arXiv:2602.09742v1 [math.CA] 10 Feb 2026

分数阶积分与BMO^β 函数的交换子

YOU-WEI BENSON CHEN 和 ALEJANDRO CLAROS

Abstract. 我们研究 Riesz 势 I_α 与容量空间 BMO$^\beta(\mathbb{R}^n)$ 中函数 b的交换子，其中该空间通过豪斯多夫内容 $\mathcal{H}^\beta_\infty$定义。我们证明了一个 Chanillo 型定理：可通过交换子 $[b, I_\alpha]$ 在容量勒贝格空间上的有界性来刻画 BMO$^\beta(\mathbb{R}^n)$。此外，我们以容量模弱型不等式的形式得到了端点估计。这些结果源于对交换子的 β维尖锐极大函数的逐点估计，以及近期在 [CC24]中证明的容度Fefferman-Stein不等式。

1. Introduction and main results

奇异积分算子的交换子在调和分析和偏微分方程中发挥着核心作用。Coifman、Rochberg 和 Weiss 的经典定理 [CRW76] 断言，对于任意 Calder´on-Zygmund 算子 T 和任意局部可积函数 b，交换子

$$[b, T]f := b\,Tf - T(bf)$$

当且仅当 $b \in$ BMO($\mathbb{R}^n$)时，在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界。该结果不仅刻画了有界平均振荡函数空间（BMO），还揭示了它与奇异积分结构之间的内在联系。

这一问题的一个自然推广涉及分数次积分算子的交换子。对于$0 < \alpha < n$，Riesz 势

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy$$

将 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 映射到 $L^q(\mathbb{R}^n)$，其中 $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ 和 $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$。Chanillo [Cha82] 证明，相应的Riesz交换子

$$[b, I_\alpha]f = b\,I_\alpha f - I_\alpha(bf)$$

从 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 有界，当且仅当 $b \in$BMO($\mathbb{R}^n$)，此外

$$\|[b, I_\alpha] : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)\| \simeq \|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}.$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 42B20、42B25；次要分类号 42B35、28A78。

Key words and phrases. Riesz 势、交换子、豪斯多夫内容、Choquet 积分。Y.-W. Chen 获得台湾国家科学及技术委员会研究资助，项目编号为 114-2115-M-018-003-MY2。A. Claros 部分获得以下资助：巴斯克政府通过 BERC 2022-2025 计划提供的资助；西班牙科学与创新部通过资助项目 PRE2021-099091 提供的资助，该项目由 BCAM Severo Ochoa 认证项目 CEX2021-001142-S/MICIN/AEI/10.13039/501100011033 和 ESF+资助；以及由 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 和 ESF+资助的项目 PID2023-146646NB-I00。

随后，Cruz-Uribe 和 Fiorenza [CUF03] （另见 [DLZ01]）以及 Adams 和 Xiao [AX12] 的后续研究进一步完善了这些结果，分别确立了端点情形 $p=1$ 和 $p=\frac{n}{\alpha}$。特别是，Cruz-Uribe 和 Fiorenza 得到了如下形式的模弱型估计

$$|\{x\in\mathbb{R}^n : |[b,I_\alpha]f(x)|>t\}| \le C\,\Psi\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\|b\|_{\mathrm{BMO}}\frac{|f(x)|}{t}\right)dx\right),$$

对所有 $t>0$，其中 $B(t)=t\log(e+t)$，且 $\Psi(t)=[t\log(e+t^{\alpha/n})]^{n/(n-\alpha)}$。

给定 $0<\beta\le n$，我们将豪斯多夫内容 $\mathcal{H}^\beta_\infty$ 定义为

$$\mathcal{H}^\beta_\infty(E):=\inf\left\{\sum_{i=1}^\infty \omega_\beta\, r_i^\beta : E\subset\bigcup_{i=1}^\infty B(x_i,r_i)\right\},$$

其中 $\omega_\beta=\pi^{\beta/2}/\Gamma\big(\frac{\beta}{2}+1\big)$ 是一个归一化常数。根据豪斯多夫内容 $\mathcal{H}^\beta_\infty$ 测度定义函数空间的动机，自然产生于对临界指数下Sobolev嵌入的尖锐形式的研究（参见例如 [Jud61、Ada72、Cia08、FM11、MS21]）。在这一临界情形下，人们不仅经常会遇到经典的指数可积性现象，还会遇到能够刻画低维集上集中效应的精细不等式。在此框架下，自然有必要重新考察通过豪斯多夫内容描述振荡行为的函数空间。对于 $0<\beta\le n$，有界 β维平均振荡函数空间记为 BMO$^{\beta}(\mathbb{R}^n)$，由 [CS24],引入，它由所有局部可积函数 b （关于豪斯多夫内容 $\mathcal{H}^\beta_\infty$）组成，并满足

$$\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)}:=\sup_Q \inf_{c\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell(Q)^\beta}\int_Q |b-c|\,d\mathcal{H}^\beta_\infty<\infty,$$

其中，关于 $\mathcal{H}^\beta_\infty$ 的积分按 Choquet 意义理解（见第 2 节）。当 $\beta=n$ 时，该定义退化为 John 和 Nirenberg [JN61] 的经典空间 BMO($\mathbb{R}^n$)；对于较小的 β 值，空间 BMO$^{\beta}(\mathbb{R}^n)$ 比 BMO($\mathbb{R}^n$) 更小（见 [CS24，推论 1.6]）。

基于这一思路，近期研究发展了适用于 $\mathcal{H}^\beta_\infty$ 的分析工具，包括极大不等式 [COS24、CC24]，Poincar´e-Sobolev 不等式 [HHS23a、HHS23b、HCYZ23]，以及 Riesz 位势理论 [HHS24]。受这些进展启发，本文旨在将 Chanillo 的经典 Riesz 交换子理论 [Cha82] 以及 Cruz-Uribe 和 Fiorenza 的模端点结果 [CUF03] 推广到这一容度框架。具体而言，我们针对豪斯多夫内容 $\mathcal{H}^\beta_\infty$，建立了符号函数属于 BMO$^{\beta}(\mathbb{R}^n)$ 的 Riesz 交换子 $[b,I_\alpha]$ 的强型和弱型不等式。当 $\beta=n$ 时，我们的结果可恢复欧氏理论。

本文的第一个主要结果为交换子的 β 维尖锐极大函数建立了逐点估计。该结果可视为将 [CUF03] 中的定理 1.3 扩展到关于豪斯多夫内容的 Choquet 积分情形。

定理 1.1. 设 $B(t)=t\log(e+t)$。取定 $0<\beta\le n$ 和 $0<\alpha<\beta$。设 b 是BMO$^{\beta}(\mathbb{R}^n)$ 中的可测函数，且 f 是非负可测函数。那么存在常数$C=C(\alpha,\beta,n)>0$，使得对任意 $s>1$ 和任意 $x\in\mathbb{R}^n$，

$$\mathcal{M}^{\#}_\beta([b,I_\alpha]f)(x)\le C\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)}\left(\mathcal{M}_{\mathcal{H}^\beta_\infty}((I_\alpha f)^s)(x)^{\frac{1}{s}}+\mathcal{M}_{\alpha,B,\mathcal{H}^\beta_\infty}f(x)\right), \tag{1.1}$$

其中$\mathcal{M}_{\alpha,B,\mathcal{H}^\beta_\infty}$ 表示与 B 相关联的、关于豪斯多夫内容 $\mathcal{H}^\beta_\infty$ 的分数次*Orlicz*极大算子（见第*3*节）。

Moreov ***er***，若 $\beta \in (n-\alpha, n]$，则存在 $C = C(\alpha, \beta, n) > 0$，使得对每个 $x \in \mathbb{R}^n$，

$$\mathcal{M}_{\beta}^{\#}([b, I_{\alpha}]f)(x) \leq C\|b\|_{\mathrm{BMO}^{\beta}(\mathbb{R}^n)} \left(I_{\alpha} f(x) + \mathcal{M}_{\alpha, B, \mathcal{H}_{\infty}^{\beta}} f(x) \right). \tag{1.2}$$

Here，$\mathcal{M}_{\mathcal{H}_{\infty}^{\beta}}$ 表示在 [COS24],中引入的 β维极大算子，其定义为 y

$$\mathcal{M}_{\mathcal{H}_{\infty}^{\beta}} f(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{\mathcal{H}_{\infty}^{\beta}(Q)} \int_{Q} |f| \, d\mathcal{H}_{\infty}^{\beta},$$

其中，上确界取遍 $\mathbb{R}^n$ 中所有边平行于坐标轴且满足 $x \in Q$的立方体。类似地， $\mathcal{M}_{\beta}^{\#}$ 表示在 [CC 24],中研究的 β维尖锐极大函数，其定义为

$$\mathcal{M}_{\beta}^{\#} f(x) := \sup_{x \in Q} \inf_{c \in \mathbb{R}} \frac{1}{\ell(Q)^{\beta}} \int_{Q} |f - c| \, d\mathcal{H}_{\infty}^{\beta}.$$

注 1.2. 通过调整定理 *1.1* 的证明，可以避免使用奥尔利奇极大函数，但代价是得到一个较弱的不等式（见注 *5.1*）。具体而言，对于每个s、 $t > 1$，都存在常数 $C = C(\alpha, \beta, n, s, t) > 0$，使得对所有 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{M}_{\beta}^{\#}([b, I_{\alpha}]f)(x) \leq C\|b\|_{\mathrm{BMO}^{\beta}(\mathbb{R}^n)} \left(\mathcal{M}_{\mathcal{H}_{\infty}^{\beta}}((I_{\alpha} f)^s)(x)^{\frac{1}{s}} + \mathcal{M}_{\alpha t, \mathcal{H}_{\infty}^{\beta}}(f^t)(x)^{\frac{1}{t}} \right),$$

其中

$$\mathcal{M}_{\alpha, \mathcal{H}_{\infty}^{\beta}} f(x) = \sup_{x \in Q} \frac{\ell(Q)^{\alpha}}{\mathcal{H}_{\infty}^{\beta}(Q)} \int_{Q} |f| \, d\mathcal{H}_{\infty}^{\beta}.$$

结合上述逐点不等式与 [CC24] 中的容量 Fefferman-Stein 不等式（见下文定理 2.5），并利用 [HHS24], 中得到的分数阶积分I_{α} 和分数极大算子 $M_{\alpha,\ \mathcal{H}_{\infty}^{\beta}}$ 在容量勒贝格空间上的有界性，我们得到以下结果，它将 Chanillo [Cha82] 的刻画定理推广到了豪斯多夫内容的背景下。

定理 1.3。设 $0 < \beta \leq n$ 和 $0 < \alpha < \beta$。对于$1 < p < \frac{\beta}{\alpha}$，定义指数 q 满足关系式

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

设 b 是一个可测函数，且交换子 $[b, I_{\alpha}]$ 有定义。那么，以下陈述等价:

(i) $b \in \mathrm{BMO}^{\beta}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) 存在常数 $C = C$（α, β, n, p） > 0 使得

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |[b, I_{\alpha}]f|^q \, d\mathcal{H}_{\infty}^{\beta} \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mathcal{H}_{\infty}^{\beta} \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.3}$$

对所有具有紧支撑的有界函数 f 。

此外，这些范数满足如下等价关系

$$\|[b, I_{\alpha}]\|_{(p,q)} \simeq_{n,\alpha,\beta,p} \|b\|_{\mathrm{BMO}^{\beta}(\mathbb{R}^n)},$$

其中 $\|[b, I_{\alpha}]\|_{(p,q)}$ 是 (1.3) 中的最佳常数 C 。

注 1.4. 令 $1 \le p < \infty$，并考虑容量勒贝格空间

$$L^p\big(\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}\big) := \Big\{ f : \ f \ \textit{is } \mathcal{H}^{\beta}_{\infty}\textit{-quasicontinuous and } \|f\|_{L^p(\mathcal{H}^{\beta}_{\infty})} < \infty \Big\},$$

关于 [CS24, p. 2]，我们参阅其对 $\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}$-拟连续性的定义。该空间赋有如下范数

$$\|f\|_{L^p(\mathcal{H}^{\beta}_{\infty})} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mathcal{H}^{\beta}_{\infty} \right)^{1/p}.$$

在定理 *1.3* 的蕴含$(i) \Rightarrow (ii)$ 中，交换子估计是在稠密子空间 $L^p\big(\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}\big) \cap C_c(\mathbb{R}^n)$上证明的；更确切地说，存在 $C > 0$ 使得

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |[b, I_\alpha] f|^q \, d\mathcal{H}^{\beta}_{\infty} \right)^{\frac{1}{q}} \le C \|b\|_{\mathrm{BMO}^{\beta}(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mathcal{H}^{\beta}_{\infty} \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.4}$$

对每个$f \in L^p\big(\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}\big) \cap C_c(\mathbb{R}^n)$均成立。由于该子空间在$L^p\big(\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}\big)$ 中稠密（参见 [Ada98] 和 [BCR25,p. 6]），不等式(1.4) 可推广到所有 $f \in L^p\big(\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}\big)$。

在欧几里得情形下，Cruz-Uribe 和 Fiorenza [CUF03] 为端点情形下的 Riesz 交换子建立了一个模弱型不等式。我们通过以豪斯多夫内容替代勒贝格测度，并考虑 BMO$^{\beta}$(**$\mathbb{R}^n$**) 中的符号函数，将他们的结果推广到容量框架中。证明中的一个关键要素是容量分数阶极大算子 $\mathcal{M}_{\alpha,\ B,\ \mathcal{H}^{\beta}_{\infty}}$的有界性，我们将在第3节中研究这一点。

定理1.5。设 $0 < \beta \le n$, $0 < \alpha < \beta$，并假设 $\beta \in (n-\alpha, n]$。设 b 是 $\mathrm{BMO}^{\beta}(\mathbb{R}^n)$ 中的可测函数。定义 $B(t) = t\log(e+t)$ 以及 $\Psi(t) = [t\log(e+t^{\alpha/\beta})]^{\beta/(\beta-\alpha)}$。那么，存在常数 $C = C(\alpha, \beta, n) > 0$，使得对任意具有紧支撑的有界可测函数 f，都有

$$\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}\big(\{x \in \mathbb{R}^n : |[b, I_\alpha] f(x)| > t\}\big) \le C\, \Psi\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\|b\|_{\mathrm{BMO}^{\beta}(\mathbb{R}^n)} \frac{|f(x)|}{t} \right) d\mathcal{H}^{\beta}_{\infty} \right) \tag{1.5}$$

对所有 $t > 0$。

注 1.6. 限制 $\beta \in (n-\alpha, n]$ 是 *Riesz* 势I_α 与豪斯多夫内容 $\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}$相互作用所固有的。事实上，若 $\beta \le n - \alpha$，核 $|x|^{\alpha-n}$ 在原点附近相对于 $\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}$的 *Choquet* 意义下不可积，因此即便对于合理的数据，$I_\alpha f$ 也可能在维数为 $n-\alpha$ 的集合上取无穷值；参见 [Ada75, 第 772]页。容度框架中的这种不可积现象已在 [CC24]中有所观察；更详细的讨论及更多参考文献，请参见 [CC24, 注 1。9]

注 1.7. 当 $\beta = n$ 时，定理*1.5*退化为 *Cruz-Uribe* 和 *Fiorenza* 的端点模估计，他们证明了相应不等式是尖锐的：若将 Ψ 替换为递增函数 Ψ_0后该不等式仍成立，则必有 $\Psi(t/\gamma) \le K\, \Psi_0(t)$ 对所有 $t > 0$ 及适当的常数γ、$K > 0$成立。特别是，即使在勒贝格情形下，Ψ 所体现的对数增长也无法改进。

注 1.8. 尽管本文始终聚焦于一阶交换子 $[b, I_\alpha]$，但导出定理 *1.1* 的论证可以加以修改，从而推广到迭代交换子 $(I_\alpha)^m_b$,$m \in \mathbb{N}$ （精确定义见注 *5.2*），并得到相应的强型和端点估计。我们不再探讨这些推广；请参见注 *5.2*。

本文结构。 本文安排如下。第2节介绍豪斯多夫内容 $\mathcal{H}^\beta_\infty$、Choquet积分以及针对尖锐极大函数的容度Fefferman-Stein不等式所需的背景知识。第3节引入与 $\mathcal{H}^\beta_\infty$ 相关的分数次Orlicz极大算子，并建立端点论证中至关重要的模弱型界。第4节回顾 Riesz 势 I_α 在豪斯多夫内容框架下的 $L^p - L^q$ 映射性质，以及相关分数次极大算子的映射性质，并给出一些辅助估计。第5节证明定理 1.1，这是本文的主要技术环节。第 6 节证明定理 1.3 给出的 BMO$^\beta$ 刻画。最后，第 7 节证明定理 1.5给出的端点模弱型估计。

记号。 通常， C 表示一个正的常数，它可能随行变化。我们用$C_{\alpha,\beta,\dots}$表示仅依赖于 $\alpha,\beta,\dots$的常数。

2. Preliminaries and known results

2.1. 豪斯多夫内容与 Choquet 积分。 本节回顾关于相对于豪斯多夫内容和二进 Hausdorff 容量的 Choquet 积分的一些基本事实。这些结果大多可见于 [CS24]。关于这一主题全面且清晰的介绍，也请读者参阅 [PS23]。

非负函数 f 在集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 上相对于外测度 H 的 Choquet 积分定义为

$$\int_\Omega f\, dH := \int_0^\infty H(\{x \in \Omega : f(x) > t\})\, dt.$$

设 $0 < \beta \le n$ ，且设 $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一个立方体。我们用 $\mathcal{H}^{\beta,Q}_\infty$表示相对于 Q的二进 β维豪斯多夫内容。更确切地说，集合 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 的二进 Hausdorff 容量 $\mathcal{H}^{\beta,Q}_\infty(E)$定义为

$$\mathcal{H}^{\beta,Q}_\infty(E) := \inf\left\{ \sum_j \ell(Q_j)^\beta :\ E \subseteq \bigcup_j Q_j,\ Q_j \in \mathcal{D}(Q) \right\},$$

其中， $\mathcal{D}(Q)$表示由 Q 生成的所有二进立方体的集合， $\ell(Q_j)$是 Q_j的边长。尽管当 $\beta < n$时，豪斯多夫内容 $\mathcal{H}^\beta_\infty$ 并非强次可加，但可以证明，对于任意立方体 $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ ，二进 Hausdorff 容量 $\mathcal{H}^{\beta,Q}_\infty$是强次可加的，因此满足

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^\infty f_j\, d\mathcal{H}^{\beta,Q}_\infty \le \sum_{j=1}^\infty \int_{\mathbb{R}^n} f_j\, d\mathcal{H}^{\beta,Q}_\infty$$

（通常的二进情形参见 [STW16，命题 3.5 和 3.6]；一般立方体情形参见 [CS24，命题 2.6 和命题 2.10] ）。此外，存在一个仅依赖于 β的常数 $C_\beta > 0$，使得对于每个立方体 $Q \subseteq \mathbb{R}^n$，

$$\frac{1}{C_\beta}\, \mathcal{H}^{\beta,Q}_\infty(E) \le \mathcal{H}^\beta_\infty(E) \le C_\beta\, \mathcal{H}^{\beta,Q}_\infty(E), \tag{2.1}$$

对所有 $E \subseteq \mathbb{R}^n$（参见 [YY08，命题 2.3]以及 [CS24，命题 2.11]）。在豪斯多夫内容下的 Choquet 积分与其二进对应形式之间转换的一个优点是

对于任意 $c \geq 0$ 和任意非负函数 f，都有

$$\left|f_{Q,\beta} - c\right| \leq \frac{1}{\mathcal{H}_{\infty}^{\beta,Q_0}(Q)} \int_Q |f-c|\, d\mathcal{H}_{\infty}^{\beta,Q_0}, \tag{2.2}$$

其中$f_{Q,\beta}$ 定义为

$$f_{Q,\beta} := \frac{1}{\mathcal{H}_{\infty}^{\beta,Q_0}(Q)} \int_Q f\, d\mathcal{H}_{\infty}^{\beta,Q_0}$$

（见 [BCR25，引理2.3]）。下一引理给出与豪斯多夫内容相关联的Choquet积分的基本性质。它出现在 [HHS23a第 5]页；证明可见于 [Ada98]和 [Ada15第 4]章。

引理 2.1. 设 $0 < \beta \leq n$ 满足 $n \in \mathbb{N}$，并设$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$。则下列结论成立：

（*i*）对于 $a \geq 0$ 以及 $\mathbb{R}^n$上的非负函数 f，我们有

$$\int_{\Omega} a\, f(x)\, d\mathcal{H}_{\infty}^{\beta} = a \int_{\Omega} f(x)\, d\mathcal{H}_{\infty}^{\beta};$$

（*ii*）对于 $\mathbb{R}^n$上的非负函数 f_1 和 f_2，我们有

$$\int_{\Omega} f_1(x) + f_2(x)\, d\mathcal{H}_{\infty}^{\beta} \leq 2\left(\int_{\Omega} f_1(x)\, d\mathcal{H}_{\infty}^{\beta} + \int_{\Omega} f_2(x)\, d\mathcal{H}_{\infty}^{\beta}\right);$$

(iii) 令 $1 < p < \infty$，并令 p' 由 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$定义。那么对于 $\mathbb{R}^n$ 上的非负函数 f_1 和 f_2，有

$$\int_{\Omega} f_1(x) f_2(x)\, d\mathcal{H}_{\infty}^{\beta} \leq 2\left(\int_{\Omega} f_1(x)^p\, d\mathcal{H}_{\infty}^{\beta}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} f_2(x)^{p'}\, d\mathcal{H}_{\infty}^{\beta}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

下面陈述引自 [CC24 的引理 2.6], 。它是对 [OV98 中引理 2] 结果的细微修改。

引理 2.2. 设 $\{Q_j\}$ 是从属于某个二进格 $\mathcal{D}(Q_0)$ 的一族互不重叠的二进立方体。那么存在一个子族 $\{Q_{j_k}\}$ 和一族互不重叠的祖先Q_k，使得

(1)

$$\bigcup_j Q_j \subset \bigcup_k Q_{j_k} \cup \bigcup_k \tilde{Q}_k$$

(2)

$$\sum_{Q_{j_k} \subset Q} \ell(Q_{j_k})^{\beta} \leq 2\ell(Q)^{\beta},\ \textit{for each dyadic cube } Q.$$

(3)

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\infty}^{\beta,Q_0}(\cup_j Q_j) &\leq \sum_{k, Q_{j_k} \not\subseteq \tilde{Q}_m} \ell(Q_{j_k})^{\beta} + \sum_k \ell(\tilde{Q}_k)^{\beta} \\ &\leq \sum_k \ell(Q_{j_k})^{\beta} \\ &\leq 2\mathcal{H}_{\infty}^{\beta,Q_0}(\cup_j Q_j).\end{aligned}$$

备注2.3. 引理 *2.2* 中的条件 *(2)* 通常称为打包条件。特别地，设 $\{Q_k\}_k \subset \mathcal{D}(Q_0)$ 是一组满足下述条件的二进立方体，

$$\sum_{Q_k \subset Q} \ell(Q_k)^\beta \leq 2\,\ell(Q)^\beta \qquad \textit{for every dyadic cube } Q.$$

那么，对每个 $f \geq 0$，都有

$$\sum_k \int_{Q_k} f\, d\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0} \leq 2 \int_{\bigcup_k Q_k} f\, d\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}. \tag{2.3}$$

下一个引理引自 [COS24，引理 2.2] 和 [HHS23b，命题 2.3]，（扩展了[OV98，引理 3]）。

引理2.4。设 $f \geq 0$ 且 $0 < \alpha \leq \beta \leq n \in \mathbb{N}$。那么

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mathcal{H}_\infty^\beta \leq \frac{\beta}{\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{\frac{\alpha}{\beta}}\, d\mathcal{H}_\infty^\alpha \right)^{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

我们将使用 β 维 Fefferman-Stein不等式，该不等式由 [CC24，定理 1.1] 建立。

定理 2.5。设 $0 < \beta \leq n \in \mathbb{N}$、$0 < p_0 < \infty$ 和 f 关于 $\mathcal{H}_\infty^\beta$ 局部可积，使得

$$\sup_{0<t\leq N} t^{p_0} \mathcal{H}_\infty^\beta(\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\mathcal{H}_\infty^\beta} f(x) > t\}) < \infty \qquad \textit{for all } N > 0. \tag{2.4}$$

那么，存在常数 $C = C\,(p, n, \beta)\, > 0$ 使得

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\mathcal{M}_{\mathcal{H}_\infty^\beta} f \right)^p\, d\mathcal{H}_\infty^\beta \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\mathcal{M}_\beta^\# f \right)^p\, d\mathcal{H}_\infty^\beta \right)^{\frac{1}{p}}$$

对所有 $p_0 < p < \infty$ 均成立。

设 $0 < \beta \leq n$，且 $Q_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一个立方体。与二进 Hausdorff 容量 $\mathcal{H}^{\beta,}{}_\infty^{Q_0}$ 相关联的二进最大算子由 [CS24]，引入，定义如下：

$$\mathcal{M}_{\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}} f(x) := \sup_{x \in Q} \frac{1}{\ell(Q)^\beta} \int_Q |f|\, d\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0},$$

其中，上确界取遍所有包含 x 的二进立方体 $Q \in \mathcal{D}(Q_0)$。相应的弱型估计也已在 [CS24] 中得到证明。为证明定理1.5中陈述的模弱点不等式，我们需要对前述结果作如下修改。

引理 2.6. 设 $\varphi : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ 是一个倍增函数，也就是说，存在 $C_\varphi > 0$ 使得对于每个 $t > 0$，均有 $\varphi(2t) \leq C_\varphi \varphi(t)$。那么，存在常数 $C = C\,(\beta, \varphi)\, > 0$ 使得

$$\sup_{\lambda>0} \varphi(\lambda) \mathcal{H}_\infty^\beta(\{x : \mathcal{M}_{\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}} f(x) > \lambda\}) \leq C \sup_{\lambda>0} \varphi(\lambda) \mathcal{H}_\infty^\beta(\{x : \mathcal{M}_\beta^\# f(x) > \lambda\}) \tag{2.5}$$

对所有使左侧有限的函数 f。

证明借鉴了 [P´er95 的引理 2.1]，中的论证，并依赖于 [CC24] 中建立的好-λ不等式。为方便读者，我们在此给出详细证明。

证明。 鉴于等价关系 (2.1)，只需对二进Hausdorff内容$\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}$证明(2.5)。根据 [CC24 定理 3.1], 中证明的好 -λ 不等式，存在一个常数 $C_\beta > 0$ 使得

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}(\{x\in\mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}} f(x) > \lambda\}) \le& \mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}(\{x\in\mathbb{R}^n : \mathcal{M}_\beta^\# f(x) > \varepsilon\lambda\})\\ &+ \varepsilon\, C_\beta \mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}(\{x\in\mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}} f(x) > c_\beta\lambda\})\end{aligned}$$

对所有的 $\lambda > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，其中 $c_\beta = \frac{1}{2^{\beta+2}}$。利用 φ 的倍增性质，存在常数 $C_1 = C_1(\beta,\varphi) > 0$，使得对所有 $\lambda > 0$，$\varphi(\lambda) = \varphi(2^{\beta+2}c_\beta\lambda) \le C_1\varphi(c_\beta\lambda)$。我们选取充分小的 $\varepsilon > 0$，使得 $\varepsilon C_\beta C_1 = \frac{1}{2}$。再次利用倍增性质，存在常数 $C_2 = C_2(\beta,\varphi) > 0$，使得 $\varphi(\lambda) = \varphi(\frac{1}{\varepsilon}\varepsilon\lambda) \le C_2\varphi(\varepsilon\lambda)$。因此，我们有

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda)\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}(\{x : \mathcal{M}_{\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}} f(x) > \lambda\}) \le& C_2\varphi(\varepsilon\lambda)\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}(\{x : \mathcal{M}_\beta^\# f(x) > \varepsilon\lambda\})\\ &+ \frac{1}{2}\varphi(c_\beta\lambda)\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}(\{x : \mathcal{M}_{\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}} f(x) > c_\beta\lambda\})\\ \le& C_2 \sup_{\lambda>0}\varphi(\varepsilon\lambda)\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}(\{x : \mathcal{M}_\beta^\# f(x) > \varepsilon\lambda\})\\ &+ \frac{1}{2}\sup_{\lambda>0}\varphi(c_\beta\lambda)\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}(\{x : \mathcal{M}_{\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}} f(x) > c_\beta\lambda\})\\ =& C_2 \sup_{\lambda>0}\varphi(\lambda)\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}(\{x : \mathcal{M}_\beta^\# f(x) > \lambda\})\\ &+ \frac{1}{2}\sup_{\lambda>0}\varphi(\lambda)\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}(\{x : \mathcal{M}_{\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}} f(x) > \lambda\}).\end{aligned}$$

对左端关于 $\lambda > 0$ 取上确界，并假设其有限，我们可以将右端的第二项吸收到左端，从而完成 (2.5) 的证明，其中 $C = 2C_2$。 □

2.2. **关于** β维有界平均振荡空间。对于函数 $b \in \mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)$ 和任意立方体 Q，我们定义以下量:

$$b_Q = \arg\min_{c\in\mathbb{R}} \frac{1}{\ell(Q)^\beta}\int_Q |b-c| d\mathcal{H}_\infty^\beta.$$

我们注意到，对于每个 $b \in \mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)$ 和每个立方体 Q，定义 $\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)}$ 中的下确界总能取到；也就是说，前述极小点存在。详细讨论请参见 [CS24，第 983] 页。

引理 2.7。设 $0 < \beta \le n \in \mathbb{N}$ 且 $b \in \mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)$。那么，存在 $C_\beta > 0$ 使得

$$|b_{2^kQ} - b_Q| \le C_\beta k\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)}$$

对于每个立方体 Q 和每个 $k \in \mathbb{N}$。

证明。 首先，我们注意到

$$\begin{aligned}|b_{2Q} - b_Q| =& \frac{C_\beta}{\ell(Q)^\beta}\int_Q |b_{2Q} - b_Q| d\mathcal{H}_\infty^\beta\\ \le& \frac{C_\beta}{\ell(Q)^\beta}\int_Q |b - b_{2Q}| d\mathcal{H}_\infty^\beta + \frac{C_\beta}{\ell(Q)^\beta}\int_Q |b - b_Q| d\mathcal{H}_\infty^\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq \frac{C_\beta}{\ell(2Q)^\beta}\int_{2Q}|b-b_{2Q}|d\mathcal{H}^\beta_\infty+\frac{C_\beta}{\ell(Q)^\beta}\int_Q|b-b_Q|d\mathcal{H}^\beta_\infty\\&\leq C_\beta\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

因此,

$$|b_{2^kQ}-b_Q|\leq\sum_{i=1}^k|b_{2^iQ}-b_{2^{i-1}Q}|\leq\sum_{i=1}^k C_\beta\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)}=C_\beta k\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)}.$$

□

我们需要以下结果，它是 [CS24 中推论 1.4 的一个小幅修改].

定理 2.8。 设 $0<\beta\leq n\in\mathbb{N}$ 和 $b\in\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)$。存在常数 $C_1,C_2>0$，使得

$$\frac{1}{\ell(Q)^\beta}\int_Q\exp\left(\frac{|b-b_Q|}{C_1\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)}}\right)d\mathcal{H}^\beta_\infty\leq C_2,$$

对每个立方体 Q。

我们还回顾 [CS24 中的以下结果，即推论 1.5]。

定理 2.9。 设 $0<\beta\leq n\in\mathbb{N}$ 和 $b\in\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)$。存在常数 $C=C(\beta)>0$，使得

$$\sup_Q\inf_{c\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\ell(Q)^\beta}\int_Q|b-c|^pd\mathcal{H}^\beta_\infty\right)^{\frac{1}{p}}\leq Cp\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta}$$

对所有 $p\geq1$。

我们还需要 BMO$^\beta$ 函数的以下基本性质。

引理 2.10. 设 $0<\beta\leq n\in\mathbb{N}$。则存在常数 $C_\beta>0$，它仅依赖于 β，使得

(i) $\|f+g\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)}\leq2(\|f\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)}+\|g\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)})$ (ii) $\|\lambda f\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)}=|\lambda|\|f\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)}$ 对任意 $\lambda\in\mathbb{R}$ (iii) $\||f|\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)}\leq C_\beta\|f\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)}$ (iv) $\|\max(f,g)\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)}\leq C_\beta(\|f\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)}+\|g\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)})$ (v) $\|\min(f,g)\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)}\leq C_\beta(\|f\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)}+\|g\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)})$

证明。 (i) 和 (ii) 的证明可由引理 2.1 直接得到。

(iii) 的证明是对 [BCR25] 中引理 2.6 的小幅修改。为完整起见，我们给出详细证明。我们定义相对于二进 Hausdorff 容量的 BMO$^\beta$ 为

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty)}:=\sup_{Q\subseteq\mathbb{R}^n}\inf_{c\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty(Q)}\int_Q|f(y)-c|\,d\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty(y)\right)<\infty,$$

其中 $Q_0:=[0,1)^n$。由 (2.1) 可知

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty)}\cong\|f\|_{\mathrm{BMO}^\beta}.$$

对于立方体 $Q'\subseteq\mathbb{R}^n$，我们定义

$$c_{Q'}=\arg\min_{c\in\mathbb{R}}\frac{1}{\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}(Q')}\int_{Q'}|f-c|\,d\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}.$$

于是，对于每个 $x\in Q'$，由 (2.2) 可得

$$\begin{aligned}&\left||f(x)|-\frac{1}{\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}(Q')}\int_{Q'}|f(y)|\,d\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}(y)\right|\\ \le&\frac{1}{\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}(Q')}\int_{Q'}|f(x)-f(y)|\,d\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}(y)\\ =&\frac{1}{\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}(Q')}\int_{Q'}|f(x)-c_{Q'}+c_{Q'}-f(y)|\,d\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}(y)\\ \le&|f(x)-c_{Q'}|+\frac{1}{\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}(Q')}\int_{Q'}|f(y)-c_{Q'}|\,d\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}(y)\\ \le&|f(x)-c_{Q'}|+\|f\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0})}.\end{aligned}$$

将前述估计关于豪斯多夫内容 $\mathcal{H}_\infty^\beta$ 在 Q' 上积分，然后除以 $\mathcal{H}_\infty^\beta(Q')$，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mathcal{H}_\infty^{\beta}(Q')}\int_{Q'}\left||f(x)|-\frac{1}{\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}(Q')}\int_{Q'}|f|\,d\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}\right|\,d\mathcal{H}_\infty^{\beta}(x)\\ \le&\frac{1}{\mathcal{H}_\infty^{\beta}(Q')}\int_{Q'}|f(x)-c_{Q'}|\,d\mathcal{H}_\infty^{\beta}(x)+\|f\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0})}\\ \le&\frac{C_\beta}{\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}(Q')}\int_{Q'}|f(x)-c_{Q'}|\,d\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}(x)+\|f\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0})}\\ \le&(1+c_\beta)\|f\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0})}.\end{aligned}$$

因此，对于每个立方体 $Q'\subset\mathbb{R}^n$，我们得到

$$\begin{aligned}&\inf_{c\in\mathbb{R}}\frac{1}{\mathcal{H}_\infty^{\beta}(Q')}\int_{Q'}||f(x)|-c|\,d\mathcal{H}_\infty^{\beta}(x)\\ \le&\frac{1}{\mathcal{H}_\infty^{\beta}(Q')}\int_{Q'}\left||f(x)|-\frac{1}{\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}(Q')}\int_{Q'}|f|\,d\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}\right|\,d\mathcal{H}_\infty^{\beta}(x)\\ \le&(1+c_\beta)\|f\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0})}\\ \le&C_\beta\|f\|_{\mathrm{BMO}^\beta}.\end{aligned}$$

因此，

$$\||f|\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)}\le C_\beta\|f\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)}.$$

(*iv*) 和 (*v*) 的证明由 (*iii*) 及以下等式得出

$$\max(f,g)=\frac{f+g+|f-g|}{2}\ \text{and}\ \min(f,g)=\frac{f+g-|f-g|}{2}.$$

□

引理 2.10 的直接应用得到以下结果。

引理 2.11. 设 $0 < \beta \le n$, $b \in \mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)$ 且 $k > 0$。定义截断函数 b_k 为

$$b_k(x) := \begin{cases} k, & \text{if } b(x) > k; \\ b(x), & \text{if } -k \le b(x) \le k; \\ -k & \text{if } b(x) < -k. \end{cases}$$

那么存在常数 $C_\beta > 0$，仅依赖于 β，使得

$$\|b_k\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)} \le C_\beta \|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)}.$$

3. Capacitary Orlicz spaces and maximal functions

若函数 $B : [0,\infty) \to [0,\infty)$ 连续、凸且严格递增，并满足 $B(0) = 0$ 且 $\lim_{t\to\infty} B(t) = \infty$，则称其为杨函数。给定两个杨函数 A 和 B，若存在常数 $t_0, c_1, c_2 > 0$，使得对所有$t \ge t_0$都有 $A(t) \approx B(t)$ $c_1 A(t) \le B(t) \le c_2 A(t)$，则记作 $A(t) \approx B(t)$。

若杨函数 B 满足对所有 $t > 0$ 都有 $B(2t) \le CB(t)$，则称其为倍增的；若对所有 $s, t > 0$ 都有 $B(st) \le CB(s)B(t)$，则称其为次乘性的。标准例子包括 $B(t) = t^r$（$r \ge 1$ 时），以及更一般的 $B(t) = t^a[\log(e+t)]^b$，其中 $a \ge 1$ 且 $b > 0$；两者均为次乘性函数。

给定一个非空集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 和一个杨函数 B，我们将 Orlicz 空间 $L^B(E, \mathcal{H}^\beta_\infty)$ 定义为满足以下条件的所有函数 f 的集合：对于某个 $\lambda > 0$，$B(|f|/\lambda)$ 关于豪斯多夫内容 $\mathcal{H}^\beta_\infty$ 在 E 上可积。该空间配备 Luxemburg 准范数

$$\|f\|_{L^B(E,\mathcal{H}^\beta_\infty)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_E B\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mathcal{H}^\beta_\infty \le 1\right\}.$$

在 E 是一个立方体 Q 的特殊情形下，我们还考虑平均 Luxemburg 准范数，其定义为

$$\|f\|_{B,Q,\mathcal{H}^\beta_\infty} = \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{\ell(Q)^\beta} \int_Q B\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mathcal{H}^\beta_\infty \le 1\right\}.$$

注 3.1。沿用前面的记号，定理 *2.8* 可改述为

$$\|b - b_Q\|_{B,Q,\mathcal{H}^\beta_\infty} \le C\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)},$$

对每个立方体 Q，其中 $B(t) = e^t - 1$。

给定一个杨函数 B，其互补 Young 函数定义为

$$\bar{B}(t) = \sup_{s>0}\{st - B(s)\}, \qquad t > 0.$$

注 3.2。令 $B(t) = t\log(e+t)$，互补 *Young* 函数 $\bar{B}$ 满足 $\bar{B}(t) \lesssim e^t - 1$（见 [BS88]）。

我们需要关于豪斯多夫内容的 Orlicz 空间 Hölder 不等式 .

L引理 3.3. 给定一个杨函数 B，则对所有函数 f 和 g 以及所有立方体 Q ，

$$\frac{1}{\ell(Q)^\beta}\int_Q |fg|d\mathcal{H}^\beta_\infty \le C_\beta \|f\|_{B,Q,\mathcal{H}^\beta_\infty}\|g\|_{\bar{B},Q,\mathcal{H}^\beta_\infty}. \tag{3.1}$$

证明。由杨不等式,

$$xy \le B(x)+\bar{B}(y),$$

对所有 x， $y\ge 0$。于是,

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_{B,Q,\mathcal{H}^\beta_\infty}}\frac{|g(x)|}{\|g\|_{\bar{B},Q,\mathcal{H}^\beta_\infty}} \le B\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{B,Q,\mathcal{H}^\beta_\infty}}\right)+\bar{B}\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{\bar{B},Q,\mathcal{H}^\beta_\infty}}\right).$$

在 Q 上积分,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ell(Q)^\beta}\int_Q \frac{|f|}{\|f\|_{B,Q,\mathcal{H}^\beta_\infty}}\frac{|g|}{\|g\|_{\bar{B},Q,\mathcal{H}^\beta_\infty}}d\mathcal{H}^\beta_\infty \le& C_\beta\frac{1}{\ell(Q)^\beta}\int_Q B\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{B,Q,\mathcal{H}^\beta_\infty}}\right)d\mathcal{H}^\beta_\infty\\ &+C_\beta\frac{1}{\ell(Q)^\beta}\int_Q \bar{B}\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{\bar{B},Q,\mathcal{H}^\beta_\infty}}\right)d\mathcal{H}^\beta_\infty\\ \le& 2C_\beta.\end{aligned}$$

□

这些概念促使我们给出以下与豪斯多夫内容相关的 Orlicz 分数阶极大算子的定义。

定义 3.4。设 $n\in\mathbb{N}$ 且 $0<\alpha<\beta\le n$。相对于杨函数 B，函数 f 在 $\mathbb{R}^n$ 中的 β-维分数极大算子定义为

$$\mathcal{M}_{\alpha,B,\mathcal{H}^\beta_\infty}f(x)=\sup_Q \chi_Q(x)\ell(Q)^\alpha\|f\|_{B,Q,\mathcal{H}^\beta_\infty}.$$

当 $\alpha=0$ 时，我们简记为 $\mathcal{M}_{0,B,\mathcal{H}^\beta_\infty}f=\mathcal{M}_{B,\mathcal{H}^\beta_\infty}f$。令 $\mathcal{D}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中通常的二进立方体集合，我们定义相对于杨函数 B 的函数 f 的二进 β 维分数极大算子为

$$\mathcal{M}^{\mathcal{D}}_{\alpha,B,\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty}f(x)=\sup_{P\in\mathcal{D}}\chi_P(x)\ell(P)^\alpha\|f\|_{B,P,\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty}.$$

注 3.5. 在 *Hölder* 不等式中取 $g=1$，可得对于任意杨函数 B 和 $0<\alpha<\beta$,

$$\mathcal{M}_{\alpha,\mathcal{H}^\beta_\infty}f(x)\le C_\beta\,\mathcal{M}_{\alpha,B,\mathcal{H}^\beta_\infty}f(x)$$

对所有 $x\in\mathbb{R}^n$。

引理3.6. 设 $0<\beta\le n$ 且 $0\le\alpha<\beta$。设 f 为局部可积函数， B 为杨函数。假设对于某个立方体 Q 和某个参数 $t>0$，有

$$\ell(Q)^\alpha\|f\|_{B,Q,\mathcal{H}^\beta_\infty}>t. \tag{3.2}$$

那么，存在一个二进立方体 $P\in\mathcal{D}$，使得 $Q\subset 3P$，以及一个常数 $C_{\beta,\ n}>0$，使得

$$\ell(P)^\alpha\|f\|_{B,P,\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty}>c_{\beta,n}t.$$

证明。令 $k \in \mathbb{Z}$ 为满足 $2^{k-1} < \ell(Q) \le 2^k$ 的唯一整数。至少存在一个、至多存在 2^n 个与 Q 的内部相交的边长为 2^k 的二进立方体 $\{P_j\}_{j=1}^m$ $(1 \le m \le 2^n)$。注意，对每个 j，都有 $Q \subset 3P_j$。我们断言，这些立方体中有一个（记作 P_1）满足

$$\ell(P_1)^\alpha \left\|\chi_{P_1} f\right\|_{B,Q,\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty} > \frac{t}{c_\beta 2^n}.$$

事实上，若对于每个 $j = 1, \ldots\ldots, m$ 都有

$$\ell(P_j)^\alpha \left\|\chi_{P_j} f\right\|_{B,Q,\mathcal{H}^\beta_\infty} \le \frac{t}{c_\beta 2^n},$$

那么就可以推出

$$\begin{aligned}
\ell(Q)^\alpha \left\|f\right\|_{B,Q,\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty} =& \ell(Q)^\alpha \left\|\chi_{\cup_{j=1}^m P_j} f\right\|_{B,Q,\mathcal{H}^\beta_\infty} \\
\le& c_\beta \sum_{j=1}^m \ell(Q)^\alpha \left\|\chi_{P_j} f\right\|_{B,Q,\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty} \\
\le& c_\beta \sum_{j=1}^m \ell(P_j)^\alpha \left\|\chi_{P_j} f\right\|_{B,Q,\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty} \\
\le& c_\beta \sum_{j=1}^m \frac{t}{c_\beta 2^n} \\
=& \frac{m}{2^n} t \\
\le& t,
\end{aligned}$$

这与 (3.2) 矛盾。因此，我们必有

$$\ell(P_1)^\alpha \left\|\chi_{P_1} f\right\|_{B,Q,\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty} > \frac{t}{c_\beta 2^n}.$$

利用 $\ell(P_1)^\beta \le 2^\beta \ell(Q)^\beta$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{t}{c_\beta 2^n} <& \ell(P_1)^\alpha \left\|\chi_{P_1} f\right\|_{B,Q,\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty} \\
\le& 2^\beta \ell(P_1)^\alpha \left\|f\right\|_{B,P_1,\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty}.
\end{aligned}$$

至此，常数为 $C = \frac{1}{c_\beta 2^{n+\beta}}$ 的证明完成。 ——— □

下面的推论由前述引理结合 [COS24 引理 2.4] 中的一个论证得出。

推论 3.7。存在常数 $c = c(n, \beta) > 0$，使得

$$\mathcal{H}^\beta_\infty \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\alpha,B,\mathcal{H}^\beta_\infty} f(x) > t \right\} \right) \le 3^n \mathcal{H}^\beta_\infty \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}^{\mathcal{D}}_{\alpha,B,\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty} f(x) > c\, t \right\} \right)$$

对每个 $t > 0$ 都成立。

证明。对于 $t > 0$，我们定义

$$E_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\alpha,B,\mathcal{H}^\beta_\infty} f(x) > t \right\},$$

and

$$L_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}^{\mathcal{D}}_{\alpha,B,\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_{\infty}} f(x) > t \right\}.$$

设 $x \in E_t$，则存在一个立方体 Q_x，使得 $x \in Q_x$，从而 $\ell(Q)^{\alpha}\|f\|_{B,\,Q,\,\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}} > t$，这意味着 $Q_x \subseteq E_t$。由引理3.6，存在 $P_x \in \mathcal{D}$，使得 $Q_x \subseteq 3P_x$，且满足$\ell(P_x)^{\alpha}\|f\|_{B,\,P_x,\,\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}{}^{Q_0}} > ct$，其中 $c = c(n,\ \beta) > 0$。因此，$P_x \subseteq L_{ct}$并且

$$E_t \subseteq \bigcup_{x\in E_t} Q_x \subseteq \bigcup_{x\in E_t} 3P_x \subseteq \{3P : P \in \mathcal{D} \text{ and } P \subseteq L_{ct}\}.$$

对于每个 $P \in \mathcal{D}$，当 $P \subseteq L_{ct}$ 时，我们可以针对适当的平移算子 $\{\tau_i\}_{i=1}^{3^n}$ 写出 $3P = \bigcup_{i=1}^{3^n} \tau_i P$。因此，利用 $\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}$ 的次可加性和平移不变性，我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}(E_t) \leq & \mathcal{H}^{\beta}_{\infty}(\{3P : P \in \mathcal{D} \text{ and } P \subseteq L_{ct}\}) \\
= & \mathcal{H}^{\beta}_{\infty}\left(\left\{\cup_{i=1}^{3^n}\tau_i P : P \in \mathcal{D} \text{ and } P \subseteq L_{ct}\right\}\right) \\
\leq & \sum_{i=1}^{3^n} \mathcal{H}^{\beta}_{\infty}(\{\tau_i P : P \in \mathcal{D} \text{ and } P \subseteq L_{ct}\}) \\
= & 3^n \mathcal{H}^{\beta}_{\infty}(\{P : P \in \mathcal{D} \text{ and } P \subseteq L_{ct}\}) \\
= & 3^n \mathcal{H}^{\beta}_{\infty}(L_{ct}).
\end{aligned}$$

□

定义3.8。给定一个杨函数 B，我们定义函数 h_B 为

$$h_B(s) = \sup_{t>0} \frac{B(st)}{B(t)}$$

对于每个 $0 \leq s < \infty$。

注3.9。如 [CUF03，引理3。11], 所示，函数 h_B 是次乘性的，在 $[0,\infty)$ 上递增，并且在满足 $h_B(1) = 1$ 的 $[0,1]$, 上严格递增。

我们还将使用以下引理，其证明见于 [HLP88]。

引理 3.10. 假设函数 $t \mapsto \Phi(t)/t$ 是递减的。则对任意正数序列 $\{x_k\}$，我们有

$$\Phi\left(\sum_k x_k\right) \leq \sum_k \Phi(x_k).$$

有了前面的结果，我们现在可以建立如下定理，该定理对于推导定理1.5中所述的模弱型端点估计至关重要。

定理3.11。设 $0 < \beta \leq n$ 和 $0 \leq \alpha < \beta$。设 B 是一个杨函数，满足 $t \mapsto B(t)/t^{\beta/\alpha}$对所有 $t > 0$均为递减函数。则存在常数 $C = C(n,\beta,\alpha,B) > 0$，使得对所有$t > 0$，算子 $\mathcal{M}_{\alpha,B,\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}}$ 满足模弱型不等式

$$\Phi\left(\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\alpha,B,\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}} f(x) > t\}\right)\right) \leq C\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{f(x)}{t}\right) d\mathcal{H}^{\beta}_{\infty},$$

*fo*对所有非负函数 $f \in L^B(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}^\beta_\infty)$均成立。这里， Φ 表示任意满足条件的函数 g

$$\Phi(s) \le C_1\Phi_1(s) = \begin{cases} 0 & if\ s = 0, \\ \dfrac{s}{h_B(s^{\alpha/\beta})} & if\ s > 0. \end{cases}$$

注 3.12. 函数 Φ_1 是良定义的；事实上，由 [CUF03，引理 3。12], 由于 $B(t)/t^{\beta/\alpha}$是递减的，由此可得 $0 < h_B(s^{\alpha/\beta}) < \infty$对所有 $s > 0$成立。此外，函数 Φ_1是递增的，且 $\Phi_1(t)/t$ 是递减的。而且，存在一个可逆函数 Φ ，使得$\Phi(s) \le C_1\Phi_1(s)$。

证明。 固定 $t > 0$，并定义这些集合

$$E_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\alpha,B,\mathcal{H}^\beta_\infty} f(x) > t\},$$

and

$$L_t = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}^{\mathcal{D}}_{\alpha,B,\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty} f(x) > t\right\}.$$

由推论 3.7，我们有

$$\mathcal{H}^\beta_\infty(E_t) \le 3^n \mathcal{H}^\beta_\infty(L_{At}),$$

其中$A = \frac{1}{c_n \cdot 3^n}$。利用 Φ_1 是递增的以及(2.1)，我们有

$$\Phi_1(\mathcal{H}^\beta_\infty(E_t)) \le \Phi_1(C_{\beta,n}\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty(L_{At})).$$

我们可以写成

$$L_{At} = \bigcup_j P_j,$$

其中 $\{P_j\}_j$ 是包含在 L_{At} 中的互不相交二进立方体的极大集合。注意到 eachP_j 满足

$$\ell(P_j)^\alpha \|f\|_{B,P_j,\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty} > At.$$

根据 Luxemburg 范数的定义，这意味着

$$\|(At)^{-1}\ell(P_j)^\alpha f\|_{B,P_j,\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty} > 1$$

对每个 j 均成立。因此,

$$\begin{aligned} 1 &< \frac{1}{\ell(P_j)^\beta}\int_{P_j} B\left(\frac{\ell(P_j)^\alpha f(x)}{At}\right) d\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty \\ &\le \frac{h_B(A^{-1}\ell(P_j)^\alpha)}{\ell(P_j)^\beta}\int_{P_j} B\left(\frac{f(x)}{t}\right) d\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty \\ &\le h_B(A^{-1}C_\beta^{-\alpha/\beta})\frac{h_B((C_\beta\ell(P_j)^\beta)^{\alpha/\beta})}{\ell(P_j)^\beta}\int_{P_j} B\left(\frac{f(x)}{t}\right) d\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty \\ &= h_B(A^{-1}C_\beta^{-\alpha/\beta})\frac{1}{\Phi_1(C_\beta\ell(P_j)^\beta)}\int_{P_j} B\left(\frac{f(x)}{t}\right) d\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty, \end{aligned}$$

其中 C_β 是 (2.1) 中的常数。因此,

$$\Phi_1(C_\beta\ell(P_j)^\beta) < h_B(A^{-1}C_\beta^{-\alpha/\beta})\int_{P_j} B\left(\frac{f(x)}{t}\right) d\mathcal{H}^{\beta,Q_0}_\infty \tag{3.3}$$

对于每个 j。

利用引理 2.2，我们得到 $\{P_j\}$ 的一个子族 $\{P_{j_v}\}_v$，以及一族互不重叠的˜祖先 P_v，满足:

(1)
$$E_t^k = \bigcup_j P_j \subset \bigcup_v P_{j_v} \cup \bigcup_v \tilde{P}_v.$$

(2)
$$\sum_{P_{j_v} \subset P} \ell(P_{j_v})^\beta \leq 2\ell(P)^\beta, \quad \text{for each dyadic cube } P \text{ (with respect to } \mathcal{D}_k).$$

(3)
$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0}\left(\bigcup_j P_j\right) &\leq \sum_v \ell(P_{j_v})^\beta + \sum_v \ell(\tilde{P}_v)^\beta \\ &\leq \sum_v \ell(P_{j_v})^\beta.\end{aligned}$$

因此，结合引理 3.10 和 (3.3)，我们推得

$$\begin{aligned}\Phi_1(C_\beta \mathcal{H}_\infty^{\beta;Q_0}(L_{At})) &= \Phi_1(C_\beta \mathcal{H}_\infty^{\beta;Q_0}(\cup_j P_j)) \\ &\leq \Phi_1\left(\sum_v C_\beta \ell(P_{j_v})^\beta\right) \\ &\leq \sum_v \Phi_1(C_\beta \ell(P_{j_v})^\beta) \\ &\leq h_B(A^{-1}C_\beta^{-\alpha/\beta}) \sum_v \int_{P_{j_v}} B\left(\frac{f(x)}{t}\right) d\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0} \\ &\leq 2\, h_B(A^{-1}C_\beta^{-\alpha/\beta}) \int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{f(x)}{t}\right) d\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0},\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由 $\{P_{j_v}\}_v$ 满足的打包条件推出（见 (2.3)）。我们得到:

$$\begin{aligned}\Phi_1(\mathcal{H}_\infty^\beta(E_t)) &\leq \Phi_1(C_{\beta,n}\mathcal{H}_\infty^{\beta;Q_0}(L_{At})) \\ &\leq 2\, h_B(A^{-1}C_\beta^{-\alpha/\beta}) \int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{f(x)}{t}\right) d\mathcal{H}_\infty^{\beta,Q_0} \\ &\leq C_\beta h_B(A^{-1}C_\beta^{-\alpha/\beta}) \int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{f(x)}{t}\right) d\mathcal{H}_\infty^{\beta}.\end{aligned}$$

□

4. Riesz potential and Hausdorff content

在本节中，我们陈述一些关于相对于豪斯多夫内容定义的 Riesz 势和分数阶极大函数的已知结果。我们还将证明一些稍后在定理 1.1 的证明中需要用到的辅助结果。

我们所需的第一个结果是 Riesz 势 I_α 在相对于豪斯多夫内容的勒贝格空间中的有界性 $\mathcal{H}^\beta_\infty$，该结果确立于 [HHS24，定理 5.4]。

定理 4.1. 给定 $0<\beta\le n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in(0,\beta)$，以及 $p\in(\frac{\beta}{n},\frac{\beta}{\alpha})$。那么，对于所有可测函数 $f\colon \mathbb{R}^n\longrightarrow[-\infty,\infty]$，有

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|I_\alpha f(x)|^{\frac{\beta p}{\beta-p\alpha}}\,d\mathcal{H}^\beta_\infty\right)^{\frac{\beta-p\alpha}{\beta p}}\le C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p d\mathcal{H}^\beta_\infty\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $C=C(n,\beta,\alpha,p)>0$。

我们还需要分数极大算子$\mathcal{M}_{\alpha,\mathcal{H}^\beta_\infty}$的有界性。由 [HHS24, 定理 5.11] 可直接得到逐点估计 $\mathcal{M}_{\alpha,\mathcal{H}^\beta_\infty}f(x)\lesssim\mathcal{R}^\beta_\alpha f(x)$，其中$\mathcal{R}^\beta_\alpha f(x):=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{(|x-y|^{n-\alpha}}\,d\mathcal{H}^\beta_\infty)$ 表示阶数为 α 的 β 维 Riesz 势。

定理 4.2. 给定 $0<\beta\le n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in(0,\beta)$，以及 $p\in(1,\frac{\beta}{\alpha})$。那么，存在常数 $C=C(n,\beta,\alpha,p)>0$ 使得

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{M}_{\alpha,\mathcal{H}^\beta_\infty}f(x)^{\frac{\beta p}{\beta-p\alpha}}\,d\mathcal{H}^\beta_\infty\right)^{\frac{\beta-p\alpha}{\beta p}}\le C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p d\mathcal{H}^\beta_\infty\right)^{\frac{1}{p}},$$

对于每个函数 $f\colon\mathbb{R}^n\longrightarrow[-\infty,\infty]$。

第一个辅助结果是对 [Che25，引理 3.5] 的修改。

引理 4.3. 设 $0<\alpha<\beta\le n\in\mathbb{N}$，设 Q 为 $\mathbb{R}^n$ 中以 x_0为中心的开立方体，并设 f 为定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数。若 $\mathrm{supp}\,(f)\subseteq 2Q$，则存在常数 $C=C(n,\alpha,\beta)>0$，使得

$$\int_Q|I_\alpha f|\,d\mathcal{H}^\beta_\infty\le C\ell(Q)^\alpha\int_{2Q}|f|\,d\mathcal{H}^\beta_\infty.$$

证明. 首先回顾，对于任意 $\eta\in[0,\alpha)$，存在常数 $C_\eta>0$，使得

$$|I_\alpha\phi(x)|\le\frac{C_\eta}{\gamma(\alpha)}\ell(Q)^{\alpha-\eta}\mathcal{M}_\eta\phi(x),\tag{4.1}$$

例如，可见于 [Che25, (3.6)]。此外，由 [HHS24，定理 5.4], ，存在常数 $C>0$，使得

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{M}_\eta f)^{\frac{\beta}{\beta-\eta}}\,d\mathcal{H}^\beta_\infty\right)^{\frac{\beta-\eta}{\beta}}\le C\int_{\mathbb{R}^n}|f|\,d\mathcal{H}^\beta_\infty.\tag{4.2}$$

于是，结合 (4.1) 与 (4.2) 可得

$$\begin{aligned}\int_Q|I_\alpha f|\,d\mathcal{H}^\beta_\infty&\le C\ell(Q)^{\alpha-\eta}\int_Q\mathcal{M}_\eta f\,d\mathcal{H}^\beta_\infty\\&\le C\ell(Q)^{\alpha-\eta}\left(\int_Q(\mathcal{M}_\eta f)^{\frac{\beta}{\beta-\eta}}\,d\mathcal{H}^\beta_\infty\right)^{\frac{\beta-\eta}{\beta}}\left(\mathcal{H}^\beta_\infty(Q)\right)^{\frac{\eta}{\beta}}\\&\le C\ell(Q)^\alpha\int_{2Q}|f|\,d\mathcal{H}^\beta_\infty.\end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

我们需要的第二个辅助结果是对 [Che25 引理 3.8] 的修改。

引理 4.4。设 $0<\alpha<n\in\mathbb{N}$, $\beta\in(0,n]$, Q 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开立方体，中心为 x_0，且 f 是一个可测函数，其支集 $supp\ f\subseteq(2Q)^c$。那么，存在 $c\in\mathbb{R}$ 和 $C=C(n,\beta,\alpha)>0$，使得

$$\frac{1}{\ell(Q)^\beta}\int_Q|I_\alpha f-c|\,d\mathcal{H}^\beta_\infty\le C\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}(2^{k+1}\ell(Q))^\alpha\frac{1}{(2^{k+1}\ell(Q))^\beta}\int_{2^{k+1}Q}|f|d\mathcal{H}^\beta_\infty.$$

证明。只需证明该结果对中心为 $x_0=0$ 的立方体 Q 成立。我们沿用[Che25, 引理 3.8], 的证明，取 $c=I_\alpha f(0)$ 直到 (3.24),

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ell(Q)^\beta}\int_Q|I_\alpha f-c|d\mathcal{H}^\beta_\infty\le&\frac{C}{\ell(Q)^\beta}\int_Q\int_{(2Q)^c}\left|\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}-\frac{1}{|y|^{n-\alpha}}\right||f(y)|dyd\mathcal{H}^\beta_\infty(x)\\
\le&\frac{C}{\ell(Q)^\beta}\int_Q|x|d\mathcal{H}^\beta_\infty(x)\int_{(2Q)^c}\frac{|f(y)|}{|y|^{n-\alpha+1}}dy\\
\le&\frac{C}{\ell(Q)^\beta}\ell(Q)^{\beta+1}\int_{|y|\ge\ell(Q)}\frac{|f(y)|}{|y|^{n-\alpha+1}}dy\\
=&C\ell(Q)\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^{k-1}\ell(Q)\le|y|<2^k\ell(Q)}\frac{|f(y)|}{|y|^{n-\alpha+1}}dy\\
\le&C\ell(Q)\sum_{k=0}^{\infty}(2^{k-1}\ell(Q))^{-n+\alpha-1}\int_{|y|<2^k\ell(Q)}|f(y)|dy\\
\le&C\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}(2^{k-1}\ell(Q))^{-n+\alpha}\int_{2^{k+1}Q}|f(y)|dy\\
=&C'\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}(2^{k+1}\ell(Q))^{-n+\alpha}\int_{2^{k+1}Q}|f(y)|dy
\end{aligned}$$

若 $\beta=n$，则证明已完成。假设 $\beta<n$，那么利用引理2.4以及引理 2.1 的 Holder 不等式 (iii)，可得

$$\begin{aligned}
\int_{2^{k+1}Q}|f(y)|dy\le&\frac{n}{\beta}\left(\int_{2^{k+1}Q}|f|^{\frac{\beta}{n}}d\mathcal{H}^\beta_\infty\right)^{\frac{n}{\beta}}\\
\le&2\frac{n}{\beta}\left(\int_{2^{k+1}Q}|f|d\mathcal{H}^\beta_\infty\right)\ell(2^{k+1}Q)^{\beta\frac{\frac{n}{\beta}}{(\frac{n}{\beta})'}}\\
=&2\frac{n}{\beta}(2^{k+1}\ell(Q))^{n-\beta}\int_{2^{k+1}Q}|f|d\mathcal{H}^\beta_\infty.
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
\int_Q|I_\alpha f-c|d\mathcal{H}^\beta_\infty\le&C\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}(2^{k+1}\ell(Q))^{-n+\alpha}\int_{2^{k+1}Q}|f(y)|dy\\
\le&C'\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}(2^{k+1}\ell(Q))^{-n+\alpha}(2^{k+1}\ell(Q))^{n-\beta}\int_{2^{k+1}Q}|f|d\mathcal{H}^\beta_\infty
\end{aligned}$$

$$=C'\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}(2^{k+1}\ell(Q))^{\alpha}\frac{1}{(2^{k+1}\ell(Q))^{\beta}}\int_{2^{k+1}Q}|f|d\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}.$$

□

引理 4.5。令 $0<\alpha<n$ 和 $0\le\beta<n$。则

$$\mathcal{M}_{\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}}(I_\alpha f)(x)\le(\mathcal{M}_{\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}}I_\alpha)*|f|(x)$$

对于任意 $x\in\mathbb{R}^n$，其中 $I_\alpha(x)=|x|^{\alpha-n}$。此外，如果 $\beta\in(n-\alpha,n]$，则有

$$\mathcal{M}_{\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}}(I_\alpha f)(x)\le C\,I_\alpha(|f|)(x)$$

对于 $\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}$-几乎处处 $x\in\mathbb{R}^n$。也就是说，如果 $\beta\in(n-\alpha,\ n]$ 且 f 为非负函数，则 $I_\alpha f\in A^{\beta}_{1}$.

证明。 不妨设 f 为非负函数。固定 $z\in\mathbb{R}^n$ 以及一个包含 z的立方体 Q。由于 $I_\alpha f$ 是下半连续的，我们可以应用 [Ada88，第 118] 页上的推论。特别地，回顾 Morrey空间

$$\mathcal{M}^{\beta}(\mathbb{R}^n):=\left\{\mu\in M_{loc}(\mathbb{R}^n):\|\mu\|_{\mathcal{M}^{\beta}(\mathbb{R}^n)}:=\sup_{x\in\mathbb{R}^n,r>0}\frac{|\mu|(B(x,r))}{r^{\beta}}<\infty\right\},$$

我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}(Q)}\int_Q I_\alpha f(x)\,d\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}&=\sup_{\|\mu\|_{\mathcal{M}^{\beta}(\mathbb{R}^n)}\le1}\frac{1}{\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}(Q)}\int_Q I_\alpha f(x)\,d\mu(x)\\&=\sup_{\|\mu\|_{\mathcal{M}^{\beta}(\mathbb{R}^n)}\le1}\frac{1}{\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}(Q)}\int_Q\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy\,d\mu(x)\qquad(4.3)\\&=\sup_{\|\mu\|_{\mathcal{M}^{\beta}(\mathbb{R}^n)}\le1}\frac{1}{\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}(Q)}\int_Q\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy\,d\mu(x)\qquad(4.4)\\&=\sup_{\|\mu\|_{\mathcal{M}^{\beta}(\mathbb{R}^n)}\le1}\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\left(\frac{1}{\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}(Q)}\int_Q\frac{d\mu(x)}{|x-y|^{n-\alpha}}\right)dy.\qquad(4.5)\end{aligned}$$

其中我们使用了 Fubini 定理。由于对于任意可测集 $E\subseteq\mathbb{R}^n$，$\mu(E)\le\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}(E)$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}(Q)}\int_Q\frac{d\mu(x)}{|x-y|^{n-\alpha}}&\le\frac{1}{\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}(Q)}\int_Q\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\,d\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}(x)\\&\le\mathcal{M}_{\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}}(I_\alpha)(z-y).\qquad(4.6)\end{aligned}$$

结合 (4.3) 和 (4.6) 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}(Q)}\int_Q I_\alpha f(x)\,d\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}(x)&\le\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\,\mathcal{M}_{\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}}(I_\alpha)(z-y)\,dy\\&=(\mathcal{M}_{\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}}I_\alpha)*f(z).\end{aligned}$$

对所有这样的立方体 Q 取上确界，得到

$$\mathcal{M}_{\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}}(I_\alpha f)(z)\le(\mathcal{M}_{\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}}I_\alpha)*f(z).$$

为完成证明，我们利用这一事实（见 [HZZ25，命题 2.14]）：若 $\beta\in(n-\alpha,\ n]$，则I_α 是一个 A^{β}_{1} 权；也就是说，

$$\mathcal{M}_{\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}}I_\alpha(x)\le C\,I_\alpha(x)$$

对 $\mathcal{H}^\beta_\infty$-几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$成立。结合前面的估计，即可完成证明。 □

现在我们陈述 [HZZ25 中的反向 H¨older 不等式（定理 1.7] ）在 A_1^β 权情形下的特殊情况，后续将会用到该结果。

定理 4.6。设 $0 < \beta \le n$ 和 $w \in A_1^\beta$ （即，对 $\mathcal{H}^\beta_\infty$-几乎处处的 x，有 $\mathcal{M}_{\mathcal{H}^\beta_\infty} w(x) \le Cw(x)$ ）。存在 $C > 0$ 和 $r > 0$，使得

$$\left(\frac{1}{\ell(Q)^\beta}\int_Q w^{1+r}\, d\mathcal{H}^\beta_\infty\right)^{\frac{1}{1+r}} \le C\frac{1}{\ell(Q)^\beta}\int_Q w\, d\mathcal{H}^\beta_\infty$$

对每个立方体 Q均成立。

5. Key pointwise estimate

本节将证明定理 1.1，该定理在确立本文其余主要结果的过程中起着核心作用。

定理 *1.1* 的证明。根据齐次性，只需证明当 $x = 0$ 时，(1.1) 成立。固定一个以原点为中心的立方体 Q。我们必须证明存在常数 $c \in \mathbb{R}$，使得

$$\frac{1}{\ell(Q)^\beta}\int_Q |[b, I_\alpha]f - c|d\mathcal{H}^\beta_\infty \le C\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)}\left(\mathcal{M}_{\mathcal{H}^\beta_\infty}((I_\alpha f)^s)(0)^{\frac{1}{s}} + \mathcal{M}_{\alpha,B,\mathcal{H}^\beta_\infty} f(0)\right)$$

对所有 $s > 1$ 均成立。

我们将 $f = f_1 + f_2$ 分解为 $f_1 = f\chi_{Q^*}$ 和 $Q^* = 2Q$。由于 b_{Q^*} 为常数，我们注意到 $[b, I_\alpha]f = [b - b_{Q^*}, I_\alpha]f$。因此，对于稍后选定的常数 $c_Q \in \mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ell(Q)^\beta}\int_Q |[b, I_\alpha]f - c_Q|d\mathcal{H}^\beta_\infty =& \frac{1}{\ell(Q)^\beta}\int_Q |[b - b_{Q^*}, I_\alpha]f - c_Q|d\mathcal{H}^\beta_\infty \\
=& \frac{1}{\ell(Q)^\beta}\int_Q |(b(x) - b_{Q^*})I_\alpha f(x) - I_\alpha((b - b_{Q^*})f)(x) - c_Q|d\mathcal{H}^\beta_\infty \\
\le& \frac{1}{\ell(Q)^\beta}\int_Q |(b(x) - b_{Q^*})I_\alpha f(x)|d\mathcal{H}^\beta_\infty \\
&+ \frac{1}{\ell(Q)^\beta}\int_Q |I_\alpha((b - b_{Q^*})f_1)(x)|d\mathcal{H}^\beta_\infty \\
&+ \frac{1}{\ell(Q)^\beta}\int_Q |I_\alpha((b - b_{Q^*})f_2)(x) + c_Q|d\mathcal{H}^\beta_\infty \\
=& I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

我们分别估计每一项。设 $s > 1$。应用定理 2.1 和定理 2.9 中的 Hölder 不等式 (iii)，可得

$$\begin{aligned}
I_1 \le& 2\left(\frac{1}{\ell(Q)^\beta}\int_Q |b(x) - b_{Q^*}|^{s'}d\mathcal{H}^\beta_\infty\right)^{\frac{1}{s'}}\left(\frac{1}{\ell(Q)^\beta}\int_Q |I_\alpha f(x)|^s d\mathcal{H}^\beta_\infty\right)^{\frac{1}{s}} \\
\le& 2^{1+\frac{\beta}{s'}}\left(\frac{1}{\ell(Q^*)^\beta}\int_{Q^*} |b(x) - b_{Q^*}|^{s'}d\mathcal{H}^\beta_\infty\right)^{\frac{1}{s'}}\left(\frac{1}{\ell(Q)^\beta}\int_Q |I_\alpha f(x)|^s d\mathcal{H}^\beta_\infty\right)^{\frac{1}{s}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2^{1+\frac{\beta}{s'}} Cs' \|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)} \left(\frac{1}{\ell(Q)^\beta} \int_Q |I_\alpha f(x)|^s d\mathcal{H}_\infty^\beta \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq 2^{1+\frac{\beta}{s'}} Cs' \|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)} \mathcal{M}_{\mathcal{H}_\infty^\beta}((I_\alpha f)^s)(0)^{\frac{1}{s}}. \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

为估计 I_2，我们将引理 4.3 应用于函数 $(b-b_{Q^*})f_1$，随后使用 Hölder 不等式 (3.1)，其中 $B(t) = t\log(e+t)$:

$$\begin{aligned}
I_2 \leq & C\ell(Q^*)^\alpha \frac{1}{\ell(Q^*)^\beta} \int_{Q^*} |(b-b_{Q^*})f_1| d\mathcal{H}_\infty^\beta \\
= & C\ell(Q^*)^\alpha \frac{1}{\ell(Q^*)^\beta} \int_{Q^*} |(b-b_{Q^*})f| d\mathcal{H}_\infty^\beta \\
\leq & C_\beta \ell(Q^*)^\alpha \|f\|_{B,Q^*,\mathcal{H}_\infty^\beta} \|b-b_{Q^*}\|_{\bar{B},Q^*,\mathcal{H}_\infty^\beta} \\
\leq & C_\beta \mathcal{M}_{\alpha,B,\mathcal{H}_\infty^\beta} f(0) \|b-b_{Q^*}\|_{\bar{B},Q^*,\mathcal{H}_\infty^\beta} \\
\leq & C_\beta \mathcal{M}_{\alpha,B,\mathcal{H}_\infty^\beta} f(0) \|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

在最后一个不等式中，我们使用了注 3.2、定理 2.8 和注 3.1。

现在我们选择 $c_Q = -c$，其中 $c \in \mathbb{R}$ 是将引理 4.4 应用于函数 $(b-b_{Q^*})f_2$ 后得到的常数。利用引理 4.4，我们有

$$\begin{aligned}
I_3 = & \frac{1}{\ell(Q)^\beta} \int_Q |I_\alpha((b-b_{Q^*})f_2)(x) - c| d\mathcal{H}_\infty^\beta \\
\leq & C \sum_{k=0}^\infty 2^{-k} (2^{k+1}\ell(Q))^\alpha \frac{1}{(2^{k+1}\ell(Q))^\beta} \int_{2^{k+1}Q} |(b-b_{Q^*})f_2| d\mathcal{H}_\infty^\beta \\
= & C \sum_{k=0}^\infty 2^{-k} (2^{k+1}\ell(Q))^\alpha \frac{1}{(2^{k+1}\ell(Q))^\beta} \int_{2^{k+1}Q} |(b-b_{2^{k+1}Q})f_2 + (b_{2^{k+1}Q}-b_{Q^*})f_2| d\mathcal{H}_\infty^\beta \\
\leq & C_\beta \sum_{k=0}^\infty 2^{-k} (2^{k+1}\ell(Q))^\alpha \frac{1}{(2^{k+1}\ell(Q))^\beta} \int_{2^{k+1}Q} |b-b_{2^{k+1}Q}||f| d\mathcal{H}_\infty^\beta \\
& + C_\beta \sum_{k=0}^\infty 2^{-k} |b_{2^{k+1}Q}-b_{Q^*}| (2^{k+1}\ell(Q))^\alpha \frac{1}{(2^{k+1}\ell(Q))^\beta} \int_{2^{k+1}Q} |f| d\mathcal{H}_\infty^\beta \\
= & I_{31} + I_{32}.
\end{aligned}$$

为了估计 I_{31}，我们重复用于 I_2 的论证:

$$\begin{aligned}
I_{31} \leq & C_\beta \sum_{k=0}^\infty 2^{-k} (2^{k+1}\ell(Q))^\alpha \|f\|_{B,2^{k+1}Q,\mathcal{H}_\infty^\beta} \|b-b_{2^{k+1}Q}\|_{\bar{B},2^{k+1}Q,\mathcal{H}_\infty^\beta} \\
\leq & C_\beta \mathcal{M}_{\alpha,B,\mathcal{H}_\infty^\beta} f(0) \|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)} \sum_{k=0}^\infty 2^{-k} \\
= & C_\beta \mathcal{M}_{\alpha,B,\mathcal{H}_\infty^\beta} f(0) \|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

为了估计 I_{32}，我们调用引理 2.7 和注 3.5：

$$\begin{aligned}
I_{32} =& C_\beta \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} |b_{2^k Q^*} - b_{Q^*}| (2^{k+1}\ell(Q))^\alpha \frac{1}{(2^{k+1}\ell(Q))^\beta} \int_{2^{k+1}Q} |f| d\mathcal{H}_\infty^\beta \\
\le& C_\beta \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} k \|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)} (2^{k+1}\ell(Q))^\alpha \frac{1}{(2^{k+1}\ell(Q))^\beta} \int_{2^{k+1}Q} |f| d\mathcal{H}_\infty^\beta \\
\le& C_\beta \|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)} \mathcal{M}_{\alpha,\mathcal{H}_\infty^\beta} f(0) \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} k \\
\le& C_\beta \|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)} \mathcal{M}_{\alpha,B,\mathcal{H}_\infty^\beta} f(0).
\end{aligned}$$

这就完成了第一条结论的证明。现在，假设 $\beta \in (n-\alpha,\ n]$。因此，由引理 4.5 可得 $I_\alpha f \in A_1^\beta$。回到 (5.1)，我们取 $s > 1$ 为反向 H¨older 不等式（定理 4.6）给出的指数。于是得到

$$\begin{aligned}
I_1 \le& 2^{1+\frac{\beta}{s'}} C s' \|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)} \left(\frac{1}{\ell(Q)^\beta} \int_Q |I_\alpha f(x)|^s d\mathcal{H}_\infty^\beta \right)^{\frac{1}{s}} \\
\le& 2^{1+\frac{\beta}{s'}} C s' \|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{\ell(Q)^\beta} \int_Q |I_\alpha f(x)| d\mathcal{H}_\infty^\beta \\
\le& 2^{1+\frac{\beta}{s'}} C s' \|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)} I_\alpha f(0),
\end{aligned}$$

最后一个不等式中我们再次用到了推论 4.5。这就证明了 (1.2)。 □

注 5.1。 我们说明定理 *1.1* 的证明中的论证也可推出注 *1.2* 中给出的逐点估计，而无需借助 *Orlicz* 分数阶极大函数。沿用定理 *1.1* 证明中的记号，只需重新考察项 I_2 和 I_3。固定 $t > 1$。将引理 *3.3* 替换为定理 *2.1 (iii)* 中给出的指数为t的 *H¨older* 不等式，并结合定理 *2.9*，可得

$$I_2 + I_3 \lesssim \|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)} M_{\alpha t,\mathcal{H}_\infty^\beta}(f^t)(x)^{1/t}.$$

结合在定理 *1.1* 的证明中已经建立的关于 I_1 的估计，由此可得，对每一个 s、$t > 1$，

$$\mathcal{M}_\beta^\#([b, I_\alpha]f)(x) \lesssim \|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)} \left(\mathcal{M}_{\mathcal{H}_\infty^\beta}((I_\alpha f)^s)(x)^{\frac{1}{s}} + \mathcal{M}_{\alpha t,\mathcal{H}_\infty^\beta}(f^t)(x)^{\frac{1}{t}} \right),$$

这正是所需的界。

注 5.2. 前述证明可以自然地推广到迭代交换子。对局部可积的 $m \in \mathbb{N}$ 与 b，我们定义

$$(I_\alpha)_b^1 f := [b, I_\alpha] f, \qquad (I_\alpha)_b^m f := \left[b, (I_\alpha)_b^{m-1}\right] f, \quad m \ge 2.$$

等价地，

$$(I_\alpha)_b^m f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(b(x) - b(y))^m}{|x-y|^{n-\alpha}} f(y)\, dy.$$

特别地，将常数加到 b 上不会改变 $(I_\alpha)_b^m$。定理 *1.1* 的证明可通过使用二项式展开推广至 $(I_\alpha)_b^m$

$$(I_\alpha)_b^m f(x) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^j \, b(x)^{m-j} \, I_\alpha\big(b^j f\big)(x),$$

应用于 $b_0 := b - b_{Q^*}$，并像情形 $m = 1$ 中那样处理每一项，其中 $f = f_1 + f_2$ 经拆分后，$f_1 = f\chi_{Q^*}$。由此得到与 (1.1) 类似的结果，其对 $\|b\|^m$ $\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)$ 的依赖形式自然，并且杨函数 B 被替换为 $B_m(t) := t(\log(e+t))^m$。因此，定理 *6.1* 和定理*1.5* 的相应类似结论可用同样的论证得到。这里不再进一步讨论这些推广。

6. Characterization of BMO$^\beta$ in terms of commutator of fractional integrals

本节中，我们给出定理 1.3 的证明。为清晰起见，我们将刻画分为两个独立的结果：首先，证明条件 $b \in \mathrm{BMO}^\beta$ 足以保证交换子 $[b, I_\alpha]$ 的有界性；随后证明该条件也是必要的。

定理 6.1. 设 $0 < \beta \le n$, $0 < \alpha < \beta$，且 b 是一个可测函数。对于每个 $1 < p < \frac{\beta}{\alpha}$，我们定义指数 q 为

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

若 $b \in \mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)$，则存在 $C = C(\alpha, \beta, n, p) > 0$，使得

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |[b, I_\alpha] f|^q \, d\mathcal{H}_\infty^\beta \right)^{\frac{1}{q}} \le C \|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mathcal{H}_\infty^\beta \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{6.1}$$

对每个具有紧支撑的有界可测函数 f，

证明. 设 $b \in \mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)$，且 f 是一个具有紧支撑的有界可测函数。不妨设 $\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta} \neq 0$。对于 $k > 0$，我们按照引理 2.11 定义截断函数 b_k，因此

$$\|b_k\|_{\mathrm{BMO}^\beta} \le C_\beta \|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta}.$$

固定某个 $p_0 \in (1, p)$，并通过关系 $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0} = \frac{\alpha}{\beta}$ 定义 q_0。由于 f 具有紧支撑且b_k 有界，$\|b_k f\|_{L^{p_0}(\mathcal{H}_\infty^\beta)} < \infty$，由定理 4.1 可得 $\|I_\alpha(b_k f)\|_{L^{q_0}(\mathcal{H}_\infty^\beta)} < \infty$。此外，由于$\|f\|_{L^{p_0}(\mathcal{H}_\infty^\beta)} < \infty$，再次由定理 4.1 得到$\|I_\alpha f\|_{L^{q_0}(\mathcal{H}_\infty^\beta)} < \infty$，从而$\|b_k I_\alpha f\|_{L^{q_0}(\mathcal{H}_\infty^\beta)} < \infty$。因此，$[b_k, I_\alpha] f$ 定义良好，且有

$$\|[b_k, I_\alpha] f\|_{L^{q_0}(\mathcal{H}_\infty^\beta)} = \|b_k I_\alpha f - I_\alpha(b_k f)\|_{L^{q_0}(\mathcal{H}_\infty^\beta)} < \infty.$$

特别地，应用定理 2.5 所需的弱型估计 (2.4) 可由 $[b_k, I_\alpha] f$ 满足。

利用勒贝格微分定理 [CC24、定理 2.9]和定理 2.5，我们推得存在一个常数 $C > 0$，它仅依赖于 q, n, β，使得

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |[b_k, I_\alpha] f|^q \, d\mathcal{H}_\infty^\beta \right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \mathcal{M}_{\mathcal{H}_\infty^\beta}([b_k, I_\alpha] f) \right|^q \, d\mathcal{H}_\infty^\beta \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\mathcal{M}_\beta^{\#}([b_k,I_\alpha]f)\right|^q d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{1}{q}}.$$

现在，利用定理 1.1 中给出的逐点不等式（具体而言，即注 1.2 中给出的不等式），取 $1<\lambda,\ t<q$, 我们得到

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\mathcal{M}_\beta^{\#}([b_k,I_\alpha]f)\right|^q d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{1}{q}} &\leq C\|b_k\|_{\mathrm{BMO}^\beta}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\mathcal{M}_{\mathcal{H}_\infty^\beta}((I_\alpha f)^s)(x)\right|^{\frac{q}{s}} d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\quad + C\|b_k\|_{\mathrm{BMO}^\beta}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\mathcal{M}_{\alpha t,\mathcal{H}_\infty^\beta}(f^t)(x)\right|^{\frac{q}{t}} d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq C\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\mathcal{M}_{\mathcal{H}_\infty^\beta}((I_\alpha f)^s)(x)\right|^{\frac{q}{s}} d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\quad + C\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\mathcal{M}_{\alpha t,\mathcal{H}_\infty^\beta}(f^t)(x)\right|^{\frac{q}{t}} d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= I_1+I_2.\end{aligned}$$

我们将分别估计每一项。首先，（选取 s 使得$\frac{q}{s}>1$），利用$\mathcal{M}_{\mathcal{H}_\infty^\beta}$ 在 [COS24，定理 1.2], 中证明的有界性，我们得到

$$\begin{aligned}I_1 &\leq C\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|I_\alpha f|^q\, d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq C\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^p\, d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

在最后一个不等式中，我们用到了定理 4.1。我们利用定理 4.2估计第二项，其中用到了关系式

$$\frac{t}{p}-\frac{t}{q}=\frac{t\alpha}{\beta},$$

因此

$$\begin{aligned}I_2 =&C\|b_k\|_{\mathrm{BMO}^\beta}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\mathcal{M}_{\alpha t,\mathcal{H}_\infty^\beta}(f^t)(x)\right|^{\frac{q}{t}} d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{t}{q}\frac{1}{t}}\\ \leq&C\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^{t\frac{p}{t}}\, d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{t}{p}\frac{1}{t}}\\ =&C\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^p\, d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

由此，我们证明了

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|[b_k,I_\alpha]f|^q\, d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{1}{q}}\leq C\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^p\, d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{1}{p}},$$

对每个 $k>0$ ，均成立，其中常数 C 与 k无关。

为了完成一般符号 b 的证明，我们令 $k\to\infty$取极限。由于 f 有界且具有紧支撑，记 $K=\mathrm{s\,upp}\ f$。根据单调收敛定理，我们

have

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |b_k(x)f(x) - b(x)f(x)|^s \, d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\int_K |b_k(x) - b(x)|^s |f(x)|^s \, d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{1}{s}} \to 0,$$

当 $k \to \infty$时。应用定理 4.1,

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha(b_k f)(x) - I_\alpha(bf)(x)|^r \, d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha(b_k f - bf)(x)|^r \, d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |b_k(x)f(x) - b(x)f(x)|^s \, d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{1}{s}} \to 0,\end{aligned}$$

其中 r 是定理 4.1 给出的相应指数。该范数收敛意味着存在一个子列 $\{b_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$，使得 $b_{k_j} \to b$且 $I_\alpha(b_{k_j} f) \to I_\alpha(bf)$ $\mathcal{H}_\infty^\beta$-几乎处处成立（例如参见 [PS23, 命题 2.5]）。因此，对于 $\mathcal{H}_\infty^\beta$-几乎处处的$x \in \mathbb{R}^n$，有 $[b_{k_j}, I_\alpha]f(x) \to [b, I_\alpha]f(x)$。于是，由 Fatou引理可得

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |[b, I_\alpha]f|^q \, d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{j\to\infty} \left|[b_{k_j}, I_\alpha]f\right|^q \, d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \liminf_{j\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |[b_{k_j}, I_\alpha]f|^q \, d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C \liminf_{j\to\infty} \|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C\,\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

□

现在我们转向逆向蕴含。在这一部分中，我们证明交换子的有界性迫使符号函数 b 属于 BMO$^\beta$。这确立了该条件的必要性，并完成了刻画。

定理6.2。 设 $0 < \beta \leq n$, $0 < \alpha < \beta$ 且令 $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$。对于每个$1 < p < \frac{\beta}{\alpha}$，我们定义指数 q 为

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

如果交换子 $[b, I_\alpha]$ 满足不等式

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |[b, I_\alpha]f|^q \, d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mathcal{H}_\infty^\beta\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{6.2}$$

对某个 $C > 0$，且对每个紧支撑的有界可测函数 f，都有此性质，那么 $b \in$BMO$^\beta(\mathbb{R}^n)$。具体而言，如果我们将 $\|[b, I_\alpha]\|_{(p,q)}$ 记为不等式 (6.2) 中的最佳常数，则存在常数 $C = C(\alpha, \beta, n) > 0$，使得 $\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)} \leq C\|[b, I_\alpha]\|_{(p,q)}$。

证明遵循 [HRS16], 中引理5.1的证明思路，并稍作修改以适应我们的非线性情形。我们还参阅了 [Jan 78] 和 [Cha16], ，其中分别针对标量情形和双线性情形的 Calderón-Zygmund奇异积分给出了类似的证明。

证明。取一个立方体 Q。考虑与之具有相同左下角的立方体 P，其满足 $\ell(P) = 4\ell(Q)$。令 P_R 为 P 的右上半部。我们注意到 $\ell(P_R) = 2\ell(Q)$。给定 $x \in Q$ 和 $y \in P_R$，有以下显然的估计，

$$\frac{|x-y|}{2\sqrt{n}\ell(P)} \geq \frac{\sqrt{n}\ell(Q)}{2\sqrt{n}\ell(P)} = \frac{1}{8},$$

and,

$$\frac{|x-y|}{2\sqrt{n}\ell(P)} \leq \frac{\sqrt{n}\ell(P)}{2\sqrt{n}\ell(P)} = \frac{1}{2}.$$

存在一个函数 $K(x)$，它在 $[-1,1]^n$ 上光滑，具有到 $\mathbb{R}^n$ 的光滑周期延拓，并且当 $\frac{1}{8} \leq |x| \leq \frac{1}{2}$ 时等于 $|x|^{n-\alpha}$。因此，对于 $x \in Q$ 和 $y \in P_R$，我们有

$$\left(\frac{|x-y|}{2\sqrt{n}\ell(P)}\right)^{n-\alpha} = K\left(\frac{x-y}{2\sqrt{n}\ell(P)}\right).$$

我们可以将函数 K 表示为绝对收敛傅里叶级数。

现在，我们定义 $c_Q = \frac{1}{|P_R|}\int_{P_R} b(y)dy$ 和 $\sigma(x) = \operatorname{sgn}(b(x) - c_Q)$。于是，我们有

$$\begin{aligned}
\int_Q |b-c_Q| d\mathcal{H}^\beta_\infty =& \int_Q \left| b(x) - \frac{1}{|P_R|}\int_{P_R} b(y)dy \right| d\mathcal{H}^\beta_\infty(x) \\
=& \frac{1}{\ell(P_R)^n}\int_Q \left| \int_{P_R} (b(x)-b(y))\sigma(x)dy \right| d\mathcal{H}^\beta_\infty(x) \\
=& \frac{1}{\ell(P_R)^n}\int_Q \left| \int_{P_R} \frac{b(x)-b(y)}{\left(\frac{|x-y|}{2\sqrt{n}\ell(P)}\right)^{n-\alpha}} \left(\frac{|x-y|}{2\sqrt{n}\ell(P)}\right)^{n-\alpha} \sigma(x)dy \right| d\mathcal{H}^\beta_\infty(x) \\
=& C_{n,\alpha}\frac{1}{\ell(P)^\alpha}\int_Q \left| \int_{P_R} \frac{b(x)-b(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} K\left(\frac{x-y}{2\sqrt{n}\ell(P)}\right)\sigma(x)dy \right| d\mathcal{H}^\beta_\infty(x) \\
=& I_1
\end{aligned}$$

我们将 K 展开为绝对收敛傅里叶级数，

$$K\left(\frac{x-y}{2\sqrt{n}\ell(P)}\right) = \sum_k a_k e^{ik\frac{x}{2\sqrt{n}\ell(P)}} e^{-ik\frac{y}{2\sqrt{n}\ell(P)}},$$

其中我们注意到 $\sum_k |a_k| = C_{\alpha,\ n} < \infty$。利用Choquet 积分关于 $\mathcal{H}^\beta_\infty$ 的次可加性，我们有

$$\begin{aligned}
I_1 \leq& C_{n,\alpha,\beta}\frac{1}{\ell(P)^\alpha}\sum_k |a_k| \int_Q \left| \int_{P_R} \frac{b(x)-b(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} e^{-ik\frac{y}{2\sqrt{n}\ell(P)}} e^{ik\frac{x}{2\sqrt{n}\ell(P)}}\sigma(x)dy \right| d\mathcal{H}^\beta_\infty(x) \\
=& C_{n,\alpha,\beta}\frac{1}{\ell(P)^\alpha}\sum_k |a_k| \int_Q \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{b(x)-b(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} e^{-ik\frac{y}{2\sqrt{n}\ell(P)}} \chi_{P_R}(y)dy\, e^{ik\frac{x}{2\sqrt{n}\ell(P)}}\sigma(x) \right| d\mathcal{H}^\beta_\infty(x) \\
=& C_{n,\alpha,\beta}\frac{1}{\ell(P)^\alpha}\sum_k |a_k| \int_Q \left| [b, I_\alpha] f_k(x) e^{ik\frac{x}{2\sqrt{n}\ell(P)}}\sigma(x) \right| d\mathcal{H}^\beta_\infty(x) \\
=& C_{n,\alpha,\beta}\frac{1}{\ell(P)^\alpha}\sum_k |a_k| \int_Q |[b, I_\alpha] f_k(x)|\, d\mathcal{H}^\beta_\infty(x)
\end{aligned}$$

$$=I_2$$

其中 $f_k(y) = e^{-ik\frac{y}{2\sqrt{n}\ell(P)}}\chi_{P_R}(y)$。我们可以利用 H¨older 不等式和 (6.2) 估计每个积分,

$$\begin{aligned}
\int_Q |[b,I_\alpha]f_k(x)|\,d\mathcal{H}^\beta_\infty(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} |[b,I_\alpha]f_k(x)|\,\chi_Q(x) d\mathcal{H}^\beta_\infty(x)\\
&\le 2\left(\int_Q |[b,I_\alpha]f_k(x)|^q\,d\mathcal{H}^\beta_\infty(x)\right)^{\frac{1}{q}} \ell(Q)^{\frac{\beta}{q'}}\\
&\le 2\|[b,I_\alpha]\|_{(p,q)}\left(\int_Q |f_k(x)|^p\,d\mathcal{H}^\beta_\infty(x)\right)^{\frac{1}{p}} \ell(Q)^{\frac{\beta}{q'}}\\
&= 2\|[b,I_\alpha]\|_{(p,q)}\ell(P_R)^{\frac{\beta}{p}}\ell(Q)^{\frac{\beta}{q'}}\\
&= 2^{1+\frac{\beta}{p}}\|[b,I_\alpha]\|_{(p,q)}\ell(Q)^{\frac{\beta}{p}+\frac{\beta}{q'}}\\
&= 2^{1+\frac{\beta}{p}}\|[b,I_\alpha]\|_{(p,q)}\ell(Q)^{\alpha+\beta},
\end{aligned}$$

这里我们用到了关系式 $\frac{1}{q'}+\frac{1}{p}=\frac{\alpha}{\beta}+1$。于是，得到

$$\begin{aligned}
I_2 &\le C_{n,\alpha,\beta}\frac{1}{\ell(P)^\alpha}\sum_k |a_k| 2^{1+\frac{\beta}{p}}\|[b,I_\alpha]\|_{(p,q)}\ell(Q)^{\alpha+\beta}\\
&\le C_{n,\alpha,\beta}\frac{1}{\ell(Q)^\alpha}\|[b,I_\alpha]\|_{(p,q)}\ell(Q)^{\alpha+\beta}\sum_k |a_k|\\
&= C_{n,\alpha,\beta}\|[b,I_\alpha]\|_{(p,q)}\ell(Q)^\beta.
\end{aligned}$$

因此，我们证明了对于每个立方体 Q，都存在 $c_Q\in\mathbb{R}$，使得

$$\frac{1}{\ell(Q)^\beta}\int_Q |b-c_Q| d\mathcal{H}^\beta_\infty \le C_{n,\alpha,\beta}\|[b,I_\alpha]\|_{(p,q)},$$

对于所有立方体 Q，这意味着 $\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta(\mathbb{R}^n)} \le C_{n,\ \alpha,\ \beta}\|[b,I_\alpha]\|_{(p,q)}$。 □

结合定理 6.1 和定理 6.2，即完成了定理 1.3 的证明。

7. Endpoint modular weak-type inequality

本节将证明定理1.5中陈述的端点模弱型不等式。利用逐点估计 (1.2) 和定理 2.5 中陈述的容度 Fefferman-Stein不等式，并结合 Riesz 势与分数极大算子的有界性，我们得到所需的端点控制。该结果将 Cruz-Uribe 和 Fiorenza 的模估计推广到了容度框架。

定理*1.5*的证明。证明思路与 [CUF03]中定理1.2的证明类似。更多细节请参阅该论文。

我们不妨假设$\|b\|_{\mathrm{BMO}^{\beta}(\mathbb{R}^n)} \neq 0$ 且 f 非负。由齐次性，只需证明当 $t=1$时的不等式(1.5)。我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}(\{x:|[b,I_{\alpha}]f(x)|>1\}) =&\Psi(B(1))\frac{1}{\Psi(B(1))}\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}(\{x:|[b,I_{\alpha}]f(x)|>1\})\\ \leq&\Psi(B(1))\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(B(1/t))}\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}(\{x:|[b,I_{\alpha}]f(x)|>t\})\\ \leq&\Psi(B(1))\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(B(1/t))}\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}(\{x:\mathcal{M}_{\mathcal{H}^{\beta}_{\infty},Q_0}([b,I_{\alpha}]f)(x)>t\}).\end{aligned}$$

由于 $\varphi(t)=\frac{1}{\Psi(B(1/t))}$ 是倍增的 [CUF03，第 123]，页，我们可以应用模 Fefferman-Stein 不等式 (2.5)。因此，由 (2.5) 和定理 1.1 可得

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}(\{x:|[b,I_{\alpha}]f(x)|>1\}) \leq&C\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(B(1/t))}\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}(\{x:\mathcal{M}^{\#}_{\beta}([b,I_{\alpha}]f)(x)>t\})\\ \leq&C\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(B(1/t))}\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}\left(\left\{x:I_{\alpha}f(x)>\frac{t}{C\|b\|_{\mathrm{BMO}^{\beta}}}\right\}\right)\\ &+C\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(B(1/t))}\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}\left(\left\{x:\mathcal{M}_{\alpha,B,\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}}f(x)>\frac{t}{C\|b\|_{\mathrm{BMO}^{\beta}}}\right\}\right)\\ =&I_1+I_2.\end{aligned}$$

我们需要利用容量背景下 Riesz 势的弱型估计来估计 $I_{\circ}$ 更确切地说，我们将在 $p=1$ 的情形下使用定理 4.1,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|I_{\alpha}f(x)|^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}d\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}\right)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}}\leq C\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|d\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}.$$

注意，对于 $0<\beta<n$ ，前一个不等式并非端点情形，$p=\frac{\beta}{n}$ 。然而，对每个$0<\beta\leq n$ ，我们都有如下弱型不等式,

$$\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}(\{x\in\mathbb{R}^n:|I_{\alpha}f(x)|>t\})\leq C\left(\frac{1}{t}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|d\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}\right)\right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}},$$

对每个 $t>0$。利用前面的估计，我们得到

$$\begin{aligned}I_1\leq&C\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(B(1/t))}\left(\frac{\|b\|_{\mathrm{BMO}^{\beta}}}{t}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|d\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}\right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}\\ =&C\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(B(1/t))}\frac{1}{t^{\beta/(\beta-\alpha)}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\|b\|_{\mathrm{BMO}^{\beta}}|f(x)|\right)d\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}\right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}\\ \leq&C\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(B(1/t))}\frac{1}{t^{\beta/(\beta-\alpha)}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}B\left(\|b\|_{\mathrm{BMO}^{\beta}}|f(x)|\right)d\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}\right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}\\ \leq&C\Psi\left(\int_{\mathbb{R}^n}B\left(\|b\|_{\mathrm{BMO}^{\beta}}|f(x)|\right)d\mathcal{H}^{\beta}_{\infty}\right)\end{aligned}$$

since $t\leq B(t)$ 和 $t^{\beta/(\beta-\alpha)}\leq\Psi(t)$ 对所有 $t>0$ 都成立，且在最后一个不等式中，我们使用了

$$\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(B(1/t))}\frac{1}{t^{\beta/(\beta-\alpha)}}\leq C,$$

更多细节请参阅 [CUF03，第 124] 页。

为估计 I_2，我们使用定理3.11中建立的容量型 Orlicz 极大函数$\mathcal{M}_{\alpha,\ B,\ \mathcal{H}^\beta_\infty}$ 的弱型估计，得到

$$\begin{aligned} I_2 \leq & C \sup_{t>0} \frac{1}{\Psi(B(1/t))} \Psi\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta}|f(x)|}{t}\right) d\mathcal{H}^\beta_\infty\right) \\ \leq & C \sup_{t>0} \frac{1}{\Psi(B(1/t))} \Psi(B(1/t)) \Psi\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta}|f(x)|\right) d\mathcal{H}^\beta_\infty\right) \\ \leq & C \Psi\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\|b\|_{\mathrm{BMO}^\beta}|f(x)|\right) d\mathcal{H}^\beta_\infty\right), \end{aligned}$$

这里我们用到了 B 和 Ψ 是次乘性函数这一性质。证明完毕。 □

Acknowledgment

作者感谢 David Cruz-Uribe 在访问台湾师范大学（台湾台北）期间向第一作者提出这一问题，并感谢他对本文早期稿件提出的宝贵意见和建议。

Conflicts of Interest

作者声明不存在需要披露的利益冲突。

Data Availability Statement

本文不适用数据共享，因为本研究期间未生成或分析任何数据集。

References

[Ada72] D. R. Adams, *Traces of potentials. II*, 《印第安纳大学数学杂志》**22** (1972/73), 907–918, DOI 10 1512 1973 22 22075 313783 ↑2 。/iumj. . . . MR Ada , , 《杜克数学杂志》**42** (1975), no. 4, 765–778. MR [75] _____ *A note on Riesz potentials* 458158 ↑4[Ada88] , *A note on Choquet integrals with respect to Hausdorff capacity*, 《函数空间及其应用》（隆德，1986），《数学讲义》，第 1302 卷，施普林格，柏林，1988 年，第 115–124 页，DOI 10 1007 0078867 942261 ↑19 。/BFb . MR Ada , ,《数学出版物》**42** (1998), 3–66. ↑4, 6[Ada15] , [98] _____ *Choquet integrals in potential theory Morrey spaces*, 《应用与数值调和分析讲义》，Birkhäuser/施普林格，查姆，2015 年。MR3467116 ↑6[AX12] D. R. Adams 和 J. Xiao, _____ *Regularity of Morrey commutators* **364** 2012 9, , 《美国数学会汇刊》 4801 4818, 10 1090 0002 9947 2012 05595 4 2922610 ↑2 （），第 – 期，DOI 。/S - - - - 。MR[25] BCR R. Basak、Y.-W. B. Chen 和 P. Roychowdhury, *Uncentered Fractional Maximal functions and mean oscillation spaces associated with dyadic Hausdorff content*, 发表于 2025 年，DOI 10 48550 2506 23206, arXiv:2506.23206 ↑4 6 9 。/arXiv. . 可查阅于 . , , BS C. Bennett 和 R. [88] *Interpolation of operators* Sharpley, , 《纯粹与应用数学》，第 129 卷，Academic Press, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1988 年，MR0928802 ↑11[Cha16] L. Chaffee, *Characterizations of bounded mean oscillation through commutators of bilinear singular integral operators* **146** 2016 6, 1159 1166, , 《爱丁堡皇家学会学报 A 辑》（），第 – 期，DOI 10.1017/S0308210515000888。MR3573728 ↑25

[Cha82] S. Chanillo, *A note on commutators*, 《印第安纳大学数学杂志》31 (1982), no. 1, 7–16, DOI 10 1512 1982 31 31002 0642611 ↑1 2 3 。/iumj. . . . MR , , COS Y.-W. B. Chen、K. H. Ooi 和 D. Spector, [24] *Capacitary maximal inequalities and applications*, 《泛函分析杂志》286 (2024), no. 12, Paper No. 110396, 31, DOI 10.1016/j.jfa.2024.110396。MR4729407 ↑2, 3, 7, 13, 24[Che25] Y.-W. B. Chen, *A self-improving property of Riesz potentials in BMO*, 《几何分析杂志》35 (2025), no. 8, Paper No. 237, 23, 10 1007 12220 025 02069 2 4923608 ↑17 18 DOI . /s - - - . MR , CC Y.-W. B. Chen 和 A. Claros, *β-dimensional sharp maximal function and its applications*, 2024。 ↑1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 23[CS24] Y.-W. Chen 和 D. Spector, *On functions of bounded β-dimensional mean oscillation*, 《微积分与变分》 **17** 2024 3, 975 996, 10 1515 2022 0084 4767358 ↑2 4 5 7 8 9 （）, 第 – 期, DOI 。/acv- - 。MR , , , , , [08] *Moser-Trudinger trace inequalities* **217** 2008 Cia A. Cianchi, , 《数学进展》（）, 第 5 期, 2005–2044, DOI 10 1016 2007 09 007 2388084 ↑2 。/j.aim. . . . MR [76] CRW R. R. Coifman、R. Rochberg 和 G. Weiss, *Factorization theorems for Hardy spaces in several variables*, 《数学年刊》（ 2 **103** 1976 3, 611 635, 10 2307 1970954 0412721 ↑1 ）（）, 第 – 期, DOI 。/ 。MR CUF D. [03] *Endpoint estimates and weighted norm inequalities for commutators of* Cruz-Uribe 和 A. Fiorenza, *fractional integrals* **47** 2003 1, 103 131, 10 5565 47103 05 1970896 , 《数学出版物》（）, 第 – 期, DOI 。/PUBLMAT 。MR↑2, 4, 14, 15, 27, 28, 29[DLZ01] Y. Ding、S. Lu 和 P. Zhang, *Weak estimates for commutators of fractional integral operators*, 《中国科学 A 辑》 – – **44** 2001 7, 877 888, 10 1007 02880137 1851027 ↑2 （）, 第 – 期, DOI 。/BF 。MR FM L. Fontana 和 [11] *Adams inequalities on measure spaces* C. Morpurgo, 《数学进展》226 6, 5066 2011 10 1016 2011 01 003（）, 第 – 5119, 2775895 ↑2 DOI 。/j.aim. . . . MR HLP G. H. Hardy、J. E. Littlewood 和 G. [88] ´ *Inequalities* Polya, 《剑桥数学文库》, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1988 年。1952 年版重印。MR0944909 ↑14[HHS23a] P. Harjulehto 和 R. Hurri-Syrj¨ anen, *On Choquet integrals and Poincaré-Sobolev inequalities*, 《泛函分析杂志》 **284** 2023 9, 109862, 18, 10 1016 2023 109862 4545158 ↑2 6 （）, Paper No., DOI 。/ [23] ¨ *On Sobolev inequalities with Choquet integrals* 2023 ↑2 7 j.jfa. . . MR , HHS b P. Harjulehto 和 R. Hurri-Syrjanen, , 《.》, [HHS24] , *On Hausdorff content maximal operator and Riesz potential for non-measurable functions* (2024), 可查阅于 2405.12113v1。 ↑2, 3, 17[HRS16] I. Holmes, R. Rahm 和 S. Spencer, *Commutators with fractional integral operators*, 《数学研究》233 (2016 3, 279 291, 10 4064 8419 4 2016 3517535 ↑25), 第 – 期, DOI 。/sm - - 。MR HZZ L. Huang、Y. Zhang [25] *Capacitary Muckenhoupt weights and weighted norm inequalities* 和 C. Zhuo, *for Hardy–Littlewood maximal operators* 2025, 10 48550 2509 23839, , 发表于 DOI 。/ arXiv. . 可查阅于 arXiv:2509.23839 ↑19 20 。, HCYZ L. Huang、Y. Cao、D. Yang 和 C. Zhuo, [23] *Sharp Poincaré–Sobolev inequalities of Choquet–Lorentz integrals with respect to Hausdorff contents on bounded John domains*, 发表于 2023 年, DOI 10 48550 2311 15224, arXiv:2311.15224 ↑2 。/arXiv. . 可查阅于 . Jan S. Janson, 《乌普萨拉数学》 [78] *Mean oscillation and commutators of singular integral operators* 0524754 ↑25 16 2, 263 1978 270, 10 1007 02386000（）, 第 – 期, DOI 。/BF 。MR[61] JN F. John 和 L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation*, 《纯粹与应用数学通讯》14 (1961), 415 426, 10 1002 3160140317 131498 ↑2 – DOI 。/cpa. . MR Jud V. I. Judovič, [61] *Some estimates connected with integral operators and with solutions of elliptic equations*, 《苏联科学院院报》138 (1961), 805–808（俄文）。MR0140822 ↑2[MS21] ´A. D. Mart ´ *An improvement to the John-Nirenberg inequality for functions in crit-* ınez 和 D. Spector, 《非线性分 *ical Sobolev spaces* **10** 2021 1, 877 894, 10 1515 2020 0157 析进展》（）, 第 – 期, DOI 。/anona- - 。MR4191703 ↑2[OV98] J. Orobitg 和 J. Verdera, *Choquet integrals Hausdorff content and the Hardy-Littlewood maximal op-* , 《伦敦数学会通报》（）, – 。, *erator* **30** 1998 145 150 ↑6 7 [´ 95] ´ Per C. Perez, *Endpoint estimates for commutators of singular integral operators*, 《泛函分析杂志》128 (1995), no. 1, 163 185, 10 1006 1995 1027 1317714 ↑7 – DOI 。/jfan. . . MR PS A. C. Ponce 和 D. Spector, [23] *Some remarks on capacitary integrals and measure theory*, 《势理论与偏微分方程——David R. Adams 的学术遗产》, 《高级分析与几何》, 第 8 卷, De Gruyter, 柏林, 2023 年, 第 235–263 页。MR4654520 ↑5, 25[STW16] H. Saito、H. Tanaka 和 T. Watanabe, *Abstract dyadic cubes, maximal operators and Hausdorff content*, 《数学科学通报》140 (2016), no. 6, 757–773, DOI 10.1016/j.bulsci.2016.02.001。MR3543752 ↑5

[YY08] D. Yang 和 W. Yuan， *A note on dyadic Hausdorff capacities*，《数学科学通报》**132** (2008年)，第 6 期，500–509，DOI 10.1016/j.bulsci.2007.06.005。MR2445577 ↑5

（Y.-W. Chen） Department of Mathematics, National Changhua University of Education, No. 1, Jin-De Road, Changhua City, Taiwan
Email address: bensonchen@cc.ncue.edu.tw

(A. Claros) BCAM – Basque Center for Applied Mathematics, Bilbao, Spain
Email address: aclaros@bcamath.org

（A. Claros） Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU), Bilbao, Spain*Email address*: aclaros003@ikasle.ehu.eus