arXiv:2602.09811v1 [math.CO] 10 Feb 2026

连通度为 < 5 的所有顶点传递有限图的刻画

JANKURKOFKA 和 TIM PLANKEN†

摘要。我们将所有顶点传递有限连通图刻画为本质 5-连通，或属于一份简短的明确图类清单。我们的证明大量运用了 Tutte 型典范分解。

2020年 数学主题分类。05C40, 05C75, 05C83, 05E18。关键词和短语。刻画，顶点传递图，低连通度，4-连通，Tutte 分解。由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）资助 – 566118291；546892829。

† 由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）资助 – 546892829。

1. 引言

我们旨在解决低连通度图的以下问题：

问题 1.1。明确刻画顶点传递有限图。

Droms、Servatius 和 Servatius [10] 解决了连通度为 < 3的图的 问题 1.1。两年前，Carmesin 和 Kurkofka [5, 6] 将他们的刻画扩展到了连通度 3，如下所述。若对任意两个有序对 (u_i, v_i)，只要 $u_iv_i \in E(G)$ 对 $i = 1$ 成立，就存在图 G 的一个自同构 φ，使得 $\varphi(u_1) = u_2$ 且 $\varphi(v_1) = v_2$，则通常称图 G 为弧传递图。Grohe [20] 将图 G 定义为拟4-连通图，若它是 3-连通的，且其每个 3-分离 (A, B) 都满足 $|A \setminus B| = 1$ 或 $|B \setminus A| = 1$。设 H 为一个 r-顶点图，G 为一个r-正则图。我们将 H定义为由 G 通过以下方式得到的图：将 G 的顶点 v 替换为 H 的两两不交副本 H_v，并将 G 的每条边 $e = uv$ 替换为一条 H_u–H_v 边 $\hat{}e$，使得任意两条 $e_1 \neq e_2 \in E(G)$对应的边 $\hat{}e_1$ 和 $\hat{}e_2$ 没有公共端点。因此，这些边 $\hat{}e$构成了 H-扩张的完美匹配。

定理 1.2。 [5,推论 2][1] 有限连通图 G 是顶点传递的，当且仅当 G 属于以下情况之一

- 拟*4*-连通且顶点传递，
- 拟*4*-连通、*3*-正则的弧传递图的 K_3-扩张，
- 一个圈，K_2 或 K_1。

定理 1.2 为深入认识顶点传递的拟4-连通性留下了开放空间。回顾一下，Tutte 找到了一种明确的方法，可将每个 2-连通图 G 沿着 2-分离集唯一地分解成更小的部分，这些部分要么是 3-连通图、圈，要么是 K_2。各部分如何组合在一起构成 G，则由 G的唯一树分解来刻画，即*Tutte* 分解之 G。我们可以将 Tutte 分解视为块割树在 2-连通图上的精细推广。块割树和 Tutte 分解都兼具两种难得的性质，使它们成为解决问题 1.1的理想工具：这两种分解都是明确的，而且是典范的，因为它们在所分解图的所有自同构作用下均保持不变。

这种方法仅适用于连通度 < 3，自 20 世纪 60 年代 Tutte 找到他的分解以来，一直如此；直到两年前，Carmesin 和 Kurkofka [5, 6] 找到了一个适用于 3-连通性的 Tutte 型典范分解，并用它证明了 定理 1.2。然而，他们的 三分解 无法对拟 4-连通图作进一步分解。事实上，新的困难随之出现，阻碍了所有将三分解扩展至拟 4-连通性的简单尝试；参见 [25]的引言。由于当时尚不清楚是否存在适用于拟 4-连通性的 Tutte 型典范分解，如何将 定理 1.2 扩展到更高的连通度仍是一个悬而未决的问题。

就在最近，我们找到了4-连通图的一种 Tutte 型规范分解，即四分解 [25]。四分解使我们能够着手处理问题 1.1中关于4-连通图的情形。然而，如果 G 是准4-连通图，则 G 可能含有度为 3 的顶点，因而 G 可能落在四分解的适用范围之外。一种既定的处理

[1]我们略微加强 然后 [5, 推论 2] 在本文中，以得到 定理 1.2。使用 H-扩张是新的 .

图中度为 3 的顶点、同时保持其非平凡连通度结构的方法，是依次应用 Y–Δ 变换。在 [25], 中，我们引入了一种典范的 Y–Δ 变换 $G \mapsto G^{\Delta}$，它把每个准4-连通图 G 变成4-连通图 G^{Δ} （除非 G 有 $\leqslant 6$个顶点）。这使我们能够把四分解从4-连通性间接推广到拟 4-连通性：从准4-连通图 G 出发，先应用典范的 Y–Δ运算，使 G 成为4-连通图 G^{Δ}，再对 G^{Δ}应用四分解。由于 G 与 G^{Δ} 相似，实践中我们可以用 G^{Δ} 的四分解来研究 G。这里，我们仅对3-正则 G考虑 G^{Δ} ，此时 G^{Δ} 默认为 G的线图。

本文采用上述方法解决问题 1.1针对并非 2-拟 5-连通的拟4-连通图，详见定理 1。这里，图 G 是*2*-拟 *5*-连通的，如果 G 是拟4-连通的，且每个 4-分离$(A,\ B)$ 都满足 G 或 $|A \smallsetminus B| \leqslant 2$。$|B \smallsetminus A| \leqslant 2$。或许出人意料的是，这一刻画中出现了许多新颖而丰富的图类。我们的证明也体现了这一点：仔细考察分解后，很快便可得到定理 1.2 ，而定理 1的证明则面临了大量全新的挑战，并构成了本文其余部分的内容。

为陈述定理 1，我们需要引入图分解的概念。图分解是树分解的推广，其分解树可以是任意图，例如一个圈；在这种情况下，我们称之为圈分解 [9]。若图 X 是一个由圈 X_1-躯干、.....、X_k-躯干、Y_1-袋、.....、 Y_ℓ-袋组成的，其中 X_i 和 Y_j 均为图，且 X 是拟4-连通图，并具有一种圈分解，其所有粘合集的大小均为 2，且每个袋要么其躯干同构于某个 X_i ，要么袋本身同构于某个 Y_j。关于圈分解的更多定义，参见定义2.3 或定理 1中引用的图示。

定理 1. 拟*4*-连通有限图 G 是顶点传递的当且仅当 G 要么是

(i) 一个 *(*$\geqslant 4$*)*-正则拟 *5*-连通顶点传递图；*(ii)* 一个 *3*-正则 *2*-拟 *5*-连通顶点传递图；*(iii)* 一个拟 *5*-连通 *4*-正则弧传递图的 K_4-扩展，或一个拟 *5*-连通 *4*-正则弧传递图的顶点传递C_4-扩展；*(iv)* 一个由 K_4-袋组成、长度为 $\geqslant 4$ 的圈（图 *1.1*）；*(v)* 一个由 K_4-袋与 C_4-袋交替组成、长度为 $\geqslant 4$ 的圈（图 *1.2*）；*(vi)* 一个由三角形袋组成、长度为 $\geqslant 6$ 的圈（图 *1.4*）；*(vii)* 一个由 K_2,*2*-袋与 C_4-胚交替组成、长度为 $\geqslant 6$ 的圈（图 *1.3*）；*(viii)* 一个由 C_4-袋组成、长度为 $\geqslant 4$ 的圈，或 $K_3 \square K_2$（图 *1.5*）；*(ix)* 一个由 K_2,*2*-袋组成、长度为 $\geqslant 3$ 的圈，其 K_4-扩展，或其顶点传递 C_4-扩展（图 *1.6*）；或 *(x)* 立方体的线图、它的 K_4-扩展，或图 *1.7* 所示的它的三种 C_4-扩展之一。

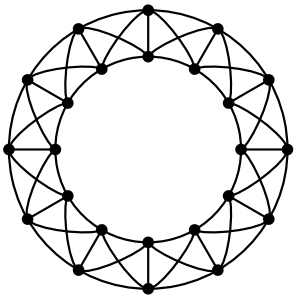


图 1.1. 由 K_4-袋组成的圈

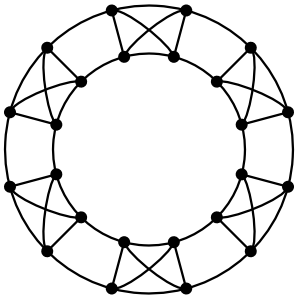


图 1.2. 在 K_4-袋与 C_4-袋之间交替的圈

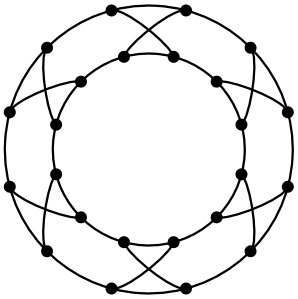


图 1.3. 在 $K_{2,\ 2}$-袋与 C_4-躯干之间交替的圈

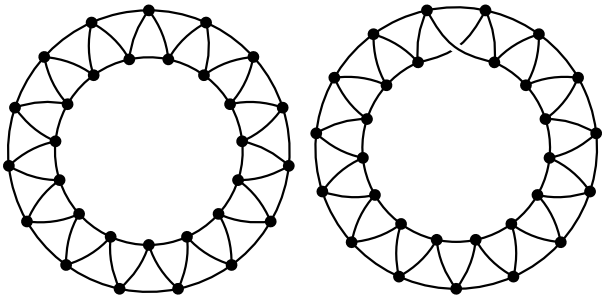


图 1.4. 三角形袋组成的圈

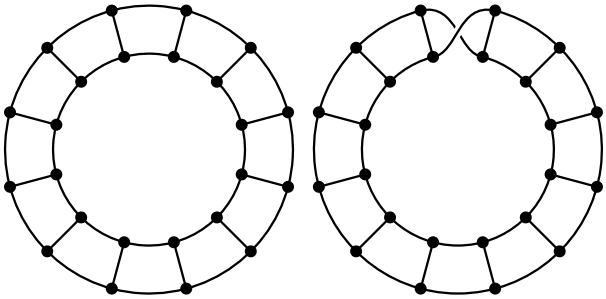


图 1.5. C_4 袋的圈

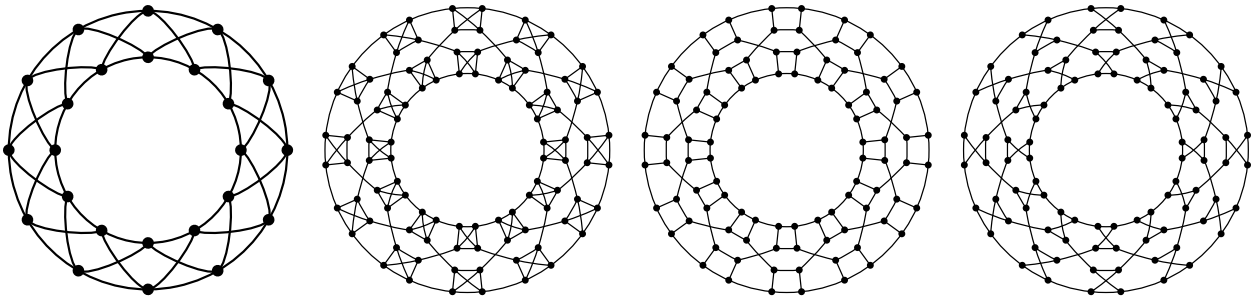


图 1.6. $K_{2,\ 2}$ 袋构成的圈、其 K_4 扩展，以及两个顶点传递的 C_4 扩展 s

定理 1 和 定理 1.2 在实际应用中应结合起来，以刻画所有非 2-拟 5-连通的顶点传递有限连通图。结果表明，K_3-扩展定理 1.2中提到的扩展，对于定理 1的所有 3-正则结果均可排除，但有两个例外：

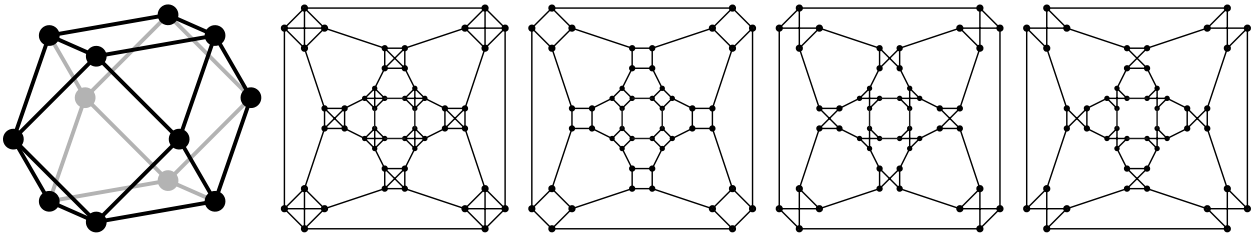


图1.7。 立方体的线图、其 K_4-扩张，以及其顶点传递的 C_4-扩张 s

推论 2。 连通有限图 G 是顶点传递的，当且仅当它属于以下情况之一：

- 定理 *1 (i)*中的一个图–(x) *(*所有结果均可能*)*，
- 一个 *3*-正则 *2*-拟 *5*-连通弧传递图的 K_3-扩张，
- 立方体的 K_3-扩张，
- 一个圈、 K_2 或 K_1。

更多相关研究。高对称性与平面性的结合已受到相当多的关注，例如参见 [13, 15, 16, 22]。群表示已从凯莱图推广到其他情形，以涵盖顶点传递图 [17]。为了将 Bass-Serre 理论推广到拟传递图，该领域的一些开创性结果已得到推广，例如参见 [21, 24]。该领域近期的一个趋势是从粗图论的视角研究拟传递图，例如参见 [1, 2, 3, 7, 11, 18, 12, 23]一般拓扑学意义上的图覆盖，提供了一类性质尤为良好的拟传递图。目前，图覆盖正被用于图小理论，通过无限覆盖研究有限图中的局部现象，例如参见 [4, 9, 14]。

本文结构。在第 2 节中，我们证明了适用于定理 1的一个针对 4-连通图的版本，即命题 2.29。在第 3 节中，我们证明了适用于定理 1的一个针对 3-正则准4-连通图的版本，即命题 3.20，并将其与命题 2.29 结合起来证明定理 1。在第 4 节中，我们推导出推论 2。为求完整起见，我们在第 5 节 中简要地从定理 1.2 推导出 [6,推论。 2]。

术语。关于图论术语，我们遵循 [8]。我们假定读者熟悉 [25, §2] 中的术语。有时我们会使用 [25] 中的结果，这些结果可能依赖于 [25]，中的其他术语，但不多。

2. 分析 4-连通性

本节中，我们证明定理 1。回顾一下， H-正则图 G 的 $|V(H)|$扩张，是通过将 G 的顶点 v 替换为 H 的两两不交副本 H_v，并将 G 的每条边 $e = uv$ 替换为一条 H_u–H_v 边 $\hat{}e$ 得到的图，其中任意两条边 $\hat{}e_1$ 和 $\hat{}e_2$ 均不共享端点（对每一对 $e_1 \neq e_2 \in E(G)$）。因此，边 $\hat{}e$ 构成该 H-扩张的一个完美匹配。注意，若 H 是完全图，则 G 的 H-扩张在同构意义下唯一。图 G 的团扩张是由 G 得到的图 G'：将每个顶点 $v \in V$（G）替换为一个团 C_v

其大小等于 v 的度，并将每条边 $e = uv$ 替换为一条 C_u–C_v 边 $\hat{e}$，使这些边 $\hat{e}$ 在 G' 中构成一个完美匹配。

回忆一下，若对于任意两个由边 u_1v_1、$u_2v_2 \in E(G)$ 构成的顶点有序对 (u_1, v_1)、(u_2, v_2)，都存在 G 的一个自同构 φ，使得 $(\varphi(u_1)\ \varphi(v_1)) = (u_2, v_2)$，则称图 G 是弧传递的。

定理 2.1。 [19,定理 3.4。2] 每个有限顶点传递 d-正则图都是 k-连通的，满足$k := \lceil \frac{2}{3}(d+1) \rceil$。

推论 2.2。 每个有限 d-正则图，只要满足 $d \geqslant 4$，就是 4-连通的。 □

图 G 是本质 5-连通的，如果 G 是 4-连通的，且每个四面体分离$(A_1,\ A_2)$ 中 G其分离集仅含边，并且至少有一侧 A_i 满足 $G[A_i] = K_4$。

定义2.3。 设 G 是一个具有圈分解$\mathcal{O} = (O, (G_t)_{t \in V(O)})$的图。令 ℓ 表示圈 O的长度。我们称 G 为

· 长度为 K_4袋的圈 ℓ，若$\mathcal{O}$ 的所有袋都是 K_4，且$\mathcal{O}$ 的所有粘合集两两不相交（图 1.1）；

· 在 K_4袋与 C_4袋之间交替、长度为 ℓ 的圈 O，若沿 K_4的袋交替为和 4-圈，且$\mathcal{O}$ 的所有粘合集两两不相交（图 1.2）；
· 长度为 ℓ 的三角形块的环，若所有袋都是三角形，且 O 上任意两条不连续的边所对应的粘合集互不相交（图1.4）；
· 在$K_{2,\ 2}$ 袋与 C_4躯干之间交替、长度为 ℓ 的圈 O，若沿 K_4交替为 C_4，且$\mathcal{O}$ 的每个粘合集都是独立集，且$\mathcal{O}$ 的所有粘合集两两不相交（因此 K_4躯干含有$K_{2,\ 2}$袋）（图 1.3）；

· 圈，由 C_4-包构成，长度为 ℓ，若 $\mathcal{O}$ 的所有包均为 C_4，且 $\mathcal{O}$ 的所有粘合集导出互不相交的 K_2（图 1.5）；
· 圈，由 $K_{2,\ 2}$-包构成，长度为 ℓ，若 $\mathcal{O}$ 的所有包均为 $K_{2,\ 2}$，$\mathcal{O}$ 的所有胚均为 K_4，且 $\mathcal{O}$ 的所有粘合集互不相交（图 1.6）。

观察 2.4.
· 每个由 K_4-包构成且长度为 ℓ 的圈都同构于 $K_2 \boxtimes C_\ell$。
· 每个由 K_4-包构成且长度为 3 的圈都同构于 K_6。
· 每个由 $K_{2,\ 2}$-包构成且长度为 3 的圈都同构于八面体。
· 每个长度为 4 的 $K_{2,2}$ 袋的圈都与 $K_{4,4}$ 同构。
· 每个在 K_4 袋和 C_4 袋之间交替、长度为 $\ell \in \{4,6\}$ 的圈都是本质 5-连通的。
· 每个长度为 ℓ 的三角形袋的圈都与 C_ℓ^2 同构（该图由 ℓ-圈 C_ℓ 得到：将每个顶点 v 与 C_ℓ 上距离不超过 2 的所有顶点相连）。
· 每个长度为 5 的三角形袋的圈都与 K_5 同构。 □

引理 2.5. 设 G 是一个顶点传递的 4-连通有限图，且 (A_1, A_2) 是 G 中一个完全嵌套的四面体分离。那么 $S(A_1, A_2)$ 由四条边组成，而 (A_1, A_2) 有一侧 A_i 满足 $G[A_i] = K_4$。

证明。 设 M 是 (A_1, A_2) 和 (A_2, A_1) 在 $\mathrm{Aut}(G)$ 下的轨道之并。设 (C, D) 是 M 中 $\leqslant$-极小的；也就是说，对于每个 $(C', D') \in M$，都有 $(C', D') \not< (C, D)$。

我们断言， $S(C, D)$ 中不含顶点。反设 $u \in S(C, D)$ 是一个顶点。于是，取 v 为 $C \setminus D$ 中任意一个顶点，并取 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$，使得 $\varphi(u) = v$。那么，$(\varphi(C)\ \varphi(D)) < (C, D)$ 或 $(\varphi(D)\ \varphi(C)) < (C, D)$，这与 (C, D) 的 $\leqslant$-极小性矛盾。因此，$S(C, D)$ 由四条边组成。

我们断言， C 中的每个顶点都与 $S(C, D)$ 中的一条边关联。反设 $v \in C$ 并非如此。取 $u \in C \setminus D$ 为 $S(C, D)$ 中四条边之一的一个端点，并取 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$，使得 $\varphi(u) = v$。那么，$(\varphi(C)\ \varphi(D)) < (C, D)$ 或 $(\varphi(D)\ \varphi(C)) < (C, D)$，这与 (C, D) 的$\leqslant$-极小性矛盾。

最后，由于 G 是4-连通的，每个顶点的度都是 $\geqslant 4$，因此 $G[C]$ 是一个 K_4。四面体分离（A_1, A_2）具有与（C, D）相同的上述性质，因为（C, D）$\in M$。□

推论 2.6。 设 G 是一个顶点传递的*4*-连通有限图，且每个四面体分离都完全嵌套。那么 G 是本质*5*- 连通的。□

引理 2.7。 设 G 是一个顶点传递的*4*-连通有限图，它有两个四面体分离(A, B)、(C, D)，二者相交且所有连接均为空。那么$G = K_{4,\ 4}$，它是一个由$K_{2,\ 2}$-袋构成的长度为*4*的圈。

证明。 设 Z 为交叉图的中心；根据交叉引理，该图由四个顶点组成 [25, 4。1]。注意， $G - Z$ 至少有四个连通分支。

我们断言， $G - Z$ 的每个连通分支都只有一个顶点。反设不然，设K是 $G - Z$的一个含有 $\geqslant 2$个顶点的连通分支。令 $(U'_K, W'_K) := (V(K) \cup Z, V(G - K))$，并令 (U_K, W_K) 为 (U'_K, W'_K) 的左右约简。由 [25,引理 7.2],，(U_K, W_K) 是完全嵌套的。由引理 2.5， $S(U_K, W_K)$ 由四条边组成，且 $G[U_K] = K_4$或 $G[W_K] = K_4$。由于 $G[W_K]$ 包含来自 $G - Z$ 中不同连通分支的两个顶点，且它们之间没有边，因此必有 $G[U_K] = K_4$。由 [25,引理 7.1],，我们有 $U_K = V(K)$ 和 $W_K = V(G - K)$。特别地， G 是 4-正则的，且 U_K 的每个顶点都属于一个 K_4。由顶点传递性， G的每个顶点也如此。因此， Z中存在一条边，连接两个顶点 z_1 和 z_2 。但这样一来， z_1和 z_2 的度均为 5，这与 G的 4-正则性矛盾。因此， $G - Z$ 的每个连通分支都只有一个顶点。

由于 G 的 4-连通性， $G - Z$ 的每个 $\geqslant 4$ 顶点的邻域都等于 Z。因此，根据顶点传递性，G 是 4-正则的。特别地， $G - Z$ 恰好有四个顶点，且 $G[Z]$ 是独立的。因此，$G = K_{4,\ 4}$。□

引理 2.8。 设 G 是一个具有两个四面体分离（A、B）、（C、D）的顶点传递 *4*-连通有限图，并且这两个四面体分离与所有大小为一的连接相交。令 *O* 为由（A、B）和（C、D）诱导的块-袋圈。则 *O* 的每个袋都是坏的。

证明。 反设$\mathcal{O} =: (O, \mathcal{G})$ 有一个良好袋 G_t。那么我们得到块百吉饼袋设置 [25, 8。14] 其中 $t = t(0)$，以下均假设这一点。根据 [25, 关键引理 827],(U, W) 是 G的一个全嵌套四分离。根据引理 2.5，分离集 $S(U, W)$ 由

四条边组成，并且要么是 $G[U] = K_4$，要么是 $G[W] = K_4$。由顶点传递性可知， G 是4-正则，且每个顶点周围的邻域在 G中诱导出 $K_1 \sqcup K_3$ 。

根据有用引理 [25, 8。6]， O 至少有四条有益边或顶点。根据4-正则性， O恰有四条有益边或节点。对于每条有益边，我们将其粘合顶点标为红色。对于每个有益节点 t， G_t 中恰有一个内部顶点与 z_1'相邻（由4-正则性可知），我们将该顶点标为红色。于是恰有四个顶点被标为红色。根据上述结果，这些红色顶点在 $K_1 \sqcup K_3$ 中诱导出一个 $G - Z'$，其中 Z' 是交叉图的中心。 K_3 中的红色顶点都不可能是某个袋的内部顶点，因此它们全都是粘合顶点。但这样一来， O 就必须是一个三角形，这与 O 有四条有益边或节点相矛盾。□

引理 2.9. 设 G 是一个顶点传递的 *4*-连通有限图，它有两个四面体分离$(A, B),(C, D)$，二者相交，且所有连接的大小均为 *1*。设 *O* 为由(A, B) 和(C, D)诱导的块-袋圈。那么 *O* 的每个袋都是一个 K_2。

证明。 记 $\mathcal{O} =: (O,(G_t)_{t\in V(O)})$，并设 u, v为中心中的两个顶点。由 引理 2.8可知， $\mathcal{O}$ 的每个袋都是坏的。特别地， $\mathcal{O}$ 的每个袋都是 K_2 或三角形。反设 $\mathcal{O}$ 有一个袋是三角形。由于 $\mathcal{O}$ 的每个袋都是坏的，因此 $\mathcal{O}$ 的所有袋都是三角形。

令 G_t 为 O 的任意一个袋，并令 x 为 G_t 中不是粘合顶点的那个顶点。由 G 的 4-连通性可知， $xu, xv \in E(G)$，且 x 的度为 4。因此 G 是 4-正则的；又因 G_t 是任意的，故得到 $|O| \leqslant 4$。由于 O 的每个节点都是有用的，由有用引理 [25, 8 得到 $|O| \geqslant 4$ 。6], 因此 O 的长度为 4。于是 u, v 各有四个邻点，每个袋的内部各有一个邻点，因此由 4-正则性可知，边 uv 不可能存在于 G 中。因此， u 不包含在三角形中。但所有袋都是三角形，这与顶点传递性矛盾。□

引理 2.10. 设 G 是一个顶点传递的 *4*-连通有限图，它有两个四面体分离(A, B)、(C, D)，且二者交叉，所有连接的大小均为 *1*。则 G 是一个由长度为 *3* 的 $K_{2,\ 2}$-袋组成的圈。

证明. 根据引理 2.9，由 (A, B) 和 (C, D) 诱导的块-袋圈 O $= (O,$ G) 中的每个袋都是一个 K_2。因此， O 的每条边都是有用的，所以根据有用引理 $|O| \geqslant 4$ [25, 8.6]。由于 G 中包含在 $\bigcup_{t\in V(O)}$ G_t 中的每个顶点在 G 中的度为 $\leqslant 4$，图 G 是 4-正则的。设 u、 v 是中心中的顶点。由 [25, 引理 8.7] 可知 $|O| = 4$ 和 $uv \notin E(G)$。于是 G 是一个八面体。□

引理 2.11。 设 G 是一个顶点传递的 *4*-连通有限图，它有两个四面体分离(A, B)、(C, D)，二者交叉且所有连接的大小均为二。设 *O* 是由(A, B)和(C, D)诱导的 *Tutte* 袋。设 H_t 是 *O* 的一个良好躯干。那么，袋 G_t 是一个 K_4，其两个相邻躯干都是 *4*-圈。

证明。我们可以假设 Tutte-袋圈躯干设定 [25, 9。13] 其中 $t = t(0)$。由 [25, 关键引理 9。41], (U, W) 是一个全嵌套四分离。由 引理 2.5， $S(U, W)$ 由四条边组成，并且我们要么有 $G[U] = K_4$，要么有 $G[W] = K_4$。

我们断言 $G[U] = K_4$。假设不然，则 $G[W] = K_4$。于是 $G[W] = G_s$对某个袋$G_s \neq G_t$。因此 O 的长度为 $\leqslant 4$，有两个 3-连通袋（即 G_s，G_t），并且所有其他包都以三角形或 4-圈作为胚，这由 [25, 引理 9l4]可得。但这样一来，$\alpha(\mathcal{O}) < 4$ 与 [25, 引理 951]矛盾。

因此 $G[U] = K_4$。接下来，我们断言 $S(U,W)$ 不含向内边。反设 $x_1 \in S(U,W)$ 是一条向内边，其端点 u 位于 G_t 的内部。根据 [25,引理 9.33], ，某个 y_i'（不妨设为 y_1'）是 x_1' 和 $y_1^W = y_1'$ 的邻点。特别地，y_1 不可能是向外边。由于 $S(U,W)$ 由四条边组成，且 y_1 是其中之一，因此 y_1 必须是向内边。令 u 为 y_1 在 G_t 内部的端点。于是，根据 (U,W) 的匹配条件，$u \neq v$。令 w 为 x_1' 在 G 中但不在 G_t 中的一个邻点。则顶点集 $\{u,v,w\}$ 在 G 中是独立的，且其元素全都是 x_1' 的邻点。由于 $G[U] = K_4$ 和 $S(U,W)$ 由四条边组成，G 是 4-正则的，并且根据顶点传递性，每个顶点都属于一个 K_4。然而，$\{u,v,w\}$ 表明 x_1' 不属于任何 K_4，这就产生了矛盾。因此，$S(U,W)$ 不含向内边。

因此，$S(U,W)$中的所有边都是向外边。因此，$G_t = K_4$ 以及两个相邻躯干都是4-圈。□

引理 2.12。设 G 是一个顶点传递的*4*-连通有限图，它有两个四面体分离(A,B)、(C,D)，它们相交，且所有连接的大小均为二。设 O 是由(A,B)和(C,D)诱导的 *Tutte* 袋。若 O 的某个躯干是好的，则 G 是一个圈，在 K_4-袋和 C_4-袋之间交替，长度为 $\geqslant 8$。

证明。将 $O = (O,(G_t)_{t\in V(O)})$。将 $O = t(0)\ t(1)\ \dots t(m)\ t(0)$ 写作，指标取自 $\mathbb{Z}_{m+1}$。由引理 2.11，若某个躯干（例如 $H_{t(0)}$）是好的，则其袋是一个 K_4，且两个相邻躯干$H_{t(-1)}$ 和 $H_{t(1)}$ 是4-圈。接着，由 [25, 引理 9.4], ，躯干 $H_{t(-2)}$ 和 $H_{t(2)}$ 是3-连通的。因此，这两个躯干都是好的，因为它们分别与4-圈躯干相邻。由归纳可得，O 的长度为偶数，袋 $G_{t(i)}$ 在 i为偶数时是 K_4，而躯干 $H_{t(i)}$ 在 i为奇数时是4-圈。由 [25, 引理 9.51], ，有 $\geqslant 4$ 个袋是 K_4。由此可知，G 是一个圈，在 K_4-袋和 C_4-袋之间交替，长度为 $\geqslant 8$。□

引理 2.13. 设 O 是一个 *4*-连通图的 *Tutte* 袋。设 G_t 是 O 中一个含五个顶点的袋。设 π、π' 是 G_t 处的两个粘合集，且 v 是 G_t 的内部顶点。那么，袋 G_t 在 π 与 π' 之间包含一个完美匹配，并且 v 向 $\pi \cup \pi'$ 中的四个顶点都连有边。

证明。由于 G 是 4-连通的，v 向 $\pi \cup \pi'$ 中的四个顶点都连有边。由于躯干 H_t 与 $|H_t| = 5$ 是 3-连通的，因此它要么是一个 4-轮、一个 K_5^-，要么是一个 K_5。在每种情况下，H_t 都在 π 与 π' 之间包含一个完美匹配，并且匹配中的两条边也都存在于袋 G_t 中。□

引理 2.14. 设 G 是一个顶点传递的 *4*-连通有限图，它有两个交叉的四面体分离(A,B)、(C,D)，且所有连接的大小均为二。设 O 是由(A,B)和(C,D)所诱导的 *Tutte* 袋。假设 O 有一个含五个顶点的躯干。那么 G 是立方体的线图。

证明。记 $\mathcal{O} =: (O,\mathcal{G})$。由 引理 2.12，O 的所有袋都是坏的。设 H_t 是 O 的一个含五个顶点的躯干。由于唯一的内部顶点 x 在 H_t 中的度为 4，图 G 是 4-正则的。由于 H_t 是坏的，它与一个 3-连通躯干 H_s相邻。由于 H_s 也同样是坏的，它有 $\leqslant 5$ 个顶点。也就是说，H_s 的躯干要么是一个 K_4，要么恰好有五个顶点。

我们断言 H_s 恰好有五个顶点。否则 $H_s = K_4$。令 $\{u, v\}$ 表示躯干 H_t 与 H_s之间的粘合集。于是，根据 G的 4-正则性，有 $uv \notin E(G)$。令 $\{u', v'\}$ 表示 H_s处的另一个粘合集。由于 v 包含在 G的至少两个三角形中，我们必有 $u'v' \in E(G)$。顶点 v 恰好包含在两个三角形中：一个来自 H_s，另一个是 $vu'v'$。然而，顶点 v'包含在至少两个三角形中（即 $vu'v'$ 和 $uu'v'$），其中两个三角形交于边 $u'v'$。这与 G的顶点传递性矛盾。因此， H_s 恰好有五个顶点。

由归纳可知，$\mathcal{O}$ 的所有胚恰好有五个顶点。根据引理 2.13，每个袋都包含其两个粘合集之间的一个 2-匹配，并且该袋的内部顶点向袋中其余四个顶点都连有边。由 4-正则性，且由于每个袋都是这样，这些就是包中的全部边。

由于每个袋都有唯一的内部顶点，由所有这些顶点构成的集合 X 的大小为 $|O|$。由于所有胚都是 3-连通的，由 [25, 引理 9.51]可得 $|O| \geqslant 4$ 。若 $|O| \geqslant 5$，则 X 中的每个顶点恰好包含在 G的两个诱导 4-圈中，而粘合集中的每个顶点恰好包含在 G的一个诱导 4-圈中，这与顶点传递性矛盾。因此，我们有 $|O| = 4$。考虑图 $H := G - X$，它要么是一个 8-圈，要么是两个 4-圈的不交并。若 H是一个 8-圈，则 X 中的每个顶点包含在 G 的两个诱导 4-圈中，而V（$G - X$）中的每个顶点仅包含在 G的一个诱导 4-圈中，这与顶点传递性矛盾。因此H 是两个 4-圈的不交并，从而 G 是立方体的线图。□

引理 2.15. 设 G 是一个点传递 *4*-连通有限图，它有两个四面体分离(A, B)、(C, D)，它们交叉，且所有连接的大小均为二。设 O 是由 (A, B)与 (C, D)诱导的 *Tutte* 袋。假设 O 的每个袋都有 $\leqslant 4$ 个顶点。则 G 是下列图之一：

- 一个长度为 $\geqslant 8$、在 K_4-包与 C_4-包之间交替的圈；
- 一个长度为 $\geqslant 6$ 的三角形块的环；
- 一个长度为 $\geqslant 4$ 的 $K_{2,2}$-包的圈；
- 一个长度为 $\geqslant 4$ 的 K_4-包的圈。

证明。 如果 $\mathcal{O}$ 有一个良好躯干，则 G 是一个在 K_4-包与 C_4-包之间交替的圈，由引理 2.12可知，且其长度为 $\geqslant 8$ ，由 [25, 引理 9。51]。因此，我们可以假设$\mathcal{O}$ 的所有胚都是坏的。

我们断言，$\mathcal{O}$ 没有以 4-圈为躯干的情形。事实上，如果$\mathcal{O}$ 有一个 4-圈作为躯干，那么相邻躯干根据 [25, 引理 94], 是 3-连通的，并且它们是良好的，这就产生了矛盾。因此，

(1) $$\textit{all torsos are either triangles or } K_4\textit{'s.}$$

我们断言，如果 O 的某个躯干是三角形，那么它相邻的躯干也都是三角形。为此，设 H_t 和 H_s 是相邻躯干，且 H_t 是一个三角形。根据 (1)，躯干 H_s 要么是三角形，要么是一个 K_4。反设 $H_s = K_4$，则会导致矛盾。设 $\{u, v\}$ 是 H_t 与 H_s之间的粘合集，那么 v 就是三角形躯干 H_t的尖端。由于每个顶点的度为 $\geqslant 4$，边 uv 必定存在于 G中，且 G 必定是 4-正则的。设 w 是三角形 H_t 中除 u 和 v之外的顶点。设 G_r 是除 G_s之外与 G_t 相邻的袋。那么 v 在袋 G_r中恰有一个邻点。根据 (1)，躯干 H_r 只能是三角形或一个 K_4。由于 v 在袋 G_r中恰有一个邻点，躯干 H_r 不可能是一个 K_4，因此必定是三角形。但这样一来，边

vw 由 [25, 引理 94], 可知， v 在 G_r中有两个邻点，因此其在 G中的度为五，这与 4-正则性矛盾。因此，$\mathcal{O}$ 的每个三角形躯干都与两个三角形躯干相邻。

因此，如果 $\mathcal{O}$ 至少有一个三角形躯干，那么所有胚都是三角形，并且所有粘合集都由边张成，依据 [25, 引理 9.4]。因此， G 是一个三角形袋的环，其长度为 $\geqslant 6$，依据 [25, 引理 9.51] ，且因为 $G \neq K_5$。

因此，我们可以假设$\mathcal{O}$ 没有三角形躯干。接着由 (1)可知，$\mathcal{O}$ 的所有胚都是 K_4。接下来，要么所有粘合集都由 G中的边张成，此时 G 是一个由 K_4-袋组成的环；要么没有粘合集由边张成，此时 G 是一个由$K_{2,\,2}$-袋组成的环。这两种情况下，其长度均为 $\geqslant 4$ ，依据 [25,引理 9。51]。□

引理 2.16。 设 G 是一个顶点传递的 4-连通有限图，且有两个四面体分离(A, B)和(C, D)，它们相交，且所有连接的大小均为二。则 G 是以下情况之一：

- 一个由 K_4 袋与 C_4 袋交替构成、长度为 $\geqslant 8$ 的圈；
- 一个长度为 $\geqslant 6$ 的三角形袋的环；
- 一个由 $K_{2,2}$ 袋构成、长度为 $\geqslant 4$ 的圈；
- 一个由 K_4 袋构成、长度为 $\geqslant 4$ 的圈；
- 立方体的线图。

证明。 我们结合 引理 2.14和 2.15。 □

推论 2.17。 设 G 是一个顶点传递的 4-连通有限图，并且有两个相交的四面体分离(A, B)、(C, D)。那么 G 是以下之一：

- 一个由 K_4-袋与 C_4-袋交替组成、长度为 $\geqslant 8$ 的圈；
- 一个由三角形袋组成、长度为 $\geqslant 6$ 的圈；
- 一个由 $K_{2,\,2}$-袋组成、长度为 $\geqslant 3$ 的圈；
- 一个由 K_4-袋组成、长度为 $\geqslant 4$ 的圈；
- 立方体的线图。

证明。根据交叉引理 [25, 4.1], 所有连接的大小都相同，为 0、1 或 2。若所有连接的大小均为 0，则 G 是一个长度为 4、由 2 个袋组成的圈，见引理 2.7。若所有连接的大小均为 1，则 G是一个长度为 3、由 2 个袋组成的圈，见引理 2.10。否则，所有连接的大小均为 2，此时应用引理 2.16。□

观察 2.18。 设 G' 是图 G的团扩张。设 v 是 G中度为 d 的一个顶点，且设 C_v 是 G' 中对应于 v的团。那么， C_v 中的每个顶点在 G'中的度均为 d 。□

观察 2.19。 设 G 是一个最小度至少为 2 的图，且设 G' 是 G的团扩张。那么，存在 $V(G')$ 的唯一划分 P，其中各部分为 $|P| = |V(G)|$ 团的（顶点集）。此外，收缩子式 G'/P 与 G同构。□

观察 **关于 2.20**。 图 G 的团扩张与图 H 同构，h

$$V(H) = \{(u, v), (v, u) : uv \in E(G)\} \text{ and}$$
$$E(H) = \Big\{\{(u, v), (v, u)\} : uv \in E(G)\Big\} \cup \Big\{\{(u, v_1), (u, v_2)\} : uv_1, uv_2 \in E(G)\Big\}.$$

全体顶点传递有限图的刻画，其连通度为 < 5 1 1

□

引理 2.21。 设 G 是一个 r-正则图，满足 $r \geqslant 3$。则下列断言等价：(i) G 的 K_r-扩张是顶点传递的；

(ii) G是弧传递的。

证明。 设 G' 表示 K_r 的扩张 G。根据 观察 2.19， G' 有一个唯一的划分$\mathcal{P}$，将其顶点集划分为 r- 团的顶点集。设 γ： $\mathcal{P} \to V(G)$ 为相应的双射。由于 $\mathcal{P}$ 是唯一的，$\mathrm{Aut}(G')$ 作用于 $\mathcal{P}$。

(i) ⇒ (ii). 设 (u_1, v_1)、(u_2, v_2) 是 G 中满足 $u_iv_i \in E(G)$ 的顶点有序对。我们将找到 G 的一个自同构 φ，使得 $\varphi(u_1) = u_2$ 且 $\varphi(v_1) = v_2$。为此，记 $x_i := (u_i, v_i)$。设 $P_i \in \mathcal{P}$ 是 $\mathcal{P}$ 中包含 x_i 的唯一划分类。根据假设， G' 是顶点传递的，因此存在 G' 的一个自同构 φ'，将 x_1 映到 x_2。注意，此时 φ 将 P_1 映到 P_2。我们滥用记号，定义 $\varphi := \gamma \circ \varphi' \circ \gamma^{-1}$，这里利用了 $\mathrm{Aut}(G')$ 作用于 $\mathcal{P}$。显然， φ 是一个双射 $V(G) \to V(G)$。此外，我们有

$$\begin{aligned} & xy \in E(G) \\ \Leftrightarrow\ & \text{there is a } \gamma^{-1}(x)\text{–}\gamma^{-1}(y) \text{ edge in } G' \\ \Leftrightarrow\ & \text{there is a } \varphi'(\gamma^{-1}(x))\text{–}\varphi'(\gamma^{-1}(y)) \text{ edge in } G' \\ \Leftrightarrow\ & \varphi(x)\varphi(y) \in E(G). \end{aligned}$$

因此， φ 是 G的一个自同构。此外，我们有

$$\varphi(u_1) = \gamma(\varphi'(\gamma^{-1}(u_1))) = \gamma(\varphi'(P_1)) = \gamma(P_2) = u_2.$$

类似地， $\varphi(v_1) = v_2$。

(ii) ⇒ (i)。不失一般性，我们假设 G' 具有观察 2.20 中所述的形式。设 $x_1, x_2 \in V(G')$是两个顶点。我们将找到 G' 的一个自同构 φ'，将 x_1 映射到 x_2。根据观察 2.20，我们写作 $x_i =: (u_i, v_i)$，因此 u_iv_i 是 G的一条边。由于 G 是弧传递的，存在 G 的一个自同构 φ，使得 $\varphi(u_1) = u_2$ 且 $\varphi(v_1) = v_2$。现在， φ 定义了 G'的一个自同构 φ'，它将每个顶点 $x = (u, v)$映射到顶点 $\varphi'(x) := (\varphi(u)\ \varphi(v))$。自同构 φ' 满足

$$\varphi'(x_1) = (\varphi(u_1), \varphi(v_1)) = (u_2, v_2) = x_2.$$ □

推论 2.22。 设 G 是一个 r-正则图，且满足 $r \geqslant 3$。设(A, B) 是 G的一个混合r-分离，使得(A, B) 仅由边构成，且(A, B) 是一个匹配，并且 $G[A] = K_r$。那么 G 不是弧传递的。此外， G 的 K_r-扩张不是顶点传递的。

证明。根据引理 2.21，只需证明 G 不是弧传递的。事实上，若 u 是 A中的一个顶点，则 $G[N(u)] = K_1 \sqcup K_{r-1}$，其中 $r - 1 \geqslant 2$。设 v_1为 $G[N(u)]$中的孤立顶点，并设 $v_2 \neq v_1$为 $N(u)$中的另一个顶点。那么，不存在将(u, v_1)映射到(u, v_2)的 G 的自同构。□

推论 2.23. 设 $r \geqslant 3$。 r-正则图 G 的 K_r-扩张不是弧传递的。特别地， r-正则图 G 的 K_r-扩张的 K_r-扩张不是顶点传递的。

证明。 由推论 2.22可得。 □

推论 2.24. 长度为 $\geqslant 6$ 的三角形块的环不是弧传递的。特别地，长度为 $\geqslant 6$ 的三角形块的环的 K_4-扩张不是顶点传递的。

证明。 设 G 是长度为 $\geqslant 6$ 的三角形块的环，并设 $\mathcal{O}$ 为相应的圈分解。注意，$\mathcal{O}$ 的每条自由边恰好包含于 G 的一个三角形中，而 G 的其余每条边恰好包含于两个三角形中。因此， G 不是边传递的。特别地，它不是弧传递的。由 引理 2.21 可知， K_4 对长度为 $\geqslant 6$ 的三角形块的环所作的扩张不是顶点传递的。 □

推论 2.25。 设 G 是一个弧传递、*4*-连通、*4*-正则且具有两个交叉的四面体分离的有限图。则 G 是立方体的线图，或由 $K_{2,\,2}$-包构成的长度为 $\geqslant 3$ 的圈。

证明。 这由 推论 2.17 以及下列观察可得。首先， K_4-包构成的长度为 $\geqslant 4$ 的圈不是 4-正则的。其次，在 K_4-包与 C_4-包之间交替且长度为 $\geqslant 8$ 的圈不是弧传递的，此由 推论 2.22 可得。最后，长度为 $\geqslant 6$ 的三角形块的环不是弧传递的，此由 推论 2.24 可得。 □

引理 2.26。 设 G 是一个顶点传递的本质 *5*-连通有限图。那么， G 要么是拟 *5*-连通的，要么存在 $V(G)$ 的一个划分 *P*，使得 *P* 的各个部分是 K_4的顶点集，并且 G 中端点属于 *P* 的不同部分的边在 G中构成一个完美匹配。

证明。如果 G 没有四面体分离，那么根据 [25, 引理 2.3]， G 是拟 5-连通的。因此，我们可以假设 G 具有一个四面体分离 (A, B)。由于 G 是本质 5-连通的，(A, B)的分离集由四条边组成，并且存在一侧，不妨记为 A，其在 G中诱导出一个 K_4 。令 $u \in A$，并注意到 $G[N(u)] = K_1 \sqcup K_3$；特别地， u 恰好包含于一个 K_4中。由顶点传递性， G中的每个顶点也具有同样性质。因此， G 的顶点集可以划分为若干 K_4的顶点集。此外， G 是 4-正则的，因为 u 在 G中的度为 4。于是，P 的不同部分之间的边在 G中构成一个完美匹配。□

引理 2.27。 设 G 是一个顶点传递的本质 *5*-连通有限图。那么 G 属于以下情形之一：

- 拟 *5*-连通；
- 一个在 K_4-袋和 C_4-袋之间交替的圈，长度为 $\ell \in \{4,6\}$；
- 一个弧传递 *4*-连通 *4*-正则图的 K_4-扩张。

证明。 假设 G 不是拟 5-连通的。由 引理 2.26可知，存在一个 $\mathcal{P}$ 对 $V(G)$的划分，其划分块为 K_4 的顶点集，且不同划分块之间的边 $\mathcal{P}$ 在 G中构成一个完美匹配。分以下情形讨论。

情形 1：P 的两个部分 $P_1 \neq P_2$ 满足：在 G 中至少有三条 P_1–P_2 边 e_1, e_2, e_3。令 $f_i \notin \{e_1, e_2, e_3\}$ 为与 P_i 中某个顶点关联的剩余边。由 G 的 4-连通性可知，$\{f_1, f_2\}$ 不是混合 2-分隔集。因此 $f_1 = f_2$，故 G 是一个长度为 4、在 K_4-包与 C_4-包之间交替的圈。

情形 2：P 的两个部分 $P_1 \neq P_2$ 满足： G 中恰有两条 P_1–P_2 边。令 e_1, e_2 为与 P_1 关联但不与 P_2 关联的两条边，并令 f_1, f_2 为与 P_2 关联但不与 P_1 关联的两条边。定义 $(A, B) := (P_1 \cup P_2, V(G) \setminus (P_1 \cup P_2))$。于是 $S(A, B) = \{e_1, e_2, f_1, f_2\}$，故 (A, B) 是一个四面体分离。根据假设，(A, B) 的一侧诱导出一个 K_4。由于 $|A| = 8$，必有 $G[B] = K_4$。因此 G 是一个长度为 6、在 K_4-包与 C_4-包之间交替的圈。

情形 3： 对于 $P_1 \neq P_2$ $\mathcal{P}$ 的任意两个部分， P_1–P_2 边在 G 中至多有一条。然后定义$H := G/\mathcal{P}$，这是一个 4-正则图。此外，注意到 G 是 K_4-扩张图 H。由此根据引理 2.21， H 是弧传递的。根据推论 2.2， H 是 4-连通的。□

推论 2.28。 设 G 是一个弧传递的本质 5-连通图。那么 G 是准 5-连通的。

证明。 由引理 2.27 以及以下观察可得。首先，根据 K_4-袋与 C_4-袋交替构成的长度为 $\ell \in \{4, 6\}$ 的圈不是弧传递的，见推论 2.22。其次，根据 K_4，图的扩张不是弧传递的，见推论 2.23。□

命题 2。 **29.** 一个 4-连通有限图 G 是顶点传递的，当且仅当 G 它

(i) 是拟 5-连通顶点传递图，(ii) 是 K_4拟 5-连通弧传递图的扩张，(iii) 是一个由 K_4-袋组成、长度为 $\geqslant 4$ (图 1.1)，(iv) 是一个在 K_4-袋与 C_4-袋之间交替、长度为 $\geqslant 4$ (图 1.2)，(v) 是一个由三角形袋组成、长度为 $\geqslant 6$ (图 1.4)，

或者 G 是下列图之一，或其 K_4-扩张：

(vi) 是一个由$K_{2,2}$-袋组成、长度为 $\geqslant 3$ (图 1.6)，

(vii) 是立方体的线图（图1.7）。

证明。 令 G 为一个 4-连通有限图。

($\Rightarrow$)。假设 G 是顶点传递的。如果 G 有两个相交的四面体分离，则由推论 2.17即可得证。否则， G 的每个四面体分离都完全嵌套。由 G，根据推论 2.6， G本质 5-连通。由引理 2.27， G 要么是拟 5-连通图，要么是一个在 K_4-袋与 C_4-袋之间交替的圈，其长度为 $\ell \in \{4,6\}$，要么是 K_4-扩张图，其中原图是弧传递的 4-连通 4-正则图。前两种情形即可得证。因此，假设 G 是 K_4-扩张图，其中原图是弧传递的 4-连通 4-正则图 H。特别地， H 是顶点传递的。

若 H 有两个相交的四面体分离，则应用 推论 2.25 可得， H 是立方体的线图，或者 H 是由 $K_{2,t}$- 袋组成的圈，其长度为 $\geqslant 3$。至此，我们就完成了。否则， H 的每个四面体分离都是完全嵌套的。根据 推论 2.6， H 是本质 5-连通的。根据推论 2.28， H 是拟 5-连通的。因此， G 是一个 K_4-扩张图，其母图是弧传递的拟 5-连通图，至此证明完成。

(⇐)。显然，若 G 是 (i)、(iii)、(iv)、(v) 中的一个图，则 G 是顶点传递的。若 (ii)G 是弧传递拟 5-连通图的 K_4-扩张图，则根据引理 2.21， G 是顶点传递的。(vi) 由K_2个 2-袋组成的圈和 (vii) 立方体的线图都是弧传递的。若 G 是 (vi) 或 (vii) 的 K_4-扩张图，则根据引理 2.21， G 是顶点传递的。□

3. 分析 3-正则准4-连通性

该图的线图 $L = L(G)$ 定义为图 G 其顶点集为 $V(L)\colon = E(G)$ ，其中 L 中的两个顶点相邻，当且仅当它们在 G 中对应的边共享一个端点。

图 G 是内部*4*-连通的，当且仅当它是3-连通的，且每个3-分离都有一侧诱导出一个爪图。注意，内部4-连通图都是准4-连通的。

关键引理 3.1。设 G 是一个*3*-正则准*4*-连通图。那么，要么 G 是内部*4*-连通图且其围长为 $\geqslant 4$，要么 $G = K_3 \square K_2$。

证明。假设 G 不是内部4-连通的。只需证明，要么 G 是由长度为3的 C_4-袋构成的圈，要么 G 的围长为 $\geqslant 4$。注意， G 有 $\geqslant 5$ 个顶点，因为 $G \neq K_4$。在 G 中有一个度为3的顶点 v ，它有两个相邻的邻点 a 和 b。令 c 为 v的第三个邻点。

首先，我们证明 $ac, bc \notin E(G)$。假设 $ac \in E(G)$。那么，数对 $(\{v, a, b, c\}\ V(G) \setminus \{v, a\})$ 是一个分离集为 $\{b, c\}$ 的 2-分离，因为 $|V(G)| \geqslant 5$，这与 G 是 3-连通的矛盾。

因此，$(A, B) := (\{v, a, b\}\ V(G) \setminus \{v, a, b\})$ 是一个 3-边割。由于 G 是 3-连通的，且集合 $N(\{a, b\})$ 将 $\{a, b\}$ 与 c 分离，因此必有 $|N(\{a, b\})| \geqslant 3$。特别地， $S(A, B)$ 中任意两条边都没有共同的端点。我们定义 a'、b' 和 v'，使得 $S(A, B) = \{aa', bb', vv'\}$。注意， $N(\{a, b\}) = \{a', b', v\}$ 将 $\{a, b\}$ 与 $V(G) \setminus \{v, a, b, a', b'\}$ 分离。由 G 的拟 4-连通性可知， $V(G) = \{v, a, b, v', a', b'\}$。又由 G 的 3-正则性可知， $v'a'b'$ 是一个三角形。因此， $G = K_3 \square K_2$。□

Re称 $E(v)$ 表示图 G 中与顶点 v 关联的所有边的集合 .

引理 3.2. 设 G 是一个连通图，并设 $L = L(G)$ 是 G 的线图。如果 (A, B) 是 G 中的边割，且 $E(G[A]) \neq \emptyset \neq E(G[B])$，则

$$(A', B') := (E(G[A]) \cup S(A, B)\ ,\ E(G[B]) \cup S(A, B))$$

是一个 g ***enuine*** L 的分离。如果 (A, B) 的阶为 k，则 (A', B') 的阶同样为 k l.

证明。由于 $E(G) = E(G[A]) \cup E(G[B]) \cup S(A, B)$，我们得到 $A' \cup B' = V(L)$ 与 $A' \cap B' = S(A, B)$。注意，对每个顶点 $v \in A$ ，我们有 $E(v) \subseteq A'$。类似地，对每个顶点 $v \in B$ ，我们有$E(v) \subseteq B'$。由此可知， L 中不存在 $(A' \setminus B')$–$(B' \setminus A')$ 边。由 $E(G[A]) \neq \emptyset \neq E(G[B])$ 可得 (A', B') 是真的。因此，(A', B') 是 L 的一个分离，且与 (A, B) 具有相同的阶。

□

引理 3.3。 设 G 是一个连通图， $L = L(G)$ 是 G 的线图。若 (A', B') 是 L 的真正分离，则

$$(A, B) := (\{v \in V(G) \mid E(v) \subseteq A'\}\ ,\ \{v \in V(G) \mid E(v) \subseteq B'\})$$

是 G 的混合分离，其中 $A \cap B = \{v \in V(G) \mid E(v) \subseteq A' \cap B'\}$。

证明。注意，对于所有 $v \in V(G)$，集合 $E(v) \subseteq V(L)$ 在 L 中诱导出一个团。因此，对于所有 $v \in V(G)$，$E(v) \subseteq A'$ 或 $E(v) \subseteq B'$。根据 (A, B) 的定义，可得 $A \cup B = V(G)$。由于 (A', B') 是真分离，因此存在顶点 $v_A, v_B \in V(G)$，使得 $E(v_A) \subseteq A' \not\supseteq E(v_B)$ 且 $E(v_B) \subseteq B' \not\supseteq E(v_A)$；也就是说，$v_A \in A \setminus B$ 且 $v_B \in B \setminus A$。因此，(A, B) 是一个混合分离。此外，顶点 v 包含在 $A \cap B$ 中，当且仅当 $E(v) \subseteq A' \cap B'$。□

引理 3.4. 设 G 是一个 *3*-正则内部*4*-连通图，且设 $L = L(G)$ 是 G 的线图。则以下断言均成立：

(i) L 是 *4*-正则图，且每个顶点 $v \in V(L)$ 恰好包含在 L 中的两个三角形 Δ_1 和 Δ_2 内。此外，$V(\Delta_1 \cap \Delta_2) = \{v\}$。(ii) L 是 *4*-连通的。(iii) 对每个三角形 $\Delta \subseteq L$，存在一个顶点 v 属于 G，使得 $E(v) = V(\Delta)$。(iv) 对每条边 $e \in E(L)$，L 中恰有一个包含 e 的三角形 $\Delta(e)$。

证明。 (i) 由线图的定义以及 G 的围长为 $\geqslant 4$ 可得。

(ii)。反设存在一个非平凡的($\leqslant 3$)-分离 (A', B') 将 L 分开。令

$$(A, B) := (\{v \in V(G) \mid E(v) \subseteq A'\}, \{v \in V(G) \mid E(v) \subseteq B'\}),$$

这是一个混合分离，其对象为 G，依据引理 3.3。

首先，假设 $A \cap B \neq \emptyset$。则 $A' \cap B'$ 诱导出一个 K_3 于 L中。根据(i)，每个顶点 v（属于 L）恰好包含在两个三角形中，且它们仅相交于 v。由此可得(A, B) 是一个1-分离，其对象为 G，矛盾。

因此，我们可以假设 (A, B) 是一个边割。设 $e = uv \in S(A, B)$，不妨设带有 $u \in A$ 与$v \in B$。则由 (A, B) 的定义，$E(u) \subseteq A'$ 且 $E(v) \subseteq B'$。设 Δ_u 与 Δ_v 分别为 L 中由 $E(u)$ 与 $E(v)$ 诱导的三角形。由 $V(\Delta_u) \subseteq A'$ 与 $V(\Delta_v) \subseteq B'$ 以及 $V(\Delta_u \cap \Delta_v) = \{e\}$（根据 (i)）可得 $e \in S(A', B')$。因此，$S(A, B) \subseteq S(A', B')$；特别地，$(A, B)$ 的阶为 $\leqslant 3$。由于 G 是内部4-连通的，(A, B) 是一个原子边割，且 $S(A, B) = S(A', B')$。此时 (A', B') 不是真的，矛盾。

(iii)。由 G 是 3-正则且内部4-连通可知，G 的围长为 $\geqslant 4$。若 Δ 是 L 中的一个三角形，且不存在顶点 v 属于 G 并满足 $V(\Delta) = E(v)$，那么 $V(\Delta)$ 就是 G中某个三角形的边集，这与 G 的围长为 $\geqslant 4$矛盾。

(iv). 每条边 $e_1e_2 \in E(L)$ 都包含在至少一个三角形中：考虑由 e_1 和 e_2 共享的端点 $v \in G$，则 $E(v)$ 在 L 中诱导出一个包含边 e_1e_2 的三角形。反设存在一条边 $e_1e_2 \in E(L)$，它包含在 L 的至少两个三角形 Δ_1 和 Δ_2 中。根据 (iii)，存在两个顶点 $v_1, v_2 \in V(G)$，使得对于 $i \in \{1, 2\}$，有 $E(v_i) = V(\Delta_i)$。于是 $e_1, e_2 \in E(v_1) \cap E(v_2)$，这与 G 是简单图矛盾。□

引理 3.5. 设 G 是一个有限的、*3*-正则、内部*4*-连通且顶点传递的图，并设 $L = L(G)$ 是其线图。设 (A', B') 是 L 的一个混合 *4*-分离，其中 $|A' \setminus B'| \geqslant 2$ 和

$|B' \smallsetminus A'| \geqslant 2$。那么 $S(A', B') \subseteq V(L)$。特别地，L 的所有四面体分离都是真*4*-分离。

证明。首先，注意我们可以假设 $G \neq K_4$。根据引理 3.4，L 是 4-连通的。设 (A', B') 是 L 的一个混合 4-分离，其中 $|A' \smallsetminus B'| \geqslant 2$ 和 $|B' \smallsetminus A'| \geqslant 2$。$(A', B')$ 的左右约简 (A'', B'') 根据 [25, 关键引理 5.10] 是一个四面体分离。此外，根据 [25, 观察 5.9],，它满足 $A'' \smallsetminus B'' \supseteq A' \smallsetminus B'$ 和 $B'' \smallsetminus A'' \supseteq B' \smallsetminus A'$，并且 $S(A', B')$ 中的每条边都属于 $S(A'', B'')$。因此，只需证明 $S(A'', B'') \subseteq V(L)$。

反设 $e_1 \in S(A'', B'')$ 是 L 中的一条边。根据引理 3.4 (iv)，L 中存在唯一一个包含 e_1 的三角形 Δ_1。设 v 是 Δ_1 中除 e_1 的端点之外的第三个顶点。由于 Δ_1 是一个三角形，且其中的边 e_1 包含在 $S(A'', B'')$ 中，因此 v 也包含在分离集 $S(A'', B'')$ 中。根据引理 3.4 (i)，L 中存在一个三角形 $\Delta_2 \neq \Delta_1$，使得 Δ_1 和 Δ_2 恰好交于顶点 v。设 Δ_2 中的边 e_2 的端点均不同于 v。由于 L 是 4-正则的，$v \in S(A'', B'')$ 的度条件给出 $e_2 \in S(A'', B'')$。因此，我们知道 $S(A'', B'')$ 的三个元素：它们是 e_1、v 和 e_2。$S(A'', B'')$ 的第四个元素 u 必定是一个顶点；否则，我们可以像对 e 所做的那样进行论证，找到第三个三角形，为 $S(A'', B'')$ 同时贡献一条边和一个顶点，这与 Δ_1 和 Δ_2 已经占用了与 v 相 incident 的全部四条边矛盾。根据引理 3.4 (i)，L 中存在两个三角形 Δ、Δ'，它们恰好交于顶点 u。由 L 的 4-正则性以及 $u \in S(A', B')$ 的度条件可知，$\Delta - u \subseteq G[A' \smallsetminus B']$ 和 $\Delta' - u \subseteq G[B' \smallsetminus A']$，不妨如此设定。

现在考虑引理 3.3 中由 (A'', B'') 诱导的 G 的混合分离 (A, B)。(A, B) 的分离集由两个顶点 x_1，x_2（分别对应三角形 Δ_1, Δ_2）以及一条边 f（对应顶点 u，根据引理 3.4 (iii)）组成。特别地，(A, B) 是 G 的混合 3-分离。另请注意，$x_1x_2 \in E(G)$，因为三角形 Δ_1,Δ_2 共用顶点 u。

由于 $G \neq K_4$，$(A,\ B)$ 有一个真侧（不妨设为 $B \smallsetminus A$）至少包含两个顶点。设 x_3 是 $B \smallsetminus A$ 中 f 的端点。注意，$(A \cup f,\ B)$ 是一个真正的 3-分离，其分离集为 $\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$。由于 G 是内部4-连通的，因此可得 $x_1x_2 \notin E(G)$，这就产生了矛盾。

□

设 G 是一个图。的四割是 G 的一个满足匹配条件的 4-边割 G。如果 G 的一个四割完全嵌套于 G的每个四割中，则称该四割是完全嵌套的。

观察 3.6。若 G 是一个 *2*-连通图，且(A, B) 是 G 的一个非原子边割，则$E(G[A]) \neq \emptyset \neq E(G[B])$。
□

引理 *3.7*。设 G 是一个有限的、*3*-正则的、内部*4*-连通的顶点传递图，并设$L = L(G)$ 为其线图。映射 $(A, B) \mapsto (A', B')$ 将 G的非原子边割 (A, B) 映射为 L 的真正分离 (A', B')，如引理 *3.2* 的陈述所述。则该映射限制后给出一个双射，将 G 的四割集合映射到 L的四面体分离集合。

证明。首先注意到 $E(G[A]) \neq \emptyset \neq E(G[B])$ 对于 G 的每个非原子边割 (A, B)，由观察 3.6 可知。因此，引理 3.2 的前提均已满足。由于 G没有孤立顶点，映射 $(A, B) \mapsto (A', B')$ 是单射。

我们断言，每个四割 (A, B) 都映射为一个四面体分离 (A', B')。由引理 3.2可知，(A', B')是 L 的一个4-分离。因此，只需检查(A', B')的分离集中的顶点是否满足度条件。为此，任取 $S(A', B')$ 中的一个顶点 v。由引理 3.4 (i)，顶点 v 恰好属于两个三角形Δ_1, Δ_2，且这两个三角形恰好交于顶点 v。每个三角形 $\Delta_i \subseteq L$ 对应于将 v 视为 G的一条边时的一个端点 x_i 。由于(A, B)是一个四割，我们有 $x_1 \in A \setminus B$ 和 $x_2 \in B \setminus A$，例如。每个 Δ_i在 G 中确定一个以 x_i为中心的3-星，而 $S(A, B)$ 中的边构成一个匹配，其中每个3-星已包含 v （将其视为 G的一条边）。因此， v 是Δ_1 中唯一包含在 $S(A', B')$中的顶点 $\Delta_1 \subseteq L[A']$ 。所以 v 在 $L[A' \setminus B']$中有 $\geqslant 2$ 个邻点。同理， v 在 $L[B' \setminus A']$ 中有 $\geqslant 2$ 个邻点。因此，(A', B')是 L的一个四面体分离。

为了完成证明，还需证明 L 的每个四面体分离都等于某个四割(A, B)。为此，取 L的任意一个四面体分离(C, D)。由引理 3.5，(C, D)是真4-分离。令(A, B)为引理 3.3 中将其应用于(C, D)时所定义的 G 中的混合分离。接下来我们断言，(A, B)是一个四割，且$(A', B') = (C, D)$。根据度条件和引理 3.4 (i)，对于每个 $v \in S(C, D)$，存在两个三角形 $\Delta_1(v)$ $\Delta_2(v)$，使得$\Delta_1(v) \setminus \{v\} \subseteq C \setminus D$ 且 $\Delta_2(v) \setminus \{v\} \subseteq D \setminus C$。这意味着，对于两个不同的 $v, w \in S(C, D)$，当 $i \in \{1, 2\}$时，有 $\Delta_i(v) \neq \Delta_i(w)$。结合引理 3.4 可得，$(A, B)$是一个四割。此外，若 $v \in C \setminus D$，则 $v \in E(G[A])$，从而可得 $v \in A' \setminus B'$。类似地， $v \in D \setminus C$ 意味着$v \in B' \setminus A'$。另一方面，若 $v \in C \cap D$，则 $v \in S(A, B)$，从而可得 $v \in A' \cap B'$。因此，$(A', B') = (C, D)$。□

引理 *3.8.* 设 G 是一个有限的、*3*-正则的、内部*4*-连通的顶点传递图，并设 $L = L(G)$ 为其线图。设 $(A, B) \mapsto (A', B')$ 是从 G 的四面体割集 (A, B) 到 L 的四面体分离集 (A', B') 的双射。则 $(A, B) \leqslant (C, D)$ 当且仅当 $(A', B') \leqslant (C', D')$。

证明。 若 $(A, B) \leqslant (C, D)$，则 $A \subseteq C$。因此， $E(G[A]) \subseteq E(G[C])$，且 $S(A, B) \subseteq E(G[C]) \cup S(C, D)$。由此可得 $A' \subseteq C'$。类似地， $B' \supseteq D'$。

另一方面，假设 $(A', B') \leqslant (C', D')$。令 v为 A中的一个顶点。回顾一下， $E(v)$ 表示与 v 在 G中的边。于是 $E(v) \subseteq A' \subseteq C'$。由 $E(v) \subseteq C'$ 可知 $v \in C$。因此 $A \subseteq C$，类似地， $B \supseteq D$。□

引理 3.9。 设 G 为一个有限*3*-正则内部*4*-连通顶点传递图，且 (A_1, A_2)是 G中的一个完全嵌套四边割。则 $G[A_1] = C_4$ 或 $G[A_2] = C_4$。

证明。 令 M 为 (A_1, A_2) 和 (A_2, A_1) 的 Aut(G)-轨道的并。令 (C, D) 在 M中是关于 $\leqslant$的极小者；也就是说，对于每个 $(C', D') \in M$，都有 $(C', D') \not< (C, D)$。

我们断言， C 中的每个顶点都与 $S(C, D)$中的一条边相关联。为得出矛盾，假设$v \in C$并非如此。设 $u \in C \setminus D$为 $S(C, D)$中四条边之一的一个端点，并设 $\varphi \in$ Aut(G)使得 $\varphi(u) = v$。则$(\varphi(C)$ $\varphi(D)) < (C, D)$或$(\varphi(D)$ $\varphi(C)) < (C, D)$，这与(C, D)的$\leqslant$-极小性相矛盾。

最后，由于 G 是内部4-连通的，每个顶点的度都是 $\geqslant 3$，因此 $G[C]$ 是一个 C_4。四割 (A_1, A_2) 具有与 (C, D) 相同的上述性质，因为 $(C, D) \in M$。□

引理 3.10。 设 G 是一个内部 *4*-连通图。那么， G 的每个（$\leqslant 3$）-边割都是一个原子 *3*-边割。

证明。 由于 G 是3-连通的，因此它不含($\leqslant 2$)-边割。假设 G 有一个3-边割$(A,\ B)$，其分离集为 S $(A,\ B) = \{e_1,\ e_2,\ e_3\}$。令 a_i 为 e_i 在 A中的端点，并令 b_i 为 e_i 在 B中的端点。

首先，假设$(A,\ B)$满足匹配条件。由于$\{a_1,\ a_2,\ b_3\}$ 是一个将 a_3 与$\{b_1,\ b_2\}$分隔开的3-分离集，而 G 是内部4-连通的，因此必有 $a_1a_2 \notin E(G)$。由于$\{b_1,\ a_2,\ a_3\}$ 是一个将 a_1 与$\{b_2,\ b_3\}$分隔开的3-分离集，而 G 是内部4-连通的，因此必有 $a_1a_2 \in E(G)$。这就产生了矛盾。

其次，假设 $(A,\ B)$ 不满足匹配条件。如果 $(A,\ B)$ 不是原子的，不失一般性，我们有 $a_1 = a_2 \neq a_3$ 和 $b_1 \neq b_3$。然而，$\{a_1,\ b_3\}$ 是一个将 a_3 与 b_1分隔开的 2-分离集。因此，$(A,\ B)$ 是原子的。□

引理 3.11。 设 G 是一个内部*4*-连通图。设 (A, B) 和 (C, D) 是 G 的两个交叉四割。那么它们彼此交叉，所有连接的大小均为 *2*，且中心为空。

证明。 回顾一下， $L(X,\ Y)$ 表示角 XY 的角分离集。注意，由于 $(A,\ B)$ 和 $(C,\ D)$ 是边割，它们的角分离集也都是边割。

首先假设中心非空。也就是说，存在一条对角边，从 AD-角连到 BC-角。根据 [5, 引理 1.3.4], ，要么 $|L(A, C)| \leqslant 3$ ，要么 $|L(B, D)| \leqslant 3$，不妨设是前者。根据引理 3.10， $L(A, C)$ 是一个原子 3-边割，这与 (A, B) 和 (C, D) 满足匹配条件相矛盾。

同样，我们证明每个连接的大小均为 2。否则，将存在一个阶为 $\leqslant 3$ 的角分离集，例如 $|L(A, C)| \leqslant 3$。根据 引理 3.10， $L(A,\ C)$ 是一个原子 3-边割，这与 $(A,\ B)$ 和 $(C,\ D)$ 满足匹配条件相矛盾。□

引理 3.12。 设 G 是一个 *3*-正则内部*4*-连通图，且 $L = L(G)$ 是其线图。设 (A', B') 和 (C', D') 是 L 的两个交叉四面体分离。那么它们交叉，且所有连接的大小均为 *2*，中心为空。

证明。 我们结合 引理 3.7和引理 3.11。 □

引理 3.13。 设 G 是一个顶点传递的 *3*-正则内部*4*-连通有限图，且 $L = L(G)$ 是其线图。设 (A', B') 和 (C', D') 是 L 的两个四面体分离，它们相交且所有连接的大小均为 *2*。设 $O = (O, G)$ 是由 (A', B') 和 (C', D')诱导出的 L 的 *Tutte* 袋。那么 O 的每个躯干都是 *3*-连通的，并且有 $\geqslant 5$ 个顶点。

证明。 我们可以假设采用 Tutte 袋结构 [25, 9。12] 对于 L，但用 $(A',\ B')$ 替代 $(A,\ B)$，并用 $(C',\ D')$ 替代 $(C,\ D)$。

假设存在一个躯干 H_s 属于$\mathcal{O}$ ，且它是一个三角形或 4-圈。设 H_s 源自$A'C'$-Tutte 路径。由于$(A',\ B')$ 和$(C',\ D')$ 根据引理 3.5是真分离，因此没有任何连接包含边。由此可知，满足顶点连接移动引理 [25, 9的所有条件44] 都已满足。根据顶点连接移动引理 [25, 9.44 (i)]，我们得到 L 的一个四面体分离，其分离集中至少包含一条边。这与引理 3.5矛盾。

因此，每个躯干 H_s 都属于$\mathcal{O}$ 且是 3-连通的。反设存在一个躯干 H_s属于$\mathcal{O}$，它有 $\leqslant 4$ 个顶点。那么 $H_s = K_4$。根据引理 3.4 (iv)，每条边 $e \in E(G_s)$ 都恰好包含在一个三角形中。如果 s 的某个粘合集诱导出一条边 e，那么 e 就包含在两个三角形中。否则， G_s 中的边都不包含在任何三角形中。这就产生了矛盾。□

设 G 是一个图。的圈划分是一个二元组$\mathcal{O} = (O,(V_t)_{t\in V(O)})$，由一个圈 O和若干顶点集 V_t 组成，并满足

(i) $\{ V_t \mid t \in V(O) \}$ 是 $V(G)$的一个划分；并且

(ii) 每条边 $e \in E(G)$要么其两个端点都属于唯一一个 V_t，要么存在一条边 $tt' \in E(O)$，使得 e 的两个端点分别属于 V_t 和 $V_{t'}$。

我们称这些集合 V_t 为O的袋。对于每个 $tt' \in E(O)$，我们称 $E_G(V_t, V_{t'})$ 为粘合集 tt'。

引理 3.14. 设 G 为一个3-正则内部4-连通顶点传递有限图。假设 G 有两个交叉四元割。则 G 容许一个圈划分 $O = (O,(V_t)_{t\in O})$，其中 $|O| \geqslant 4$使得以下各项均成立：

(i) O 的所有粘合集均为2-匹配；(ii) O 的每个袋导出一个 C_4 或一个 K_2；

(iii) 设 $t \in V(O)$，并设 t_1、t_2 为其在 O上的邻点。设 U_i 为 V_t中 tt_i 的粘合集所含各边的端点集。若 V_t 导出一个4-圈，则该4-圈在 U_1与 U_2之间交替。

证明。设 $L = L(G)$ 为 G 的线图。设 $(A, B) \mapsto (A', B')$ 为引理 3.7 中 G 的四割 (A, B) 与 L 的四面体分离 (A', B') 之间的双射。由引理 3.8，(A, B) 是 G 的全嵌套四边割，当且仅当 (A', B') 是 L 的全嵌套四分离。

设 (A, B) 和 (C, D) 是 G 中两个交叉四割。由引理 3.8 和引理 3.12，四面体分离 (A', B') 和 (C', D') 相交，连接的大小为 2，且中心为空。令 $O' = (O', (G'_t)_{t\in V(O')})$ 为由 (A', B') 和 (C', D') 诱导的 L 的 Tutte 袋。我们将 O' 中 $t \in V(O')$ 的躯干记为 H'_t。由引理 3.13，O' 的每个躯干都是由 $\geqslant 5$ 个顶点构成的 3-连通图。

回顾一下，$E(v)$ 表示 G 中与顶点 v 关联的边集。我们定义 $O = (O, (V_t)_{t\in V(O)})$，其中 $O := O'$ 且 $V_t := \{v \in V(G) \mid E(v) \subseteq V_t\}$。我们证明 O 是 G 的一个圈划分。首先注意，对每个 $v \in V(G)$，集合 $E(v)$ 在图 L 中诱导出一个三角形，而该三角形又包含于 O' 的唯一一个躯干 H'_t 中。因此，$\{ V_t \mid t \in V(O) \}$ 是 $V(G)$ 的一个划分。其次，设 e 是 G 中的一条边。那么 e 是 L 中的一个顶点，包含在 L 中的两个三角形 $\Delta_1(e)$ 和 $\Delta_2(e)$ 内。若 $\Delta_1(e)$ 和 $\Delta_2(e)$ 包含于 O' 的同一个躯干中，则 e 的两个端点都包含于 O 的同一个袋中。否则，由于 O' 的每个躯干都是 3-连通的，根据引理 9.4], , O' 的粘合集两两不相交，因此 $\Delta_1(e)$ 和 $\Delta_2(e)$ 分别包含于 O' 的两个躯干中，其对应节点 $t_1, t_2 \in V(O')$ 在 O' 上相邻。于是，e 的端点包含于 V_{t_1} 和 V_{t_2} 中，其中 $t_1t_2 \in E(O)$。这说明 O 是 G 的一个圈划分。

还需证明以下条件(i)–(iii) 对于圈划分$\mathcal{O}$ 成立 G。

(i)。令 $tt' \in E$（O）。我们证明，tt' 的粘合集是一个 2-匹配。首先注意到，tt' 在 $\mathcal{O}$ 中的粘合集等于 tt' 在 $\mathcal{O}'$中的粘合集。由于后者由两个

L的顶点组成，前者由 G的两条边组成。由于$\mathcal{O}'$ 的每个躯干都是 3-连通的，且 L 是 4-正则的，因此$\mathcal{O}'$ 中 tt' 的粘合集是独立的。因此， tt'在$\mathcal{O}$ 中的粘合集是一个匹配。

(ii). 我们证明以下加强结论：如果 O′ 的躯干 H'_t 是好的，那么 V_t 在 G 中诱导出一个 C_4; 否则， V_t 在 G 中诱导出一个 K_2 。首先，假设 H'_t 是好的。那么根据 Tutte 袋结构 [25, 9 中定义的 [25, Key Lemma 9.41], $(U_t, W_t) = (U'_t, W't)$, 12] 是一个全嵌套四面体分离。由引理 3.3 和引理 3.8，$(V_t, V(G) \setminus V_t)$ 是一个全嵌套四边割。因此，根据引理 3.9， V_t 诱导出一个 C_4 。

现在假设 H'_t 是坏的。那么 $V(H'_t)$ 恰好由五个顶点组成。令 v 为 H'_t 内部的顶点。由 L 的 4- 正则性可知，顶点 v 与 $H'_t - v$ 中的每个顶点都相邻。由于 $\mathcal{O}'$ 的每个躯干都是 3- 连通的， H'_t 的粘合集中的每个顶点 u 在 G'_t 中的度都是 2。因此，躯干 H'_t 是一个 4-轮， G'_t 是两个恰好交于 v 的三角形的并，并且 V_t 在 G 中诱导出一个 K_2 。

(iii). 我们将 U_i 中的顶点记为 u_i 和 u'_i。反设 V_t 诱导出一个 4-圈 Z ，且该 4-圈不在 U_1 和 U_2 之间交替。正如 (ii) 的证明所示，四割 $(V_t, V(G) \setminus V_t)$ 是完全嵌套的。因此不失一般性 $Z = u_1u'_1u'_2u_2u_1$。然而，此时 $(V_{t_1} \cup U_1, V(G) \setminus (V_{t_1} \cup U_1))$ 是一个与 $(V_t, V(G) \setminus V_t)$ 交叉的四割，矛盾。□

关键引理 3.15。 设 G 是一个 *3*-正则内部*4*-连通顶点传递图。假设 G 有两个交叉四元割。那么，G 是一个由 C_4-包组成的长度为 $\geqslant 4$ 的圈，或者是一个在 $K_{2,\ 2}$-包与 C_4-胚之间交替的长度为 $\geqslant 8$ 的圈。

证明。 根据引理 3.14， G 存在一个圈划分$\mathcal{O} = (O, (V_t)_{t\in O})$，其中 $|O| \geqslant 4$ 满足引理 3.14 中的性质(i)–(iii)。令 $O =: t_1t_2 \dots t_\ell t_1$。对于 $t = t_i \in V(O)$，我们用$U_{t,\ 1}$ 表示粘合集中的边在 V_t内的端点集合，其中这些边对应于 tt_{i-1} ；用$U_{t,\ 2}$ 表示粘合集中的边在 V_t内的端点集合，其中这些边对应于 tt_{i+1} 。

我们证明，$\mathcal{O}$ 中的每个袋 V_t 要么诱导一个 K_2 ，要么$\mathcal{O}$ 中的每个袋 V_t 都诱导一个在$U_{t,\ 1}$ 与 $U_{t,\ 2}$之间交替的 C_4 。在前一种情况下，可知 G 是一个由 C_4个袋构成、长度为 $\geqslant 4$的圈；而在后一种情况下，可知 G 是一个在$K_{2,\ 2}$-袋与 C_4-躯干之间交替、长度为 $\geqslant 8$的圈。

反设存在一个由 K_2 诱导的 O 袋，并且存在一个由 C_4 诱导的 O 袋。于是，不失一般性，以下情形之一成立。

、 t_1、 t_2 和 t_3 对应的袋诱导出 K_2 ， 而 t_4 对应的袋诱导出 C_4。于是， V_{t_2} 中的每个顶点都包含在 C_4的两个 G 中，而 V_{t_4} 中的每个顶点恰好包含在 C_4 的一个 G中，这与顶点传递性矛盾。

和 t_2 与 t_3 对应的袋诱导出 K_2 ， 而 t_1 和 t_4 对应的袋诱导出 C_4。令 $u \in V_{t_2}$。于是， u恰好属于两个 5-环 Z， Z'。交集 $Z \cap Z'$ 是一条有三条边的路径，且 u是这条路径的内部顶点。与 u 在 V_{t_1} 中的邻点也位于 Z 和 Z'上，但它不是 $Z \cap Z'$的内部顶点，这与顶点传递性矛盾。

的包 t_2 诱导出一个 K_2 ， 而 t_1 和 t_3 诱导出一个 C_4。 于是 V_{t_2} 中的每个顶点恰好包含于 G的四个 5-环中，而 $V_{t_1} \cap N(V_{t_2})$ 中的每个顶点至多包含于三个 5-环中。这与顶点传递性矛盾。□

回忆一下，图 G 是 *2*-拟 *5*-连通 的定义是： G 是拟4-连通的，并且每个 4-分离 $(A,\ B)$ 满足 G 或 $|A \smallsetminus B| \leqslant 2$，或 $|B \smallsetminus A| \leqslant 2$。

引理3.16。 设 G 是一个*3*-正则准*4*-连通图。假设 G 没有四割。则G是*2*-拟 *5*-连通的。

证明。 若 G不是2-拟 5-连通的，则它有一个4-分离(A, B)，其中 $|A \smallsetminus B| \geqslant 3$与 $|B \smallsetminus A| \geqslant 3$。由于 G 是拟4-连通的，因此(A, B)是紧的。令 $S(A, B) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$。

首先我们证明：若 v_i在 $A \smallsetminus B$中仅有一个邻点 u_i，且 $v_j \neq v_i$在 $A \smallsetminus B$中仅有一个邻点u_j，则 $u_i \neq u_j$。事实上，否则$(A', B') := ((A \cup \{u_i\}) \smallsetminus \{v_i, v_j\}\ B \cup \{u_i\})$是 G 的一个3-分离，其中 $|A \smallsetminus B| \geqslant 2$ 与 $|B \smallsetminus A| \geqslant 2$，这与 G 是拟4-连通的相矛盾。由上述论证可知，(A, B)的左右约简满足匹配条件。

由于 G 是3-正则的，且(A, B)是紧的，每个顶点 $v_i \in S(A, B)$要么在 $A \smallsetminus B$中恰有一个邻点，要么 v_i 在 $B \smallsetminus A$ 中恰有一个邻点且在 $A \cap B$中没有邻点。因此，(A, B)的左右约简是一个4-边割，从而是 G的一个四割。□

例3.17. 环面上的环面六边形网格表明，引理3.16 中的2-拟 5-连通是最优的。

引理3.18. 设 G 是一个*3*-正则的内部*4*-连通顶点传递图，使得 G 的每个四割都是完全嵌套的。则要么 G 是*2*-拟 *5*-连通的，要么存在 $V(G)$ 的一个典范划分$P = \{A_i : i \in I\}$，使得

(i) 每个 A_i 导出一个 C_4;

(ii) G 中端点位于P的不同类中的边构成 G中的一个完美匹配。

证明。若 G 没有四割，则根据引理3.16， G 是2-拟 5-连通的。因此，我们可以假设G 至少有一个四割。令 $\sigma := \{(A_i, B_i) : i \in I\}$为 G 的所有满足其侧A_i 诱导一个4-圈的四割的集合。由于 G 的所有四割都完全嵌套， σ 是一个四面体割星。因此，集合 A_i 两两不相交。由于 G 是顶点传递的，我们有 $\bigcup_{i \in I} A_i = V(G)$。因此，$\mathrm{P} := \{A_i : i \in I\}$是 G 的一个典范划分，将其划分为诱导4-圈的顶点集。

令 M 表示 G 中端点属于$\mathcal{P}$不同类的所有边的集合。 G的每个顶点 v 恰好属于一个 A_i，而由于 G 是3-正则的，可知 v 恰好关联一条M中的边。因此， M 是一个完美匹配。□

关键引理 3.19。 设 G 是一个 *3*-正则内部*4*-连通顶点传递图。假设 G 中的每个四割都是完全嵌套的。那么 G 是以下情况之一：

- 一个在 $K_{2,\ 2}$-包与 C_4-胚之间交替的长度为 *6* 的圈；
- 图 C_4 的三个 -扩张之一，其中立方体的线图如图*1.7*所示；
- 一个长度为 $\geqslant 3$ 的 $K_{2,\ 2}$-包的圈的顶点传递 C_4-扩张；
- 一个拟 *5*-连通 *4*-正则弧传递图的 C_4-扩张；
- *2*-拟 *5*-连通。

证明。 假设 G 不是 2-拟 5-连通的。则 $V(G)$ 有一个典范划分 $\mathcal{P}$，将其划分为诱导 4-圈的顶点集，依据 引理3.18。固定 $U \in \mathcal{P}$，并令 $\{U_i : i \in I\}$ 为.....的集合

类 $U_i \in \mathcal{P}$ 中包含 U 的邻点的那些类。令 M 表示 G 中两端点位于 $\mathcal{P}$ 的不同类中的边的集合，从而 M 依 引理3.18 是一个完美匹配。令 $F \subseteq M$ 表示离开 U 的边的集合。

情形：所有四条边都在 F 终止于同一个 U_i。那么 $F = M$ 因此 $V(G) = U \cup U_i$。两者 U 和 U_i 都诱导出 4-圈，因此要么 $G = C_4 \square K_2$ 是一个由 C_4 个长度为 4 的袋组成的圈，要么 G 是救生带。然而，在这两种情况下，G 都有两个交叉四元割，因此两种情况都不会出现。

情形：恰有三条边在 F 终止于同一个 U_i。此情形不可能：那么，位于 U 中的顶点和位于 U_i 中的顶点都不与这三条边关联，二者构成 G的一个 2-分离集，这与 G 是内部4-连通的矛盾。

情形：存在一个 U_i，其中恰有两条来自 F 的边终止于此。于是，来自 M 的四条边离开 $U \cup U_i$。因此，$U \cup U_i$ 是 G的一个四割的一侧。由假设，该四割完全嵌套；根据引理 3.9，它有一侧诱导出一个 4-圈。这一侧只能是 $V(G) \setminus (U \cup U_i)$，因而必定是某个 $j \in I \setminus \{i\}$的一个 U_j。现在，U 和 U_i 各有恰好两条边连向 U_j。若 G 是一个圈，交替经过K_2、2-袋和长度为 6 的 C_4-胚，那么问题就解决了。否则，由 U诱导出的 4-圈O，例如，先经过 U中 U_i的两个邻点 u_i、u_i'，然后经过 U中 U_j的两个邻点u_j、u_j'。但这样一来，$(U, V(G-U))$和$(U_i \cup \{u_i, u_i'\}\ U_j \cup \{u_j, u_j'\})$就是 G中的两个交叉四元割，与我们的假设矛盾。

情形：$|I| = 4$ 且每条边恰有一个端点位于 F 中的每个 U_i。那么 $G/\mathcal{P}$ 是4-正则且4-连通的。此外，$G/\mathcal{P}$ 是弧传递的，因为$\mathcal{P}$ 是唯一的，并且 G 的每个顶点都与 F中的唯一一条边关联。由推论2.6和2.25可知，图 $G/\mathcal{P}$ 属于以下情形之一：

- 立方体的线图，
- 一个由$K_{2\text{个}2}$-袋构成的长度为 $\geqslant 3$的圈，或者
- 本质上5-连通。

首先假设 $G/\mathcal{P}$ 是立方体的线图，因此 G 是其某个 C_4-扩张。由于 G 是顶点传递的，可能的 C_4-扩张只有三种，恰好如图1.7所示。

最后假设 $G/\mathcal{P}$ 本质上是5-连通的。那么，根据 $G/\mathcal{P}$ 推论2.28可知，它是拟5-连通的。推因此 G 是一个拟5-连通、4-正则弧传递图的 C_4-扩张。□

命题 3.20。*3*-正则拟*4*-连通有限图 G 是顶点传递的，当且仅当G满足以下条件之一

(i) *2*-拟 *5*-连通且顶点传递，(ii) 拟 *5*-连通、*4*-正则、弧传递图的顶点传递 C_4-扩张，(iii) 由 C_4 个袋组成、长度为 $\geqslant 4$ 或 $K_3 \square K_2$ 的圈，(iv) 由 $K_{2,2}$-袋和 C_4-胚交替组成、长度为 $\geqslant 6$ 的圈，(v) 图*1.7*所示的立方体线图的三个 C_4-扩张之一，或(vi) 由长度为 $\geqslant 3$ 的 $K_{2,2}$- 袋圈构成的顶点传递 C_4- 扩张。

证明。 $(\Rightarrow)$。根据 关键引理 3.1，不妨设 G 是内部 4-连通的，且围长为 $\geqslant 4$。若 G 有两个交叉四元割，则由 关键引理 3.15可得结论。否则， G 的每个四割都完全嵌套。于是由 关键引理 3.19可得结论。

$(\Leftarrow)$ 是显而易见的。 □

定理 *1* 的证明定理 *1*。 我们结合命题 2.29 和命题 3.20。 □

4. 分析 3-正则弧传递性

引理 4.1。 设 $k \leqslant 5$ ，并设 G 是一个 C_k-扩张的 k-正则图。那么 G 不是边传递的。

证明。 设 H 是一个 k-正则图，且 G 是 H 的 C_k-扩张。设 $\mathcal{P}$ 是 $V(G)$ 的相应划分。那么，由某个 $P \in \mathcal{P}$ 导出的每条边都包含在一个 C_k 中，而任何不由任何 $P \in \mathcal{P}$ 导出的边，对于 $\ell \leqslant 5$ 都不包含在一个 C_ℓ 中。因此， G 不是边传递的。□

引理 4.2。 一个 *3*-正则有限图 G 是拟*4*-连通且弧传递的，当且仅当 G 是立方体，或者 G 是一个 *2*-拟 *5*-连通的弧传递图。

证明。 $(\Rightarrow)$ 。由于 G 是弧传递的且没有孤立顶点，因此它是顶点传递的（并且也是边传递的）。所以，我们可以应用 定理 1。由于 G 是 3-正则的，我们可以排除 定理 1 (i)–(x) 中的那些 $(\geqslant 4)$ -正则图。根据 引理 4.1， G 不能是一个 4-正则图的C_4-扩张。因此， G 是以下图之一（编号沿用 定理 1):

(ii) 一个 3-正则 2-准-5-连通弧传递图，或

(vii) 一个在 $K_{2,2}$-袋与 C_4-躯干之间交替的圈，其长度为 $\geqslant 6$,

(viii) 一个由 C_4-袋构成的圈，长度为 $\geqslant 4$ 或 $K_3 \square K_2$。

图 G 不可能是一个在 $K_{2,2}$-袋与 C_4-躯干之间交替、长度为 $\geqslant 6$ 的圈，因为它不是边传递的（有些边属于 4-圈，而另一些则不属于）。同样， G不可能是一个由 C_4-袋构成、长度为 $\geqslant 5$ 的圈（有些边属于两个 4-圈，而另一些则不属于）。此外， $G \neq K_3 \square K_2$ （有些边属于三角形，而另一些则不属于）。

因此， G 是一个由 C_4-袋构成、长度为 4 的圈（即立方体），或者 G 是一个 3-正则 2-拟 5-连通弧传递图。

$(\Leftarrow)$显然。 □

推论 *2* 的证明。 我们结合 定理 1 与 定理 1.2 以及引理 4 .2. □

5. 附录：分析 3-连通性

在简短的证明中，我们使用 [6, 5] 的术语。

命题 5.1。 [5,推论 2]。每个顶点传递的有限连通 G 要么

- *3*-连通，且其每个非平凡强三分离都是一个 *3*-边割，其中一侧诱导出一个三角形，
- 一个圈， K_2 或 K_1。

命题5.2。 每个顶点传递的有限连通图 G 要么是

- 内部 *4*-连通且顶点传递，
- 拟*4*-连通 *4*-正则弧传递图的 K_3-扩张，
- 一个圈、 $K_3\square K_2$、 K_2 或 K_1。

证明。 根据 命题 5.1，我们可以假设 G 是 3-连通的，并且其每个非平凡强三分离都是一个 3-边割，且其中一侧诱导出一个三角形。如果 G 没有非平凡强三分离，那么 G 根据 G .2 是内部4-连通的。 [5, 18]因此，我们可以假设 G 至少有一个非平凡强三分离，并且根据假设，它有一侧诱导出一个三角形。

令 $\{(A_i, B_i) : i \in I\} = \sigma$ 为 G 中所有带有 $G[A_i] = K_3$ 的非平凡强三分离的集合。由于每个 $S(A_i, B_i)$ 都是一个 3-边割，根据 [5, 1.3，三分离 (A_i, B_i) 完全嵌套。10], 因此σ 是一个三分离星。因此， A_i 两两不交，并且由于顶点传递性， G 的每个顶点都包含在某个 A_i 中，所以 $\mathcal{P} := \{A_i : i \in I\}$ 是 $V(G)$ 的一个划分。

由于每个 $S(A_i, B_i)$ 都是一个 3-匹配，$\mathcal{P}$ 的交叉边集合 M 是一个完美匹配。如果 M 中有两条边将某个 A_i 与某个 A_j 相连，那么 $A_i \cup A_j$ 中未与这两条边关联的两个顶点就构成 G 的一个 2-分离集，这与 3-连通性矛盾，除非 $G = K_3\square K_2$。因此，我们可以假设 M 中至多有一条边将任意一个 A_i 与任意一个 A_j相连，所以$\mathcal{P}$ $G/$是 3-正则的。

由于 G 是顶点传递的，且 G/P 是 K_3-扩张，因此由引理 2.21 可知 G/P 是弧传递的。特别地， G/P 是顶点传递的；又由于 G/P 是 3-正则的，我们可由命题 5.1 得出G/P 是 3-连通的。然而， G/P 没有非原子3-边割，因为这会导致 G 出现一个非平凡强三分离，该分离是一个 3-边割，但其两侧的大小为 $\geqslant 9$，这与我们的假设矛盾。因此，将命题 5.1 应用于 G/P，并结合 [5, 1.2.8], 可得 G/P 是拟4-连通的。□

定理 *1.2*的证明。 命题5.2 蕴含 定理 1.2。 □

致谢。 感谢阿格洛斯·乔治亚科普洛斯告知我们戈德西尔和罗伊尔的定理 2.1 。

参考文献

1. S. Albrechtsen 和 J. Davies，《猜想的粗网格定理的反例》，2025年，arXiv:2508.15342。2. S. Albrechtsen 和 M. Hamann，《粗哈林网格定理及其在拟传递局部有限图中的应用》，2025年。3.，《渐近半网格与全网格子式》，组合理论杂志 B 辑 **176** （2026年），440–485。4. J. Carmesin、R. W. Jacobs、P. Knappe 和 J. Kurkofka，《通过局部分离得到的典范图分解》，2025年，arXiv:2501.16170。5. J. Carmesin 和 J. Kurkofka，《*3*-连通图的典范分解》，2023年电气电子工程师学会第64届计算机科学基础年会（FOCS），2023年，第1887–1920页。6.，《*3*-连通图的典范分解》，组合学进展 **7** （2025年），73页。7. J. Davies，《弦图与平面图拟等距》，2025年，arXiv:2510.19602。8. R. Diestel，《图论》，第6版，施普林格，2024年。9. R. Diestel、R.W. Jacobs、P. Knappe 和 J. Kurkofka，《通过覆盖得到的典范图分解》，即将在《美国数学会汇刊》（2026年）发表。

10. C. Droms、B. Servatius 和 H. Servatius，《局部有限二连通图的结构》，《组合学电子期刊》**2**（1995年），第R17篇。11. L. Esperet 和 U. Giocanti，《超越平面性的拟传递图粗几何》，《组合学电子期刊》**31**（2024年），P2.41。12. L. Esperet、U. Giocanti 和 C. Legrand-Duchesne，《避免某个子式的拟传递图的结构及其在多米诺问题中的应用》，《组合理论杂志 B 辑》**169**（2024年），561–613。13. A. Georgakopoulos，《平面三次凯莱图》，《美国数学会回忆录》**250**（2011年）。14.，《关于用凯莱图覆盖图》，《欧洲组合学杂志》**64**（2017年），57–65。15. A. Georgakopoulos 和 M. Hamann，《平面凯莱图可有效枚举 *I*：一致平面图》，《Combinatorica》**39**（2019年），993–1019。16.，《平面凯莱图可有效枚举 *II*》，《欧洲组合学杂志》**110**（2023年），103668。17. A. ~~Georgak~~opoulos 和 A. Wendland，《顶点传递图的表示》，《代数组合学杂志》**55**（2022年），795–826。18. U. Giocanti，《关于局部有限平面拟传递图结构的札记》，《组合学电子期刊》**32**（2025年）。19. C. Godsil 和 G. Royle，《代数图论》，施普林格，2001年。20. M. Grohe，《拟*4*-连通分量》，第43届自动机、语言与编程国际研讨会（~~ICALP~~ 2016），《莱布尼茨国际信息学会议录》（Lipics），第55卷，2016年，第8:1–8:13页。21. M. Hamann，《传递图的可达性》，《Combinatorica》**38**（2018年），847–859。22.，《平面传递图》，《组合学电子期刊》**25**（2018年），P4.8。23.，《拟传递 K_∞无子式图》，《欧洲组合学杂志》**124**（2025年），104056。24. M. Hamann、F. Lehner、B. Miraftab 和 T. Rühmann，《拟传递图的 *Stallings* 型定理》，《组合理论杂志 B 辑》**157**（2022年），40–69。25. J. Kurkofka 和 T. Planken，《*3*-连通图和*4*-连通图的 *Tutte* 型典范分解》，2026年ACM-SIAM离散算法年会论文集（SODA）（2026年），2942–3021。