arXiv:2602.09797v1 [math.NT] 10 Feb 2026

二次型所表示的素数与阿贝尔有限生成群的 Weil 收敛横坐标

MARTIN JANN 和 STEFFEN KIONKE

Abstract. 本文证明，对于三组素数集合，原循环群的 Weil 收敛横坐标 $\prod_{p\in S}\mathbb{Z}_p$ 均等于 2：S（i）模 3 的素数集合 $p\equiv 1$，（ii）模 4 的素数集合$p\equiv 1$，以及（iii）模 8 小于 $p\equiv 1$，3 的素数集合。我们的论证基于这样一个观察：所有素因子均属于 S 的整数，都可以表示为某个适当的二元二次型的值；据此，我们可以运用 Iwaniec 的一个定理，为魏尔表示 ζ 函数构造一个下界。

1. Introduction

有限生成拓扑群 G 的 *Weil* 收敛横坐标 $\alpha(G)$ 是一种复杂的不变量，用于量化有限域 $\mathbb{F}_{p^j}$ 大小增加时，群 G 在有限域上的绝对不可约表示数目如何增长。它是文献 [1] 中定义的魏尔表示 ζ 函数的收敛横坐标。对于有限生成的拓扑阿贝尔群 G，魏尔表示 ζ 函数有如下简单定义

$$\zeta_G^W(s)=\exp\left(\sum_{p\in\mathcal{P}}\sum_{j=1}^{\infty}|\mathrm{Hom}(G,\mathbb{F}_{p^j}^\times)|\frac{p^{-sj}}{j}\right),$$

对于 $s\in\mathbb{C}$；这里 $\mathcal{P}$表示所有素数的集合，而 $|\mathrm{Hom}(G,\mathbb{F}_{p^j}^\times)|$ 表示从 G 到 $\mathbb{F}_{p^j}^\times$ 的连续同态的数量。然而，即使对于阿贝尔群，Weil 收敛横坐标也难以计算，因为其精确值以微妙的方式取决于素数在等差数列中的分布；参见 [1, 5]。这篇短文旨在借鉴第一作者的硕士论文中的想法，计算三个原循环群的 Weil 收敛横坐标（该论文于 2025 年在哈根 FernUniversität 撰写）。

定理 1.1。 原循环群

$$\prod_{p\equiv 1 \bmod 3}\mathbb{Z}_p,\qquad \prod_{p\equiv 1 \bmod 4}\mathbb{Z}_p,\qquad \prod_{p\in\{1,3\} \bmod 8}\mathbb{Z}_p$$

的 *Weil* 收敛横坐标为 2。

设 S 是 $\mathcal{P}$ 的一个非空子集，且 $H_S=\prod_{p\in S}\mathbb{Z}_p$；这里 $\mathbb{Z}_p$ 表示 p进整数的加法群。那么 H_S 是一个原循环群；也就是说，它是一个含有稠密循环子群的有限生成群。 [5] 的猜想 A 预言了三个等式，其中之一可以表述如下

猜想。 平移的部分黎曼 ζ 函数 $\zeta_S(s-1):=\prod_{p\in S}\frac{1}{1-p^{-s+1}}$与 $\zeta_{H_S}^W(s)$具有相同的收敛横坐标。

如果 $S=\{p\in\mathcal{P}\mid p\equiv a \bmod d\}$ 是一个等差数列中的素数集合，且 $\gcd(a,d)=1$，那么 $\zeta_S(s)$ 的收敛横坐标为 1——例如，可以利用

Date：2026年2月11日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主分类 20P05；次分类 20E18，11M41。

Siegel–Walfisz 定理 [6] ，因此我们的定理证实了这三个群的猜想。

目前，该猜想仅对非常大或非常小的集合 S已知成立。首先，考虑这样的集合 $S \subset \mathcal{P}$，使得 ζ_S 对某个实数 $s < 1$收敛，其中$S = \mathcal{P} \backslash S$。这些集合称为厚集。若 S 是一个厚的素数集合，则第二作者证明了 $\alpha(H_S) = 2$；参见 [5, 定理 1.3]。其次，若$\zeta_S(s)$ 的收敛横坐标为 0，则已知该猜想成立（[5, 引理 2.1]）。对于某些指数增长的素数序列S，这一点已在 [1, 注记 5.4]中指出。因此，Weil 收敛横坐标的取值问题在“中间”情形中尤为引人关注。

本文分析 S 为属于一个或多个等差数列的素数集合的情形。为证明我们的主要结果，我们将利用如下事实：某些等差数列中的素数可由某些二元二次型表示，并应用 Iwaniec 的一个定理 [4]。这些方法可以加以推广，用以证明关于某些等差数列之并的一般结果。然而，该方法有其局限，我们强调它并不适用于一般的等差数列。特别地，下述问题仍然悬而未决。

问题 1.2. 原循环群 $\prod_{p \equiv 2 \bmod 3} \mathbb{Z}_p$ 和 $\prod_{p \equiv 3 \bmod 4} \mathbb{Z}_p$ 的 Weil 收敛横坐标是否为 2?

2. Quadratic forms and primes

S 为一组素数。给定一个自然数 n，我们用 n_S 表示 n 的最大因子，使得它的所有素因子都属于 S。我们注意到，对于所有 $p \in \mathcal{P}$，都有$|\mathrm{Hom}(H_S, \mathbb{F}_{p^j}^\times)| = (p^j - 1)_S$。这里我们旨在描述满足条件的素数集 p，使得对于三个特定集合 S_1、S_2 和 S_3，$(p-1)_S$ 接近于 p。

众所周知，有时可以通过二次型的可表示性来识别等差数列中的素数。

定义 2.1 (参见 [2]). 设 $a, b, c \in \mathbb{Z}$ 为常数。那么，$f\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，其中$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$，称为一个二元二次型，而 $\Delta_f = b^2 - 4ac$称为其判别式。若存在 $x, y \in \mathbb{Z}$使得 $f(x, y) = n$，则称数 $n \in \mathbb{N}$ 可由 f 表示。此时，我们称 f 表示 n。

例 2.2. 设 n 为正整数。二次型 $f_n(x, y) = x^2 + ny^2$的判别式为 $-4n$。

整数由二次型表示是数论中的经典课题。两平方和问题就是一个著名例子：哪些素数是两个平方数之和？费马早已知道，恰好是 2 和所有满足 $S_1 = \{p \in \mathcal{P} \mid p \equiv 1 \bmod 4\}$ 的素数可以表示为两个平方数之和。我们将用到以下关于整数表示为两个互素平方数之和的精细结果：

命题 2.3 (参见 [3, 推论 3.2。2])。设 $n \in \mathbb{N}$。那么，对于互素整数 x、y，$n = x^2 + y^2$ 当且仅当 n 的素数分解为 $n = 2^\delta \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$，其中 $\delta \in \{0, 1\}$ 且 p_1，…，$p_k \in S_1$。

这一结果立即推出

推论 2.4。定义 $P_{S_1} = \{p \in \mathcal{P} \mid p = x^2 + y^2 + 1, x, y \in \mathbb{Z}, \gcd(x, y) = 1\}$。所有素数 $p \in P_{S_1}$ 都满足 $(p-1)_{S_1} \geq (p-1)/2$。

已知命题 2.3 在某些情况下可以推广到二次型 $f(x, y) = x^2 + ny^2$，其中 $n \in \mathbb{N}$ [2]。若对于 $x, y \in \mathbb{Z}$，$m = x^2 + ny^2$ 且 $\gcd(x, y) = 1$，则 $\gcd(m, y) = 1$。因此，y 是模 m 的单位，且

$-n$是模 m 以及模 m 的每个素因子的二次剩余。 m 的可能素因子中，不整除 n 的只有满足相应勒让德符号 $\left(\frac{-n}{p}\right)$ 等于 1 的素数 p 。此条件迫使可能的素因子落在某些等差数列中。我们将给出 $\overline{n}=2$ 和 $n=3$ 的结果。

命题 2.5。设 $n\in\mathbb{N}$ 和 $S_2=\{p\in\mathcal{P}\mid p\equiv 1$ 模 8 或 $p\equiv 3$模 $8\}$。若对于互素的 x、$y\in\mathbb{Z}$有 $n=x^2+2y^2$，则 $n=2^\delta\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$，其中 $\delta\in\{0,1\}$和p_1，……，$p_k\in S_2$。

证明。首先注意，对于任意偶整数 $n=x^2+2y^2$，若 $\gcd(x,y)=1$，则 x 必须是偶整数。因此， n 模 4 的余数为 2，只能被 2 整除而不能被 4 整除。对于奇素数，该结果由费马的一个古老定理给出[2,p。 7]: n的奇素因数 p必须满足条件

$$1=\left(\tfrac{-2}{p}\right)=\left(\tfrac{-1}{p}\right)\left(\tfrac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

这意味着（很容易验证）， n 的所有奇素因数都属于 S_2。 □

推论 2.6. 定义 $P_{S_2}=\{p\in\mathcal{P}\mid p=x^2+2y^2+1,\ x,y\in\mathbb{Z},\gcd(x,y)=1\}$。所有素数 $p\in P_{S_2}$ 都满足 $(p-1)_{S_2}\geq(p-1)/2$。

命题 2.7. 设 $n\in\mathbb{N}$ 和 $S_3=\{p\in\mathcal{P}\mid p\equiv 1$ 模 $3\}$。若 $n=x^2+3y^2$对于互素的 x、$y\in\mathbb{Z}$成立，则 $n=2^{\delta_1}3^{\delta_2}\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$，其中 $\delta_1\in\{0,1,2\}$、$\delta_2\in\{0,1\}$、p_1、……、$p_k\in S_3$。

证明。首先注意，对于任意偶整数 $n=x^2+3y^2$，其中 $\gcd(x,\ y)=1$，x 和 y 都是奇整数。由于所有奇数的平方模 8 都余 1，n 不能被 8 整除。关于因子 3^{δ_2}，分两种情况。首先，如果y 能被 3 整除，那么 x 不能被 3 整除，且 $\delta_2=0$。其次，如果 x 能被 3 整除，那么 y 不能被 3 整除，因此 $\delta_2=1$。对于奇素数，结论同样由费马的一个古老定理给出 [2, p。 7]: 根据二次互反律，奇素因数$p\neq 3$ 必须满足以下条件:

$$1=\left(\tfrac{-3}{p}\right)=\left(\tfrac{-1}{p}\right)\left(\tfrac{3}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\tfrac{3}{p}\right)=\left(\tfrac{p}{3}\right).$$

由于 1 是素数 $p\neq 3$ 模 3 的唯一二次剩余， n 的奇素因数只能是 S_3 中的素数。□

与之前一样，我们推得

推论 2.8. 定义 $P_{S_3}=\{p\in\mathcal{P}\mid p=x^2+3y^2+1,\ x,y\in\mathbb{Z},\gcd(x,y)=1\}$. 所有素数 $p\in P_{S_3}$ 都满足 $(p-1)_{S_3}\geq(p-1)/12$。

接下来，我们需要一些二次型理论中的结果。

定义 2.9（见 [2]）。若存在 $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ 使得 $ad-bc=1$ 且，则称两个二元二次型 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$（真）等价

$$f(x,y)=g(ax+by,cx+dy)\text{ for all }x,y\in\mathbb{Z}.$$

二次型 $f(x,y)$ 的属是所有在 $(\mathbb{Z}/|\Delta_f|\mathbb{Z})^*$ 中表示相同数值的二元二次型的集合。记作 R_f。

两个二元二次型的等价关系是一种等价关系 [2]。等价类中的所有型表示相同的自然数集合。然而，对于二次型的属，这一点并不成立。同属的两个型不一定等价。

例 2.10. 考虑 $f_n(x,\ y)=x^2+ny^2$ 对于 $n\in\mathbb{N}$。

(1) 对于 $n=1$，2、3，形式 f_n 的属只包含一个等价类。事实上，判别式为 -4，-8，-12 的本原正定形式只有一个等价类（见 [2, 第 I 章，定理 2.18]）。
(2) 对于 $n=14$，形式 x^2+14y^2 和 $2x^2+7y^2$ 属于同一个属。然而，$71=2\cdot 2^2+7\cdot 3^2$ 不能由 x^2+14y^2 表示，这意味着这两个二次型并不等价 [2, 第 I 章 §2.C]。

3. Proof of Theorem 1.1

对于二元二次型 f，令 P_f 为形如以下形式的素数集合

$$p=g(x,y)+1,$$

其中 $g\in R_f$和互素整数 x，$y\in\mathbb{Z}$。对于 $N\in\mathbb{R}_+$，令 $\pi(N;f)$ 表示满足 $p\leq N$的素数 $p\in P_f$ 的数量。注意，对于二次型$f_1=x^2+y^2$、$f_2=x^2+2y^2$、$f_3=x^2+3y^2$，其属恰好由一个等价类构成，因此上面定义的集合 P_{S_n} 恰好是 $n\in\{1,2,3\}$的 P_{f_n}。

我们的主要工具是 Iwaniec 的以下定理：

定理 3.1 (Iwaniec 1972；[4, 定理 1])。设 $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ 是满足以下性质的二元二次型：$a>0$，$\gcd(a,b,c)=1$，且 Δ_f不是完全平方数。那么存在一个正实常数 c_1，使得

$$c_1\frac{N}{\ln(N)^{3/2}}(1+o(1))+O\left(\frac{N}{\ln(N)^5}\right)<\pi(N;f).$$

事实上，[4, 定理 1] 更加一般，研究形如$Bg(x,y)+A$的素数；这里我们只需要 $A=1$ 和 $B=1$。常数 c_1 在 [4] 中由 $c_1=\theta\Psi_{A,B,D}\Omega_{A,B,D}$ 明确给出，并且展开定义后可以验证，这个乘积中的所有项均为正。

对我们而言，以下推论很重要，它比 Iwaniec 的结果弱。

推论 3.2. 在定理 *3.1* 的条件下，对所有 $\varepsilon>0$，和 $\sum_{p\in P_f}\frac{1}{p^{1-\varepsilon}}$ 发散。 ___

证明。由于在其他情况下该断言成立，我们可以将分析限制在 $\varepsilon<1$的情形。固定某个 $\delta\in(0,1)$。对于所有充分大的 N，我们可以将 Iwaniec 定理中的 $(1+o(1))$ 项替换为 δ。由定理 3.1 可知，存在 $N_0\in\mathbb{R}$，使得对所有 $N\geq N_0$

$$\begin{aligned}\sum_{p\in P_f,p\leq N}\frac{1}{p^{1-\varepsilon}}&\geq\frac{\pi(N;f)}{N^{1-\varepsilon}}\\&\geq\delta c_1\frac{N^\varepsilon}{\ln(N)^{3/2}}+O\left(\frac{N^\varepsilon}{\ln(N)^5}\right);\end{aligned}$$

在第一个不等式中，我们只需将和式中的每一项从下方界定为 $N^{\varepsilon-1}$。令 N 趋于无穷，即可得到结论。□

最后，我们令 P_f 专门取为 P_{S_1}，P_{S_2} 和 P_{S_3}，即可证明主要结果。

^定理 *1.1* 的证明。令 S 为任意素数集。自由原循环群 $\mathbb{Z}=\prod_{p\in\mathcal{P}}\mathbb{Z}_p$ 的 Weil 收敛横坐标为 2；见 [1, 定理 C (i)]。因此，不等式

$$\alpha(H_S)\leq 2$$

^由 H_S 是 $\mathbb{Z}$的商群立即得出。

接下来只需证明下界。令 $n \in \{1,2,3\}$，并设 $S = S_n$。我们给出其发散下界

$$\ln\big(\zeta^{W}_{H_S}(2-\varepsilon)\big) = \sum_{p\in\mathcal{P}} \sum_{j=1}^{\infty} |\operatorname{Hom}(H_S, \mathbb{F}_{p^j})| \frac{p^{-j(2-\varepsilon)}}{j}$$

对所有 $\varepsilon > 0$。回顾一下，$|$同态集$(H_S, \mathbb{F}_{p^j})| = (p^j - 1)_S$。忽略$j > 1$对应的各项，我们看到，$\ln\big(\zeta^{W}_{H_S}(2-\varepsilon)\big)$的下界函数为 $\sum_{p\in\mathcal{P}} (p-1)_S \cdot p^{-2+\varepsilon}$。对于三种情形中的每一种，集合 $P_S \subset \mathcal{P}$都满足：存在常数c，使得对所有 $p \in P_S$，$(p-1)_S \geq (p-1)/c$（见推论 2.4、2.6、2.8）。于是渐近地有

$$\sum_{p\in\mathcal{P}} (p-1)_S \cdot p^{-2+\varepsilon} \geq \sum_{p\in P_S} \frac{p-1}{c p^{2-\varepsilon}} \gg \sum_{p\in P_S} \frac{1}{p^{1-\varepsilon}},$$

右侧的和由推论 3.2 发散。综上，对于$i = 1,2,3$，我们有 $\alpha(H_{S_i}) \geq 2$。因此，定理 1.1 得证。□

References

[1] Ged Corob Cook、Steffen Kionke 和 Matteo Vannacci。《有限域上群表示的 Weil ζ函数》。*Selecta Mathematica*，30(3):46，2024。[2] David A. Cox。*Primes of the form $x^2 + ny^2$—Fermat class field theory and complex multiplication*。AMS Chelsea Publishing，普罗维登斯（罗得岛州），第三版，2022。Roger Lipsett 参与撰写。[3] Benjamin Fine 和 Gerhard Rosenberger。*Number Theory: An Introduction via the Density of Primes*。Springer International Publishing，Cham，2016。[4] Henryk Iwaniec。形如 $\phi(x, y) + a$的素数，其中 ϕ是一个二次型。*Acta Arithmetica*，21 1 203( ): –234，1972。[5] Steffen Kionke。关于原循环群的魏尔表示 ζ 函数的收敛横坐标。*Forum Mathematicum*，38(3):719–726，2026。[6] Arnold Walfisz。《加法数论》。II。*Mathematische Zeitschrift* 40 1 592 607, , ( ): –。1936

FernUniversität in Hagen, Fakultät für Mathematik und Informatik, 58084 Hagen,Germany*Email address*: steffen.kionke@fernuni-hagen.de