arXiv:2602.09759v1 [physics.flu-dyn] 10 Feb 2026

采用非平衡输运模型与混合长度特征时间闭合的空间发展圆射流波粒湍流模拟

Xiaojian Yang[a],Kun Xu[a,b,c,*]

[a]香港科技大学数学系，香港九龙清水湾[b]香港科技大学机械与航空航天工程系，香港九龙清水湾[c]香港科技大学深圳研究院，中国深圳

摘要

本文将近期开发的一种多尺度非平衡湍流建模方法——波粒湍流模拟（WPTS）——与基于普朗特混合长度假设推导的湍流特征时间闭合相结合，并将其应用于空间发展圆射流。在WPTS中，强湍流区域内的流体元由拉格朗日粒子表示；这些粒子移动有限距离后，会与以波状（欧拉）形式表示的背景流场相互作用。这一机制在概念上与普朗特混合长度图景中所设想的离散流体微团相似。WPTS与传统的基于混合长度的湍流模型有两点关键区别。首先，粒子演化遵循非平衡输运机制，而非涡黏性闭合中通常采用的平衡假设。其次，WPTS以耦合方式推进波与粒子组分，其中粒子占比主要由所建模的湍流特征时间控制，从而能够在统一框架内表示层流和湍流状态。由于空间发展射流是具有成熟相似性行为的典型测试案例，本文采用其进行评估。具体而言，本研究（1）开发了一种适用于射流的基于混合长度的特征时间模型；（2）将其纳入WPTS，以评估预测性能。得到的WPTS框架准确再现了雷诺数为5,000和20,000时的射流相似解及其他特征，展现了WPTS作为湍流建模与模拟实用工具的潜力。

*Keyw*词语： 波粒湍流模拟，非平衡输运，射流

*通讯作者电子邮箱地址：xyangbm@connect.ust.hk (Xiaojian Yang), makxu@ust.hk (Kun Xu)

提交至爱思唯尔的预印本 *2026*年*2*月*11*日

1. 引言

湍流建模与模拟不仅对于深化对湍流动力学的基本认识至关重要，也有助于可靠地预测实际工程应用中的流场 [23]。过去几十年来，大量研究确立了几种广泛使用的方法，包括直接数值模拟（DNS），即不采用湍流模型直接求解纳维–斯托克斯（NS）方程；大涡模拟（LES），即解析大尺度运动，同时对亚格子尺度应力进行闭合；以及雷诺平均纳维–斯托克斯（RANS）方法，这类方法通过引入额外的模型关系和/或输运方程来闭合雷诺应力项。湍流建模中最早且影响最深远的思想之一，是普朗特的混合长度假说（1925）[24]。该假说认为，在湍流中，离散的流体涡团（类似于气体分子）在与周围流体交换动量之前，会在保持其动量特性的同时运动一段有限距离。统计平均后的运动距离称为混合长度，记为 l^*。对于简单剪切流，湍流（涡）黏度可估算为特征脉动速度尺度 v^* 与混合长度 l^*的乘积。后续发展将这一概念纳入布oussinesq近似，由此形成经典的混合长度湍流模型——一种具有代表性的零方程涡黏度闭合，广泛用于RANS计算。除原始形式外，研究者还提出了许多变体，以提高预测精度并拓展其在更广泛流动中的适用性 [22]。其中一个著名例子是Cebeci–Smith（CS）模型 [3], ，该模型考虑了内层/外层结构，并在壁面湍流中表现良好。更广泛而言，混合长度概念及其拓展已应用于多个领域，包括海洋学 [28], 、大气科学 [8, 7], 及其他领域 [11]。

与基于涡黏性框架构建的传统湍流模型不同，近年来提出的基于动理学的波粒湍流模拟（WPTS）方法，在若干典型湍流问题中展现出良好的性能 [39, 38]。更广泛地说，基于动理学理论的湍流建模已得到积极研究，并展现出巨大的潜力 [4, 18, 30]。基于动理学理论的方法有一个关键区别：它们针对分布函数进行运算，而非直接处理宏观变量，因此具有更大的建模灵活性，并能自然地描述多尺度现象。WPTS 基于统一气体动理学格式（UGKS） [34, 32]及其变体——统一气体动理学波粒（UGKWP）格式发展而来。这些方法最初用于稀薄气体动力学 [17, 42] ，此后已扩展至广泛的多尺度输运问题，包括辐射输运 [15, 14, 40], 、等离子体 [16, 25],和多相流 [36, 37], 等。WPTS 专为粗网格上的湍流模拟而设计，其分辨率远低于直接数值模拟（DNS）所需的分辨率。其核心特征是波分量与粒子分量的耦合演化。波（欧拉）分量表示粗网格解析的大尺度流动结构，而随机拉格朗日粒子则描述计算单元内未解析的小尺度运动，例如未解析的湍动能（TKE）。在强湍流区域，粒子按照特征速度进行采样并向下游输运；其

输运距离由 τ_t 模型提供的局部湍流特征时间尺度控制。输运完成后，粒子被移除，其守恒量被重新沉积到波分量所表示的背景流中，从而完成波粒耦合。

因此，WPTS 中的粒子处理在概念上类似于普朗特混合长度假设及相关模型所设想的离散流体微团运动。然而，WPTS 与传统的混合长度湍流闭合模型在两个关键方面存在根本差异。首先，WPTS 明确解析由粒子表示的流体元的非平衡输运，而混合长度模型主要通过局部修正扩散项中的湍流（涡）黏度来发挥作用。这使 WPTS 能够自然地纳入非局部效应，因为粒子可以跨越多个单元，并在有限距离内传递流动信息 [19]。其次，WPTS 中的粒子演化与背景波分量动态耦合，从而在层流至湍流状态之间提供统一的波–粒子描述。与完全基于拉格朗日粒子的湍流方法相比，WPTS 通过在湍流减弱的区域自动降低粒子占比，进一步提高了效率。在层流极限下，该方法恢复为基础气体动理学格式（GKS），并得到纳维–斯托克斯解 [31]。

空间发展圆射流是湍流研究中的典型问题，已得到广泛研究。射流沿下游方向对流并径向扩展：高速核心随其与轴线距离的增加而逐渐减弱，并向相对静止的外部流动转变 [23]。此外，大量实验和数值证据表明，在一定雷诺数范围内，充分发展湍流射流表现出稳定的相似性行为，包括中心线速度衰减，以及不同下游位置处关键统计量的自相似剖面 [9, 21, 26]。这些公认特征使圆射流成为评估新型湍流建模方法的理想且严格的基准。因此，本研究针对空间发展射流，构建了一种基于混合长度的湍流特征时间尺度模型 τ_t，并将其纳入 WPTS，以评估 WPTS 准确预测射流湍流的能力。

在我们之前的工作中，我们采用主要依赖于Smagorinsky模型（SM）的湍流特征时间模型，将WPTS应用于雷诺数为 Re$=5000$ 的圆射流 τ_t 。该模型 [38], 在大涡模拟中得到了广泛应用。本研究进一步考察了WPTS与一种 τ_t模型的耦合，该模型直接源自普朗特混合长度假设。此选择旨在构建雷诺数依赖性较弱的特征时间闭合模型，从而提升WPTS框架在不同流动条件下的稳健性。作为初步工作，我们着重准确复现圆射流充分发展湍流区中观察到的关键相似性行为。我们研究雷诺数分别为 5，000 和 20，000 的射流。尽管 Re$=20,$ 000 相较于许多实际应用中的雷诺数仍属中等，但对高保真数值模拟而言仍具有挑战性。由于计算成本高得令人难以承受，空间发展射流的直接数值模拟通常仅限于相对较低的雷诺数。例如，Shin等人报告了高达 Re$=7290$ [27]的直接数值模拟结果，这一雷诺数在针对该问题的直接数值模拟研究中位居最高之列。大涡模拟能够以较低成本达到更高的雷诺数；然而，目前尚无

射流大涡模拟普遍认可的网格分辨率标准。文献调查表明，对于雷诺数为 Re $\simeq 10,000$ 的射流，大涡模拟通常采用数量级为 10^7 个单元 [1, 2, 12], 的网格，这仍意味着巨大的计算开销。在此背景下，Re=20，000 为本研究评估WPTS在雷诺平均纳维-斯托克斯级网格上的性能提供了一个有意义且切实可行的目标。

本文其余部分安排如下。第2节介绍WPTS数值算法和基于混合长度的湍流特征时间模型， τ_t。第3节展示在粗网格上进行的空间发展射流模拟的WPTS预测结果及相应分析，其中网格分别约含 0.5×10^6 个单元（Re=5000 ）和1.0×10^6 个单元（Re=20000）。最后，第4节总结本研究的主要结论。

2. 波粒子湍流模拟（WPTS）方法

WPTS构建于有限体积法（FVM）之上，是一种耦合的波分量—粒子演化框架，专门用于粗网格条件下的湍流建模与模拟，即其分辨率不足以满足直接数值模拟的要求。顾名思义，WPTS包含两个组成部分：波分量用于表示网格所解析的流动结构，而随机粒子则在所采用的粗网格下模拟未解析流动结构的演化特征，通常为未解析的湍动能（TKE）。具体而言，其控制方程基于采用BGK弛豫模型的动理学方程，即

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\boldsymbol{u} f) = \frac{g - f}{\tau}, \tag{1}$$

其中， f 是流体元的概率分布函数（PDF）， $\boldsymbol{u}$ 是速度， τ是特征时间， g 是平衡态，其中

$$g = \rho \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{K+3}{2}} e^{-\lambda\left[(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{U})^2+\boldsymbol{\xi}^2\right]}. \tag{2}$$

K 是内部自由度，对于双原子分子气体取 2。

在WPTS中，网格单元内波与粒子组分之间的权重主要由流场的局部湍流强度决定。在粒子消失的区域，流体自然保持层流状态。因此，WPTS实现了从层流到湍流的统一描述。基于这一建模思想，我们知道 $\lambda = \frac{1}{2RT}$，其中 T 仅对层流表示热温度 $T_{thermal}$，但在湍流情况下它还包括湍流温度 Θ_t，其中 Θ_t由湍流动能 ρE_t通过关系 $\rho E_t \overset{def}{=} \frac{3}{2}\rho\Theta_t$唯一确定。相应地，层流的总能量 ρE包括动能 $\frac{1}{2}\rho \boldsymbol{U}^2$和热能$\rho R T_{thermal}$，而对湍流它还包括 ρE_t 。值得注意的是，以 $\boldsymbol{\psi}$对 g取矩，随后得到宏观守恒变量 $\boldsymbol{W} = (\rho, \rho\boldsymbol{U}, \rho E)^T$，

可以得到，其中 $\boldsymbol{\psi}=(\mathbf{1},\boldsymbol{u},\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{u}^2+\underline{\boldsymbol{\xi}}^2\right))^T$。守恒律基于相容条件得到满足

$$\int \boldsymbol{\psi}\left(g-f\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\Xi}=\mathbf{0},$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{\Xi}=\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\mathrm{d}\xi_1...\mathrm{d}\xi_K$。

接下来将详细介绍 WPTS 的构建过程。从带有 BGK弛豫项的动理学方程出发，可以得到积分解，

$$f(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{u})=\frac{1}{\tau}\int_0^t g(\boldsymbol{x}',t',\boldsymbol{u})e^{-(t-t')/\tau}\mathrm{d}t'+e^{-t/\tau}f_0(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}t,\boldsymbol{u}), \tag{3}$$

其中，$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}(t'-t)$ 是粒子轨迹，f_0 是时间 $t=0$ 时的初始气体分布函数。上述积分解表明，演化过程包含两个部分：平衡态的累积效应和初始分布函数的自由输运。这一特性与所谓的非局部湍流建模特征较为一致，即上游流动信息在传输过程中会发生衰减，因此对局部流动的影响是来自不同上游位置的流动信息的加权组合。

在 WPTS框架中，平衡态的贡献由所采用网格解析的流体力学波表示。具体而言，我们采用纳维–斯托克斯方程来表示这一部分，从而确保在没有粒子的区域内，WPTS 公式能够完全还原为 NS 解。对于该部分的建模选择及其对最终结果的影响，仍需在未来开展更深入的研究，这超出了本文的范围。气体动理学格式（GKS）是一种针对纳维–斯托克斯方程的动理学求解器。因此，WPTS 中的 $\boldsymbol{F}^{eq}$ 采用 GKS 中的公式，即界面处的分布函数 f 基于空间和时间上的泰勒展开进行构造，并据此可以导出平衡通量。通常，这部分的计算可以概括为三个步骤，这也是有限体积法中的标准流程：

1. 重构：将单元平均守恒变量 $\boldsymbol{W}$ 插值到界面。本文采用五阶 WENO-AO 重构。2. 演化：通过对 f^{eq}取矩来计算通量 $\boldsymbol{F}^{eq}$，

$$\boldsymbol{F}_{ij}^{eq}=\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\int \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}_{ij}f_{ij}^{eq}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{u})\boldsymbol{\psi}\mathrm{d}\boldsymbol{u}\mathrm{d}t, \tag{4}$$

其中， f^{eq} 是界面处平衡态的时变概率密度函数，

$$
\begin{aligned}
f^{eq}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{u}) &\overset{def}{=} \frac{1}{\tau}\int_0^t g(\boldsymbol{x}',t',\boldsymbol{u})e^{-(t-t')/\tau}\mathrm{d}t' \\
&= c_1 g_0\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\right) + c_2\overline{\boldsymbol{a}}\cdot\boldsymbol{u}g_0\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\right) + c_3 A g_0\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\right),
\end{aligned} \tag{5}
$$

系数为，

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 1-e^{-t/\tau}, \\
c_2 &= \left(t+\tau\right)e^{-t/\tau}-\tau, \\
c_3 &= t-\tau+\tau e^{-t/\tau}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

3. 投影：通过 $\boldsymbol{F}^{eq}$ 更新单元平均守恒变量 $\boldsymbol{W}$ 。由于投影需要平衡通量和自由输运通量，守恒变量的完整更新公式（$\boldsymbol{W}$）将在后文详细介绍所有通量贡献时给出。

式（3）中的第二个分量 $e^{-t/\tau}f_0$（$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}t$， $\boldsymbol{u}$）构成了自由输运机制。根据我们对非平衡输运相关问题的研究经验，该分量至关重要。在 WPTS框架中，这一分量通过波粒表述进行模拟。具体而言，随机粒子在破缺假设下代表离散流体微元，因此采用随机拉格朗日粒子来模拟未解析粗网格 [39] 内的湍流结构。

为清楚阐释粒子在 WPTS 中的作用，下面作简要说明。在 WPTS 中，粒子本身具有双重作用。首先，粒子构成流体的物理部分，并与波分量一起完整描述流动演化。其次，由于粒子具有自身的特征速度，且该速度可能不同于单元平均速度，因此粒子本身携带了与未解析湍流动能演化（粗网格下）相关的信息。

具体而言，这些粒子的控制方程采用带有外部驱动力的弛豫型公式，即

$$
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}\left(t\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{U}-\boldsymbol{u}}{\tau_n} + \boldsymbol{a}. \tag{7}
$$

在本文中， $\boldsymbol{a}$ 取为$-\frac{\nabla p}{\rho}$，并将其视为主导项，尽管原则上， $\boldsymbol{a}$ 应包含纳维–斯托克斯方程中压力梯度和黏性项的影响。式（7）中的碰撞/特征时间 τ_n 取物理值与湍流值之和，即 $\tau_n=\tau+\tau_t$，其中 $\tau=\mu/p$ 为物理值， τ_t 则表示建模的湍流特征时间；本文基于混合长度假设构造该时间，后文将对此进行介绍。利用 UGKWP方法，仅对能够在一个完整时间步内统计移动的粒子进行采样，并通过拉格朗日粒子方法演化；其余粒子的通量贡献（这些粒子的

输运时间小于一个时间步）将通过波公式计算，记为 $\boldsymbol{F}^{fr,\ wave}$ [17, 39, 33]

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{ij}^{fr,wave} &= \boldsymbol{F}_{ij}^{fr,UGKS}\left(\boldsymbol{W}_i^h\right) - \boldsymbol{F}_{ij}^{fr,DVM}\left(\boldsymbol{W}_i^{hp}\right) \\
&= \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\int \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}_{ij}\left[e^{-t/\tau}f_0(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}t,\boldsymbol{u})\right]\boldsymbol{\psi}\mathrm{d}\boldsymbol{u}\mathrm{d}t \\
&- e^{-\Delta t/\tau_n}\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\int \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}_{ij}\left[g_0^h\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\right)-t\boldsymbol{u}\cdot g_{\boldsymbol{x}}^h\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\right)\right]\boldsymbol{\psi}\mathrm{d}\boldsymbol{u}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Delta t}\int \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}_{ij}\left[\left(q_4-\Delta t e^{-\Delta t/\tau_n}\right)g_0^h\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\right)+\left(q_5+\frac{\Delta t^2}{2}e^{-\Delta t/\tau_n}\right)\boldsymbol{u}\cdot g_{\boldsymbol{x}}^h\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\right)\right]\boldsymbol{\psi}\mathrm{d}\boldsymbol{u},
\end{aligned}
$$

with

$$
q_4=\tau\left(1-e^{-\Delta t/\tau}\right),\ q_5=\tau\Delta t e^{-\Delta t/\tau}-\tau^2\left(1-e^{-\Delta t/\tau}\right).
$$

$\boldsymbol{F}^{fr,\ wave}$的计算遵循与上述 $\boldsymbol{F}^{eq}$相同的步骤，即重构、演化和投影。对于 $\boldsymbol{W}^h$，采用基于 van Leer 限制器的二阶重构。

随机粒子的演化是 WPTS 捕捉非平衡输运的关键，通常可概括为以下三个步骤:

1. 从波分量中采样粒子,

$$
\boldsymbol{W}_i^{hp}=e^{-\Delta t/\tau_n}\boldsymbol{W}_i^h, \tag{8}
$$

其速度为 $t_f=\Delta t$，采样粒子的速度由下式确定:

$$
\boldsymbol{u}_p=\delta\boldsymbol{u}_p+\boldsymbol{U} \tag{9}
$$

其中 $\delta\boldsymbol{u}_p=\mathcal{D}_N\left[\rho E_t^{prod},\rho^h\right]$取决于波分量 ρ^h中的流体密度，以及模型计算的 TKE 生成，后者假定为$\rho E_t^{prod}=C_0\left(1-e^{-\Delta t/\tau_n}\right)\rho E_t$。事实上，由于只有 ρ^h 中与 ρ^{hp} 对应的流体会被采样，并按照式（8）以粒子形式表示，因此整体 TKE 生成量 $e^{-\Delta t/\tau_n}\rho E_t^{prod}$ 会加载到新采样的粒子上。剩余部分由波分量承载，并将在随后的一个时间步内完全衰减。有关粒子采样的更多详情见 [39]。

确定上一步存活粒子的 t_f（如果存在），

$$
t_f=\min\left[-\tau_n\ln\left(\eta\right),\Delta t\right]. \tag{10}
$$

2. 通过算子分裂移动粒子，这表示,

$$
\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}^n+\boldsymbol{u}^n t_f, \tag{11}
$$

对于自由流动，以及

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{u}^{n} + \boldsymbol{a}t_f, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{x}^{n+1} = \boldsymbol{x}^{*} + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t_f^2, \tag{13}$$

计算加速度，同时统计由粒子运动引起的通量，记为 $\boldsymbol{w}^{fr,\ part}_{,\ i}$，

$$\boldsymbol{w}_i^{fr,part} = \sum_{k\in P\left(\partial\Omega_i^{+}\right)} \boldsymbol{\phi}_k - \sum_{k\in P\left(\partial\Omega_i^{-}\right)} \boldsymbol{\phi}_k, \tag{14}$$

其中，$P\left(\partial\Omega_i^{+}\right)$ 是在一个时间步内移动进入单元 i的粒子集合，$P\left(\partial\Omega_i^{-}\right)$是在一个时间步内移动离开单元 i 的粒子集合，k 是集合中的粒子索引，
$\boldsymbol{\phi}_k = \left[m_k, m_k\boldsymbol{u}_k, \frac{1}{2}m_k\boldsymbol{u}_k^2 + m_k\frac{K+3}{2}\frac{1}{2\lambda_k}\right]^T$是粒子 k携带的质量、动量和能量。

3. 删除满足 $t_f < \Delta t$的粒子，其携带的守恒变量将合并到 $\boldsymbol{W}$中。计算由存活粒子表征的湍流动能 TKE，ρE_t。

至此，我们已经获得了通量的所有必要组成部分，从而可以进行后续守恒量更新。

$$\boldsymbol{W}_i^{n+1} = \boldsymbol{W}_i^{n} - \frac{\Delta t}{\Omega_i}\sum_{S_{ij}\in\partial\Omega_i}\boldsymbol{F}_{ij}^{eq}S_{ij} - \frac{\Delta t}{\Omega_i}\sum_{S_{ij}\in\partial\Omega_i}\boldsymbol{F}_{ij}^{fr,wave}S_{ij} + \frac{\boldsymbol{w}_i^{fr,part}}{\Omega_i}. \tag{15}$$

值得注意的是，$\boldsymbol{W}_i^{p}$ 在每个单元内的更新可通过累加该单元内所有存活粒子的贡献得到，进一步地，$\boldsymbol{W}^{h}$ 可根据守恒 $\boldsymbol{W}_i^{h} = \boldsymbol{W}_i^{n+1} - \boldsymbol{W}_i^{p}$ 得到。此外，未解析的湍流动能在 WPTS 中主要随粒子的演化而变化，例如采样、移动、删除等。

备注 1. 本文采用统计一致性计算，这意味着 $\boldsymbol{F}^{fr,\ wave}$会简化为 $\boldsymbol{F}^{fr,\ UGKS}$，并且系统地仅将存活粒子（来自前一时间步）的移动计入 $\boldsymbol{w}^{fr,\ part}$，而当前时间步开始时新采样的粒子不会计入 $\boldsymbol{w}^{fr,\ part}$。

备注 2. 从粒子的演化可以看出，轨迹始终经过湍流强度较高流动区域的粒子，在每个时间步都有更高的存活概率，并会持续将流动信息输运至更下游处，从而将流动特征传递到远下游区域。这直接体现了 *WPTS* 方法在湍流建模中的非局部特征。

如上文所述，在 WPTS 的湍流建模框架中，粒子以其特征速度运动，输运时间应取决于其轨迹上的湍流强度。也就是说，在高湍流强度区域，粒子更有可能保持活跃并继续向下游运动；

相反，在低湍流强度区域，粒子更有可能消失，并将所携带的守恒量返还给背景波分量。特别是在 WPTS 中，输运时间主要由 τ_t决定。因此，有必要建立 τ_t模型，使其能够合理反映湍流强度等流动特性，从而准确预测湍流。本文基于混合长度假设，为 $\tau_t = \rho\nu_t/p$建立了模型，

$$\nu_t = (C_{ml}l)^2 \, |\boldsymbol{S}|, \tag{16}$$

其中， $C_{ml}l$ 是射流流动的建模混合长度

$$l = \sqrt{Dx} + b_{ml}, \tag{17}$$

它随射流距离 x的增加而增大。在式（16）中，原始混合长度假设中的速度梯度项被应变率张量 $\boldsymbol{S}$ 取代。当然，先前的一些混合长度建模研究也采用了应变率或其简化形式，而非原始速度梯度 [28]。

对于空间发展射流流动，转捩后，流动逐渐演变为充分发展湍流状态。在此状态下，随着射流向下游发展，整体湍流强度通常会衰减，同时伴随径向扩展。式（16）中的 τ_t 捕捉了沿流向的整体下降趋势，而系数 C_{ml}则用于调节衰减率。此外，在径向上，由于流动的固有特征，中心区域的湍流强度较高且小尺度结构较多，而外部区域则趋近于类层流状态，流场更为平滑。这种典型的流动结构使式（16）中的 $\boldsymbol{S}$ 在中心附近自然取值较高、向外围逐渐降低，从而自动满足射流流动中 τ_t预期的空间分布。因此，可以预期，WPTS与上述 τ_t模型耦合后，有望给出合理的预测。

该模型的形式与广泛使用的 Smagorinsky 模型（SM）类似，区别在于用混合长度尺度替代网格单元尺寸 Δ 。预计这一改动会使模型更多地依赖流动模式的典型特征。射流具有特征结构，其整体形态在不同雷诺数下保持相似。因此，我们预计，式（16）所示的模型有望在不同 Re下实现相当可靠的预测精度，例如只需对模型系数进行微小调整。这一特点对实际应用极具吸引力，也是本研究的主要动机。为此，在下一节中，我们将使用配备了 τ_t （或等效的 ν_t）模型的 WPTS，对雷诺数为 5,000 和 20,000 的两种射流进行测试，以验证其性能。

3. 数值模拟

本节将介绍采用 WPTS 方法对圆形射流进行的数值模拟及其结果，包括计算设置、边界条件、典型

流动特征、分析等。

3.1. 数值方法与算例设置

作为 WPTS 中的处理方法， [39, 38], 波分量采用五阶 WENO-AO 重构，而 $\boldsymbol{W}$ 随机粒子分量则采用带 van Leer 限制器的二阶重构 $\boldsymbol{W}^h$ [35, 10]。在时间离散方面，波分量采用两步四阶方法，而随机粒子分量在整个时间步内输运一次 Δt。此外，值得注意的是，在 WPTS 中，对于不含随机粒子的单元，将自动采用 GKS 的通量 $\boldsymbol{F}$ [31] ，从而确保该区域内获得精确的五阶 NS 解。本文所有模拟中，单个随机粒子的参考质量为 $10^{-3}\Omega$。此外，CFL数取为 0.3，建模的 TKE生成中 C_0 取为 0.5，这与我们此前对湍流射流的研究相同 [38]。

如引言部分所述，本文的主要目标是基于混合长度假设，建立一种用于射流的 τ_t 模型，并进一步测试WPTS与这一新模型耦合后的性能。现在，射流雷诺数 Re_j 定义如下:

$$Re_j = \rho U_e D/\mu_e,$$

其中， ρ 和 μ_e 分别为射流的密度和黏度。此外， U_e 为射流的核心速度， D 表示射流出口的直径，并将其取为单位长度。本文所有模拟中的黏度均由幂律给出，即 $\mu(T) = \mu_e(T/T_e)^\omega$ 其中， T_e 为射流的温度，且 $\omega = 0.667$。另一个无量纲参数是马赫数（Ma），其定义如下:

$$Ma = U_e/\sqrt{\gamma R T_e}.$$

本文首先测试了 Re_j 为5000且 $Ma = 0.6$ 的情况。关于 $Re_j = 5000$射流的DNS研究可见 [26], ，本文将其作为DNS参考。

在模拟中，整个计算域的尺寸为 $X \times Y \times Z$ 乘$45D \times 30D \times 30D$，其中包含一个 $35D \times 20D \times 20D$的核心模拟区域，外围环绕着缓冲区。整个计算域采用网格数为 84^4的非均匀笛卡尔网格。具体而言，最小单元位于射流出口处，单元沿流向（x）和横向（y/z）逐渐增大。具体在核心区域内，流向上的最小网格单元尺寸 Δx_{min} 为$0.15D$，并以固定比例1.025拉伸。横向上的最小网格单元尺寸 $\Delta y_{min} = \Delta z_{min}$ 为$0.10D$，并以固定比例1.052拉伸。

左侧边界设为入口边界条件，并给定叠加了扰动的速度剖面。许多基于直接数值模拟和大涡模拟的既有研究表明，入口边界的处理对于准确预测空间发展射流至关重要。否则，可能会出现系统性偏差，其主要表现为

沿 x 轴的流向速度分布滞后。为缓解这一问题，通常采用一些方法，例如在入口添加白噪声扰动或特定激励模态 [13, 6, 5]，使用伪湍流入口速度 [29]，采用更真实的管流入口数据 [26, 20]，以及在大涡模拟中修改亚格子应力模型 [41]，等。本文主要关注射流的自相似特性，包括平均流动变量和雷诺应力等湍流量。近场流动的详细比较，例如对转捩的准确预测，将在未来的研究中讨论。因此，本文采用既有研究中开发的扰动模型，并评估 WPTS 与基于混合长度假设开发的 τ_t 模型耦合后的性能，尤其是其对充分发展湍流射流自相似特性的预测能力。

本研究中，入口流的平均速度剖面由双曲正切函数给出：

$$U(r) = \frac{U_e}{2}\left[1 - \tanh(\frac{r - r_0}{2\theta_0})\right], \quad V = 0, \quad W = 0,$$

其中，$r_0 = D/2$ 为射流半径，$r = \sqrt{y^2 + z^2}$ 为半径，θ_0 为初始动量厚度，取值为 $0.04r_0$ [26]。此外，为激发湍流，将在 [6] 中发展的双模态扰动 $u(r,\ t)$ 叠加到射流核心 $r \leq r_0$ 内的流向速度 U 上，

$$u(r,t) = A_n U_e \sin\left(2\pi St_D \frac{U_e}{D} t\right) + A_h U_e \sin\left(2\pi St_H \frac{U_e}{D} t - \theta\right)\left(\frac{2r}{D}\right), \tag{18}$$

其中，$\theta = \text{atan}\,(y,\ z)$ 为方位方向，振幅取为 $A_n = A_h = 0.04$，轴对称斯特劳哈尔数为 $St_D = 0.5$，螺旋斯特劳哈尔数为 $St_H = St_D/f$，频率比为 $f = 2.40$。此外，还将均匀分布于 $[-kU_e, kU_e]$ 中的小扰动以 $k = 0.004$ [6] 叠加到射流核心 $r \leq r_0$ 内的三个速度分量上。下游边界和横向边界分别施加对流边界条件和非反射边界条件。最后，值得注意的是，模拟采用无量纲体系。具体而言，长度和速度分别以射流直径 $L_{ref} = D$ 和速度 $U_{ref} = \sqrt{RT_e}$ 进行无量纲化。因此，无量纲时间为 $t_{ref} = L_{ref}/U_{ref}$。

3.2. 在 Re = 5,000 条件下使用混合长度 τ_t 模型验证 WPTS

3.2.1. 典型流动特征

对于雷诺数为 5000 的射流，采用式 (16) 和式 (17) 中的 $C_{ml}^2 = 6.1 \times 10^{-4}$ 和 $b_{ml} = 1.6$。数值模拟的无量纲时间跨度为 $t = 1660$，并使用 $540 \sim 1660$ 中的流场对湍流量进行统计分析。

首先，本文展示了 $t = 1650$ 处的瞬时流场，以说明空间发展射流的特征。图 1 显示了 $z = 0$ 时 xoy 平面上的涡量分量 ω_z 分布。尽管涡量不能精确反映湍流强度的分布，但它常被用作表征湍流

整体流动特征的关键变量。图 1 中的结果表明，射流经过转捩后进入湍流阶段。在此阶段，随着流体向下游发展，流动结构逐渐减弱，同时伴随径向流动扩展。在远离射流中心的区域（其中 r 较大），流动变得平稳，即处于层流状态。这些典型的流动特性与此前采用直接数值模拟对射流进行数值研究所得的结果一致。

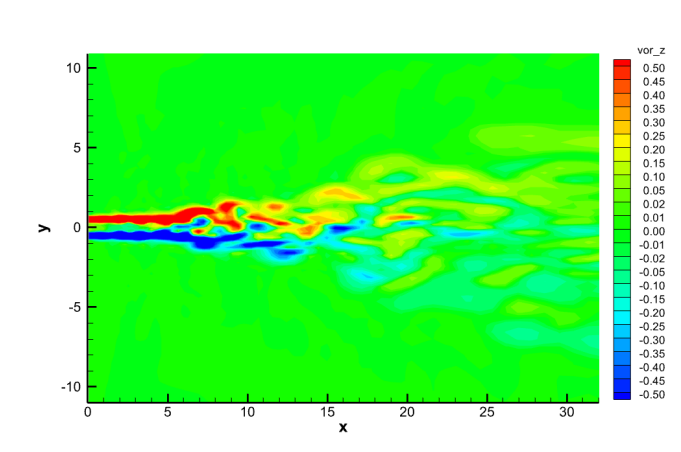


图 1：WPTS 中 $t = 1650$ 时刻 xoy 平面上的瞬时涡量快照 $\omega_z = V_x - U_y$，其中 $z = 0$。所示计算域约为 $[0, 32D] \times [-11D, 11D]$。

如前所述，在 WPTS 中，流场被分解为波动分量和粒子分量，两者耦合演化后得到预测流场。具体而言，WPTS 中粒子的占比主要受湍流特征时间 τ_t 控制。如式（16）和式（17）所示，本研究中基于混合长度假设的 τ_t 模型主要取决于 x 和单元解析的应变率张量 $\boldsymbol{S}$。图 2(a) 显示了根据式（17）得到的模型混合长度 $C_{ml}l$ 的分布，该值随 x 增大而增大。图 2(b) 展示了 xoy 平面上 τ_n 的瞬时分布，即湍流特征时间 τ_t 与物理量 τ_p 之和。由于湍流区域中的模型 τ_t 通常显著大于 τ_p，图 2(b) 中 τ_t 的分布实质上反映了 τ_t 的分布。总体而言，τ_t 随着 x 或 r 的增大而减小，这主要归因于弱湍流区域和层流区域中单元解析的应变率张量 $\boldsymbol{S}$ 的幅值较小；这一流动特性可从涡量场推断出来。总体来看，采用根据式（16）和式（17）推导的 τ_t 模型的 WPTS，能够得到符合预期的射流流动特性，表明该模型是合理的。

此外，图 3 展示了 $t = 1650$ 时刻 WPTS 方法中的瞬时粒子分布。它与图 2(b) 所示的 τ_n 分布高度相关，这可归因于 WPTS 中采用的粒子采样策略。总体而言，粒子主要出现在射流湍流较强的中心流动区域。随着流动向下游发展并沿径向扩展，粒子的比例逐渐降低。值得注意的是，在远离射流中心、流动转为层流的区域，粒子

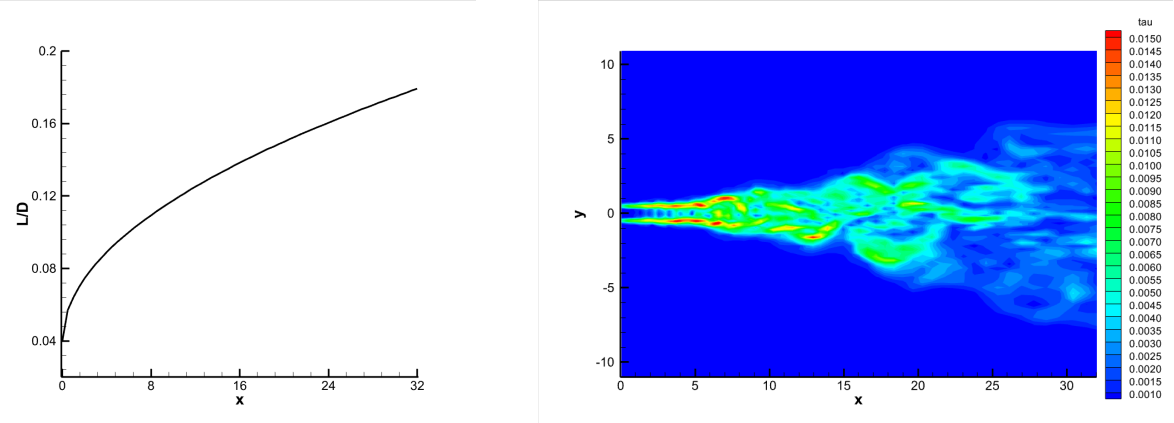


图 2：（a）式（16）中的建模混合长度 $C_{ml}l$，以及 $C_{ml}^2 = 6.1 \times 10^{-4}$ 和 $b_{ml} = 1.60$，均以射流直径 D 归一化。（b） τ_n 的瞬时快照，即 τ_p 和 τ_t 之和；在 $t = 1650$ 处的 xoy 平面上，取值为 $z = 0$。所示计算域约为 $[0, 32D] \times [-11D, 11D]$。

会自动消失，从而确保计算效率；更重要的是，这保证了算法在层流区域能够完全恢复为 NS 解。这清楚地展示了 WPTS 方法的优势之一，即波粒分解具有流态自适应性，能够在波粒框架内统一描述层流和湍流。

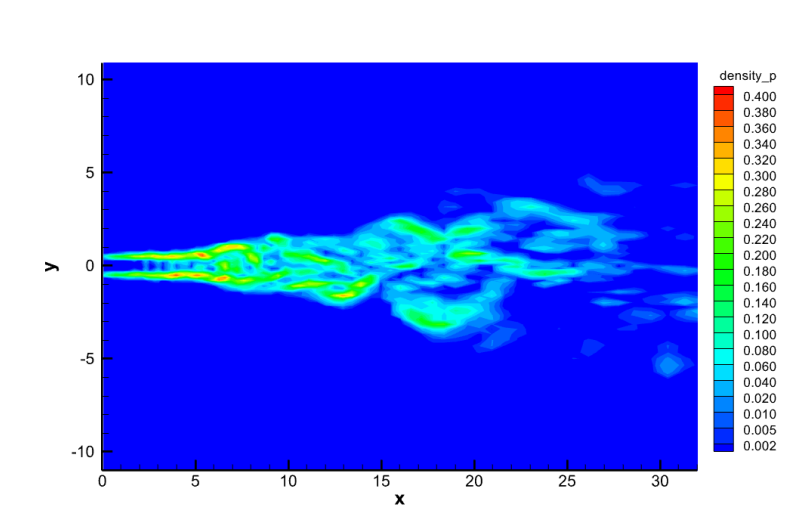


图 3： ρ_p 的瞬时快照，显示 WPTS 中的粒子分量；在 $t = 1650$ 处的 xoy 平面上，取值为 $z = 0$。所示计算域约为 $[0, 32D] \times [-11D, 11D]$。

除了确定粒子比例外， τ_t 在 WPTS 中还用于测量粒子输运时间，或者等价地测量迁移距离。如前所述，WPTS 是一种具有典型非局域特征的湍流建模与模拟方法。这主要是因为粒子可能在多个时间步内演化，或者等价地，穿越多个网

格单元，从而将流动信息传递到远处。从本质上说，τ_t 的分布表示在粒子输运过程中赋予粒子的局部特征迁移时间。因此，如果粒子的轨迹始终处于 τ_t相对较大的区域，那么粒子很可能（但并非必然，因为每个时间步都会重新评估是否删除粒子）存续多个时间步，并相应地迁移穿过多个单元，将流动信息带向下游。

3.2.2. 统计变量

首先，将分析不同射流距离x 处射流核心（$r = 0$）周围的流向速度 $U_c(x)$。以往研究表明，在射流充分发展湍流状态下，$U_c(x)$可表示为

$$\frac{U_e}{U_c(x)} = \frac{B_u D}{x - x_{0u}}, \tag{19}$$

其中，U_e 为射流核心处的流向速度，B_u 和 x_{0u} 分别表示流向速度的衰减率和假定的射流虚拟原点。值得注意的是，式（19）在射流出口附近区域（较小的 x 区域）不成立。充分发展湍流的一个典型特征是，B_u 在不同的 x 位置取恒定值，这表明 $U_e/U_c(x)$呈线性增长。更重要的是，B_u 独立于 Re [23]，并维持在一个恒定值附近。图4给出了WPTS预测的 $U_e/U_c(x)$分布，其中衰减常数 B_u 可取为5.55；与表 1 [9, 21, 26]所列实验和直接数值模拟研究的参考值相比，这是一个合理的数值。

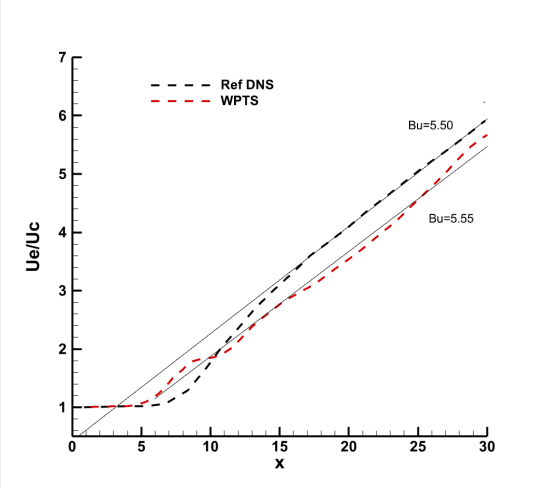


图 4：平均中心线平均速度的倒数，参考资料来自 [26]。

为获得湍流统计变量，需要将笛卡尔坐标系中的 V 和 W 速度分量转换为柱坐标中的 U_r 和 U_θ 速度分量。此外，还采用时间平均和方位角方向平均，

	Re_j	B_u
实验 侯赛因	100,000	5.80
实验 Panchapakesan	11,000	6.06
直接数值模拟 沙兰	5,000	5.50
当前 WPTS	5,000	5.55

表1：基于混合长度假设的模型，WPTS 对 B_u 的预测结果。

以获得沿半径方向的统计变量，如图5所示。值得注意的是，为验证其一致性，图中展示了 $10D$ 上不同流向位置 $x = 25$，30，35 处的统计变量；这是充分发展射流湍流自相似流动模式的一个重要特征。速度和半径分别以中心线处的平均流向速度 $U_c(x)$ 和 $r_n = r/(x - x_{0u})$ 进行归一化。此外，图5(b)、(c)和(d)给出了典型的雷诺应力相关项，即 $U'U'$的均方根（r.m.s.）、 $U'_rU'_r$的均方根以及交叉应力项 $U'U'_r$，并以 $U_c^2(x)$ 进行归一化。值得注意的是，不同x 位置处的剖面几乎重合，且与参考结果接近；对于采用粗网格进行的湍流建模与模拟而言，这一点极具挑战性。

最后，图5中 WPTS 在区域 $r_{nor} > 1.2$ 的结果与参考值存在一定差异。具体而言，WPTS 预测的整体值偏高。据作者所知，这种偏差可能由建模的 τ_t 或混合长度 $C_{ml}l$ 引起，它们在波粒分解中发挥关键作用，并决定 WPTS 中粒子的输运时间尺度。如上所述，建模的混合长度仅取决于 x，而不取决于半径 r，因此 τ_t 的径向调节仅依赖于单元解析的$\boldsymbol{S}$；这使模型在径向流场预测方面的自由度不足，无法准确预测流场。后续研究可进一步探索纳入依赖半径的建模，以提高预测精度。总之，仅用两个自由参数便取得上述结果，仍然值得称赞。

3.3. 雷诺数 *20000* 的验证

如上所述，本研究的目标之一是，配备新开发的 τ_t 模型的 WPTS 能够准确预测不同雷诺数下射流的典型流动特征。因此，本节选取更高的雷诺数 20,000 作为进一步的测试案例，这对直接数值模拟方法构成了显著挑战。具体而言，采用与 Re $= 5000$ 案例相同的计算框架，同时调整 τ_t 模型中的系数和所采用的网格分辨率，预期 WPTS 方法能够对高雷诺数射流湍流作出令人满意的预测。经过系统测试， τ_t 模型中的系数取为 $C_{ml}^2 = 3.5 \times 10^{-4}$，并将网格细化至 $\Delta x_{min} = 0.114D$；其他所有设置均与雷诺数为 5000 的案例相同，包括 Ma、边界条件、所采用的 CFL 数、WPTS 中的系数等。还需进一步指出，一旦确定最小网格单元尺寸 Δx_{min}，核心区域中的整个网格便随之唯一确定，其生成规律为所有这些网格（包括

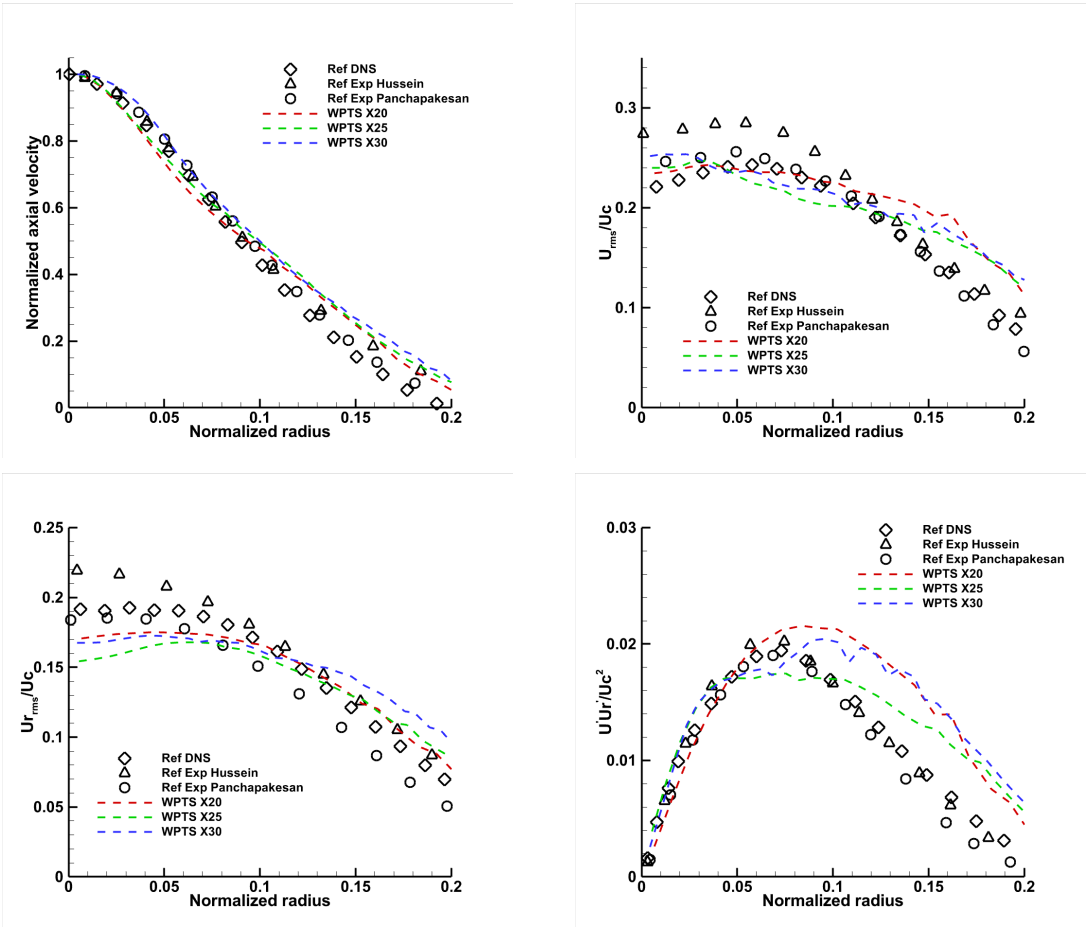


图5：（a）平均流向速度的剖面，以及与雷诺应力相关的各项：（b） $U'U'$的均方根，（c） $U_r'U_r'$的均方根，（d） $U'U_r'$的交叉应力项。 U和 U_r分别表示流向速度和径向速度。

Δx、 Δy和 Δz)按通过 Δx_{min}确定的细化因子进行缩放。雷诺数20000算例所采用的网格数为 100^3。

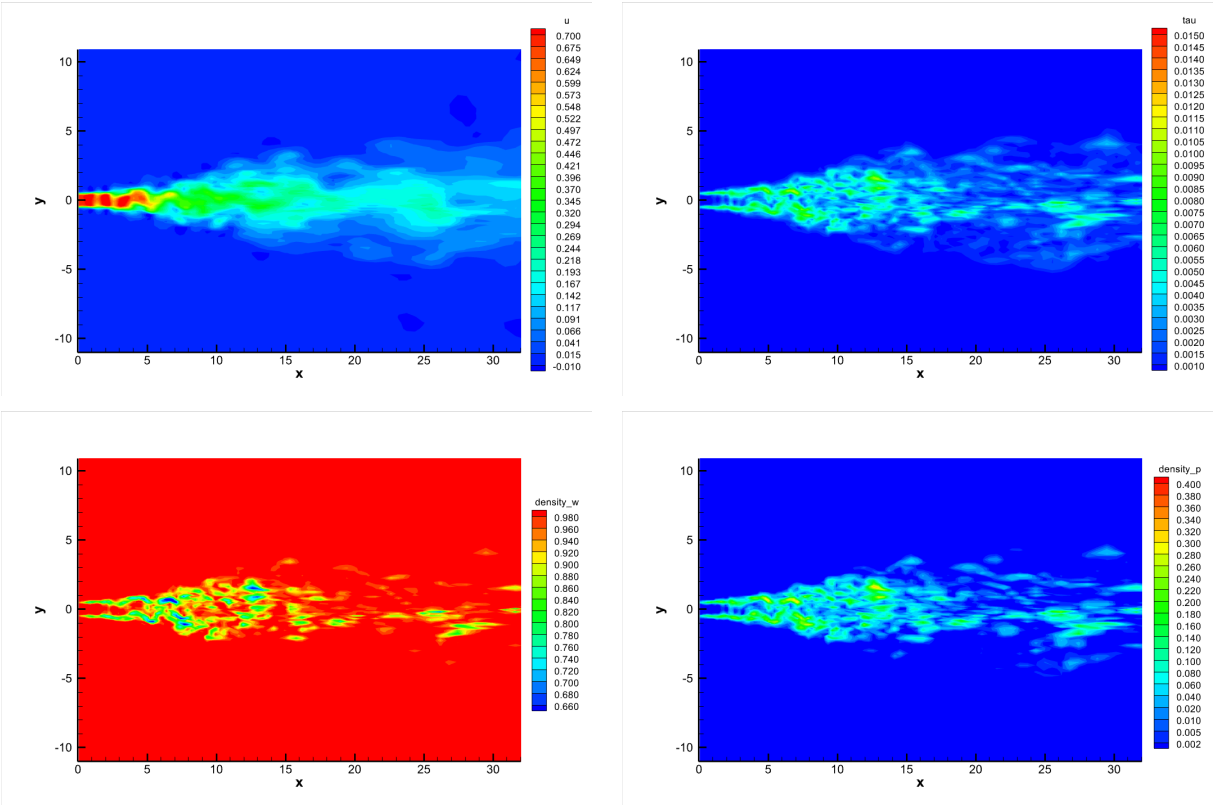


图6：由WPTS预测的 $Re = 20000$ 流场。(a)流向速度、(b)总特征时间 $\tau_p + \tau_t$、(c)WPTS中波分量密度以及(d)WPTS中粒子分量密度的瞬时快照。

首先，图6给出了WPTS对雷诺数20000算例的瞬时流场，例如图6(a)中的流向速度以及图6(b)中的总特征时间 $\tau_n = \tau_p + \tau_t$。射流的总体流动特征清晰可见：流动在向下游发展时沿径向扩展；湍流强度在射流中心的分布高于外围区域，并沿流向逐渐衰减。此外，图6(c)和图6(d)分别给出了WPTS中波分量和粒子分量的流动密度，即 ρ_h 和 ρ_p。一般而言，较高的湍流碰撞时间直接决定流体元更长的输运距离，从而可能产生湍流中的非局部特征，这是通过在WPTS中对随机粒子进行采样和追踪实现的。而对于湍流强度较低、甚至处于远处层流区域的流动，随机粒子分量的占比降低，因此波分量将在演化中占主导。

此外，定量比较结果示于图7，有效反映了充分发展射流湍流的相似性流动特征。特别是，图7(a)表明平均流向速度沿射流的衰减特征

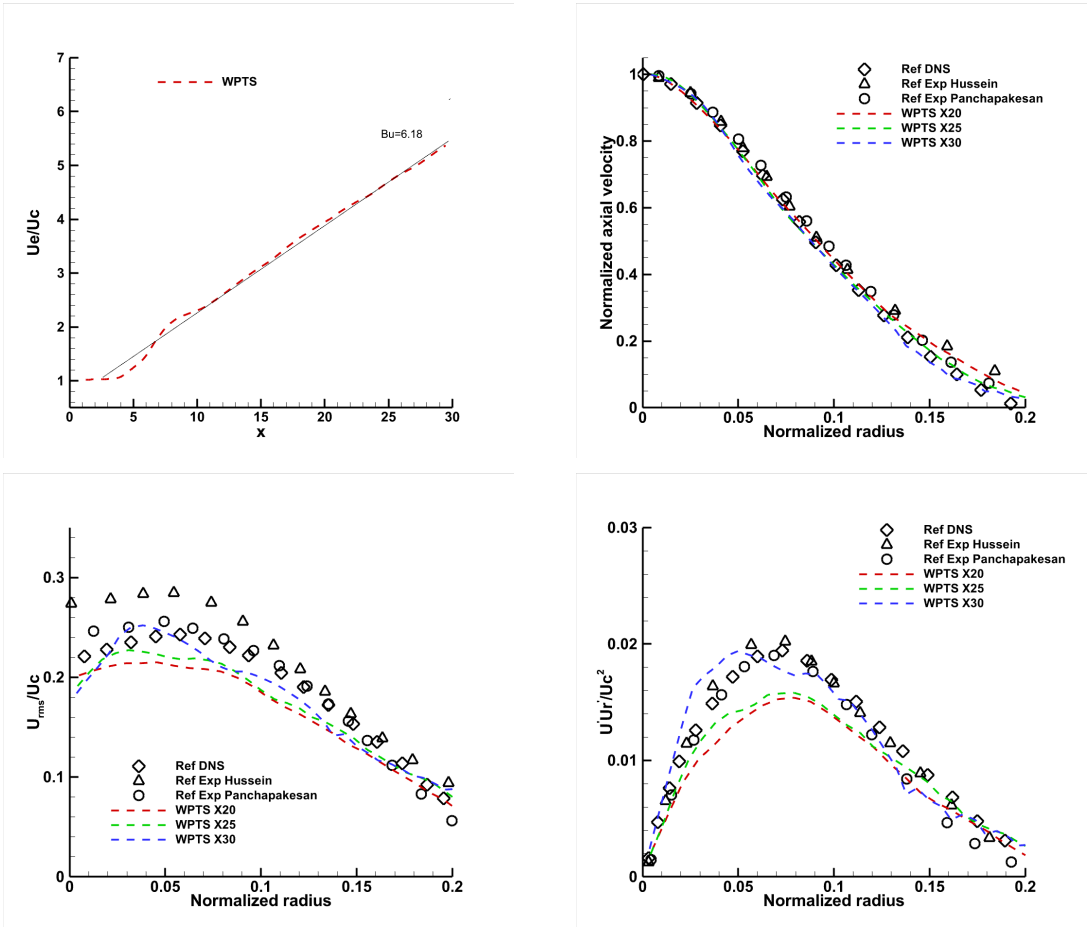


图7：WPTS 得到的 $Re = 20000$ 结果。(a) Ue/Uc、(b) 平均流向速度的剖面，以及与雷诺应力相关的项：(c) $U'U'$的均方根，(d) $U'U'_r$的交叉应力项。 U和 U_r分别表示流向速度和径向速度。

距离呈现出明显的线性趋势，斜率为 6.18，与 Panchapakesan 针对雷诺数 11000 工况的实验测量参考值 6.06 相差约 2% [21]。此外，图7(b-d)展示了采用基于混合长度假设构建的 τ_t 的 WPTS 所预测的沿径向分布的平均速度和雷诺应力分量。值得注意的是，在雷诺数 20000 工况下，不同轴向位置的量，即 $x = 20D,\ 25D,\ 30D$，再次很好地汇聚到同一条曲线上。这一观察结果证明，本文提出的方法在预测不同雷诺数（例如从 5000 到 20000）下的射流湍流时具有准确性和可靠性。最后，通过比较雷诺数 20000 和 5000 的工况，雷诺数相关缩放策略可概括如下：网格尺寸需缩小至 $Re_0^{-0.20}$，τ_t 模型中的系数 C_{ml}^2 按 $Re_0^{-0.40}$进行缩放，其中 Re_0 为雷诺数与 5000 的比值，因此工况 $Re = 20000$对应的值为 4.0。这种与雷诺数相关的方法展现了所提出的方法扩展到其他雷诺数工况的潜力。

4. 结论

本文基于普朗特混合长度假设，建立了一种湍流特征时间模型，并将其与我们近期提出的波粒湍流模拟（WPTS）方法相结合，用于模拟空间发展圆射流。所得的 τ_t闭合模型主要取决于流向距离 x和局部应变率张量 $\boldsymbol{S}$。WPTS公式继承了混合长度假设的核心物理图景：在湍流强烈的区域，离散流体微元以特征速度行进有限距离后，才与周围流体发生相互作用。在WPTS中，这一概念通过在强湍流区域采样随机粒子，并使其与由波（欧拉）分量表示的背景流耦合演化来实现。

尽管在概念上存在这种联系，本文提出的方法在两个方面与基于混合长度理论推导的涡黏性模型有根本区别。首先，WPTS 中的粒子自由输运明确保留了非平衡输运效应。其次，WPTS 通过波—粒子耦合演化，提供了一个能够描述层流和湍流状态的统一框架。我们首先针对 Re=5,000 的空间发展射流检验所提出的方法。采用适当的模型系数后，该方法能够准确再现完全湍流射流的自相似行为，包括中心线速度沿流向的衰减、多个下游位置处的平均速度剖面，以及雷诺应力分布等关键湍流统计量。为考察该方法在不同雷诺数下的稳健性，我们进一步将射流雷诺数提高至 Re=20,000。结果表明，只需进行两项调整，WPTS 仍能准确预测射流的自相似特性：(1) 根据雷诺数比的 -0.4 幂律缩放模型系数；(2) 根据同一雷诺数比的 a-0.2 幂律细化最小网格尺度。这里，雷诺数比是相对于基准 Re=5,000 算例定义的，即 Re=$20,000$ 时为 4.0。

5. 致谢

本研究由国家重点研发计划（项目编号：2022YFA1004500）、国家自然科学基金（12172316、92371107）和香港研究资助局（16301222、16208324）资助。

参考文献

[1] Christophe Bogey 和 Christophe Bailly. 自保持圆射流中的湍流与能量收支：采用大涡模拟直接评估。流体力学杂志，627:129–160，2009。[2] Francesco Bonelli、Annarita Viggiano 和 Vinicio Magi. 高速湍流气体射流：通过大涡模拟研究马赫数和雷诺数对速度衰减及扩展率的影响。流动、湍流与燃烧，107(3):519–550，2021。[3] Tuncer Cebeci. 湍流边界层分析。爱思唯尔，2012。[4] Hudong Chen、Satheesh Kandasamy、Steven Orszag、Rick Shock、Sauro Succi 和 Victor Yakhot. 用于湍流的扩展玻尔兹曼动理学方程。《科学》，301(5633):633–636，2003。[5] Trushar B Gohil 和 Arun K Saha. 受迫圆射流的数值模拟：摆动扰动的影响。《流体物理学》，31(8)，2019。[6] Trushar B Gohil、Arun K Saha 和 K Muralidhar. 受迫圆射流中绽放现象的模拟。流体力学杂志，783:567–604，2015。[7] Kirsty E Hanley、Robert S Plant、Thorwald HM Stein、Robin J Hogan、John C Nicol、Humphrey W Lean、Carol Halliwell 和 Peter A Clark. 对流风暴高分辨率模拟中的混合长度控制。英国皇家气象学会季刊，141(686):272–284，2015。[8] Jing Huang、Elie Bou-Zeid 和 Jean-Christophe Golaz. 稳定大气边界层中的湍流与垂直通量。第二部分：一种新型混合长度模型。《大气科学杂志》，70(6):1528–1542，2013。[9] Hussein J Hussein、Steven P Capp 和 William K George. 高雷诺数、动量守恒、轴对称湍流射流中的速度测量。流体力学杂志，258:31–75，1994。[10] Xing Ji 和 Kun Xu. 基于 WENO 自适应阶数重构提升高阶气体动理学格式的性能。《计算物理通讯》，28(2):539–590，2020。[11] Meridith Joyce 和 Jamie Tayar. 一维恒星建模中对流混合长度理论的综述。《星系》，11(3):75，2023。[12] Jungwoo Kim 和 Haecheon Choi. 圆射流的大涡模拟：入口条件对近场的影响。流体力学杂志，620:383–411，2009。[13] Polina S Landa 和 Peter Vaughan Elsmere McClintock. 亚声速淹没射流中的湍流发展。《物理学报告》，397(1):1–62，2004。[14] Weiming Li、Chang Liu、Yajun Zhu、Jiwei Zhang 和 Kun Xu. 统一气体动理学波粒方法 III：多尺度光子输运。《计算物理学杂志》，408:109280，2020。[15] Chang Liu、Weiming Li、Yanli Wang、Peng Song 和 Kun Xu. 用于辐射输运过程的隐式统一气体动理学波粒方法。《流体物理学》，35(11)，2023。[16] Chang Liu 和 Kun Xu. 统一气体动理学波粒方法 IV：多组分气体混合物与等离子体输运。《空气动力学进展》，3(1):1–31，2021。[17] Chang Liu、Yajun Zhu 和 Kun Xu. 统一气体动理学波粒方法 I：连续介质流动与稀薄气体流动。《计算物理学杂志》，401:108977，2020。[18] Peng Luan、Haoyuan Zhang 和 Jun Zhang. 利用动理学 Fokker–Planck 方程构建湍流模型。流体力学杂志，1011:A44，2025。[19] JL Lumley. 关于湍流的一些评论。《流体物理学 *A*》，4(2):203–211，1992。[20] Cat Tuong Nguyen 和 Martin Oberlack. 基于大计算域和高雷诺数直接数值模拟数据的湍流圆射流分析。《物理评论：流体》，9(7):074608，2024。

[21] Nagangudy R Panchapakesan 和 John L Lumley. 空气和氦气轴对称射流中的湍流测量。第一部分：空气射流。流体力学杂志，246:197–223，1993。[22] Sergio Pirozzoli. 重新审视湍流壁面层外区的混合长度假设：平均流动与壁面摩擦。流体力学杂志，745:378–397，2014。[23] Stephen B Pope. 湍流。测量科学与技术，12(11):2020–2021，2001。[24] Ludwig Prandtl. 第 7 份报告： ¨关于充分发展湍流的研究。ZAMM应用数学与力学杂志/应用数学与力学杂志，5(2):136–139，1925。[25] Zhigang Pu 和 Kun Xu. 用于部分电离等离子体多尺度流动模拟的统一气体动理学波粒方法。计算物理学杂志，530:113918，2025。[26] Nek Sharan 和 Josette Bellan. 采用直接数值模拟研究高压湍流射流。流体力学杂志，922:A24，2021。[27] Dong-hyuk Shin、RD Sandberg 和 ES Richardson. 湍流圆射流中流体停留时间统计的自相似性。流体力学杂志，823:1–25，2017。[28] Peter K Stansby. 浅层湍流尾流的混合长度模型。流体力学杂志，495:369–384，2003。[29] Zhihua Wang、Pei He、Yu Lv、Junhu Zhou、Jianren Fan 和 Kefa Cen. 亚声速圆形湍流射流的直接数值模拟。流动、湍流与燃烧，84:669–686，2010。[30] Ziyang Xin、Zhaoli Guo 和 Hudong Chen. 基于动理学理论的不可压缩湍流模型。arXiv 预印本 arXiv:2512.06433，2025。[31] Kun Xu. 纳维–斯托克斯方程的气体动理学 BGK格式及其与人工耗散和 Godunov方法的联系。计算物理学杂志，171(1):289–335，2001。[32] Kun Xu. 计算流体力学的直接建模：统一气体动理学格式的构建与应用，第 4 卷。世界科学出版社，2014。[33] Kun Xu. 从稀薄到连续介质流动区间的统一计算流体力学框架。航空航天工程要论，剑桥大学出版社，2021。[34] Kun Xu 和 Juan-Chen Huang. 用于连续介质流动与稀薄气体流动的统一气体动理学格式。计算物理学杂志，229(20):7747–7764，2010。[35] Xiaojian Yang、Xing Ji、Wei Shyy 和 Kun Xu. 基于气体动理学通量和 HLLC通量的高阶格式性能比较。计算物理学杂志，448:110706，2022。[36] Xiaojian Yang、Chang Liu、Xing Ji、Wei Shyy 和 Kun Xu. 统一气体动理学波粒方法 VI：分散稀薄气粒多相流。计算物理通讯，31(3):669，2022。[37] Xiaojian Yang、Wei Shyy 和 Kun Xu. 用于多分散气固颗粒多相流的统一气体动理学波粒方法。流体力学杂志，983:A37，2024。[38] Xiaojian Yang 和 Kun Xu. 空间发展圆射流的波粒湍流模拟：湍流建模与方法验证。《流体物理学》，37(10)，2025。[39] Xiaojian Yang 和 Kun Xu. 基于波粒方法的多尺度建模与模拟：非平衡湍流。《arXiv》预印本 arXiv:2503.07207，2025。[40] Xiaojian Yang、Yajun Zhu、Chang Liu 和 Kun Xu. 用于频率相关辐射输运方程的统一气体动理学波粒方法。计算物理学杂志，522:113587，2025。[41] Ziyu Zhou、Maochao Xiao、Dian Li 和 Yufei Zhang. 基于各向异性最小耗散亚格子长度尺度的增强型延迟分离涡模拟。《流体物理学》，37(2)，2025。[42] Yajun Zhu、Chang Liu、Chengwen Zhong 和 Kun Xu. 统一气体动理学波粒方法 II：非结构网格上的多尺度模拟。《流体物理学》，31(6):067105，2019。