]^\delta \in A_1^+(\mathbb{R})$ 且 $[[M^-(f)]^\delta]_{A_1^+(\mathbb{R})} \le 4$。

(ii) 设 $\omega \in A_1^+(\mathbb{R})$。则存在仅依赖于 $[\omega]_{A_1^+(\mathbb{R})}$ 的 $\delta \in (0,1)$，使得 $\omega = b[M^-(f)]^\delta$，其中 $f := \omega^{\frac{1}{\delta}} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$，且 $b := [M(\omega^{\frac{1}{\delta}})]^\delta$ 满足 $1 \le \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le C$，而 C 是仅依赖于 $[\omega]_{A_1^+(\mathbb{R})}$ 的正常数。

接下来，利用引理 4.1 和定理 2.4，我们建立有界下振荡$^+(\mathbb{R})$ 中函数的 Coifman–Rochberg 型分解，这也给出了有界下振荡$^+(\mathbb{R})$ 的一个等价范数。

定理 4.2。 $f \in$ 有界下振荡$^+(\mathbb{R})$ </style}当且仅当存在 $(0,\infty)$、非负函数 $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$以及 $b \in L^\infty(\mathbb{R})$ 使得

$$f = \alpha \ln\left(M^-(g)\right) + b. \tag{4.1}$$

此外，

$$\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} \sim \inf\left\{\alpha + \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right\} =: \|f\|^*_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})},$$

其中，下确界取遍 f 的所有形如 (4.1) 的分解，且正的等价常数与 f 无关。

证明。我们先证明必要性。设 f $\in$ 有界下振荡$^+(\mathbb{R})$。由 (2.10) 和引理 4.1(ii) 可知，存在 $\delta \in (0,1)$（与 f 无关）、非负函数 g $\in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$，以及 B b $\in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$（其 $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$-范数与 f 无关），使得 $\mathrm{e}^{2\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}} = \mathrm{b}[\mathrm{M}^-(\mathrm{g})]^\delta$，其中 B 与引理 2.5 中的 B 相同。因此，

$$f = \frac{2\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}{B} \ln b + \frac{2\delta\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}}{B} \ln\left(M^-(g)\right)$$

因此

$$\|f\|^*_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} \le \frac{2}{B}\left[\delta + \|\ln b\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right]\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})}.$$

必要性的证明至此完成。

现在证明充分性。假设 f $= \alpha\ln(\mathrm{M}^-(\mathrm{g})) + \mathrm{b}$ 是 f 的一个形如 (4.1) 的分解。由引理 4.1(i)，可知存在一个与 g 无关的 $\delta \in (0,1)$，使得 $[\mathrm{M}^-(\mathrm{g})]^\delta \in \mathrm{A}^+_1(\mathbb{R})$ 且 $[\{\mathrm{M}^-(\mathrm{g})\}^\delta]_{\mathrm{A}^+_1(\mathbb{R})} \le 4$。结合 (2.12)，进一步得到 $\alpha\ln(\mathrm{M}^-(\mathrm{g})) \in$ 有界下振荡$^+(\mathbb{R})$，并且

$$\left\|\alpha \ln\left(M^-(g)\right)\right\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} = \left\|\frac{\alpha}{\delta}\ln\left(\left[M^-(g)\right]^\delta\right)\right\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} \le \frac{2\alpha\ln 3}{\delta}.$$

结合这一点与注记 2.6，可得 $f \in$ 有界下振荡$^+(\mathbb{R})$，并且

$$\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} \le 2\|b\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \frac{2\alpha\ln 3}{\delta} \le \frac{2\ln 3}{\delta}\left[\alpha + \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right].$$

对所有形如 ***(4.1)*** 的分解 $f = \alpha\ln(M^-(g)) + b$ 取下确界，即可得到

$$\|f\|_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} \le \frac{2\ln 3}{\delta}\|f\|^*_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})},$$

由此充分性得证，从而定理 4.2 的证明完成。 □

因此，我们建立了 $\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})$ 的 Coifman–Rochberg 型刻画，并证明任意 $\mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})$ 函数都可以分解为两个有界下振荡$^+(\mathbb{R})$ 函数之和。

推论 4.3. 以下陈述彼此等价。

(i) $f \in$ 有界平均振荡$^+(\mathbb{R})$.

(ii) 存在 $\alpha,\beta \in (0,\infty)$、非负函数 $g,h \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$，以及 $b \in L^\infty(\mathbb{R})$，使得 t

$$f = \alpha\ln\left(M^-(g)\right) - \beta\ln\left(M^+(h)\right) + b.$$

(iii) 存在 $g,h \in$ 有界下振荡$^+(\mathbb{R})$，使得$f = g + h$。

证明。我们首先证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii)。设 $f \in \mathrm{BMO}^+(\mathbb{R})$。由 (1.3) 可知，存在 $\lambda \in (0,\infty)$ 和 $\omega \in A_2^+(\mathbb{R})$，使得 $f = \lambda \ln \omega$。结合单侧 Muckenhoupt 权的 Jones 因子分解定理和引理 4.1(ii)，进一步可知存在 $\delta,\sigma \in (0,1)$、非负函数 $g, h \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$，以及 $\widetilde{b} \in L^\infty(\mathbb{R})$，使得

$$f = \lambda\delta \ln\left(M^-(g)\right) - \lambda\sigma \ln\left(M^+(h)\right) + \lambda \ln \widetilde{b}$$

因此 (ii) 成立，其中 $\alpha := \lambda\delta$，$\beta := \lambda\sigma$，且 $b := \lambda \ln \widetilde{b}$。断言 (ii) $\Longrightarrow$ (iii) 是定理 4.2 的直接推论，而断言 (iii) $\Longrightarrow$ (i) 可由注2.6 及有界平均振荡的次可加性立即推出$^+(\mathbb{R})$。至此，推论 4.3 的证明完毕。 □

此外，我们还用$^+(\mathbb{R})L^\infty(\mathbb{R}$中函数到 $\|\cdot\|^*$ 有界下振荡$^+(\mathbb{R})$的距离，给出其关于 [6, 定理 9]的一侧情形的对应结果。

推论 4.4. 设 $f \in$ 有界下振荡$^+(\mathbb{R})$。则

$$\inf\left\{\|f-h\|^*_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} : h \in L^\infty(\mathbb{R})\right\} = \sup\left\{\epsilon \in (0,\infty) : e^{\epsilon f} \in A_1^+(\mathbb{R})\right\}.$$

证明。 注意到

$$\begin{aligned}\inf\left\{\|f-h\|^*_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} : h \in L^\infty(\mathbb{R})\right\} &= \inf\{\alpha + \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R})} : h \in L^\infty(\mathbb{R}) \text{ and } \\ &\qquad f - h = \alpha \ln\left(M^-(g)\right) + b \text{ is a decomposition} \\ &\qquad \text{of } f-h \text{ of the form (4.1)}\} \\ &= \inf\left\{\alpha \in (0,\infty) : \text{there exists } g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \right. \\ &\qquad \left. \text{such that } f - \alpha \ln\left(M^-(g)\right) \in L^\infty(\mathbb{R})\right\}.\end{aligned}$$

结合这一结果与引理4.1，可得

$$\begin{aligned}&\sup\left\{\epsilon \in (0,\infty) : e^{\epsilon f} \in A_1^+(\mathbb{R})\right\} \\ &\quad= \inf\left\{\epsilon \in (0,\infty) : \text{there exist } \delta \in (0,1),\, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}),\right. \\ &\qquad \left.\text{and } b \in L^\infty(\mathbb{R}) \text{ such that } e^{\frac{f}{\epsilon}} = b\left[M^-(g)\right]^\delta\right\} \\ &\quad= \inf\left\{\epsilon \in (0,\infty) : \text{there exist } \delta \in (0,1),\, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}),\right. \\ &\qquad \left.\text{and } b \in L^\infty(\mathbb{R}) \text{ such that } \frac{f}{\epsilon} = \ln b + \delta \ln\left(M^-(g)\right)\right\} \\ &\quad= \inf\left\{\epsilon \in (0,\infty) : \text{there exist } \delta \in (0,1) \text{ and } g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})\right. \\ &\qquad \left.\text{such that } f - \epsilon\delta \ln\left(M^-(g)\right) \in L^\infty(\mathbb{R})\right\} \\ &\quad= \inf\left\{\epsilon \in (0,\infty) : \text{there exists } g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \text{ such that}\right. \\ &\qquad \left. f - \epsilon \ln\left(M^-(g)\right) \in L^\infty(\mathbb{R})\right\} \\ &\quad= \inf\left\{\|f-h\|^*_{\mathrm{BLO}^+(\mathbb{R})} : h \in L^\infty(\mathbb{R})\right\},\end{aligned}$$

至此便完成了推论 4.4的证明。 □

5 双重非线性抛物方程的高维推广与应用

在本节中，我们始终固定 p ∈ (1, ∞)。如第 1 节所述，具有时间滞后的抛物型BMO空间与双重非线性抛物方程 (1.4) 密切相关。(1.4) 的解具有如下缩放性质：若 u(x, t) 是 (1.4) 的解，则对任意 λ ∈ (0, ∞)，u(λx, λ^p t) 也是其解。正是这一性质使得在所有与 (1.4) 相关的估计中，必须使用抛物矩形来取代欧几里得立方体。设 (x, t) := (x1, . . . , xn, t) ∈ $\mathbb{R}^{n+1}$，且 L ∈ (0, ∞)。定义以 (x, t) 为中心、边长 l(R) := L 的抛物矩形 R(x, t, L) 如下：

$$R := R(x,t,L) := Q(x,L) \times \left[t - L^p, t + L^p\right),$$

其中，对于任意$i \in \mathbb{N} \cap [1,n]\}$，$Q(x,L) := \{y := (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n : x_i - L \le y_i < x_i + L$ 是以x 为中心、边长为 $2L$的立方体，且该立方体位于 $\mathbb{R}^n$ 中。此外，对于任意给定的 $\gamma \in [0,1)$，分别定义$R^-(\gamma)$、$R^+(\gamma)$和$R^{++}(\gamma)$如下：

$$R^-(\gamma) := Q(x,L) \times \left[t - L^p, t - \gamma L^p\right), \ R^+(\gamma) := Q(x,L) \times \left[t + \gamma L^p, t + L^p\right),$$

and

$$R^{++}(\gamma) := Q(x,L) \times \left[t + (1+2\gamma)L^p, t + (2+\gamma)L^p\right),$$

其中，γ 称为时间滞后。用 $\mathcal{R}$ 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$中所有抛物矩形的集合。此外，对于任意矩形 R := Q(x, L) × [t, T) ⊂ $\mathbb{R}^{n+1}$，其中 x ∈ $\mathbb{R}^n$、L ∈ (0, ∞) 且 −∞ < t < T < ∞，令 l_x(R) := L，l_t(R) := T − t。基于此，我们接下来回顾具有时间滞后的抛物型 BMO 空间的定义，见 [18,定义 2.4]。

定义 5.1. 设 $\gamma \in [0,1)$。具有时间滞后的抛物型BMO空间$\mathrm{PBMO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})$ 定义为所有满足下述条件的$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 的集合：

$$\|f\|_{\mathrm{PBMO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})} := \sup_{R\in\mathcal{R}} \inf_{c\in\mathbb{R}} \left[\fint_{R^-(\gamma)} (f-c)_+ + \fint_{R^+(\gamma)} (f-c)_- \right] < \infty.$$

若上述条件在时间轴反向时仍成立，则$f \in \mathrm{PBMO}^+_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})$（另一种具有时间滞后的抛物型 *BMO* 空间）。

从函数空间的角度来看，具有时间滞后的抛物型BMO空间可视为一维单侧 BMO 空间自然的高维对应物，并具有类似的调和分析性质。另一方面，受方程 (1.4) 解的正则性理论的启发，Kinnunen 和 Saari [21] 以及 Kinnunen 和 Myyryl¨ainen [16] 引入了具有时间滞后的抛物型 Muckenhoupt 类，这也是一维单侧 Muckenhoupt 类在高维中的推广。设 $\gamma \in [0,1)$ 且 $q \in [1,\infty]$。具有时间滞后的 抛物型 *Muckenhoupt* 类 $A^+_q(\gamma)$ 定义为满足下述条件的 权 ω 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的全体

$$[\omega]_{A^+_q(\gamma)} := \begin{cases} \sup\limits_{R\in\mathcal{R}} \fint_{R^-(\gamma)} \omega \left[\operatorname{ess\,inf}\limits_{R^+(\gamma)} \omega\right]^{-1} < \infty & \text{if } q = 1, \\ \sup\limits_{R\in\mathcal{R}} \fint_{R^-(\gamma)} \omega \left[\fint_{R^+(\gamma)} \omega^{\frac{1}{1-q}}\right]^{q-1} < \infty & \text{if } q \in (1,\infty) \end{cases}$$

且$A^+_\infty(\gamma) := \bigcup_{q\in(1,\infty)} A^+_q(\gamma)$。如果上述条件在时间轴反向时成立，那么$\omega \in A^-_q(\gamma)$（另一种具有时间滞后的抛物型穆肯霍普特类）。类似于（1.1）和（1.3），在抛物情形下，具有时间滞后的抛物型 BMO 空间中的所有函数都具有如下

与所有具有时间滞后的抛物 Muckenhoupt 权之间的指数-对数对应：对于任意给定的 $\gamma \in (0,1)$ 以及任意给定的 $q \in (1,\infty]$，

$$\mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) = \left\{\lambda \ln \omega : \omega \in A^{+}_{q}(\gamma) \text{ and } \lambda \in [0,\infty)\right\} \tag{5.1}$$

（见 [21, 引理 7。4]）。对于端点情形$q = 1$，这一关系也不成立（见备注5.11）。因此，与有界平均振荡$^{+}$（$\mathbb{R}$）情形一样，这引出了一个自然的问题：寻找一种合适的替代空间来取代$\mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$，使得（5.1）在 $q = 1$ 时成立。本节的主要目的之一就是对这一问题给出肯定的回答。

本节安排如下。在第5.1小节中，我们引入带时间滞后的抛物型有界下振荡空间 $\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$，将其作为一维单侧有界下振荡空间的自然高维类比，并用$A^{+}_{1}(\gamma)$对其进行刻画，从而回答上述问题。此外，我们证明该空间不依赖于时间滞后的选择。第5.2小节旨在给出 $\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 的 Bennett 型刻画。随后，在第5.3小节中，我们通过 Coifman–Rochberg 型分解来刻画 $\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 函数。在第5.4小节中，我们建立 $\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 与双重非线性抛物方程之间的关系，这是本节的第二个主要目的。最后，在第5.5小节中，我们给出一个必要条件：集合的抛物型$^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ γ-FIT 弱孔隙性保证抛物距离函数的负对数属于 $\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$。

5.1 用 $A^{+}_{1}(\gamma)$刻画 $\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$

在本小节中，我们首先引入带时间滞后的抛物型 BLO 空间 $\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$。然后，我们通过对 $\mathrm{PBLO}A^{+}_{1}(\gamma)$ 应用抛物 John–Nirenberg 不等式（见引理 5.3），证明它与 $A^{+}_{1}(\gamma)$ 的指数-对数对应关系（见定理 5.4）。作为推论，我们证明 $\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 与时间滞后的选择无关（见定理 5.8）。

定义 5.2。令 $\gamma \in [0,1)$。带时间滞后的抛物型 有界下振荡空间 $\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 定义为满足以下条件的所有 $f \in L^{1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 的集合

$$\|f\|_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})} := \sup_{R\in\mathcal{R}} \fint_{R^{-}(\gamma)} \left[f - \operatorname*{ess\,inf}_{R^{+}(\gamma)} f\right]_{+} + \fint_{R^{++}(\gamma)} \left[f - \operatorname*{ess\,inf}_{R^{+}(\gamma)} f\right]_{-} < \infty.$$

如果上述条件在时间轴反向时成立，则$f \in \mathrm{PBLO}^{+}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$（另一个带时间滞后的抛物型 *BLO* 空间）。

接下来，我们用 $A^{+}_{1}(\gamma)$ 刻画 $\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$。

定理 5.3。设 $\gamma \in (0,1)$。那么存在正常数 B，使得对任意 $f \in PBLO^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$，若 $\epsilon \in (0, B\|f\|_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})})$，则 $e^{\epsilon f} \in A^{+}_{1}(\gamma)$。反之，对任意 $\omega \in A^{+}_{1}(\gamma)$，$\ln \omega \in PBLO^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$，且 $\|\ln \omega\|_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})} \le 2\ln(1 + [\omega]_{A^{+}_{1}(\gamma)})$。特别地，

$$\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) = \left\{\lambda \ln \omega : \omega \in A^{+}_{1}(\gamma) \text{ and } \lambda \in [0,\infty)\right\}.$$

为了证明定理5.3，我们需要为带前置时间滞后的抛物 BLO 空间建立抛物 John–Nirenberg 不等式，而这直接由 [18, 推论 3。2]得出。

引理 5.4。设 $0 \le \gamma < \alpha < 1$ 且 $f \in \mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$。则存在正常数 A 和 B，使得对于任意 $R \in \mathcal{R}$ 且 $\lambda \in (0,\infty)$，

$$\left|R^{++}(\alpha) \cap \left\{\left[f - \operatorname*{ess\,inf}_{R^{+}(\gamma)} f\right]_{-} > \lambda\right\}\right| \le A e^{-\frac{B\lambda}{\|f\|_{\mathrm{PBLO}^{+}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})}}} \left|R^{++}(\alpha)\right|$$

and

$$\left|R^-(\alpha)\cap\left\{\left[f-\operatorname*{ess\,inf}_{R^+(\gamma)}f\right]_+>\lambda\right\}\right|\le Ae^{-\frac{B\lambda}{\|f\|_{\mathrm{PBLO}^+_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})}}}\left|R^-(\alpha)\right|$$

现在，我们可以证明定理5.3。

定理 *5.3* 的证明。 设 $f\in\mathrm{PBLO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})$，并定义 $\alpha:=\frac{1+\gamma}{2}$。由引理 5.4 和卡瓦列里原理可知，存在正常数 A 和 B，使得对于任意 $\epsilon\in(0,\frac{B}{\|f\|_{\mathrm{PBLO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})}})$ 及 $R\in\mathcal{R}$，

$$\begin{aligned}\fint_{R^-(\alpha)}e^{\epsilon f}&\le e^{\epsilon\operatorname*{ess\,inf}_{R^+(\gamma)}f}\fint_{R^-(\alpha)}e^{\epsilon[f-\operatorname*{ess\,inf}_{R^+(\gamma)}f]_+}\\&\le\left[1+\frac{A\epsilon\|f\|_{\mathrm{PBLO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})}}{B-\epsilon\|f\|_{\mathrm{PBLO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})}}\right]\operatorname*{ess\,inf}_{R^+(\gamma)}f\\&\le\left[1+\frac{A\epsilon\|f\|_{\mathrm{PBLO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})}}{B-\epsilon\|f\|_{\mathrm{PBLO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})}}\right]\operatorname*{ess\,inf}_{R^+(\alpha)}f.\end{aligned}\tag{5.2}$$

对所有 $R\in\mathcal{R}$取上确界，并利用 [16, 定理 3.1],，可得 $e^{\epsilon f}\in A_1^+(\gamma)$。反过来，设 $\omega\in A_1^+(\gamma)$。由詹森不等式可知，对于任意 $R\in\mathcal{R}$,

$$\begin{aligned}\exp\left\{\fint_{R^-(\gamma)}\left[\ln\omega-\operatorname*{ess\,inf}_{R^+(\gamma)}\ln\omega\right]_+\right\}&\le\fint_{R^-(\gamma)}\exp\left\{\left[\ln\omega-\operatorname*{ess\,inf}_{R^+(\gamma)}\ln\omega\right]_+\right\}\\&\le1+\fint_{R^-(\gamma)}\omega\left[\operatorname*{ess\,inf}_{R^+(\gamma)}\omega\right]^{-1}\le1+[\omega]_{A_1^+(\gamma)}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\exp\left\{\fint_{R^{++}(\gamma)}\left[\ln\omega-\operatorname*{ess\,inf}_{R^+(\gamma)}\ln\omega\right]_-\right\}&\le\fint_{R^{++}(\gamma)}\exp\left\{\left[\ln\omega-\operatorname*{ess\,inf}_{R^+(\gamma)}\ln\omega\right]_-\right\}\\&\le1+\fint_{R^{++}(\gamma)}\frac{\operatorname*{ess\,inf}_{R^+(\gamma)}\omega}{\omega}\\&\le1+\fint_{R^+(\gamma)}\omega\left[\operatorname*{ess\,inf}_{R^{++}(\gamma)}\omega\right]^{-1}\le1+[\omega]_{A_1^+(\gamma)}.\end{aligned}$$

对所有 $R\in\mathcal{R}$取上确界，可得 $\ln\omega\in\mathrm{PBLO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})$，并且

$$\|\ln\omega\|_{\mathrm{PBLO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})}\le2\ln\left(1+[\omega]_{A_1^+(\gamma)}\right).$$

这就完成了定理5.3的证明。 □

注 5.5. 设 $\gamma\in(0,1)$。与注 2.6类似，我们指出

$$L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})\subsetneq\mathrm{PBLO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})\subsetneq\mathrm{PBMO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1}).$$

事实上，根据定义 5.2，我们可得 $L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})\subset\mathrm{PBLO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})\subset\mathrm{PBMO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})$，且对于任意 $f\in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$，$\|f\|_{\mathrm{PBMO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})}\lesssim\|f\|_{\mathrm{PBLO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})}\le4\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})}$，其中隐含的正常数与 f 无关。利用这一点以及 $\mathrm{PBMO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})$ 零空间的刻画（见 [22, 定理 3.1]），我们得出，对于任意 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$，$\|f\|_{\mathrm{PBLO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})}=0$ 当且仅当存在一个非递增函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对于几乎处处的 $(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}$，$f(x,t)=g(t)$。这进一步意味着 $[\mathrm{PBLO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})\backslash L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]\neq\emptyset$。我们证明 $[\mathrm{PBMO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})\backslash$

$\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})] \neq \emptyset$用反证法证明。若 $\mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$，则 $\mathrm{PBMO}^{+}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathrm{PBLO}^{+}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$，结合 [22, 推论 4.17(ii)], 进一步可得

$$\mathrm{PBMO}(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathrm{PBMO}^{+}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) \cap \mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathrm{PBLO}^{+}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) \cap \mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}),$$

其中，$\mathrm{PBMO}(\mathbb{R}^{n+1})$ 是抛物BMO空间，定义为所有满足下述条件的$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$所构成的空间：

$$\|f\|_{\mathrm{PBMO}(\mathbb{R}^{n+1})} := \sup_{R\in\mathcal{R}} \inf_{c\in\mathbb{R}} \fint_R |f-c| < \infty.$$

由此及定理5.3可推得，对于任意$f \in \mathrm{PBMO}(\mathbb{R}^{n+1})$，存在 $\epsilon \in (0,\infty)$，使得$e^{\epsilon f} \in A^{+}_{1}(\gamma) \cap A^{-}_{1}(\gamma) = A_1(\mathbb{R}^{n+1})$，其中$A_1(\mathbb{R}^{n+1})$是与抛物矩形相关的 *Muckenhoupt* 类，定义为满足下述条件的 ω 上的所有权的集合：

$$[\omega]_{A_1(\mathbb{R}^{n+1})} := \sup_{R\in\mathcal{R}} \fint_R \omega \left[\operatorname*{ess\,inf}_R \omega\right]^{-1} < \infty.$$

由此及 [9, 引理 1], 可知，$f \in \mathrm{PBLO}(\mathbb{R}^{n+1})$ 因此 $\mathrm{PBMO}(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathrm{PBLO}(\mathbb{R}^{n+1})$，其中 $\mathrm{PBLO}(\mathbb{R}^{n+1})$ 是抛物有界下振荡空间，定义为所有满足下述条件的函数$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$：

$$\|f\|_{\mathrm{PBLO}(\mathbb{R}^{n+1})} := \sup_{R\in\mathcal{R}} \fint_R \left|f - \operatorname*{ess\,inf}_R f\right| < \infty.$$

这与经典结果矛盾：$\mathrm{PBLO}(\mathbb{R}^{n+1})$ 不是线性空间（例如参见 [7,第 553] 页）。因此，$\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) \subsetneq$ 包含于 $\mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$。这进一步意味着，对于端点情形 5.1）不成立$q = 1$。

根据定理 5.3，我们得到 $\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 关于抛物 John–Nirenberg 不等式的以下刻画。

定理 5.6。设 $\gamma \in (0,1)$ 且 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$。则以下陈述等价。

(i) $f \in \mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$。

(ii) 存在正常数 A 和 B，使得对于任意 $R \in \mathcal{R}$ 以及 $\lambda \in (0,\infty)$，

$$\left|R^{-}(\gamma) \cap \left\{\left[f - \operatorname*{ess\,inf}_{R^{+}(\gamma)} f\right]_{+} > \lambda\right\}\right| \le Ae^{-B\lambda}\left|R^{-}(\gamma)\right|$$

and

$$\left|R^{++}(\gamma) \cap \left\{\left[f - \operatorname*{ess\,inf}_{R^{+}(\gamma)} f\right]_{-} > \lambda\right\}\right| \le Ae^{-B\lambda}\left|R^{++}(\gamma)\right| \tag{5.3}$$

(iii) 对于任意 $q \in [1,\infty)$，

$$\|f\|_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}),q} := \sup_{R\in\mathcal{R}} \left\{\fint_{R^{-}(\gamma)} \left[f - \operatorname*{ess\,inf}_{R^{+}(\gamma)} f\right]_{+}^{q} + \fint_{R^{++}(\gamma)} \left[f - \operatorname*{ess\,inf}_{R^{+}(\gamma)} f\right]_{-}^{q}\right\}^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

此外，对于任意 $q \in (1,\infty)$，$\|f\|_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})} \sim \|f\|_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}),\,q}$，其中正等价常数与 f 无关。

为证明定理 5.6，我们首先回顾一下，具有时间滞后的抛物型穆肯霍普特类与时间滞后以及两个矩形之间的距离均无关，这恰好就是[16, 定理 3。1]。下文中，对于任意子集 $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 和 $a \in (0, \infty)$，令

$$E + (\mathbf{0}, a) := \left\{(x, t + a) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x, t) \in E\right\}.$$

引理 5.7。 设 $\gamma, \alpha \in (0, 1)$, $q \in [1, \infty)$, 且 $\tau \in (1 - \alpha, \infty)$。则 $\omega \in A_q^+(\gamma)$ 当且仅当

$$\langle \omega \rangle_{A_q^+(\alpha)} := \begin{cases} \sup\limits_{R \in \mathcal{R}} \fint_{R^-(\alpha)} \omega \left[\operatorname{ess\,inf}\limits_{S^+(\alpha)} \omega\right]^{-1} < \infty & \text{if } q = 1, \\ \sup\limits_{R \in \mathcal{R}} \fint_{R^-(\alpha)} \omega \left[\fint_{S^+(\alpha)} \omega^{\frac{1}{1-q}}\right]^{q-1} < \infty & \text{if } q \in (1, \infty), \end{cases}$$

其中，对于任意 $R \in \mathcal{R}$、$S^+(\alpha) := R^-(\alpha) + (\mathbf{0}, \tau[l(R)]^p)$。此外，$[\omega]_{A_q^+(\gamma)}$ 与 $\langle \omega \rangle_{A_q^+(\alpha)}$ 仅相互依赖。

我们现在可以证明定理5.6。

定理 5.6 的证明。 证明 (iii) $\Longrightarrow$(i) 显然，而 (ii) $\Longrightarrow$ (iii) 可由卡瓦列里原理推出。我们只需证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii)。事实上，设 B与引理 5.4 中相同。另一方面，根据引理 5.7 以及其中的 $\tau := 1 + \alpha$ 和 (5.2)，我们可得存在一个正常数 A 使得对任意 $R \in \mathcal{R}$,

$$\begin{aligned} \fint_{R^-(\gamma)} e^{\frac{B[f - \operatorname{ess\,inf} f]_+}{2\|f\|_{\mathrm{PBLO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})}}} &\le 1 + \fint_{R^-(\gamma)} e^{\frac{B[f - \operatorname{ess\,inf} f]}{2\|f\|_{\mathrm{PBLO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})}}} \\ &= 1 + \fint_{R^-(\gamma)} e^{\frac{Bf}{2\|f\|_{\mathrm{PBLO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})}}} \left[\operatorname*{ess\,inf}_{R^+(\gamma)} e^{\frac{Bf}{2\|f\|_{\mathrm{PBLO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})}}}\right]^{-1} \\ &\le 1 + \left[e^{\frac{Bf}{2\|f\|_{\mathrm{PBLO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})}}}\right]_{A_1^+(\gamma)} \le A. \end{aligned}$$

由此并结合切比雪夫不等式，进一步可得，对于任意实数集 $\in \mathcal{R}$ 和 $\lambda \in (0, \infty)$,

$$\begin{aligned} \left|R^-(\gamma) \cap \left\{\left[f - \operatorname*{ess\,inf}_{R^+(\gamma)} f\right]_+ > \lambda\right\}\right| &= \left|R^-(\gamma) \cap \left\{e^{\frac{B[f - \operatorname{ess\,inf} f]_+}{2\|f\|_{\mathrm{PBLO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})}}} > e^{\frac{B\lambda}{2\|f\|_{\mathrm{PBLO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})}}}\right\}\right| \\ &\le e^{-\frac{B\lambda}{2\|f\|_{\mathrm{PBLO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})}}} \int_{R^-(\gamma)} e^{\frac{B[f - \operatorname{ess\,inf} f]_+}{2\|f\|_{\mathrm{PBLO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})}}} \\ &\le A e^{-\frac{B\lambda}{2\|f\|_{\mathrm{PBLO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})}}} \left|R^-(\gamma)\right|. \end{aligned}$$

另一方面，基于同样的理由，我们推知

$$\begin{aligned} \fint_{R^{++}(\gamma)} e^{\frac{B[f - \operatorname{ess\,inf} f]_-}{2\|f\|_{\mathrm{PBLO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})}}} &\le 1 + \fint_{R^{++}(\gamma)} e^{\frac{B[\operatorname{ess\,inf} f - f]}{2\|f\|_{\mathrm{PBLO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})}}} \\ &\le 1 + \fint_{R^+(\gamma)} e^{\frac{Bf}{2\|f\|_{\mathrm{PBLO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})}}} \left[\operatorname*{ess\,inf}_{R^{++}(\gamma)} e^{\frac{Bf}{2\|f\|_{\mathrm{PBLO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})}}}\right]^{-1} \\ &\le 1 + \left[e^{\frac{Bf}{2\|f\|_{\mathrm{PBLO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})}}}\right]_{A_1^+(\gamma)} \le A \end{aligned}$$

因此，5.3对任意$R \in \mathcal{R}$ 和 $\lambda \in (0, \infty)$ 均成立。这就完成了从 (i) 推出 $\Longrightarrow$ (ii) 的证明，从而完成了定理2.7的证明。□

在本节末尾，我们证明 $\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 与时间滞后以及三个矩形之间的距离均无关，这一点在命题5.9的证明中起着重要作用。

定理 5.8. 设 $\gamma,\alpha\in(0,1)$ 且 $\tau\in(1-\alpha,\infty)$。则 $f\in\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 当且仅当 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 且

$$|||f|||_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\alpha}(\mathbb{R}^{n+1})}:=\sup_{R\in\mathcal{R}}\fint_{R^{-}(\alpha)}\left[f-\operatorname*{ess\,inf}_{S^{+}(\alpha)}f\right]_{+}+\fint_{S^{++}(\alpha)}\left[f-\operatorname*{ess\,inf}_{S^{+}(\alpha)}f\right]_{-}<\infty,$$

其中，对任意 $R\in\mathcal{R}$，$S^{+}(\alpha):=R^{-}(\alpha)+(0,\tau[l(R)]^{p})$ 且 $S^{++}(\alpha):=S^{+}(\alpha)+(0,\tau[l(R)]^{p})$。此外，$\|f\|_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})}\sim|||f|||_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})}$，其中正等价常数与 f 无关。

证明。我们首先证明必要性。设 $f\in\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$。应用定理 5.3 和引理5.7，我们得出存在正常数 B 和 D，与 f 无关，使得

$$\left\langle e^{\frac{Bf}{2\|f\|_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})}}}\right\rangle_{A_1^{+}(\alpha)}:=\sup_{R\in\mathcal{R}}\fint_{R^{-}(\alpha)}e^{\frac{Bf}{2\|f\|_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})}}}\left[\operatorname*{ess\,inf}_{S^{+}(\alpha)}e^{\frac{Bf}{2\|f\|_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})}}}\right]^{-1}\le D,$$

这与定理 5.3 证明中所用的类似论证相结合，其中将 ω、$R^{-}(\gamma)$、Bf $R^{+}(\gamma)$、$R^{++}(\gamma)$ 以及 $[\omega]_{A_1^{+}(\gamma)}$ 分别替换为 $e^{2\|f\|_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})}}$、$R^{-}(\alpha)$、$S^{+}(\alpha)$、$S^{++}(\alpha)$、$Bf$ 以及 $\langle e^{2\|f\|_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})}}\rangle_{A_1^{+}(\alpha)}$，进而表明

$$|||f|||_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\alpha}(\mathbb{R}^{n+1})}\le\frac{4\ln(1+D)}{B}\|f\|_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

至此完成了必要性的证明。

接下来，我们证明充分性。设 $|||f|||_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\alpha}(\mathbb{R}^{n+1})}<\infty$。由与引理 5.4 的证明中所用类似的论证，其中将 $R^{-}(\gamma)$、$R^{+}(\gamma)$、$R^{++}(\gamma)$ 和 $\|f\|_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})}$ 分别替换为 $R^{-}(\widetilde{\alpha})$、$S^{+}(\alpha)$、$S^{++}(\widetilde{\alpha})$ 和 $|||f|||_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\alpha}(\mathbb{R}^{n+1})}$，可得存在正常数 A 和 B，它们与 f 无关，使得对任意 $R\in\mathcal{R}$ 和 $\lambda\in(0,\infty)$，

$$\left|S^{++}(\widetilde{\alpha})\cap\left\{\left[f-\operatorname*{ess\,inf}_{S^{+}(\alpha)}f\right]_{-}>\lambda\right\}\right|\le\widetilde{A}e^{-\frac{\widetilde{B}\lambda}{|||f|||_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\alpha}(\mathbb{R}^{n+1})}}}\left|S^{++}(\widetilde{\alpha})\right|$$

and

$$\left|R^{-}(\widetilde{\alpha})\cap\left\{\left[f-\operatorname*{ess\,inf}_{S^{+}(\alpha)}f\right]_{+}>\lambda\right\}\right|\le\widetilde{A}e^{-\frac{\widetilde{B}\lambda}{|||f|||_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\alpha}(\mathbb{R}^{n+1})}}}\left|R^{-}(\widetilde{\alpha})\right|,$$

其中 $\widetilde{\alpha}:=\frac{1+\alpha}{2}$ 且 $S^{++}(\widetilde{\alpha}):=$ 实数集 $R^{-}(\widetilde{\alpha})+(0,(2\tau+\frac{1-\alpha}{2})[l(R)]^{p})$。结合这一结果，以及类似于 (5.2) 中所用的论证，并将其中的 ϵ、$R^{-}(\alpha)$、$R^{+}(\gamma)$ 和 $R^{+}(\alpha)$分别替换为 $B\,2|||f|||_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\alpha}(\mathbb{R}^{n+1})}$、$R^{-}(\widetilde{\alpha})$、$S^{+}(\alpha)$ 和 $S^{++}(\widetilde{\alpha})$，可得，对于任意 $R\in\mathcal{R}$，

$$\fint_{R^{-}(\widetilde{\alpha})}e^{\frac{\widetilde{B}f}{2|||f|||_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\alpha}(\mathbb{R}^{n+1})}}}\le\left(1+\widetilde{A}\right)\operatorname*{ess\,inf}_{S^{++}(\widetilde{\alpha})}e^{\frac{\widetilde{B}f}{2|||f|||_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\alpha}(\mathbb{R}^{n+1})}}}.$$

B 取所有 R 的上确界 $\in\mathcal{R}$并应用引理 5.7，我们得到 $e^{\frac{2|||f|||_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\alpha}(\mathbb{R}^{n+1})}}{\in A_1^{+}(\gamma)}}B$，且存在一个正常数 K（与 f 无关），使得 $[e^{2|||f|||_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\alpha}(\mathbb{R}^{n+1})}}]_{A_1^{+}(\gamma)}\le K$。结合定理 5.3，进一步可知 $f\in\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$，且存在一个与 f 无关的正常数 K，使得 $\|f\|_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})}\le\frac{4}{B}\ln(1+K)|||f|||_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\alpha}(\mathbb{R}^{n+1})}$。这就完成了充分性的证明，从而证明了定理 5.8。□

5.2 $\mathrm{PBLO}_{\gamma}^{-}(\mathbb{R}^{n+1})$的 Bennett 型刻画（借助于$\mathrm{PBMO}_{\gamma}^{-}(\mathbb{R}^{n+}$ [1]）

令 $\gamma \in [0,1)$。非中心化抛物型自然极大算子 $N^{\gamma-}$（带有时间滞后）定义如下：对于任意$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 和x，$t) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$N^{\gamma-}(f)(x,t) := \sup_{R\in\mathcal{R},\,(x,t)\in R^{+}(\gamma)} \fint_{R^{-}(\gamma)} f.$$

在本小节中，我们首先证明$N^{\gamma-}$ 从 $\mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 到 $\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 是有界的，方法是利用定理 5.8，建立抛物型 Calder´ón–Zygmund 分解，并应用抛物型链式引理，该引理来自 [42，注记 3.4]（见命题 5.9 的证明）。据此，我们进而建立 $\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 的 Bennett 型刻画，这表明 $\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 恰好与

$$\left\{N^{\gamma-}(F) : F \in \mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) \text{ and } N^{\gamma-}(F) < \infty \text{ almost everywhere}\right\}$$

模有界函数（见定理5.12），类似于定理 3.3。

命题 5.9. 设 $\gamma \in (0,1)$。则存在正常数 C，使得对任意 $f \in \mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$，当 $N^{\gamma-}(f) < \infty$ 几乎处处时，$N^{\gamma-}(f) \in \mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 且

$$\left\|N^{\gamma-}(f)\right\|_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})} \le C\|f\|_{\mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

为证明命题 5.9，我们需要先用到抛物型链式引理，见 [42,注 3。4]。

引理 5.10。 设 $\gamma \in (0,1)$，且 E、$F \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是两个有界 *Borel* 集。若

$$\begin{aligned}&\inf\{t \in \mathbb{R} : \textit{there exists } x \in \mathbb{R}^n \textit{ satisfying } (x,t) \in F\}\\ &\quad - \sup\{t \in \mathbb{R} : \textit{there exists } x \in \mathbb{R}^n \textit{ satisfying } (x,t) \in E\}\\ &\in (0,\infty),\end{aligned}$$

则存在正常数 C，使得对任意 $f \in \mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$,

$$(f_E - f_F)_+ \le C\|f\|_{\mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

现在，我们准备好证明命题 5.9。

命题 *5.9*的证明。 设$f \in \mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$，且 $N^{\gamma-}(f) < \infty$几乎处处成立，并设$R \in \mathcal{R}$。定义

$$S^{+}(\gamma) := R^{-}(\gamma) + (\mathbf{0}, 2(1+2\gamma)^{p}[l(R)]^{p}),\ S^{++}(\gamma) := S^{+}(\gamma) + (\mathbf{0}, (1+\gamma)[l(R)]^{p}),$$

and

$$S^{+++}(\gamma) := S^{++}(\gamma) + (\mathbf{0}, 2(1+2\gamma)^{p}[l(R)]^{p}).$$

对于任意（x，t）∈实数集$^{-}(\gamma)$，令

$$N_1^{\gamma-}(f)(x,t) := \sup\left\{\fint_{P^{-}(\gamma)} f : P \in \mathcal{R},\ (x,t) \in P^{+}(\gamma), \text{and } l(P) \le \gamma l(R)\right\}$$

and

$$N_2^{\gamma-}(f)(x,t) := \sup\left\{\fint_{P^{-}(\gamma)} f : P \in \mathcal{R},\ (x,t) \in P^{+}(\gamma), \text{and } l(P) \ge \gamma l(R)\right\}$$

由定理5.8可知，我们只需证明存在一个正常数C，它与f和R无关，使得对任意$j \in \{1,2\}$,

$$\fint_{R^-(\gamma)} \left[N_j^{\gamma-}(f) - \operatorname*{ess\,inf}_{S^{++}(\gamma)} N^{\gamma-}(f) \right]_+ \le C\|f\|_{\mathrm{PBMO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})} \tag{5.4}$$

and

$$\fint_{S^{+++}(\gamma)} \left[N_j^{\gamma-}(f) - \operatorname*{ess\,inf}_{S^{++}(\gamma)} N^{\gamma-}(f) \right]_- \le C\|f\|_{\mathrm{PBMO}_\gamma^-(\mathbb{R}^{n+1})}. \tag{5.5}$$

我们首先证明，当5.4中的$j = 1$时的情形。令

$$\alpha := 1 - \frac{(1-\gamma)\gamma^p + (1-\gamma) + 2\gamma^p}{(1+2\gamma)^p} \in (0,1)$$

~ ~并令 $R \in \mathcal{R}$ 满足 $l(R) = (1+2\gamma)l(R)$，且

$$\begin{aligned}
&\sup\left\{t \in \mathbb{R} : \text{there exists } x \in \mathbb{R}^n \text{ satisfying } (x,t) \in \widetilde{R}^-(\alpha)\right\} \\
&\quad - \sup\left\{t \in \mathbb{R} : \text{there exists } x \in \mathbb{R}^n \text{ satisfying } (x,t) \in R^-(\gamma)\right\} \\
&= (1-\gamma)\gamma^p [l(R)]^p.
\end{aligned}$$

通过一些简单的计算，我们发现以下陈述成立：

(i) $R^-(\gamma) \subsetneq \widetilde{R}^-(\alpha)$ and $|\widetilde{R}^-(\alpha)| = (1+2\gamma)^n(1+\gamma^p+\frac{2\gamma^p}{1-\gamma})|R^-(\gamma)|$;

~(ii) $S^+(\gamma)$ 严格高于 $R^+(\alpha)$。更确切地说，

$$\begin{aligned}
&\inf\left\{t \in \mathbb{R} : \text{there exists } x \in \mathbb{R}^n \text{ satisfying } (x,t) \in S^+(\gamma)\right\} \\
&\quad - \sup\left\{t \in \mathbb{R} : \text{there exists } x \in \mathbb{R}^n \text{ satisfying } (x,t) \in \widetilde{R}^+(\alpha)\right\} \\
&= 2\gamma^p [l(R)]^p \in (0,\infty);
\end{aligned}$$

(iii) 对任意 $(y,s) \in S^{++}(\gamma)$，$N^{\gamma-}(f)(y,s) \ge f_{S^+(\gamma)}$。

~接下来，我们建立 $\mathrm{R}^-(\alpha)$ 的抛物型 Calder´on–Zygmund 分解。给定 $\lambda \in (\mathrm{f}_{\widetilde{R}^+(\alpha)}, \infty)$。~将 $\mathrm{R}^-(\alpha)$ 的每条空间边平分为 2 个等长区间，并将~$\mathrm{R}^-(\alpha)$ 的时间边划分为 $\lceil 2^p \rceil$ 个等长区间。由此得到 $\mathrm{R}^-(\alpha)$ 的 $2^n\lceil 2^p \rceil$ 子矩形 $\{\mathrm{U}_{1,i}^-\}_{i \in \mathbb{N} \cap [1,J_1]}$，其中 $\mathrm{J}_1 := 2^n\lceil 2^p \rceil$。对任意 $\mathrm{i} \in \mathbb{N} \cap [1,\mathrm{J}_1]$, , 存在唯一的 $\mathrm{R1},_i \in \mathcal{R}$，使得 $\mathrm{U}_{1,i}^-$ 与 $\mathrm{R1},_i$ 的底边重合。我们选取所有满足 $\mathrm{f}_{R_{1,i}^+}(\alpha) > \lambda$ 的 $\mathrm{U}_{1,i}^-$。对于满足 $\mathrm{f}_{R_{1,i}^+}(\alpha) \le \lambda$ 的 $\mathrm{U}_{1,i}^-$，我们将 $\mathrm{U}_{1,i}^-$ 的每条空间边平分为 2 个等长区间。如果

$$\frac{l_t(U_{1,i}^-)}{\lfloor 2^p \rfloor} < \frac{l_t(P^-(\alpha))}{2^p},$$

然后我们将$U_{1,i}^-$的时间边划分为 $\lfloor 2^p \rfloor$ 个等长区间。否则，如果

$$\frac{l_t(U_{1,i}^-)}{\lfloor 2^p \rfloor} \ge \frac{l_t(P^-(\alpha))}{2^p},$$

然后，我们将$U_{1,i}^-$的时间边划分为 $\lceil 2^p \rceil$ 个等长区间。由此得到一列子矩形$\widetilde{\ }U_{2,i}^-\}_{i \in \mathbb{N} \cap [1,J_2]}$，它们属于$R^-(\alpha)$，其中$J_2 \in \mathbb{N}$。对于任意$i \in \mathbb{N} \cap [1,J_2]$, , 都存在唯一的$R2,_i \in \mathcal{R}$，使得$U_{2,i}^-$和$R2,_i$的底边重合。我们选取所有满足以下条件的$U_{2,i}^-$

$f_{\mathcal{R}^+_{2,i}}(\alpha) > \lambda$。我们通过归纳法继续进行分解。对于任意$j \in \mathbb{N}$，在第$j$步，对那些满足$f_{\mathcal{R}^+_{j,i}}(\alpha) \le \lambda$的$U^-_{j,i}$，将每个$U^-_{j,i}$的空间边划分为2个等长区间。如果

$$\frac{l_t(U^-_{j,i})}{\lfloor 2^p \rfloor} < \frac{l_t(P^-(\alpha))}{2^{pj}},$$

然后，我们将$U^-_{j,i}$的时间边划分为 $\lfloor 2^p \rfloor$ 个等长区间。否则，如果

$$\frac{l_t(U^-_{j,i})}{\lfloor 2^p \rfloor} \ge \frac{l_t(P^-(\alpha))}{2^{pj}},$$

然后，我们将 $U^-_{j,i}$ 的时间边划分为 $\lceil 2^p \rceil$ 个等长区间。我们得到一个子矩形序列$\widetilde{\ }\{U^-_{j+1,i}\}_{i\in\mathbb{N}\cap[1,J_{j+1}]}$，它们属于 $R^-(\alpha)$，其中 $J_{j+1} \in \mathbb{N}$。对于任意 $i \in \mathbb{N}\cap[1,J_{j+1}]$，存在唯一的 $R_{j+1,i} \in \mathcal{R}$，使得 $U^-_{j+1,i}$ 和 $R_{j+1,i}$ 的底边重合。我们选取所有满足 $f_{\mathcal{R}^+_{j+1,i}}(\alpha) > \lambda$ 的 $U^-_{j+1,i}$。通过简单计算可得，对于任意 $j \in \mathbb{N}$ 和 $i \in J_j$，$U^-_{j,i} \subset R^-_{j,i}(\alpha)$。总之，我们得到一列两两不交的子矩形 $\{U^-_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，它们属于$\widetilde{\ }R^-(\alpha)$，并满足以下结论：

(iv) 对任意 $i \in \mathbb{N}$，存在唯一的 $R_i \in \mathcal{R}$，使得 U^-_i和 R_i 的底部重合，$U^-_i \subset R^-_i(\alpha)$，且 $f_{R^+_i}(\alpha) > \lambda$；

$\widetilde{\ }$(v) 对任意 $i \in \mathbb{N}$，存在唯一的子矩形 $U^-_{i^-}$，它是 $R^-(\alpha)$ 的子矩形，并满足：U^-_i由 $U^-_{i^-}$ 直接分解得到，$2^n\lfloor 2^p\rfloor|U^-_i| \le |U^-_{i^-}| \le 2^n\lceil 2^p\rceil|U^-_i|$，且 $f_{R^+_{i^-}}(\alpha) \le \lambda$；其中，$R_{i^-}$ 表示底部与 U_i重合的唯一抛物矩形。

现在，令

$$\begin{cases} g := f\mathbf{1}_{\widetilde{R}^-(\alpha)\setminus\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U^-_i} + \displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} f_{R^+_{i^-}}(\alpha)\mathbf{1}_{U^-_i}, \\ b_i := \left[f - f_{R^+_{i^-}}(\alpha)\right]\mathbf{1}_{U^-_i} \text{ for any } i \in \mathbb{N}, \\ b := \displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i. \end{cases}$$

于是$f\mathbf{1}_{\widetilde{R}^-(\alpha)} = g + b$，根据勒贝格微分定理，$g \le \lambda$ 在$\widetilde{\ }R^-(\alpha)$ 中几乎处处成立。此外，对于任意 $(x,t) \in R^-(\gamma)$,

$$\begin{aligned} N_1^{\gamma-}(f)(x,t) &= \sup\left\{ \fint_{P^-(\gamma)} f\mathbf{1}_{\widetilde{R}^-(\alpha)} : P \in \mathcal{R},\ (x,t) \in P^+(\gamma), \text{and } l(P) \le \gamma l(R) \right\} \\ &\le M^{\gamma-}(b_+)(x,t) + \lambda, \end{aligned}$$

其中 $M^{\gamma-}$ 表示非中心抛物极大算子，其定义为：对于任意$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$以及$(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$M^{\gamma-}(f)(x,t) := \sup_{R\in\mathcal{R},\,(x,t)\in R^+(\gamma)} \fint_{R^-(\gamma)} |f|.$$

结合这些结果、(iii)、(i)、¨Holder不等式，假设 $\lambda > f_{\widetilde{R}^+(\alpha)}$，事实是 $M^{\gamma-}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$ 上有界，引理 5.10 中取 $E := \widetilde{\ }$实数集$^+(\alpha)$ 和 $F := S^+(\gamma)$，以及 (ii)，我们得出

$$\begin{aligned} &\int_{R^-(\gamma)} \left[N_1^{\gamma-}(f) - \operatorname*{ess\,inf}_{S^{++}(\gamma)} N^{\gamma-}(f) \right]_+ \\ &\quad\le \int_{R^-(\gamma)} \left[M^{\gamma-}(b_+) + \lambda - \fint_{S^+(\gamma)} f \right]_+ \end{aligned}$$

$$\le \int_{\widetilde{R}^-(\alpha)} \left[M^{\gamma^-}(b_+) + \lambda - \fint_{\widetilde{R}^+(\alpha)} f \right]_+ + \left[\fint_{\widetilde{R}^+(\alpha)} f - \fint_{S^+(\gamma)} f \right]_+ \left| R^-(\gamma) \right|$$
$$\lesssim \|b_+\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \left| R^-(\gamma) \right|^{\frac{1}{2}} + \left[\lambda - \fint_{\widetilde{R}^+(\alpha)} f \right] \left| R^-(\gamma) \right| + \|f\|_{\mathrm{PBMO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})} \left| R^-(\gamma) \right|, \tag{5.6}$$

其中隐含的正常数与f无关。接下来我们证明$b_+ \in L^2(\mathbb{R}^{n+1})$ 和

$$\|b_+\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim \left| R^-(\gamma) \right|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{\mathrm{PBMO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})}, \tag{5.7}$$

其中隐含的正常数与f无关。事实上，由b的定义、 $\{U_i^-\}_{i\in\mathbb{N}}$ 两两不交这一事实、(iv)、(v) 以及 Hölder 不等式可知，对于任意 $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\|b_+\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} \left[f - f_{R^+_{i^-}(\alpha)} \right] \mathbf{1}_{U_i^-} \right\}^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{U_i^-} \left[f - f_{R^+_{i^-}(\alpha)} \right]^2_+ \\
&\le \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{\widetilde{R}^-_{i^-}(\alpha)} \left[f - c_i + c_i - f_{R^+_{i^-}(\alpha)} \right]^2_+ \\
&\le 2 \sum_{i\in\mathbb{N}} \left\{ \int_{\widetilde{R}^-_{i^-}(\alpha)} (f - c_i)^2_+ + \int_{\widetilde{R}^-_{i^-}(\alpha)} \left[\fint_{\widetilde{R}^+_{i^-}(\alpha)} (f - c_i)_- \right]^2 \right\} \\
&\le 2 \sum_{i\in\mathbb{N}} \left\{ \int_{\widetilde{R}^-_{i^-}(\alpha)} (f - c_i)^2_+ + \int_{\widetilde{R}^+_{i^-}(\alpha)} (f - c_i)^2_- \right\}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

应用 Cavalieri 原理和 $\mathrm{PBMO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})$ 的抛物 John–Nirenberg 不等式（见[18, 定理 4.1]），可知存在正常数 A 和 B，它们与 f 无关，使得对于任意 $i \in \mathbb{N}$，存在$c_i \in \mathbb{R}$使得

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{R}^-_{i^-}(\alpha)} (f - c_i)^2_+ &= \int_0^\infty \left| \widetilde{R}^-_{i^-}(\alpha) \cap \left\{ (f - c_i)^2_+ > \lambda \right\} \right| d\lambda \\
&= \int_0^\infty \left| \widetilde{R}^-_{i^-}(\alpha) \cap \left\{ (f - c_i)_+ > \sqrt{\lambda} \right\} \right| d\lambda \\
&\le A \left| \widetilde{R}^-_{i^-}(\alpha) \right| \int_0^\infty e^{-\frac{B\sqrt{\lambda}}{\|f\|_{\mathrm{PBMO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})}}} d\lambda = \frac{2A\|f\|^2_{\mathrm{PBMO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})}}{B} \left| \widetilde{R}^-_{i^-}(\alpha) \right|.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

同理可证，对于任意$i \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\widetilde{R}^+_{i^-}(\alpha)} (f - c_i)^2_- \le \frac{2A\|f\|^2_{\mathrm{PBMO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})}}{B} \left| \widetilde{R}^+_{i^-}(\alpha) \right|.$$

结合（5.8）、（5.9）、(v) 以及 $\{U_i^-\}_{i\in\mathbb{N}}$ 两两不交这一事实，还可推出

$$\begin{aligned}
\|b_+\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} &\le \frac{8A\|f\|^2_{\mathrm{PBMO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})}}{B} \sum_{i\in\mathbb{N}} \left| \widetilde{R}^-_{i^-}(\alpha) \right| \\
&\lesssim \|f\|^2_{\mathrm{PBMO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})} \sum_{i\in\mathbb{N}} \left| U_i^- \right| \le \|f\|^2_{\mathrm{PBMO}^-_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})} \left| R^-(\gamma) \right|
\end{aligned}$$

因此，(5.7) 成立。结合 (5.6) 和 (5.7)，并令 $\lambda \to f_{\widetilde{R}^+(\alpha)}$，我们得出 (5.4) 在情形 $j = 1$ 下成立。

接下来，我们证明情形 $j = 2$下的 (5.4)。注意，对于任意 $P \in \mathcal{R}$，若存在 $(x,t) \in$实数集$^{-}(\gamma)$，满足 $(x,t) \in P^{+}(\gamma)$，且 $l(P) \geq \gamma l(R)$，

$$\begin{aligned}
&\sup\{t \in \mathbb{R} : \text{there exists } x \in \mathbb{R}^n \text{ satisfying } (x,t) \in P^{-}(\gamma)\} \\
&\qquad - \sup\{t \in \mathbb{R} : \text{there exists } x \in \mathbb{R}^n \text{ satisfying } (x,t) \in R^{-}(\gamma)\} \\
&= (1-\gamma)[l(R)]^p - 2\gamma[l(P)]^p \leq \left(1-\gamma-2\gamma^{p+1}\right)[l(R)]^p \\
&\leq \left[2(1+2\gamma)^p - (1-\gamma)\right][l(R)]^p \\
&= \inf\{t \in \mathbb{R} : \text{there exists } x \in \mathbb{R}^n \text{ satisfying } (x,t) \in S^{+}(\gamma)\} \\
&\qquad - \sup\{t \in \mathbb{R} : \text{there exists } x \in \mathbb{R}^n \text{ satisfying } (x,t) \in R^{-}(\gamma)\},
\end{aligned}$$

这进一步意味着 $S^{+}(\gamma)$ 严格高于 $P^{-}(\gamma)$。由此以及引理 5.10 中 $E := P^{-}(\gamma)$ 和 $F := S^{+}(\gamma)$，可知，对于任意满足以下条件的 $P \in \mathcal{R}$：存在 $(x, t) \in$实数集$^{-}(\gamma)$，使得 $(x, t) \in P^{+}(\gamma)$ 且 $l(P) \geq \gamma l(R)$，

$$\left[f_{P^{-}(\gamma)} - f_{S^{+}(\gamma)}\right]_{+} \lesssim \|f\|_{\mathrm{PBMO}_{\gamma}^{-}(\mathbb{R}^{n+1})},$$

其中隐含的正常数与f无关。结合这一点、(iii) 以及$N_2^{\gamma-}$ 的定义，可得，在5.4)成立的情形$j = 2$。

总之，我们证明了5.4) 对两种$j \in \{1,2\}$情形均成立。通过类似于上述的论证，我们可以证明 5.5) 对两种$j \in \{1,2\}$情形均成立，从而完成命题5.9的证明。□

注 5.11. (i) 与注 3.2 类似，我们可以很容易地构造一个例子，说明 $M^{\gamma-}$ 在 $\mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 上无界。事实上，令 f 与注 3.2(i) 中相同，并对任意 $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$，定义 $F(x, t) := f(t)$。那么 $\|F\|_{\mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})} = 0$，且 $M^{\gamma-}(F)$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上几乎处处成立。然而，对任意 $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]$, $M^{\gamma-}(F)(x, t) \leq 1$，且对任意 $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [10, \infty)$,

$$M^{\gamma-}(F)(x,t) \geq \frac{1}{1-\gamma}\int_{t-(1+\gamma)}^{t-2\gamma} 2s\,ds = 2t - 3 - \gamma \geq 2t - 4 \geq 16.$$

这与 PBMO 零空间的刻画$^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$（见 [22, 定理 3.1]）进一步说明，$\|M^{\gamma}(F)\|_{\mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})} \in (0, \infty]$。这意味着$M^{\gamma-}$ 在 $\mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 上无界。

(ii) 应用备注2.6，我们发现命题 5.9 确实是对 [42, 引理 4。1], 的改进。该引理指出，对于任意给定的 $\gamma \in (0,1)$，存在正常数 C，使得对于任意正函数 $f \in \mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 且满足 $M^{\gamma-}(f) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$,

$$\left\|M^{\gamma-}(f)\right\|_{\mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C\|f\|_{\mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

应用命题 5.9，我们得到 PBLO 的 Bennett 型刻画$^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$。

定理 5.12。设 $\gamma \in (0, 1)$。那么，$f \in \mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 当且仅当存在 $h \in L^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$ 以及 $F \in \mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$，使得 $N^{\gamma-}(F) < \infty$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上几乎处处成立，并且

$$f = N^{\gamma-}(F) + h. \tag{5.10}$$

此外，$\|f\|_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})}$ ~下确界$\{\|F\|_{\mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})} + \|h\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})}\}$，其中下确界取遍 f 的所有形如 (5.10) 的分解，且正等价常数与 f 无关。

证明。将定理 3.3 的证明中 N^{-}、$\mathrm{BMO}^{+}(\mathbb{R})$、$\mathrm{BLO}^{+}(\mathbb{R})$、$L^{\infty}(\mathbb{R})$、I、$I^{-}$、$I^{+}$ 和命题 3.1 分别替换为 $N^{\gamma-}$、$\mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$、$\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$、$L^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$、实数集、$R^{-}(\gamma)$、$R^{+}(\gamma)$ 和命题 5.9，重复其证明即可完成定理 5.12 的证明。□

5.3 $\mathrm{PBLO}_{\gamma}^{-}(\mathbb{R}^{n+1})$ 的 Coifman–Rochberg 型分解

本小节中，我们建立 $\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 中函数的 Coifman–Rochberg 型分解，这也给出了 $\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 的一个等价范数（见定理 5.14）。作为推论，我们证明任意 $\mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 函数都可以分解为两个 $\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 函数之和（见推论 5.15 ），并明确描述 $\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 中函数到 $\mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$ 的距离（见推论 5.16 ）。我们先给出 $\mathrm{A}_1^{+}(\gamma)$ 的以下 Coifman–Rochberg 型引理，它恰好是 [16, 定理 7.2] ，并且是建立本小节主要结果的关键。

引理 5.13。设 $\gamma\in$ （**0**,**1**）。

(i) 设 $\delta\in(0,1)$ 且 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 满足 $M^{\gamma-}(f)<\infty$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上几乎处处成立。则 $[M^{\gamma-}(f)]^{\delta}\in A_1^{+}(\gamma)$，且 $[\{M^{-}(f)\}^{\delta}]_{A_1^{+}(\gamma)}$ 仅依赖于 n、p、γ 和 δ。

(ii) 设 $\omega\in A_1^{+}(\gamma)$。则存在 $\delta\in(0,1)$，其仅依赖于 n、p、γ、$[\omega]_{A_1^{+}(\gamma)}$，使得 $\omega=b[M^{\gamma-}(f)]^{\delta}$，其中 $f:=\omega^{\frac{1}{\delta}}\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 且 $b:=[M^{\gamma-}(\omega^{\frac{1}{\delta}})]^{\delta}$ 满足 $1\le\|b\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})}\le C$，其中 C 是仅依赖于 n、p、γ 和 $[\omega]_{A_1^{+}(\gamma)}$ 的正常数。

本小节的主要结果，即 $\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 中函数的 Coifman–Rochberg 型分解，陈述如下；由于其证明与定理 4.2 的证明类似，只需分别将其中的引理4.1、定理 2.4和注 2.6 替换为引理5.13、定理5.3和注5.5，故省略细节。

定理 5.14. 设 $\gamma\in(0,1)$. 那么，$f\in\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 当且仅当存在 $\alpha\in(0,\infty)$、非负函数 $g\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$以及 $b\in L^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$，使得

$$f=\alpha\ln\left(M^{-}(g)\right)+b. \tag{5.11}$$

此外，

$$\|f\|_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})}\sim\inf\left\{\alpha+\|b\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})}\right\}=:\|f\|^{*}_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})},$$

其中，下确界取遍 f 的所有形如 (5.11) 的分解，且正的等价常数与 f 无关。

作为推论，我们得到 $\mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 关于非中心抛物极大算子的 Coifman–Rochberg 型刻画，因此，任意 $\mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 函数都可以表示为两个 $\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 函数之和。

推论 5.15。 设 $\gamma\in(0,1)$。那么以下陈述彼此等价。

(i) $f\in\mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$。

(ii) 存在 $\alpha,\beta\in(0,\infty)$、非负函数 $g,h\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$，以及 $b\in L^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$，使得

$$f=\alpha\ln\left(M^{\gamma-}(g)\right)-\beta\ln\left(M^{\gamma+}(h)\right)+b.$$

(iii) 存在 $g,h\in\mathrm{PBLO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$，使得 $f=g+h$。

证明。我们先证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii)。设 $f\in\mathrm{PBMO}^{-}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$。由 (5.1) 可知，存在$\lambda\in(0,\infty)$ 和 $\omega\in\mathrm{A}_2^{+}(\gamma)$，使得 $f=\lambda\ln\omega$。再结合 $\mathrm{A}_2^{+}(\gamma)$ 权的 Jones 因子分解定理（见 [16, 定理 7.1]）和引理 5.13(ii)，可进一步推出存在$\delta,\sigma\in(0,1)$、非负函数 g、h $\in\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$，以及 $\widetilde{\ }$b $\in\mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$，使得

$$f=\lambda\delta\ln\left(M^{\gamma-}(g)\right)-\lambda\sigma\ln\left(M^{\gamma+}(h)\right)+\lambda\ln\widetilde{b}$$

因此 (ii) 成立，其中 $\alpha := \lambda\delta$，$\beta := \lambda\sigma$，且 $b := \lambda \ln b$。断言 (ii) $\Longrightarrow$ 是定理 5.14 和断言 (iii) 的直接推论 $\Longrightarrow$(i) 可由注5.5 以及 PBMO 的次可加性立即推出$\bar{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 。这就完成了推论 5.15的证明。□

在本节末尾，我们将明确量化 $\mathrm{PBLO}^{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 中函数到 $L^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$ 的距离，并用 $\|\cdot\|^{*}_{\mathrm{PBLO}^{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})}$-范数表示。这一结果比[22, 定理 5.1] 更为精细，因为它通过严格等式刻画了其中的等价性。

推论 5.16。设 $\gamma \in (0,1)$ 且 $f \in \mathrm{PBLO}^{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$。则

$$\inf\left\{\|f-h\|^{*}_{\mathrm{PBLO}^{-}_{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})} : h \in L^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})\right\} = \sup\left\{\epsilon \in (0,\infty) : e^{\epsilon f} \in A_1^{+}(\gamma)\right\}.$$

证明。将推论 4.4 的证明重复一遍，分别以 $\|\cdot\|^{*}\mathrm{PBLO}^{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$、$\mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$、$\mathrm{A}_1^{+}(\gamma)$、$\mathrm{L}^{1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$、$\mathrm{M}^{\gamma-}$ 和 (5.11) 替换其中的 $\|\cdot\|^{*}\,\mathrm{BLO}^{+}(\mathbb{R})$、$\mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{R})$、$\mathrm{A}_1^{+}(\mathbb{R})$、$\mathrm{L}^{1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$、$\mathrm{M}^{-}$ 和 (4.1)，即可得到所需结论，从而完成推论 5.16 的证明。□

5.4 适用于双重非线性抛物型方程

在本小节中，我们建立 $\mathrm{PBLO}^{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 与抛物型偏微分方程之间的关系。考虑如下抛物型方程

$$\frac{\partial(|u|^{p-2}u)}{\partial t} - \operatorname{div} A(x,t,u,\nabla u) = 0, \tag{5.12}$$

其中 $A:\ \mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n}$ 是一个 Carath´eodory 函数，并满足标准的结构条件：

(i) 存在正常数 C_1，使得对于几乎处处的 $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$，

$$A(x,t,u,\nabla u)\cdot\nabla u \geq C_1|\nabla u|^{p};$$

(ii) 存在正常数 C_2，使得对于几乎处处的 $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$，

$$|A(x,t,u,\nabla u)| \leq C_2|\nabla u|^{p-1}.$$

特别地，如果 $A(x,t,u,\nabla u) := |\nabla u|^{p-2}\nabla u$，则（5.12）化为（1.4）。回顾一下，局部 *Sobolev* 空间 $W^{1,p}\,\mathrm{loc}(\mathbb{R}^{n})$ 定义为满足以下条件的 $\mathbb{R}^{n}$ 上所有函数 u 所构成的空间：对于任意紧子集 $K \subset \mathbb{R}^{n}$，

$$\left(\int_K |u|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_K |\nabla u|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

此外，*Bochner–Lebesgue* 空间 $L^{p}\,\mathrm{loc}(\mathbb{R};W^{1,p}\,\mathrm{loc}\,(\mathbb{R}^{n}))$ 定义为由定义在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的所有函数 u 构成的空间，使得对于任意紧区间 $I \subset \mathbb{R}$ 和任意紧子集 $K \subset \mathbb{R}^{n}$，

$$\int_I\int_K \left[|u(x,t)|^{p} + |\nabla u(x,t)|^{p}\right] dx\,dt < \infty.$$

函数 $u \in L^{p}\,\mathrm{loc}(\mathbb{R};W^{1,p}\,\mathrm{loc}\,(\mathbb{R}^{n}))$ 称为方程 (弱解 (5.12)，如果对于任意无限可微函数 ϕ，定义在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上且具有紧支集，

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\left[A(x,t,u,\nabla u)\cdot\nabla\phi(x,t) - |u(x,t)|^{p-2}u(x,t)\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,t)\right] dx\,dt = 0.$$

定理 [14, 2.1] 证明，对于任意给定的时间滞后 $\gamma \in (0,1)$，存在正常数C，使得对于方程 (u (5.12) 的任意非负弱解以及任意 实数集 $\in \mathcal{R}$,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{R^-(\gamma)} u \le C \operatorname*{ess\,inf}_{R^+(\gamma)} u$$

(另见 [20, 第 298])，这进一步意味着$u \in A_1^+(\gamma)$. 结合这一点与定理 5.3，我们立即得到 PBLO$\bar{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ 与（5.12）的非负弱解之间的以下关系。

命题 5.17。 设 u 是 (5.12) 的非负弱解。则对于任意 $\gamma \in (0,1)$，$u \in A_1^+(\gamma)$ 且 $\ln u \in$ 有界下振荡$\bar{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$。

作为命题5.9 和 5.17的应用，我们进一步得出（5.12）的非负弱解在 $N^{\gamma-}$ 下的映射性质。

推论 5.18。 设 u 是 (5.12) 的非负弱解，且 $\gamma \in (0,1)$。若 $N^{\gamma-}(\ln u) < \infty$在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上几乎处处成立，则 $N^{\gamma-}(\ln u) \in$ 有界下振荡$\bar{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$。

最后，作为定理5.14 和命题5.17的一个应用，我们得到一个结果，它对方程（5.12）的非负弱解给出了显式描述。

推论 *5.19*。设 u 是方程（*5.12*）的非负弱解，且 $\gamma \in (0, 1)$。那么存在 $\alpha \in (0, \infty)$、非负函数 $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 以及 $b \in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$，使得 $u = b\,[M^{\gamma-}(g)]^\alpha$。

5.5 与弱多孔集的联系

众所周知，$|x|^{-\alpha} \in A_1(\mathbb{R})$ 当且仅当 $0 \le \alpha < 1$。结合这一点与（1.1），我们得到经典结果：$-\log \operatorname{dist}(x, \{0\}) = -\log |x| \in \mathrm{BLO}(\mathbb{R})$。对于一般的非空真子集 $E \subset \mathbb{R}$，距离函数的负对数 $-\log \operatorname{dist}(\cdot, E)$ 的 BLO 性质最近已用 E 的弱孔隙性刻画（例如，参见 [3, 4, 5, 15,34, 39, 46]）。

具体而言，设 $I \in \mathcal{I}$。称子区间 $J \subset I$ 为 E-自由的，如果 $J \cap E = \emptyset$。设 $\mathcal{M}(I) \subset I$ 为 I 的一个最长 E-自由子区间，也就是说，$\mathcal{M}(I) \cap E = \emptyset$，并且对任意 E-自由子区间 $J \subset I$，$|J| \le |\mathcal{M}(I)|$。称 E 为弱多孔的，如果存在 c、$\delta \in (0, 1)$，使得对任意 $I \in \mathcal{I}$，存在 $N(I) \in \mathbb{N}$ 以及 I 的两两不交的 E-自由子区间 $\{J_i\}_{i \in \mathbb{N} \cap [1, N(I)]}$ 满足

(i) 对任意 $i \in \mathbb{N} \cap [1, N(I)]$，$|J_i| \ge \delta |\mathcal{M}(I)|$;
(ii) $\sum_{i \in \mathbb{N} \cap [1, N(I)]} |J_i| \ge c|I|$.

Anderson 等人 [5, 定理 1.1] 证明了，当且仅当 E 是弱多孔的（另见 [46, 引理 5]）时，$-\log \operatorname{dist}(\cdot, E) \in$ 属于 BLO($\mathbb{R}$)。此外，若存在$c, \delta \in (0, 1)$，使得对于任意$I \in \mathcal{I}$，都存在 $N(I) \in \mathbb{N}$ 个两两不交的E-free 子区间$\{J_i\}_{i \in \mathbb{N} \cap [1, N(I)]}$，满足$I^-$，则称$E$ 是右侧弱孔隙的：

(i) 对任意$i \in \mathbb{N} \cap [1, N(I)]$，$|J_i| \ge \delta |\mathcal{M}(I^+)|$;
(ii) $\sum_{i \in \mathbb{N} \cap [1, N(I)]} |J_i| \ge c|I^-|$.

Aimar 等人 [4, 定理 4.5] 证明存在 $\alpha \in (0, \infty)$，使得 $[\operatorname{dist}(\cdot, E)]^{-\alpha} \in A_1^+(\mathbb{R})$ 当且仅当 E 是右侧弱孔隙的。由此以及定理2.4，我们推得，对应于 [5, 定理 1.1] 的结果在一维单侧情形下成立。

定理 5.20。 设 $E \subsetneq \mathbb{R}$ 非空。当且仅当 E 是右侧弱孔隙的时，$-\log\operatorname{dist}(x, E) \in$ 有界下振荡$^+(\mathbb{R})$。

现在我们转向高维情形。设$E \subsetneq \mathbb{R}^{n+1}$ 非空。在本小节中，我们研究E 所需满足的几何条件，使得抛物距离函数的负对数 $-\log d_p(\cdot, E) \in \mathrm{PBLO}^{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$，其中$d_p$ 表示抛物型距离 在 $\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}$ 上的距离，并定义如下：对于任意 $(x, t) := (x_1, \ldots, x_n, t)$，$(y, s) := (y_1, \ldots, y_n, s) \in \mathbb{R}^{n+1}$，

$$d_p((x,t),(y,s)) := \max\left\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|, |t-s|^{\frac{1}{p}}\right\}.$$

为此，我们首先构造抛物矩形的抛物二进分解。令 $\gamma \in [0,1)$ 且 $R \in \mathcal{R}$ 的边长为 $L \in (0,\infty)$。将抛物二进分解定义为对$R^-(\gamma)$作如下分解：将$R^-(\gamma)$的每条空间边等分为 2 个区间。如果

$$\frac{l_t(R^-(\gamma))}{\lfloor 2^p \rfloor} < \frac{(1-\gamma)L^p}{2^p},$$

那么将$R^-(\gamma)$的时间边等分为 $\lfloor 2^p \rfloor$ 个区间。如果

$$\frac{l_t(R^-(\gamma))}{\lfloor 2^p \rfloor} \geq \frac{(1-\gamma)L^p}{2^p},$$

那么将$R^-(\gamma)$的时间边等分为 $\lceil 2^p \rceil$ 个区间。由此得到 J_1 个两两不交的半开子矩形，它们包含于$R^-(\gamma)$，其中 $J_1 \in \{2^n\lfloor 2^p \rfloor, 2^n\lceil 2^p \rceil\}$。我们将这些$J_1$ 个子矩形构成的集合记为 $\mathcal{D}_1(R^-(\gamma))$。我们继续进行归纳分解。对于任意的$j \in \mathbb{N}\cap[2,\infty)$和$P \in \mathcal{D}_{j-1}(R^-(\gamma))$，将$P$ 的每条空间边等分为 2 个区间。如果

$$\frac{l_t(P)}{\lfloor 2^p \rfloor} < \frac{(1-\gamma)L^p}{2^p j},$$

然后将P的时间边划分为 $\lfloor 2^p \rfloor$ 个等长区间。如果

$$\frac{l_t(P)}{\lfloor 2^p \rfloor} \geq \frac{(1-\gamma)L^p}{2^p j},$$

然后将P 的时间边划分为 $\lceil 2^p \rceil$ 个等长区间。我们得到J_j 个两两不交的半开子矩形$R^-(\gamma)$，其中$J_j \in \mathbb{N}\cap[(2^n\lfloor 2^p \rfloor)_j, (2^n\lceil 2^p \rceil)_j]$。我们将这些$J_j$个子矩形组成的集合记为 $\mathcal{D}_j(R^-(\gamma))$。最后，令 $\mathcal{D}_0(R) := \{R\}$并

$$\mathcal{D}(R^-(\gamma)) := \bigcup_{j\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{D}_j(R^-(\gamma)).$$

$\mathcal{D}(R^-(\gamma))$中的矩形称为抛物二进矩形（相对于$R^-(\gamma)$）。以下性质成立。

(D0) 对任意$j \in \mathbb{Z}_+$，$R^-(\gamma) = \bigcup_{P\in\mathcal{D}_j(R^-(\gamma))} P$。

(D1) 对任意$j \in \mathbb{N}$和$P \in \mathcal{D}_j(R^-(\gamma))$，存在唯一的 $\pi P \in \mathcal{D}_{j-1}(R^-(\gamma))$，使得$P \subset \pi P$。$\pi P$ 称为P的抛物二进父矩形，而P 称为 πP的抛物二进子矩形。

(D2) 对任意 $j \in \mathbb{Z}_+$ 和 $P \in \mathcal{D}_j$（实数集$^-(\gamma)$），P 的抛物型二进子代数属于 $\{2^n\lfloor 2^p \rfloor, 2^n\lceil 2^p \rceil\}$。

(D3) 对任意 $P_1, P_2 \in \mathcal{D}$（实数集$^-(\gamma)$），$P_1 \cap P_2 \in \{P_1, P2, \emptyset\}$。

(D4) 对任意 $j \in \mathbb{Z}_+$和 $P \in \mathcal{D}_j(R^-(\gamma))$, $l_x(P) = L2^j$ 且 $l_t(P) \in [\frac{1}{2}(1-\gamma)\underline{L_{2^p j}}^p, (1-\gamma)\underline{L_{2^p j}}^p]$。

我们可以用完全类似的方式，为 $R^+(\gamma)$ 构造抛物二进分解。关于 $R^+(\gamma)$ 的所有抛物二进矩形构成的集合记为 $\mathcal{D}(R^+(\gamma))$。

在建立抛物矩形的二进分解之后，我们引入时间向前抛物线弱孔隙性的概念，它可视为右侧弱孔隙性的高维推广。

定义 5.21。 设 $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 非空且 $\gamma \in [0,1)$。

(i) 设 实数集 $\in \mathcal{R}$ 且 $P \in \mathcal{D}(R^+(\gamma))$。若 $P \cap E = \emptyset$，则称 P 为E-自由 的。用 $\mathcal{M}(R^+(\gamma)) \in \mathcal{D}(R^+(\gamma))$ 表示 $R^+(\gamma)$ 的一个最大的 E- 自由抛物二进矩形；也就是说，若 $P \in \mathcal{D}(R^+(\gamma))$ 是 E- 自由的，则 $|P| \le |\mathcal{M}(R^+(\gamma))|$。

(ii) 若存在c、 $\delta \in (0,1)$，使得对于任意$R \in \mathcal{R}$，都存在$N(R) \in \mathbb{N}$和 $\{P_j\}_{j\in\mathbb{N}\cap[1,N(R)]} \subset \mathcal{D}(R^-(\gamma))$ 满足以下条件，则称E 为 γ-*FIT* 抛物弱多孔的（γ-时间向前抛物线弱多孔的）。

(a) $\{P_j\}_{j\in\mathbb{N}\cap[1,N(\text{实数集})]}$两两不交，并且对于任意$j \in \mathbb{N}\cap[1,N(\text{实数集})]$,$P_j$是$E$-自由的；(b) 对于任意$j \in \mathbb{N}\cap[1,N(\text{实数集})]$, $|P_j| \ge \delta|\mathcal{M}(\text{实数集}^+(\gamma))|$；(c) $\sum_{i=1}^{N(R)} |P_j| \ge c|\text{实数集}^-(\gamma)|$。

注 5.22。 所有符号均与定义 5.21中的相同。

(i) 我们指出， $\mathcal{M}(\text{实数集}^+(\gamma))$ 不一定唯一，但我们固定其中一个。

(ii) 我们指出，E 是 γ-FIT 弱多孔的，当且仅当E 是 γ-FIT 抛物弱孔性的。

(iii) 我们指出，若E 是 γ-FIT 抛物弱孔性的，则 $|E| = 0$。事实上，由 (ii) 可知，我们可以假设E 是闭集。由E的 γ-FIT 抛物弱孔性可知，存在$c \in (0,1)$，使得对于任意$R \in \mathcal{R}$，存在$N(R) \in \mathbb{N}$以及 $\{P_j\}_{j\in\mathbb{N}\cap[1,N(R)]} \subset \mathcal{D}(R^-(\gamma))$，满足

(i) $\{P_j\}_{j\in\mathbb{N}\cap[1,N(\text{实数集})]}$两两不交，并且对任意$j \in \mathbb{N}\cap[1,N(\text{实数集})]$,$P_j \cap E = \emptyset$; (ii) $\sum_{i=1}^{N(R)} |P_j| \ge c|\text{实数集}^-(\gamma)|$。

因此，

$$\frac{|E\cap R^-(\gamma)|}{|R^-(\gamma)|} \le \frac{|R^-(\gamma)\setminus\bigcup_{i=1}^{N(R)} P_j|}{|R^-(\gamma)|} \le 1-c < 1.$$

结合实数集的任意性和Lebesgue密度定理，还可进一步推出 $|E| = 0$。

(iv) 我们给出一个 γ-FIT抛物弱孔集的显式例子。设$E := \{\Omega \times \{t_k\} : k \in \mathbb{Z}\}$，其中$\Omega$是 $\mathbb{R}^n$ 的一个非空可测子集，并且

$$t_k := \begin{cases} k & \text{if } k \in \mathbb{Z}_+, \\ -\frac{1}{2^k} & \text{if } k \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

那么E 是 γ-FIT抛物弱孔集，其中 $\delta = \frac{1}{4}$ 且$c = \frac{1}{2}$。

本小节的主要结果陈述如下，它为$-\log d_p(\cdot,E) \in \mathrm{PBLO}^{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$给出了一个必要条件。

定理 5.23. 设 $E \subsetneq \mathbb{R}^{n+1}$ 非空且 $\gamma \in (0,1)$. 若 $-\log d_p(\cdot,E) \in \mathrm{PBLO}^{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$，则 E 是 γ-*FIT* 抛物弱孔集。

定理5.23 可由定理 5.3 以及以下关于 $A_1^+(\gamma)$ 距离权与 γ-FIT 抛物弱孔集之间关系的结果直接推出。

引理 5.24。 设 $E \subsetneq \mathbb{R}^{n+1}$ 非空且 $\gamma \in [0,1)$。若存在 $\alpha \in (0,\infty)$ 使得$[d_p(\cdot,E)]^{-\alpha} \in A_1^+(\gamma)$, 则 E 是 γ-*FIT* 抛物型弱多孔的。

证明。由注 5.22(ii)以及 $d_p(\cdot, E) = d_p(\cdot, E)$ 这一事实，我们可以假设 E 是闭集。由于 $d_p(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_1^+(\gamma) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$，可知 $|E| = 0$。取边长为 $L \in (0,\infty)$ 且 $\delta \in (0,1)$ 的 R，稍后确定。定义

$$\widetilde{\mathcal{F}_\delta^{\gamma+}}(R) := \left\{P \in \mathcal{D}(R^-(\gamma)) : |P| \geq \delta \left|\mathcal{M}(R^+(\gamma))\right| \text{ and } P \cap E = \emptyset\right\}$$

并令 $\mathcal{F}_\delta^{\gamma+}(R)$ 表示 $\mathcal{F}_\delta^{\gamma+}(R)$ 中所有极大矩形的集合，即，当且仅当 $P \in \mathcal{F}_\delta^{\gamma+}(R)$ 时 $P \in \mathcal{F}_\delta^{\gamma+}(R)$，并且对于任意 $\widetilde{P} \in \mathcal{F}_\delta^{\gamma+}(R)$，均有 $P \cap \widetilde{P} \in \{\widetilde{P}, \emptyset\}$。根据（D3），我们发现 $\mathcal{F}_\delta^{\gamma+}(R)$ 中的矩形两两不交。此外，应用定义 5.21(ii)，我们得出，要证明 E 是γ-FIT 抛物型弱多孔的，只需证明存在与 R 无关的 $c \in (0,1)$，使得

$$\sum_{P \in \mathcal{F}_\delta^{\gamma+}(R)} |P| \geq c \left|R^-(\gamma)\right|. \tag{5.13}$$

事实上，由于假设 E 是闭集，我们可得，对于任意 $(x,t) \in$ 实数集$^-(\gamma) \setminus E$，$d_p((x,t), E) \in (0,\infty)$。因此，存在 $P \in \mathcal{D}$(实数集$^-(\gamma)$)，使得 $(x,t) \in P$ 且 $P \cap E = \emptyset$。这进一步意味着，实数集$^-(\gamma) \setminus E$ 可表示为 $\mathcal{D}$(实数集$^-(\gamma)$) 中至多可数个互不相交的极大 E-自由矩形之并。若 (实数集$^-(\gamma) \setminus E) \setminus \bigcup_{P \in \mathcal{F}_\delta^{\gamma+}(R)} P = \emptyset$，那么

$$\sum_{P \in \mathcal{F}_\delta^{\gamma+}(R)} |P| = \left|\bigcup_{P \in \mathcal{F}_\delta^{\gamma+}(R)} P\right| = \left|R^-(\gamma)\right|$$

因此，(5.13) 对任意 $c \in (0,1)$ 均成立。因此，不失一般性，我们可以假设 $(R^-(\gamma) \setminus E) \setminus \bigcup_{P \in \mathcal{F}_\delta^{\gamma+}(R)} P \neq \emptyset$。根据 $\mathcal{F}_\delta^{\gamma+}(R)$ 的定义及 (D5)，对于任意 $(x,t) \in (R^-(\gamma) \setminus E) \setminus \bigcup_{P \in \mathcal{F}_\delta^{\gamma+}(R)} P$，存在一个极大的 E-自由矩形 $P \in \mathcal{D}(R^-(\gamma))$，使得

$$|P| < \delta \left|\mathcal{M}(R^+(\gamma))\right| \leq \delta 2^n (1-\gamma) l^{n+p}, \tag{5.14}$$

其中 $l := l_x(\mathcal{M}$(实数集$^+(\gamma))$。注意，存在 $j \in \mathbb{N}$ 使得 $P \in \mathcal{D}_j$(实数集$^-(\gamma))$。由 (D5)，我们推得 $l_x(P) = l$(实数集) 2^j 且 $l_t(P) \geq \frac{1}{2^{pj}}(1-\gamma)$ l^p l(实数集)，这进一步意味着

$$|P| = 2^n [l_x(P)]^n l_t(P) \geq \frac{2^{n-1}(1-\gamma)[l(R)]^{n+p}}{2^{(n+p)j}}.$$

结合这一点与 (5.14)，我们得出结论：

$$\frac{l(R)}{2^j} < (2\delta)^{\frac{1}{n+p}} l. \tag{5.15}$$

此外，由于 $P \in \mathcal{D}$(实数集$^-(\gamma))$ 是极大的 E-自由的，因此 πP不是 E-自由的，故

$$d_p((x,t), E) \leq \operatorname{diam}_p(\pi P) := \sup\left\{d_p(z_1, z_2) : z_1, z_2 \in \pi P\right\}. \tag{5.16}$$

B由 (D1) 和 (D5)，我们得到 $\pi P \in \mathcal{D}_{j-1}$(实数集$^-(\gamma))$, $l_x(\pi P) = l$(实数集) 2^{j-1}，以及 $l_t(\pi P) \leq (1-\gamma)$ $\frac{[\quad]^p}{2^{p(j-1)}}$ l(实数集)。因此，

$$\operatorname{diam}_p(\pi P) = \max\left\{2l_x(\pi P), [l_t(\pi P)]^{\frac{1}{p}}\right\} \leq \max\left\{\frac{2l(R)}{2^{j-1}}, \frac{(1-\gamma)^{\frac{1}{p}} l(R)}{2^{j-1}}\right\} = \frac{4l(R)}{2^j}.$$

由此，根据 (5.15) 和 (5.16)，我们推得，对于任意 $(x,t)\in(\text{实数集}^{-}(\gamma)\setminus E)\setminus\bigcup_{P\in\mathcal{F}_\delta^{\gamma+}(\text{实数集})}P$，

$$d_p((x,t),E)<4(2\delta)^{\frac{1}{n+p}}l,$$

这与已证明的结论 $|E|=0$ 以及条件 $[d_p(\cdot,E)]^{-\alpha}\in A_1^+(\gamma)$ 对某个 $\alpha\in(0,\infty)$ 成立相结合，进一步推出

$$\begin{aligned} l^{-\alpha}\frac{|R^-(\gamma)\setminus\bigcup_{P\in\mathcal{F}_\delta^{\gamma+}(R)}P|}{|R^-(\gamma)|}&\le\frac{2^{\alpha(2+\frac{1}{n+p})}\delta^{\frac{\alpha}{n+p}}}{|R^-(\gamma)|}\int_{(R^-(\gamma)\setminus E)\setminus\bigcup_{P\in\mathcal{F}_\delta^{\gamma+}(R)}}\left[d_p(\cdot,E)\right]^{-\alpha}\\ &\le 2^{\alpha(2+\frac{1}{n+p})}\delta^{\frac{\alpha}{n+p}}\fint_{R^-(\gamma)}\left[d_p(\cdot,E)\right]^{-\alpha}\\ &\le 2^{\alpha(2+\frac{1}{n+p})}\left[\left\{d_p(\cdot,E)\right\}^{-\alpha}\right]_{A_1^+(\gamma)}\delta^{\frac{\alpha}{n+p}}\operatorname*{ess\,inf}_{R^+(\gamma)}\left[d_p(\cdot,E)\right]^{-\alpha}. \end{aligned}\tag{5.17}$$

设 $(z,\tau)\in\mathbb{R}^{n+1}$ 为 $\mathcal{M}(R^+(\gamma))$ 的中心。再次由 (D5)，我们得到 $l_t(\mathcal{M}(R^+(\gamma)))\ge\frac{1-\gamma}{2}l^p$。因此，

$$\operatorname*{ess\,inf}_{R^+(\gamma)}\left[d_p(\cdot,E)\right]^{-\alpha}\le\left[d_p((z,\tau),E)\right]^{-\alpha}=\left[\min\left\{l,\left[\frac{1}{2}l_t\left(\mathcal{M}\left(R^+(\gamma)\right)\right)\right]^{\frac{1}{p}}\right\}\right]^{-\alpha}\le\left(\frac{4}{1-\gamma}\right)^{\frac{\alpha}{p}}l^{-\alpha}.$$

结合这一点与 (5.17)，得到

$$\left|R^-(\gamma)\setminus\bigcup_{P\in\mathcal{F}_\delta^{\gamma+}(R)}P\right|\le 2^{\alpha(2+\frac{1}{n+p})}\left(\frac{4}{1-\gamma}\right)^{\frac{\alpha}{p}}\left[\left\{d_p(\cdot,E)\right\}^{-\alpha}\right]_{A_1^+(\gamma)}\delta^{\frac{\alpha}{n+p}}\left|R^-(\gamma)\right|.$$

最后，选取 $\delta\in(0,1)$，使得

$$c:=2^{\alpha(2+\frac{1}{n+p})}\left(\frac{4}{1-\gamma}\right)^{\frac{\alpha}{p}}\left[\left\{d_p(\cdot,E)\right\}^{-\alpha}\right]_{A_1^+(\gamma)}\delta^{\frac{\alpha}{n+p}}\in(0,1),$$

于是我们完成了 (5.13) 的证明，从而也完成了引理 5.24。 □

注 5.25。引理5.24 的逆命题尚不清楚，即命题“若 $E\subsetneq\mathbb{R}^{n+1}$ 是一个非空的 γ-FIT 抛物弱孔集，且 $\gamma\in[0,1)$，则存在 $\alpha\in(0,\infty)$ 使得 $[d_p(\cdot,E)]^{-\alpha}\in A_1^+(\gamma)$”是否成立仍是一个悬而未决的问题。

致谢 Weiyi Kong 谨向 Jin Tao 和 Chenfeng Zhu 表示诚挚感谢，感谢他们进行了一些有益的讨论。

参考文献

[1] H. Aimar，椭圆型与抛物型 BMO 及 Harnack 不等式，美国数学会汇刊 306（1988），265–276。[2] H. Aimar 和 R. Crescimbeni，关于单侧 BMO 与利普希茨函数，比萨高等师范学院科学类年刊（第 4 辑）27（1998），437–456（1999）。[3] H. Aimar、I. G´omez 和 I. G´omez Vargas，弱孔隙集与齐次型空间中的 A_1 Muckenhoupt 权，arXiv：2406.14369。[4] H. Aimar、I. G´omez、I. G´omez Vargas 和 F. J. Mart´ın-Reyes，$\mathbb{R}$中的单侧 Muckenhoupt 权与单侧弱孔隙集，《函数分析杂志》289（2025），论文编号 111110，共 18 页。

[5] T. C. Anderson、J. Lehrb¨ack、C. Mudarra 和 A. V. V¨ah¨akangas，弱孔隙集与 Muckenhoupt A_p 距离函数，《函数分析杂志》287（2024），论文编号 110558，共 34 页。[6] F. Angrisani，BLO 上的一种新范数、可逼近性问题与对偶性，《非线性分析》241（2024），论文编号 113480，共 10 页。[7] C. Bennett，BLO 的另一种刻画，《美国数学会会刊》85（1982），552–556。[8] M. Cao、W. Kong、D. Yang、W. Yuan 和 C. Zhu，抛物型外推及其在通过抛物型分数阶交换子刻画抛物型 BMO 空间中的应用，《几何分析杂志》36（2026），论文编号 65，共 37 页。[9] R. R. Coifman 和 R. Rochberg，BMO 的另一种刻画，《美国数学会会刊》79（1980），249–254。[10] D. Cruz-Uribe 和 K. Myyryl¨ainen，抛物型分数阶极大函数的双权范数不等式，《康普顿斯数学评论》（2025），https://doi.org/10.1007/s13163-025-00545-5。[11] E. B. Fabes 和 N. Garofalo，抛物型 B.M.O. 与 Harnack 不等式，《美国数学会会刊》95（1985），63–69。[12] R. Gibara 和 J. Kline，有界倍增度量测度空间上的分数阶极大函数与平均振荡，《函数分析杂志》285（2023），论文编号 110126，共 31 页。[13] F. John 和 L. Nirenberg，关于有界平均振荡函数，《纯粹与应用数学通讯》14（1961），415–426。[14] J. Kinnunen 和 T. Kuusi，双非线性抛物型方程解的局部行为，《数学年刊》337（2007），705–728。[15] J. Kinnunen、J. Lehrb¨ack 和 A. V. V¨ah¨akangas，《Sobolev 空间的极大函数方法》，数学调查与专著 257，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，[2021]。[16] J. Kinnunen 和 K. Myyryl¨ainen，抛物型 Muckenhoupt 类的刻画，《数学进展》444（2024），论文编号 109612，共 57 页。[17] J. Kinnunen 和 K. Myyryl¨ainen，抛物型反 H¨older 类的刻画，《分析与数学杂志》155（2025），609–656。[18] J. Kinnunen、K. Myyryl¨ainen 和 D. Yang，抛物型 BMO 的 John–Nirenberg 不等式，《数学年刊》387（2023），1125–1162。[19] J. Kinnunen、K. Myyryl¨ainen、D. Yang 和 C. Zhu，具有单调测地线性质的齐次型空间上带时间滞后的抛物 Muckenhoupt 权，《位势分析》60（2024），1513–1569。[20] J. Kinnunen 和 O. Saari，关于满足抛物型 Muckenhoupt 条件的权，《非线性分析》131（2016），289–299。[21] J. Kinnunen 和 O. Saari，抛物型加权范数不等式与偏微分方程，《分析与偏微分方程》9（2016），1711–1736。[22] W. Kong、D. Yang、W. Yuan 和 C. Zhu，与几乎递增函数相关的带时间滞后的抛物型 Campanato 空间的最优实变刻画，《变分法与偏微分方程》64（2025），论文编号 228，共 30 页。[23] S. Liang、D. Yang 和 C. Zhang，通过热半群刻画 BLO 空间的新方法及其应用，arXiv: 2602.00479。[24] H. Lin、E. Nakai 和 D. Yang，倍增度量测度空间上局部 Morrey–Campanato 空间中 Lusin 面积函数和 g_λ^* 函数的有界性，《函数空间及其应用》9（2011），245–282。[25] H. Lin、E. Nakai 和 D. Yang，倍增度量测度空间上局部 BMO 空间中 Lusin 面积函数和 g_λ^* 函数的有界性，《数学科学通报》135（2011），59–88。[26] M. Lorente、F. J. Mart´ın-Reyes 和 I. P. Rivera-R´ıos，通过 $M^\sharp$ 函数得到的单侧 C_p 估计，《爱丁堡皇家学会学报 A 辑》153（2023），2079–2105。[27] R. A. Mac´ıas 和 M. S. Riveros，无穷远处的单侧外推与奇异积分，《爱丁堡皇家学会学报 A 辑》130（2000），1081–1102。

[28] F. J. Mart´ín-Reyes、P. Ortega Salvador 和 A. de la Torre，单侧极大函数的加权不等式，美国数学会汇刊 319 (1990), 517–534。[29] F. J. Mart´ín-Reyes、L. Pick 和 A. de la Torre，A_∞^+ 条件，加拿大数学杂志 45 (1993), 1231–1244。[30] F. J. Mart´ín-Reyes 和 A. de la Torre，单侧 BMO 空间，伦敦数学会杂志 (2) 49 (1994), 529–542。[31] Y. Meng、E. Nakai 和 D. Yang，齐次型空间上的 Lusin 面积函数和 Littlewood–Paley g_λ^* 函数估计，《非线性分析》72 (2010), 2721–2736。[32] J. Moser，抛物型微分方程的 Harnack 不等式，《纯粹与应用数学通讯》17 (1964), 101–134。[33] J. Moser，“抛物型微分方程的 Harnack 不等式”的更正，《纯粹与应用数学通讯》20 (1967), 231–236。[34] C. Mudarra，度量测度空间中的弱孔隙性，《爱丁堡皇家学会学报 A 辑》 (2025年)，https://doi.org/10.1017/prm.2025.10087。[35] K. Myyryl¨ainen、T. Oikari 和 O. Saari，具有全局指数可积向前时间抛物型 BMO 的区域，arXiv: 2509.24486。[36] K. Myyryl¨ainen 和 D. Yang，具有时间滞后的抛物型 John–Nirenberg 空间，数学杂志 306 (2024年)，第 46 号论文，20 页。[37] E. Nakai 和 G. Sadasue，关于 BLO 鞅的一些新性质，东北数学杂志 (2) 69 (2017), 183–194。[38] S. Ombrosi 和 L. de Rosa，Weyl 分数阶积分在单侧加权 Lebesgue 空间和 Lipschitz 空间上的有界性，数学出版物 47 (2003), 71–102。[39] M. Pasquariello 和 I. Uriarte-Tuero，中位数、振荡与距离函数，arXiv: 2507.21020。[40] M. S. Riveros 和 A. de la Torre，A_p^+ 和RH_r^+的最佳范围，捷克斯洛伐克数学杂志 51(126) (2001), 285–301。[41] O. Saari，抛物型 BMO 与双重非线性抛物方程上解的全局可积性，伊比利亚美洲数学评论 32 (2016年), 1001–1018。[42] O. Saari，抛物型 BMO 与向前时间极大算子，纯粹与应用数学年刊 (4) 197 (2018), 1477–1497。[43] E. Sawyer，单侧 Hardy–Littlewood 极大函数的加权不等式，美国数学会汇刊 297 (1986), 53–61。[44] E. M. Stein，调和分析：实变方法、正交性与振荡积分。由 Timothy S. Murphy 协助，普林斯顿数学丛书 43，调和分析专著 III。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1993。[45] A. de la Torre 和 J. L. Torrea，单侧离散平方函数，数学研究 156 (2003), 243–260。[46] A. V. Vasin，通过二进覆盖刻画弱孔隙集，《分析与数学杂志》157 (2025年), 789–802。

Weiyi Kong、Dachun Yang（通讯作者）和 Wen Yuan 数学与复杂系统实验室（中国教育部），数学科学学院，北京师范大学，北京 100875，中华人民共和国电子邮箱：weiyikong@mail.bnu.edu.cn（W.Kong） dcyang@bnu.edu.cn（D. Yang） wenyuan@bnu.edu.cn（W. Yuan）